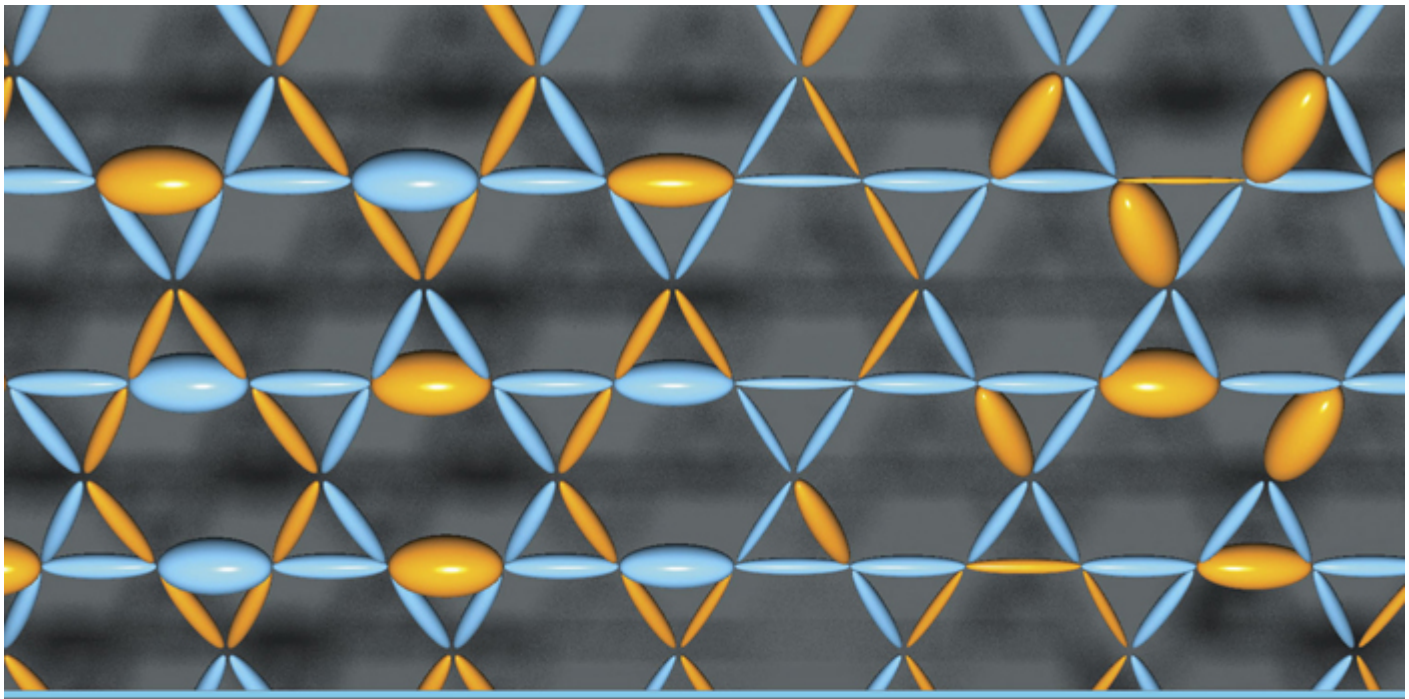
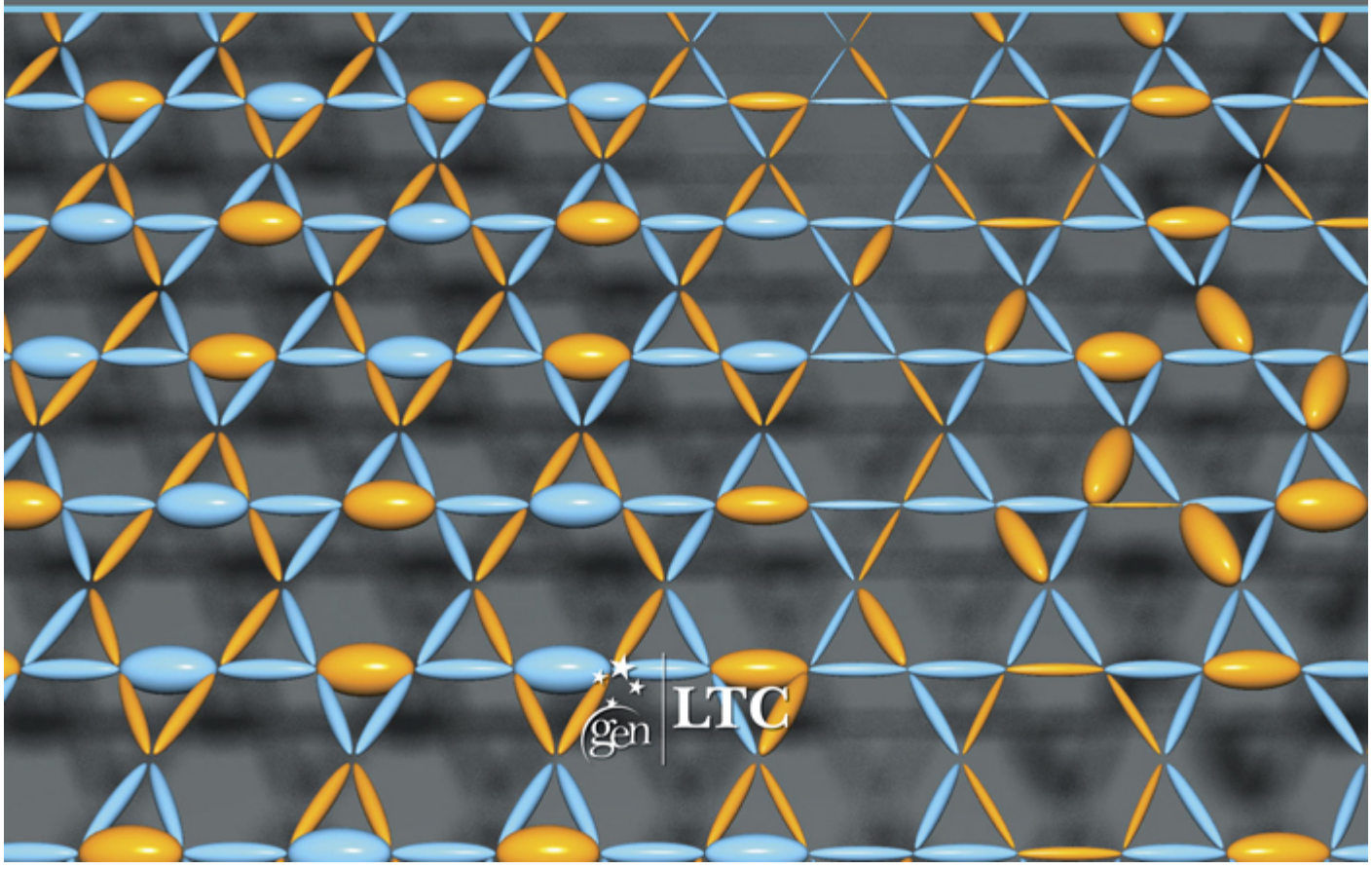


FÍSICA MODERNA

Paul A. Tipler / Ralph A. Llewellyn

Sexta Edição



gen | LTC

FÍSICA MODERNA

abdr
Respeite o direito autoral

O GEN | Grupo Editorial Nacional – maior plataforma editorial brasileira no segmento científico, técnico e profissional – publica conteúdos nas áreas de ciências exatas, humanas, jurídicas, da saúde e sociais aplicadas, além de prover serviços direcionados à educação continuada e à preparação para concursos.

As editoras que integram o GEN, das mais respeitadas no mercado editorial, construíram catálogos inigualáveis, com obras decisivas para a formação acadêmica e o aperfeiçoamento de várias gerações de profissionais e estudantes, tendo se tornado sinônimo de qualidade e seriedade.

A missão do GEN e dos núcleos de conteúdo que o compõem é prover a melhor informação científica e distribuí-la de maneira flexível e conveniente, a preços justos, gerando benefícios e servindo a autores, docentes, livreiros, funcionários, colaboradores e acionistas.

Nosso comportamento ético incondicional e nossa responsabilidade social e ambiental são reforçados pela natureza educacional de nossa atividade e dão sustentabilidade ao crescimento contínuo e à rentabilidade do grupo.

FÍSICA MODERNA

SEXTA EDIÇÃO

Paul A. Tipler
Ex-Professor da Oakland University

Ralph A. Llewellyn
University of Central Florida

Tradução e Revisão Técnica

Ronaldo Sérgio de Biasi, Ph.D.
Professor Emérito do Instituto Militar de Engenharia – IME

gen | LTC

Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado neste livro, dispondo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de algum deles tenha sido omitida.

Não é responsabilidade da editora nem dos autores a ocorrência de eventuais perdas ou danos a pessoas ou bens que tenham origem no uso desta publicação.

Apesar dos melhores esforços dos autores, do tradutor, do editor e dos revisores, é inevitável que surjam erros no texto. Assim, são bem-vindas as comunicações de usuários sobre correções ou sugestões referentes ao conteúdo ou ao nível pedagógico que auxiliem o aprimoramento de edições futuras. Os comentários dos leitores podem ser encaminhados à **LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora** pelo e-mail ltc@grupogen.com.br.

MODERN PHYSICS, SIXTH EDITION
First published in the United States by
W. H. Freeman and Company, New York
Copyright © 2012, 2008, 2003, 2000 by W. H. Freeman and Company

All Rights Reserved.

Publicado originalmente nos Estados Unidos por
W. H. Freeman and Company, New York
Copyright © 2012, 2008, 2003, 2000 by W. H. Freeman and Company

Todos os Direitos Reservados.

Direitos exclusivos para a língua portuguesa
Copyright © 2014 by
LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.
Uma editora integrante do GEN | Grupo Editorial Nacional

Reservados todos os direitos. É proibida a duplicação ou reprodução deste volume, no todo ou em parte, sob quaisquer formas ou por quaisquer meios (eletrônico, mecânico, gravação, fotocópia, distribuição na internet ou outros), sem permissão expressa da editora.

Travessa do Ouvidor, 11
Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-040
Tels.: 21-3543-0770 / 11-5080-0770
Fax: 21-3543-0896
ltc@grupogen.com.br
www.grupogen.com.br

Descrição da capa: Duas fases possíveis de uma rede kagome antiferromagnética: um cristal com ligações covalentes do tipo diamante (lado inferior esquerdo) e um cristal com ligações covalentes do tipo favo de mel (lado inferior direito). Os desvios da força das ligações atômicas em relação ao valor médio estão indicados pela largura e pela cor das ligações (laranja, mais forte; azul, mais fraca).

Imagem de capa: Steven R. White, University of California, Irvine

Produção digital: Geethik

CIP-BRASIL. CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO
SINDICATO NACIONAL DOS EDITORES DE LIVROS, RJ

T499f
6. ed.

Tipler, Paul A., 1933-
Física moderna / Paul A. Tipler e Ralph A. Llewellyn; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. - 6. ed. - [Reimpr.]- Rio de Janeiro : LTC, 2017. il.; 28 cm.

Tradução de: Modern physics
Apêndices
Inclui bibliografia e índice
ISBN 978-85-216-2688-6

1. Física. I. Llewellyn, Ralph A. II. Título.

14-12139

CDD: 530
CDU: 53

SUMÁRIO

PARTE 1 Relatividade e Mecânica Quântica: Os Fundamentos da Física Moderna

CAPÍTULO 1 **Relatividade I**

1-1 Provas Experimentais da Relatividade

O Experimento de Michelson-Morley

1-2 Os Postulados de Einstein

1-3 A Transformação de Lorentz

Calibração dos Eixos do Espaço-Tempo

1-4 A Dilatação dos Tempos e Contração das Distâncias

1-5 O Efeito Doppler

O Efeito Doppler Transversal

1-6 O Paradoxo dos Gêmeos e Outras Surpresas

O Caso dos Gêmeos Identicamente Acelerados

Velocidades Superluminares

CAPÍTULO 2 **Relatividade II**

2-1 Momento Relativístico

2-2 Energia Relativística

Outra Surpresa

2-3 Conversões Massa/Energia e Energia de Ligação

2-4 Massa Invariante

2-5 Relatividade Geral

Deflexão da Luz em um Campo Gravitacional

Desvio Gravitacional para o Vermelho

O Periélio da Órbita de Mercúrio

Retardo da Luz em um Campo Gravitacional

CAPÍTULO 3 **Quantização da Carga, Luz e Energia**

3-1 Quantização da Carga Elétrica

3-2 Radiação de Corpo Negro

3-3 Efeito Fotelétrico

3-4 Raios X e o Efeito Compton

Demonstração da Equação de Compton

CAPÍTULO 4 **O Átomo Nuclear**

4-1 Espectros Atômicos

4-2 O Modelo Nuclear de Rutherford
A Previsão de Rutherford e os Resultados de Geiger e Marsden
4-3 O Modelo de Bohr para o Átomo de Hidrogênio
Átomos Gigantes
4-4 Espectros de Raios X
4-5 O Experimento de Franck-Hertz
Crítica da Teoria de Bohr e da "Velha" Mecânica Quântica

CAPÍTULO 5 **Propriedades Ondulatórias das Partículas**
5-1 A Hipótese de de Broglie
5-2 Medida do Comprimento de Onda das Ondas de Matéria
5-3 Pacotes de Ondas
5-4 Interpretação Probabilística da Função de Onda
5-5 O Princípio de Indeterminação
O Microscópio de Raios Gama
5-6 Algumas Consequências do Princípio de Indeterminação
5-7 O Dualismo Onda-Partícula
O Experimento de Duas Fendas

CAPÍTULO 6 **A Equação de Schrödinger**
6-1 A Equação de Schrödinger em Uma Dimensão
6-2 O Poço Quadrado Infinito
6-3 O Poço Quadrado Finito
Solução Gráfica do Poço Quadrado Finito
6-4 Valores Esperados e Operadores
Transições entre Estados Quânticos
6-5 O Oscilador Harmônico Simples
O Artifício de Schrödinger
Paridade
6-6 Reflexão e Transmissão de Ondas
Decaimento Alfa
O Relógio Atômico de NH_3
O Diodo Túnel

CAPÍTULO 7 **Física Atômica**
7-1 A Equação de Schrödinger em Três Dimensões
7-2 Quantização do Momento Angular e da Energia do Átomo de Hidrogênio
7-3 As Funções de Onda do Átomo de Hidrogênio
7-4 O Spin do Elétron
O Experimento de Stern-Gerlach
7-5 Momento Angular Total e Interação Spin-Órbita
7-6 A Equação de Schrödinger para Duas (ou Mais) Partículas

7-7 Estados Fundamentais dos Átomos: A Tabela Periódica
7-8 Estados Excitados e Espectros dos Metais Alcalinos
Átomos com Mais de um Elétron Externo
O Efeito Zeeman
Luz Congelada

CAPÍTULO 8 **Física Estatística**
8-1 Estatística Clássica: Uma Revisão
Temperatura e Entropia
Demonstração do Teorema da Equipartição para um Caso Particular
8-2 Estatística Quântica
8-3 A Condensação de Bose-Einstein
Hélio Líquido
8-4 O Gás de Fótons: Uma Aplicação da Estatística de Bose-Einstein
8-5 Propriedades de um Gás de Férmions

PARTE 2 Aplicações da Mecânica Quântica e da Relatividade

CAPÍTULO 9 **Propriedades e Espectros das Moléculas**
9-1 A Ligação Iônica
9-2 A Ligação Covalente
Outras Ligações Covalentes
9-3 Outros Tipos de Ligação
9-4 Níveis de Energia e Espectros de Moléculas Diatômicas
9-5 Espalhamento, Absorção e Emissão Estimulada
9-6 Lasers e Masers

CAPÍTULO 10 **Física do Estado Sólido**
10-1 Estrutura dos Sólidos
10-2 Teoria Clássica da Condução de Eletricidade
10-3 Gás de Elétrons Livres nos Metais
10-4 Teoria Quântica da Condução de Eletricidade
Condução de Calor – O Modelo Quântico
10-5 Magnetismo em Sólidos
Spintrônica
10-6 Bandas de Energia em Sólidos
Poços Quânticos
Bandas de Energia em Sólidos – Uma Abordagem Alternativa
10-7 Semicondutores Dopados
Efeito Hall
10-8 Junções e Dispositivos Semicondutores

Como Funcionam os Transistores

10-9 Supercondutividade

Quantização do Fluxo Magnético

Junções de Josephson

CAPÍTULO 11 **Física Nuclear**

11-1 A Composição do Núcleo

11-2 Propriedades dos Núcleos no Estado Fundamental

O Modelo da Gota de Líquido e a Equação de Weizsäcker

11-3 Radioatividade

Sequências de Decaimentos

11-4 Decaimentos Alfa, Beta e Gama

Níveis de Energia do Decaimento Alfa

O Efeito Mössbauer

11-5 A Força Nuclear

Densidade de Probabilidade dos Mésons Virtuais

11-6 O Modelo de Camadas

A Busca de um Modelo de Camadas “Correto” para o Núcleo

11-7 Reações Nucleares

11-8 Fissão e Fusão

Energia Nuclear

Interações de Partículas com a Matéria

11-9 Aplicações

Efeitos Biológicos da Radiação Ionizante

CAPÍTULO 12 **Física de Partículas**

12-1 Conceitos Básicos

12-2 Interações Fundamentais e Partículas Mediadoras

Comentários Adicionais a Respeito da Intensidade das Interações

12-3 Leis de Conservação e Simetrias

Em que Circunstâncias uma Grandeza Física É Conservada?

Ressonâncias e Estados Excitados

12-4 O Modelo-padrão

De Onde Vem o Spin do Próton?

12-5 Para Além do Modelo-padrão

Oscilações e a Massa dos Neutrinos

Teoria das Cordas

CAPÍTULO 13 **Astrofísica e Cosmologia**

13-1 O Sol

 Existe Vida Fora da Terra?

13-2 As Estrelas

 A Esfera Celeste

13-3 A Evolução das Estrelas

13-4 Eventos Cataclísmicos

13-5 Os Estados Finais das Estrelas

13-6 Galáxias

13-7 Cosmologia e Gravitação

13-8 Cosmologia e a Evolução do Universo

 As Unidades “Naturais” de Planck

APÊNDICE A Tabela de Massas Atômicas

APÊNDICE B1 Integrais Úteis

APÊNDICE B2 Séries Binomial e Exponencial

APÊNDICE B3 Células Unitárias dos Cristais

APÊNDICE C Configurações Eletrônicas

APÊNDICE D Constantes Físicas Fundamentais

APÊNDICE E Fatores de Conversão

APÊNDICE F Ganhadores do Prêmio Nobel de Física

RESPOSTAS DE ALGUNS PROBLEMAS

[1]O símbolo  indica materiais suplementares disponíveis somente on-line.

[2]O símbolo  indica materiais de grande interesse para o estudante.

Material Suplementar

Este livro conta com os seguintes materiais suplementares:

- Ilustrações da obra em formato de apresentação (acesso restrito a docentes);
- Leituras Suplementares, arquivos em formato (.pdf) contendo material de apoio às seções do livro-texto (acesso livre);
- Revisão de Conceitos Clássicos, arquivos em formato (.pdf) contendo material complementar às seções do livro-texto (acesso livre).

O acesso ao material suplementar é gratuito, bastando que o leitor se cadastre em nosso site *site* (www.grupogen.com.br), faça seu *login* e clique em GEN-IO, no menu superior do lado direito. É rápido e fácil.

Caso haja alguma mudança no sistema ou dificuldade de acesso, entre em contato conosco (sac@grupogen.com.br).

GEN | Informação Online

GEN-IO (GEN | Informação Online) é o repositório de materiais suplementares e de serviços relacionados com livros publicados pelo GEN | Grupo Editorial Nacional, maior conglomerado brasileiro de editoras do ramo científico-técnico-profissional, composto por Guanabara Koogan, Santos, Roca, AC Farmacêutica, Forense, Método, Atlas, LTC, E.P.U. e Forense Universitária.

Os materiais suplementares ficam disponíveis para acesso durante a vigência das edições atuais dos livros a que eles correspondem.

PREFÁCIO

Ao preparar esta nova edição de *Física Moderna*, mais uma vez incorporamos muitas sugestões construtivas recebidas de um grande corpo de revisores e um sem-número de professores e estudantes que usaram as edições anteriores. Essas mudanças refletem as muitas descobertas que ampliaram os horizontes da física moderna no início deste novo século, levam em conta a evolução que está ocorrendo no ensino de física em faculdades e universidades e reconhecem a importância crescente da física moderna nas ciências biológicas. Embora o termo *física moderna* atualmente designe a física da era moderna (que engloba relatividade e teoria quântica), aceitamos os conselhos de muitos leitores e revisores e preservamos o sabor histórico e cultural do livro, com o cuidado de, ao mesmo tempo, manter o nível matemático das edições anteriores. Mantivemos a flexibilidade do texto para que os professores possam utilizá-lo em vários tipos de cursos e métodos pedagógicos, tais como cursos de um e dois semestres e os com consulta à Internet.

Novidades Desta Edição

Muitas características das edições anteriores foram mantidas, umas foram ampliadas e outras foram adicionadas, conforme listamos a seguir:

- A estrutura lógica, começando com uma introdução à relatividade e à quantização e continuando com aplicações, permanece a mesma. A ideia de começar o livro pela relatividade foi apoiada por muitos revisores e professores.
- Como nas edições anteriores, os problemas apresentados no final de cada capítulo foram separados em três grupos, de acordo com o grau de dificuldade, os de menor dificuldade também agrupados por seção. Novos problemas foram incluídos em todos os capítulos; continuamos a oferecer mais problemas que qualquer outro livro do gênero.
- Continuamos a apresentar muitos exemplos em cada capítulo, uma característica considerada por muitos professores como um dos pontos fortes do livro. Vários exemplos novos que relacionam a física moderna às ciências biológicas foram acrescentados. Como nas edições anteriores, usamos grandezas compostas como hc, $\hbar c$ e ke^2 em eV · nm para simplificar muitos cálculos numéricos.
- Naturalmente, os resumos e as listas de referências no final de cada capítulo foram mantidos e aumentados.
- Continuamos a usar dados reais em figuras, fotografias de pesquisadores e instrumentos de pesquisa, bem como pequenas citações de muitos cientistas que participaram do desenvolvimento da física moderna. Essas informações, juntamente com as notas no final de cada capítulo, servem para dar mais vida aos eventos da história da ciência e para combater a visão relativamente comum entre os estudantes de hoje de que a física é uma coletânea monótona e impessoal de fatos e fórmulas.
- Mais de duas dezenas de Seções Exploratórias, indicadas pelo desenho de um átomo  , que abordam tópicos avançados relacionados ao texto, como velocidades superluminares, átomos gigantes e spintrônica, foram distribuídas em todo o livro.
- No site da LTC Editora para este livro há 31 seções intituladas Leituras Suplementares, que abordam com maior profundidade muitos tópicos discutidos no livro-texto. Essas seções foram muito elogiadas tanto por estudantes como por professores e servem como ponto de partida para projetos e tarefas especiais. As Leituras Suplementares são indicadas no livro por boxes com texto introdutório e o ícone de um laptop  .
- Mais de 125 perguntas destinadas a fomentar discussões e rever conceitos foram distribuídas por todo o livro, incluindo algumas novas para esta edição. Essas questões têm recebido comentários positivos por parte de muitos professores ao longo dos anos, muitas vezes chamando a atenção para o modo como elas estimulam reflexões mais profundas a respeito do assunto.
- Nesta edição mantivemos o uso das Notas de Aplicação, pequenos comentários nas margens de muitas páginas, que destacam os muitos benefícios para a sociedade que resultaram das descobertas ou do desenvolvimento da física moderna.
- Uma novidade desta sexta edição são os boxes com notas Uma Oportunidade Para Você, que destacam atividades atuais e futuras de pesquisa e desenvolvimento, para as quais os estudantes de hoje talvez tenham interesse em orientar suas carreiras.
- Reconhecendo a necessidade esporádica dos estudantes de rever conceitos importantes da física clássica relacionados a tópicos da física moderna, novas seções intituladas Revisão de Conceitos Clássicos (RCC) foram incluídas on-line, a partir da quinta edição, e estão disponíveis no site da LTC Editora para o livro, identificadas no livro-texto pelo ícone de um laptop 

próximo ao tópico pertinente. Várias RCCs estão disponíveis nesta sexta edição. As RCCs permitem rever os conceitos clássicos com um simples clique do mouse.

Organização e Cobertura dos Capítulos

Esta edição, como as anteriores, está dividida em duas partes: Parte 1, "Relatividade e Mecânica Quântica: Os Fundamentos da Física Moderna" e Parte 2, "Aplicações da Mecânica Quântica e da Relatividade". Mantivemos o início da Parte 1 com dois capítulos sobre relatividade. Esta forma de começar o livro tem sido muito elogiada por leitores e revisores. A ideia é que, assim, não é preciso separar a discussão dos fundamentos da mecânica quântica, nos Capítulos 3 a 8, das aplicações, que são assunto dos Capítulos 9 a 12. Há dois capítulos sobre relatividade, o que permite aos professores optar entre uma abordagem mais elementar dos conceitos básicos ou cobrir o assunto com maior profundidade. O Capítulo 1 trata dos aspectos básicos da relatividade restrita e discute vários paradoxos, como o dos gêmeos e o da vara e do celeiro, que sempre despertam o interesse dos estudantes. A energia e o momento relativísticos são discutidos no Capítulo 2, cujo encerramento traz uma seção qualitativa a respeito da relatividade geral que se concentra principalmente nas verificações experimentais. Muitos professores usam essa seção como introdução ao Capítulo 13, Astrofísica e Cosmologia. Como a relação $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ é o resultado mais usado nos capítulos posteriores, é possível omitir o Capítulo 2 sem prejudicar a continuidade.

Os Capítulos 1 a 8 foram atualizados, tendo sido incluídos muitos novos exemplos e diagramas. Entre as Leituras Suplementares também estão muitos tópicos quantitativos, como a demonstração da equação de Compton (Capítulo 3), os detalhes da teoria de espalhamento de Rutherford (Capítulo 4), a solução gráfica do poço de potencial quadrado finito (Capítulo 6) e os estados excitados e espectros dos átomos de dois elétrons (Capítulo 7). Comparações da estatística clássica com as estatísticas quânticas são ilustradas com vários exemplos no Capítulo 8, que, ao contrário dos demais capítulos da Parte 1, pode ser estudado de forma resumida e qualitativa, se o professor assim dese-jar. Este capítulo, tal como o Capítulo 2, não é essencial para a compreensão dos assuntos tratados na Parte 2 e pode ser usado pelo professor como um capítulo de aplicação ou omitido sem perda de continuidade.

Mantendo a abordagem adotada na edição anterior, na Parte 2, as ideias e métodos discutidos na Parte 1 são aplicados ao estudo de moléculas, sólidos, núcleos, partículas e do cosmos. Também na Parte 2, várias explicações foram aprimoradas e novos diagramas, acrescentados. O Capítulo 9 ("Propriedades e Espectros das Moléculas") apresenta uma ampla discussão das ligações moleculares e dos vários tipos de lasers. O Capítulo 10 ("Física do Estado Sólido") contém seções que tratam das ligações metálicas, do magnetismo e da supercondutividade. O Capítulo 11 ("Física Nuclear") é uma integração da teoria nuclear e das aplicações. O capítulo discute as propriedades e a estrutura dos núcleos, a radioatividade e as aplicações das reações nucleares. Este último tópico inclui a fissão nuclear, a fusão nuclear e várias técnicas de datação e análise. As discussões da energia nuclear e dos efeitos biológicos da radiação continuam a ser assuntos de Leituras Suplementares. O Capítulo 12 ("Física de Partículas") foi consideravelmente modificado na quinta edição, com base no Modelo-padrão e, nesta sexta edição, foi revisto de modo a refletir os avanços que ocorreram desde que a última edição foi publicada. A ênfase está nas interações fundamentais dos quarks, léptons e portadores de força e inclui discussões a respeito de leis de conservação, oscilações de neutrinos e supersimetria. Finalmente, o Capítulo 13 ("Astrofísica e Cosmologia") discute as observações atuais de estrelas e galáxias e integra, de forma qualitativa, as discussões de mecânica quântica, átomos, núcleos, partículas e um pouco de relatividade para explicar nosso entendimento atual da origem e evolução do universo, do Big Bang à energia escura, e chamar a atenção para a enormidade do que resta para ser descoberto.

Pesquisas de Ponta

As pesquisas do século passado ampliaram consideravelmente nosso entendimento dos fenômenos naturais, reforçaram as ligações da física com outras disciplinas e contribuíram para melhorar a qualidade de vida da população. Da mesma forma que no início do século passado, é difícil prever, nos primeiros anos deste século, quais serão as pesquisas mais bem-sucedidas nos anos vindouros em termos de novos conhecimentos e de aplicações práticas. Apresentamos a seguir apenas algumas das pesquisas de ponta mencionadas nesta sexta edição de *Física Moderna*, que provavelmente continuarão a ser objeto de interesse no futuro próximo. No futuro mais distante, os cientistas certamente estarão discutindo muitos outros tópicos sobre os quais nada se conhece atualmente.

- **O bóson de Higgs**, responsável pela massa das partículas elementares, pode agora estar ao nosso alcance no Brookhavens's Relativistic Heavy Ion Collider e no European Organization for Nuclear Research (CERN), com o início bem-sucedido da condução das primeiras experiências do Large Hadron Collider. (Capítulo 12)
- **A descoberta de supercondutores à base de ferro**, alguns deles com alta temperatura crítica, inaugurou uma área inteiramente nova de pesquisa teórica e experimental. (Capítulo 10)
- **A questão da massa do neutrino** foi resolvida com a descoberta das oscilações dos neutrinos nos observatórios de neutrinos

Super Kamiokande e Sudbury Neutrino Observatory – SNO (Capítulos 2, 11 e 12), mas ainda não se conhece as massas dos diferentes tipos de neutrinos e não se sabe se o neutrino é uma partícula de Majorana.

- **A descoberta de lasers biológicos unicelulares** abre caminho para novas formas de investigar e fotografar as células. (Capítulo 9)
- **A origem do spin do próton**, que pode incluir contribuições de quarks estranhos virtuais, ainda não foi perfeitamente explicada. (Capítulo 11)
- **Aos condensados de Bose-Einstein**, que nos acenam com a promessa de lasers atômicos e relógios atômicos ainda mais precisos do que os atuais, vieram se juntar, em 2003, os **condensados de Fermi-Dirac**, nos quais pares de férmions se comportam como bósons em temperaturas próximas do zero absoluto. (Capítulo 8)
- **Átomos de anti-hidrogênio mantidos por 1000 segundos** no detector ALPHA do CERN tornam mais concreta a possibilidade de comparar estabilidade, massa e espectro desses átomos com as propriedades correspondentes dos átomos comuns de hidrogênio. (Capítulos 4, 11 e 12)
- Atualmente, sabemos que a **energia escura** é responsável por 74% da massa/energia do universo. Apenas 4% correspondem à matéria bariônica (visível). Os 22% restantes consistem em partículas de **matéria escura**, de natureza desconhecida. (Capítulo 13)
- **As partículas fundamentais da supersimetria (SUSY)**, uma parte importante da teoria da grande unificação, serão uma prioridade de pesquisa para o Large Hadron Collider. (Capítulos 12 e 13)
- **Os supercondutores de alta temperatura atingiram temperaturas críticas acima de 130 K há alguns anos, e os fulerenos competem com os cupratos pelo recorde de alta T_c**, mas ainda não se conhece uma explicação teórica para o fenômeno. (Capítulo 10)
- **Ondas gravitacionais vindas do espaço** poderão ser detectadas em breve pelo recém-reformado Laser Interferometric Gravitational Observatory (LIGO) e vários observatórios semelhantes espalhados pelo mundo. (Capítulo 2)
- **Telescópios com sistemas ópticos adaptativos, interferômetros de longa linha de base e o telescópio Hubble** permitem observar a luz emitida por estrelas há bilhões de anos na origem do universo, e essas observações mostram que a expansão do universo está acelerando, o que é confirmado pelos resultados do Sloan Digital Sky Survey e do Wilkinson Microwave Anisotropy Project. (Capítulo 13)
- **Átomos gigantes de Rydberg**, tornados acessíveis pelo desenvolvimento de lasers de corantes sintonizáveis, estão despertando grande interesse e podem proporcionar o primeiro teste direto do princípio de correspondência. (Capítulo 4)
- **A busca de novos elementos chegou a $Z = 118$**, muito perto da chamada "ilha de estabilidade". (Capítulo 11)

Muitas outras descobertas que também despertam grande interesse são discutidas ao longo de todo o texto de *Física Moderna,* sexta edição.

Algumas Sugestões

Este livro pode ser usado com sucesso em cursos de um ou dois semestres. Os capítulos da Parte 2 são independentes uns dos outros e podem ser estudados em qualquer ordem. Eis algumas sugestões para cursos de um semestre:

- Parte 1, Capítulos 1, 3, 4, 5, 6 e 7; Parte 2, Capítulos 11 e 12
- Parte 1, Capítulos 3, 4, 5, 6, 7 e 8; Parte 2, Capítulos 9 e 10
- Parte 1, Capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7; Parte 2, Capítulo 9
- Parte 1, Capítulos 1, 3, 4, 5, 6 e 7; Parte 2, Capítulos 11, 12 e 13

No caso de um curso de dois semestres, duas possibilidades são as seguintes:

- Parte 1, Capítulos 1, 3, 4, 5, 6 e 7; Parte 2, Capítulos 9, 10, 11, 12 e 13
- Parte 1, Capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8; Parte 2, Capítulos 9, 10, 11, 12 e 13

O livro oferece também amplo material para projetos individuais e deveres de casa nas Seções Exploratórias e, principalmente, nas Leituras Suplementares. Estas últimas também estimulam os estudantes a buscarem informações na Internet.

Agradecimentos

Muitas pessoas contribuíram para o sucesso de edições anteriores deste livro e muitas mais contribuíram para a preparação da sexta edição. Agradecemos a todas elas. Entre as que fizeram a revisão deste livro, no todo ou em parte, oferecendo sugestões

para a sexta edição, estão as seguintes:

Kevork N. Abazajian
University of Maryland
David Besson
The University of Kansas
Carl S. Brandon
Vermont Technical College
Yuen Chinn
State University of New York–Farmingdale
David Cole
Northern Arizona University
Milton W. Cole
Pennsylvania State University
Fereydoon Family
Emory University
Elena Flitsiyan
University of Central Florida
Umesh Garg
University of Notre Dame
Ichishiro Konno
University of Texas–San Antonio
Amy J. Lovell
Agnes Scott College
Deseree Meyer
Rhodes College
K.-W. Ng
University of Kentucky
Vladimir Savinov
University of Pittsburgh
Ralph Shiell
Trent University
R. Steven Turley
Brigham Young University
Scott Williams
Angelo State University
Guo-meng Zhao
California State University–Los Angeles

Agradecemos também aos revisores das edições anteriores. Seus comentários contribuíram significativamente para a forma e conteúdo da sexta edição.

Os revisores da quinta edição foram Marco Battaglia, University of California—Berkeley; Mario Belloni, Davidson College; Eric D. Carlson, Wake Forest University; David Cinabro, Wayne State University; Carlo Dallapiccola, University of Massachusetts—Amherst; Anthony D. Dinsmore, University of Massachusetts—Amherst; Ian T. Durham, Saint Anselm College; Jason J. Engbrecht, St. Olaf College; Brian Fick, Michigan Technological University; Massimiliano Galeazzi, University of Miami; Hugh Gallagher, Tufts University; Richard Gelderman, Western Kentucky University; Tim Gfroerer, Davidson College; Torgny Gustafsson, Rutgers University; Scott Heinekamp, Wells College; Adrian Hightower, Occidental College; Mark Hollabaugh, Normandale Community College; Richard D. Holland II, Southern Illinois University at Carbondale; Bei-Lok Hu, University of Maryland—College Park; Dave Kieda, University of Utah; Steve Kraemer, Catholic University of America; Wolfgang Lorenzon, University of Michigan; Bryan A. Luther, Concordia College at Moorhead; Catherine Mader, Hope College; Kingshuk Majumdar, Berea College; Peter Moeck, Portland State University; Robert M. Morse, University of Wisconsin—Madison; Igor Ostrovskii, University of Mississippi at Oxford; Anne Reilly, College of William and Mary; David Reitze, University of Florida; Mark Riley, Florida State University; Nitin Samarth, Pennsylvania State University; Kate Scholberg, Duke University; Ben E. K. Sugerman, Goucher College; Rein Uritam, Boston College; Ken Voss, University of Miami; Thad Walker, University of Wisconsin—Madison; Barry C. Walker, University of Delaware; Eric Wells, Augustana College; William R. Wharton, Wheaton College; Weldon J. Wilson, University of Central Oklahoma; and R.

W. M. Woodside, University College of Fraser Valley.

Os revisores da quarta edição foram Darin Acosta, University of Florida; Wei Cui, Purdue University; Ronald E. Jodoin, Rochester Institute of Technology; Edward R. Kinney, University of Colorado at Boulder; Robert Pompi, SUNY at Binghamton; Warren Rogers, Westmont College; Nitin Samarth, Pennsylvania State University; Martin A. Sanzari, Fordham University; Earl E. Scime, West Virginia University; Gil Shapiro, University of California at Berkeley; Paul Tipton, University of Rochester; Edward A. Whittaker, Stevens Institute of Technology; Jeeva Anandan, University of South Carolina; David A. Bahr, Bemidji State University; David P. Carico, California Polytechnic State University at San Luis Obispo; David Church, University of Washington; Snezana Dalafave, College of New Jersey; Richard Gass, University of Cincinnati; David Gerdes, University of Michigan; Robert Pompi, SUNY at Binghamton; George Rutherford, Illinois State University; K. Thad Walker, University of Wisconsin at Madison; Gordon Aubrecht, Ohio State University; Patricia C. Boeshaar, Drew University; Mark Hollabaugh, Normandale Community College; John L. Hubisz, North Carolina State University; Paul D. Lane, University of St. Thomas; Fernando J. López-López, Southwestern College; Dan MacIsaac, Northern Arizona University; Larry Solanch, Georgia College & State University; Francis M. Tam, Frostburg State University; Stephen Yerian, Xavier University; and Dean Zollman, Kansas State University.

Os revisores da terceira edição foram Bill Bassichis, Texas A&M University; Brent Benson, Lehigh University; H. J. Biritz, Georgia Institute of Technology; Patrick Briggs, The Citadel; David A. Briodo, Boston College; Tony Buffa, California Polytechnic State University at San Luis Obispo; Duane Carmony, Purdue University; Ataur R. Chowdhury, University of Alaska at Fairbanks; Bill Fadner, University of Northern Colorado; Ron Gautreau, New Jersey Institute of Technology; Charles Glashauser, Rutgers—The State University of New Jersey; Roger Hanson, University of Northern Iowa; Gary G. Ihas, University of Florida; Yuichi Kubota, University of Minnesota; David Lamp, Texas Tech University; Philip Lippel, University of Texas at Arlington; A. E. Livingston, University of Notre Dame; Steve Meloma, Gustavus Adolphus College; Benedict Y. Oh, Pennsylvania State University; Paul Sokol, Pennsylvania State University; Thor F. Stromberg, New Mexico State University; Maurice Webb, University of Wisconsin at Madison; and Jesse Weil, University of Kentucky.

Todos ofereceram sugestões valiosas, aos quais agradecemos pela ajuda.

Além disso, queremos deixar registrado um agradecimento especial a todos os físicos e estudantes do mundo inteiro que se deram ao trabalho de nos enviar suas gentis considerações a respeito das edições anteriores e que fizeram sugestões de melhorias.

Somos eternamente gratos pelo apoio, o encorajamento e a paciência de nossas famílias durante o projeto; elas nos ajudam de inúmeras formas. Agradecemos especialmente a Mark Llewellyn pela preparação do *Manual de Soluções do Professor* e do *Manual de Soluções do Estudante,** e pelas inúmeras sugestões desde o início do projeto, e a Eric Llewellyn pelas fotografias e as imagens geradas em computador. Por último, mas não menos importante, nosso agradecimento à editora executiva Jessica Fiorillo, à editora associada Brittany Murphy, à editora sênior de projetos Mary Louise Byrd, à revisora de provas Karen Taschek e a toda a equipe da *Física Moderna* na W. H. Freeman por sua paciência, habilidade, dedicação, compreensão e apoio na concretização deste projeto. Eles fazem um grande trabalho!

Paul A. Tipler,
Berkeley, Califórnia

Ralph A. Llewellyn
Oviedo, Flórida

***Materiais disponíveis apenas na edição original em inglês. (N.E.)**

PARTE 1

Relatividade e Mecânica Quântica: Os Fundamentos da Física Moderna

As primeiras tentativas sistemáticas de que se tem notícia para reunir conhecimentos a respeito do movimento como forma de compreender os fenômenos naturais foram realizadas na Grécia Antiga. A filosofia natural (ou seja, a física) da época, colocada em uma forma sofisticada por Aristóteles por volta de 350 a.C., baseava-se em explicações deduzidas a partir de hipóteses, e não em experimentos. Uma dessas hipóteses fundamentais, por exemplo, era a de que toda substância possui um "lugar natural" no universo. O movimento acontecia quando uma substância estava tentando chegar ao seu lugar natural. Ao tempo também era atribuído um significado absoluto, na forma de um movimento a partir de um certo instante do passado (a criação do universo) em direção a um objetivo final no futuro, seu lugar natural. Graças a uma notável concordância entre as deduções da física aristotélica e os movimentos observados no universo e a uma ausência quase total de instrumentos precisos que permitissem examinar criticamente essas deduções, a visão dos gregos continuou a ser aceita como verdadeira durante quase 2.000 anos. No final desse período, uns poucos estudiosos tinham começado a testar experimentalmente algumas das previsões teóricas, mas foi o cientista italiano Galileu Galilei que, com seus brilhantes experimentos envolvendo o movimento, estabeleceu definitivamente a necessidade da experimentação na física e, ao mesmo tempo, iniciou a derrocada da física aristotélica. Menos de 100 anos depois, Isaac Newton havia generalizado os resultados dos experimentos de Galileu em suas espetacularmente bem-sucedidas leis do movimento, e a filosofia natural de Aristóteles se tornara coisa do passado.

Com o florescimento da experimentação, os 200 anos seguintes assistiram a uma miríade de descobertas importantes e ao desenvolvimento concomitante de teorias físicas para explicá-las. A maioria das últimas, como até hoje acontece, não conseguiu sobreviver aos testes experimentais cada vez mais sofisticados, mas no início do século XX as explicações teóricas propostas por Newton para o movimento de sistemas mecânicos tinham sido complementadas pelas leis igualmente grandiosas do eletromagnetismo e da termodinâmica formuladas por Maxwell, Carnot e outros. O notável sucesso conseguido por essas leis levou muitos cientistas a acreditarem que a descrição do universo estivesse completa. A. A. Michelson, dirigindo-se aos cientistas no final do século XIX, declarou o seguinte: "Os grandes princípios já estão firmemente estabelecidos... As futuras verdades da física terão que ser procuradas na sexta casa decimal."

Esse otimismo (ou pessimismo, dependendo do ponto de vista) revelou-se prematuro, pois já havia sérias rachaduras nos alicerces do que hoje chamamos de física clássica. Duas delas foram consideradas por Lorde Kelvin, em suas famosas conferências de Baltimore em 1900, como "duas nuvens" no horizonte da física do século XX: a incapacidade da teoria de descrever o espectro de radiação emitido por um corpo negro e os resultados inexplicáveis do experimento de Michelson-Morley. Na verdade, a ruptura da física clássica ocorreu em muitos setores ao mesmo tempo: o resultado nulo do experimento de Michelson-Morley contrariava a relatividade newtoniana; o espectro da radiação de corpo negro não estava de acordo com as previsões da termodinâmica; o efeito fotelétrico e os espectros dos átomos não podiam ser explicados pela teoria eletromagnética; os fascinantes fenômenos associados aos raios X e à radioatividade pareciam estar totalmente fora do contexto da física clássica. As teorias da mecânica quântica e da relatividade, formuladas no início do século XX, não só dissiparam as "nuvens escuras" de Kelvin, mas forneceram respostas para todos esses enigmas e muitos mais. A aplicação dessas teorias a sistemas microscópicos, como átomos, moléculas, núcleos atômicos e partículas elementares, e a sistemas macroscópicos (sólidos, líquidos, gases e plasmas) proporcionou uma melhor compreensão dos intrincados processos naturais e revolucionou nossa forma de viver.

Na Parte I, discutimos os fundamentos da física moderna: a teoria da relatividade e a mecânica quântica. O Capítulo 1 examina o aparente conflito entre o princípio da relatividade de Einstein e a observação experimental de que a velocidade da luz é constante, mostra de que forma a aceitação simultânea das duas ideias levou à teoria da relatividade restrita. O Capítulo 2 trata das relações entre massa, energia e momento na relatividade restrita e termina com uma breve discussão da relatividade geral e algumas verificações experimentais de suas previsões. Nos Capítulos 3, 4 e 5 é discutida a evolução da mecânica quântica, desde os primeiros indícios da existência de quantização até a hipótese de de Broglie de que os elétrons podem se comportar como ondas. Uma discussão elementar da equação de Schrödinger é apresentada no Capítulo 6 e ilustrada com aplicações a sistemas unidimensionais. O Capítulo 7 estende a aplicação da mecânica quântica a sistemas de muitas partículas e introduz os

importantes conceitos do spin eletrônico e do princípio de exclusão. Para concluir, o Capítulo 8 discute a mecânica ondulatória em sistemas com um grande número de partículas idênticas, destacando a importância da simetria das funções de onda. A partir do Capítulo 3, os capítulos da Parte I devem ser estudados em sequência, já que os Capítulos de 4 a 8 dependem das explicações, das discussões e dos exemplos apresentados nos anteriores.

CAPÍTULO 1

Relatividade I

1-1 Provas Experimentais da Relatividade
1-2 Os Postulados de Einstein
1-3 A Transformação de Lorentz
1-4 A Dilatação dos Tempos e Contração das Distâncias
1-5 O Efeito Doppler
1-6 O Paradoxo dos Gêmeos e Outras Surpresas

O caráter relativístico das leis da física começou a ser reconhecido muito cedo na história da física clássica. Antes de Galileu e Newton, Nicolau Copérnico[1] já havia mostrado que o cálculo dos movimentos dos planetas se tornaria muito mais simples e preciso se o antigo modelo aristotélico, baseado na ideia de que a Terra era o centro do universo, fosse substituído por um modelo no qual os planetas se movessem em torno do Sol, e não da Terra. Embora Copérnico tenha publicado esse trabalho no fim da vida, ele se tornou largamente conhecido graças a sua correspondência com os contemporâneos. Além disso, ajudou a preparar o caminho para a aceitação geral, um século mais tarde, da teoria heliocêntrica do movimento dos planetas. Embora a teoria de Copérnico tenha gerado uma verdadeira revolução do pensamento humano, o aspecto que nos interessa é que a teoria não considerava a localização da Terra como especial ou privilegiada. Assim, as leis da física descobertas na Terra seriam as mesmas, qualquer que fosse o ponto tomado como centro. Em outras palavras, as mesmas equações seriam obtidas, independentemente da origem do sistema de coordenadas. Essa invariância das equações que expressam as leis da física é conhecida como *princípio da relatividade*.

Vamos começar este capítulo examinando rapidamente a relatividade das leis de Newton e depois discutiremos a fundo a teoria da relatividade proposta por Albert Einstein (1879-1955). A teoria da relatividade é composta por duas teorias bem diferentes, a teoria restrita e a teoria geral. A teoria restrita, formulada por Einstein e outros em 1905, trata da comparação entre os movimentos observados em diferentes referenciais que estejam se movendo com velocidade constante uns em relação aos outros. Contrariamente à opinião popular, a teoria restrita não é difícil de entender. Suas conclusões, que podem ser demonstradas com um mínimo de matemática, se aplicam a uma grande variedade de problemas práticos de física e engenharia. Por outro lado, a teoria geral, também formulada por Einstein, por volta de 1916, aborda os referenciais acelerados e os efeitos da gravidade. Embora a teoria geral exija conhecimentos mais profundos de matemática (como análise tensorial, por exemplo) para ser bem compreendida, algumas de suas ideias básicas e previsões importantes dessa teoria podem ser discutidas no nível deste livro. A teoria geral é muito importante para a cosmologia e para o estudo dos eventos que ocorrem nas proximidades de massas muito grandes (como as estrelas, por exemplo). Graças a avanços em nossa capacidade de realizar medidas precisas, a teoria geral está sendo usada cada vez mais em outras áreas da física e da engenharia e também na vida cotidiana, como, nos aparelhos de GPS. Vamos dedicar este capítulo inteiramente à teoria restrita (também conhecida como *relatividade restrita*) e deixaremos para discutir a teoria geral no final do Capítulo 2, após estudarmos toda a mecânica relativística restrita.

1-1 Provas Experimentais da Relatividade

Relatividade Clássica

Em 1687, com a publicação do livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Newton se tornou o primeiro a generalizar as observações de Galileu, al-Haytham e outros das leis de movimento que são apresentadas nos cursos de mecânica clássica. De acordo com a segunda das três leis de Newton,

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \qquad \textbf{1-1}$$

em que $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$ é a aceleração de um corpo de massa m e $\mathbf{F}$ é a resultante das forças que agem sobre o corpo. A primeira lei de Newton, a *lei da inércia*, é um caso particular da Equação 1-1: se $\mathbf{F} = 0$, $d\mathbf{v}/dt = 0$, ou seja, $\mathbf{a} = 0$. (Neste livro, as letras e símbolos impressos em negrito são vetores.)

Mas as leis de Newton são válidas apenas em *referenciais inerciais*, ou seja, em referenciais em que a lei da inércia é válida.[2] Além disso, apresentam a notável propriedade de serem *invariantes*, isto é, conservam a mesma forma em qualquer referencial que esteja se movendo com velocidade constante em relação a um referencial inercial. Assim, todos os referenciais inerciais são equivalentes, ou seja, não existe um referencial especial ou privilegiado em relação ao qual possam ser feitas medidas absolutas de espaço e tempo. Dois referenciais inerciais são mostrados na Figura 1-1, dispostos de tal forma que os eixos correspondentes em S e S' são paralelos e S' está se movendo na direção $+x$ com velocidade $\mathbf{v}$ para um observador em S (ou S está se movendo na direção $-x'$ com velocidade $-\mathbf{v}$ para um observador S'). As Figuras 1-2 e 1-3 ilustram as diferenças conceituais entre referenciais inerciais e não inerciais. A transformação das coordenadas de posição e das componentes da velocidade do referencial S para o referencial S' é chamada *transformação de Galileu* e expressa pelas Equações 1-2 e 1-3, respectivamente:

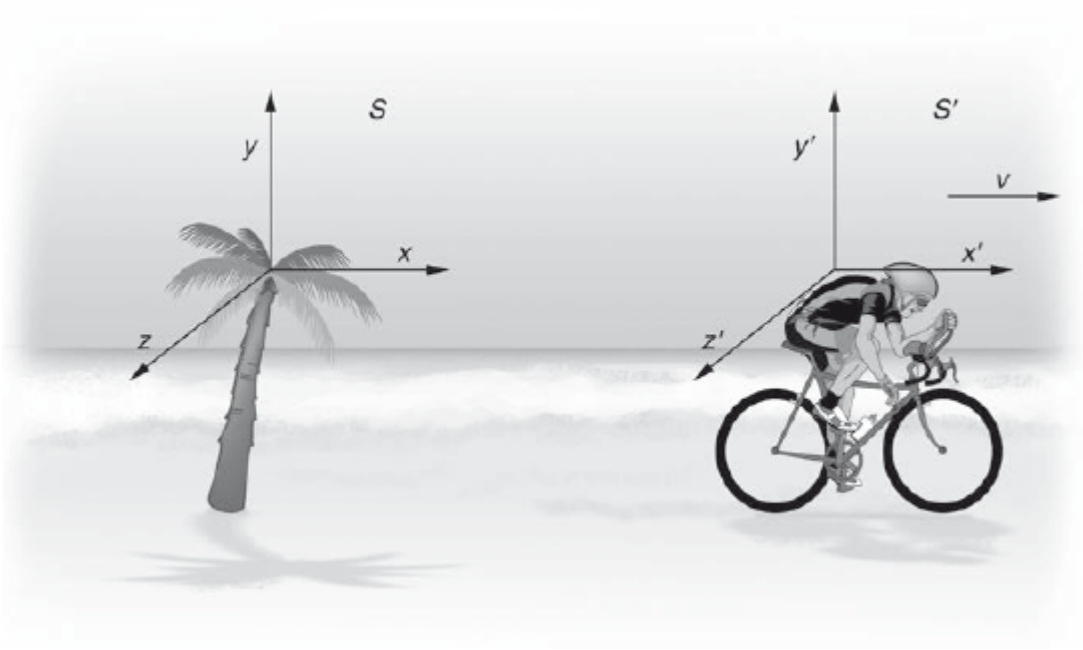


FIGURA 1-1 O referencial inercial S está em repouso em relação à palmeira (e, portanto, em relação à Terra) e o referencial S' está em repouso em relação ao ciclista. Os eixos correspondentes são paralelos e S' se move com velocidade v na direção $+x$ em relação a S.

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t \qquad \textbf{1-2}$$

$$u'_x = u_x - v \qquad u'_y = u_y \qquad u'_z = u_z \qquad \textbf{1-3}$$

Note que, derivando a Equação 1-3, obtemos $a' = a$, já que $d\mathbf{v}/dt = 0$ para $\mathbf{v}$ constante. Assim, $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{a}' = \mathbf{F}'$. Essa é a invariância a que nos referimos anteriormente. Generalizando esse resultado, podemos afirmar o seguinte:

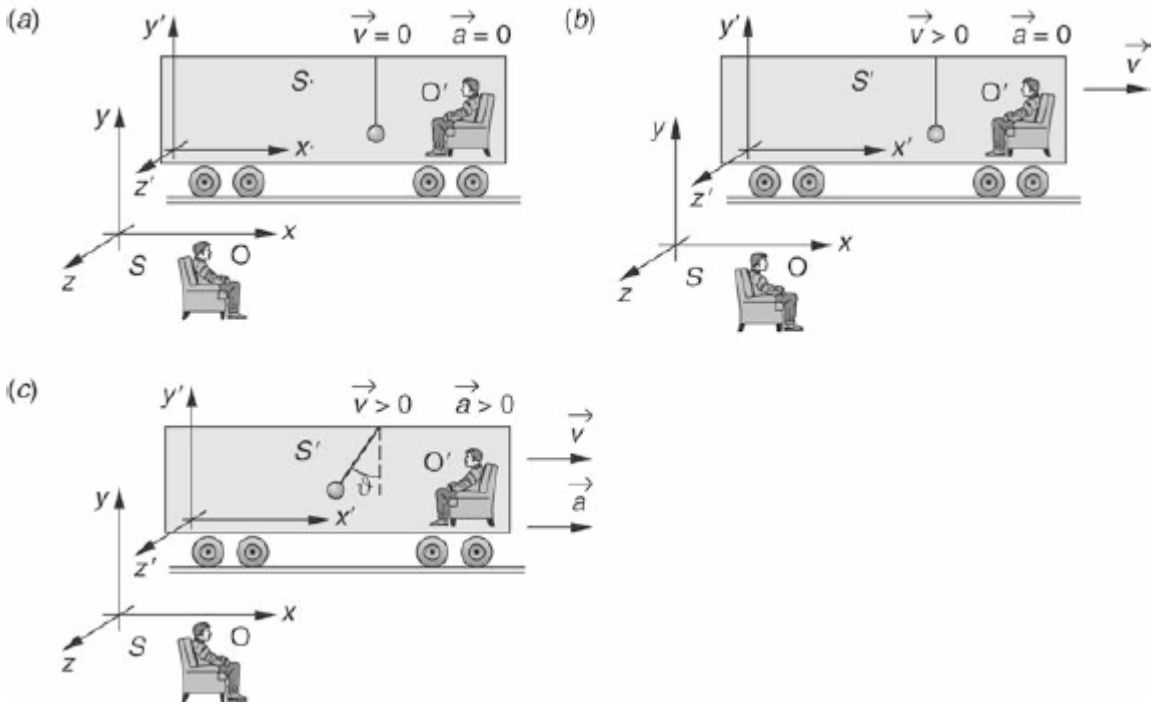


FIGURA 1-2 Uma massa suspensa por uma corda no teto de um vagão de trem ilustra a relatividade da segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. As únicas forças que agem sobre a massa são o peso $m\mathbf{g}$ e a tensão $\mathbf{T}$ da corda. (*a*) O vagão está em repouso em relação a *S*. Como a velocidade $\mathbf{v}$ e a aceleração $\mathbf{a}$ do vagão (ou seja, do referencial *S*′) são nulas, os dois observadores veem a massa pender verticalmente, e, portanto, a componente horizontal da força que age sobre a bola é $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}'_x = 0$. (*b*) O vagão está se movendo na direção $+x$ com velocidade $\mathbf{v}$ constante. Os dois observadores continuam a ver a massa pender verticalmente, embora esteja se movendo com velocidade $\mathbf{v}$ no referencial *S* e em repouso no referencial *S*′; assim, mais uma vez, $\mathbf{F}_x = \mathbf{F}'_x = 0$. (*c*) O vagão está se movendo na direção $+x$ com aceleração $\mathbf{a} > 0$ em relação a *S*. Nesse caso, a corda que sustenta a bola faz um ângulo $\theta \neq 0$ com a vertical. Para o observador que está no referencial *S*, a bola está sendo acelerada pela componente horizontal da tensão na corda, ou seja, $\mathbf{F}_x = \mathbf{T}_x \neq 0$. Para o observador que está no referencial *S*′, porém, a bola está em repouso e a "explicação" do fato de que a corda não pende verticalmente é que existe uma pseudoforça $\mathbf{F_p}$ na direção $-x'$, que equilibra a componente *x* da tensão na corda.

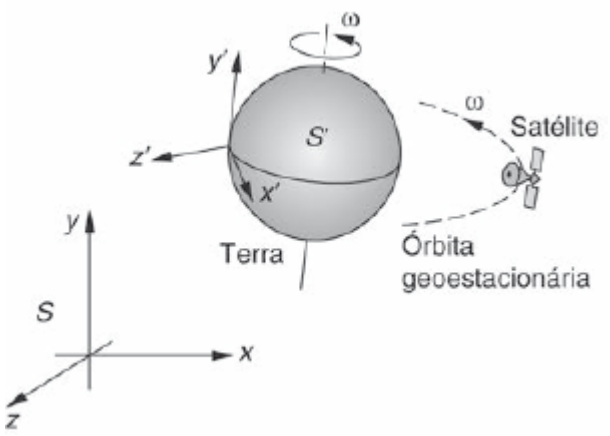


FIGURA 1-3 Um satélite geoestacionário se move em uma órbita equatorial com uma velocidade angular igual à da Terra e, portanto, está em repouso em relação à superfície da Terra. Para um observador em um referencial *S* fixo no espaço, o satélite está sujeito a uma aceleração centrípeta $\mathbf{a}$ produzida pela força gravitacional da Terra, $\mathbf{F_T}$, que age na direção $-x$. Para um observador na superfície da Terra (ou seja, no referencial *S*′), $\mathbf{a}' = 0$ e a explicação para o fato de que o satélite não está sujeito a uma aceleração é que existe uma pseudoforça $\mathbf{F_p} = -\mathbf{F_T}$ que age na direção *x*, equilibrando a força de atração gravitacional da Terra.

Todo referencial que se move com velocidade constante em relação a um referencial inercial é um referencial inercial. As leis de Newton têm a mesma forma, qualquer referencial inercial, o que significa que são invariantes em relação a uma transformação de Galileu.



1

RCC 1 Revisão de Conceitos Clássicos

Os conceitos de referencial, relatividade clássica e transformação de coordenadas, importantes para nossa discussão da relatividade restrita, nem sempre são examinados em cursos introdutórios de física. Por essa razão, estão entre os temas escolhidos da seção *Revisão de Conceitos Clássicos*, uma coleção de textos que esta disponível para este livro no site da LTC Editora. O símbolo  na margem do livro, acompanhado pelas iniciais RCC, alerta o leitor para uma revisão de conceitos clássicos ligados ao tópico que está sendo discutido.

A Velocidade da Luz

Por volta de 1860, James Clerk Maxwell descobriu que as leis empíricas da eletricidade e do magnetismo podiam ser resumidas em um sistema de quatro equações matemáticas, que vieram a ser chamadas de equações de Maxwell. Como veio a ser reconhecido mais tarde, ao contrário das leis de Newton, as equações de Maxwell não são invariantes em relação a uma transformação de Galileu entre referenciais inerciais (Figura 1-4). Uma das consequências das equações de Maxwell é a existência de ondas eletromagnéticas cuja velocidade possui um valor bem determinado, $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 3.00 \times 10^8$ m/s. A excelente concordância entre este número e o valor experimental da velocidade da luz[3] e entre as propriedades de polarização previstas para as ondas eletromagnéticas e as observadas para a luz constituía um forte indício de que a luz era uma onda eletromagnética e que, por isso, propagava-se com velocidade c.[4]

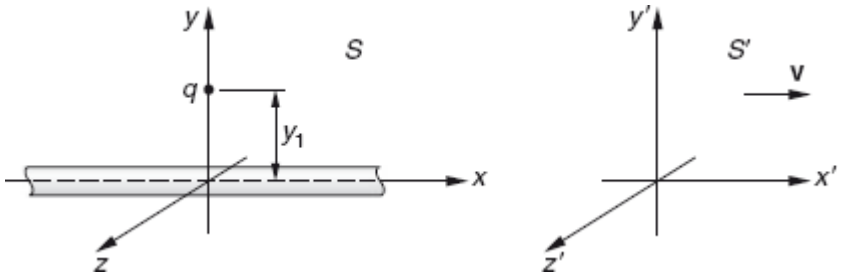


FIGURA 1-4 Os observadores em S e S' medem campos elétricos iguais $2k\lambda/y_1$ a uma distância $y_1 = y'_1$ de um fio infinitamente longo com uma densidade uniforme de carga λ. Os observadores em S e S' medem uma força $2kq\lambda/y_1$ exercida pelo fio sobre a carga q; entretanto, o observador em S' mede também uma força $-\mu_0\lambda v^2 q/2\pi y_1$ associada ao campo magnético em y'_1 resultante do movimento do fio na direção $-x'$. Assim, a força eletromagnética não tem a mesma forma em diferentes referenciais inerciais, o que significa que as equações de Maxwell *não* são invariantes em relação a uma transformação de Galileu.



1,2

Por analogia com as outras ondas conhecidas, foi postulado que as ondas eletromagnéticas se propagavam em um meio material. Este meio, que recebeu o nome de *éter*, estaria presente em todo o universo, incluindo o interior da matéria. (O filósofo grego Aristóteles tinha sugerido a existência do "éter" havia mais de 2.000 anos.) Era natural que os cientistas se propusessem a provar experimentalmente a existência do éter medindo a velocidade da luz em relação à Terra, c', que, de acordo com a Equação 1-3,* seria diferente de c por causa da velocidade v da Terra em relação ao éter. O valor de c era dado pelas equações de Maxwell e a velocidade da Terra em relação ao éter, embora não fosse conhecida, era, presumivelmente, pelo menos igual à velocidade orbital em torno do Sol, cerca de 30 km/s. Como o efeito máximo observável é da ordem de v^2/c^2 e, segundo as estimativas anteriores, $v^2/c^2 \approx 10^{-8}$, seria necessária uma precisão experimental de pelo menos 1 parte em 10^8 para detectar o movimento da Terra em relação ao éter. Com uma única exceção, os equipamentos e técnicas disponíveis na época tinham uma precisão experimental de apenas 1 parte de 10^4, muito menor que a necessária para observar o efeito. A exceção era o método usado por Michelson e Morley.[5]

Exercícios

1. Qual deve ser a velocidade relativa dos sistemas inerciais da Figura 1-4 para que a força eletromagnética a que está submetida a carga q seja nula do ponto de vista de um observador estacionário no referencial S'?
2. Explique a relação entre o valor elevado da velocidade das ondas eletromagnéticas e a necessidade de que o éter seja muito rígido, isto é, possua um alto módulo de elasticidade.

O Experimento de Michelson-Morley

Todas as ondas conhecidas pelos cientistas do século XIX necessitavam de um meio para se propagarem. As ondas do mar obviamente não existem no vácuo. O mesmo se pode dizer das vibrações de uma corda de violão, das ondulações da superfície de um tambor, das oscilações que atravessam a Terra durante um terremoto e, de forma geral, das ondas que atravessam qualquer material quando este é submetido a forças variáveis. A velocidade dessas ondas depende das propriedades do meio em que se propagam e assume uma forma particularmente simples quando é expressa *em relação ao meio*. Por exemplo, a velocidade das ondas sonoras no ar, isto é, a velocidade com a qual se propagam em relação ao ar parado, pode ser calculada e medida com relativa facilidade. O efeito Doppler para o som no ar depende não só do movimento relativo entre a fonte e o observador, mas também do movimento da fonte e do observador em relação ao ar. Era natural, portanto, que os cientistas postulassem a existência de um meio como o éter para permitir a propagação da luz e outras ondas eletromagnéticas *e* esperassem que o movimento absoluto da Terra em relação ao éter pudesse ser medido, a despeito do fato de o éter jamais ter sido observado.



Albert A. Michelson, que aparece na foto jogando bilhar na maturidade, fez a primeira medição precisa da velocidade da luz quando era professor da U.S. Naval Academy, onde serviu como cadete na juventude. [*AIP Emilio Segrè Visual Archives*.]

Michelson foi o primeiro a perceber que, embora o efeito do movimento da Terra sobre qualquer medida da velocidade da luz baseada em um percurso de "ida e volta", como o indicado esquematicamente na Figura 1-5, fosse pequeno demais para ser medido diretamente, seria possível medir a razão v^2/c^2 por um processo indireto, usando a interferência de ondas luminosas como um "relógio" muito preciso. O aparelho que ele projetou para executar esse tipo de medida recebeu o nome de *interferômetro de Michelson*. O objetivo do experimento de Michelson-Morley era medir a velocidade da luz em relação ao interferômetro (ou seja, em relação à Terra), o que equivaleria a demonstrar que a Terra estava em movimento em relação ao éter, representando portanto uma prova da existência do último. Antes de discutirmos o funcionamento do interferômetro, vamos descrever uma situação análoga em um contexto familiar.

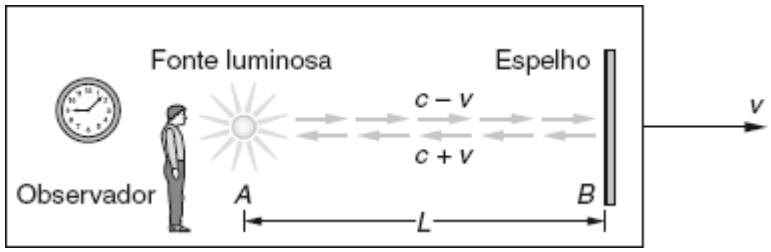


FIGURA 1-5 Uma fonte luminosa, um espelho e um observador se movem com velocidade v em relação ao éter. De acordo com a teoria clássica, a velocidade da luz seria igual a c em relação ao éter, $c - v$ em relação ao observador para o raio emitido pela fonte luminosa em direção ao espelho e $c + v$ em relação ao observador para o raio refletido pelo espelho em direção ao observador.

EXEMPLO 1-1 **Uma Corrida de Barcos** A Figura 1-6*a* mostra os percursos usados por dois remadores em uma corrida de barcos. Os dois conseguem desenvolver a mesma velocidade c em água parada; a água do rio está se movendo com velocidade v. O barco 1 vai do ponto A ao ponto B, percorrendo uma distância L, e volta ao ponto A. O barco 2 vai do ponto A ao ponto C, percorrendo também uma distância L, e volta ao ponto A. A, B e C são marcas na margem do rio. Qual dos dois remadores ganha a corrida? (Suponha que $c > v$.)

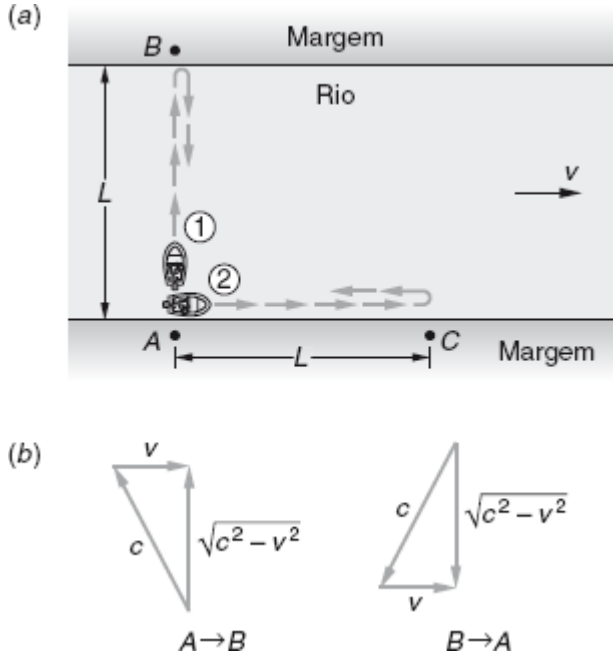


FIGURA 1-6 (*a*) Os dois barcos se movem com velocidade *c* em relação à água parada. A velocidade da água do rio é *v*. O barco 1 vai do ponto *A* ao ponto *B* e volta ao ponto *A*, enquanto o barco 2 vai do ponto *A* ao ponto *C* e volta ao ponto *A*. (*b*) Ao se dirigir do ponto *A* ao ponto *B*, o barco 1 deve navegar rio acima para que a soma dos vetores velocidade **c** + **v** seja perpendicular às margens do rio. A velocidade do barco em relação às margens (ou seja, em relação aos pontos *A* e *B*) é $\sqrt{c^2 - v^2}$. O mesmo acontece na viagem de volta.

SOLUÇÃO

O vencedor, naturalmente, é o barco que consegue completar o percurso de ida e volta em menos tempo. Assim, para descobrir quem é o ganhador, basta calcular os tempos gastos no trajeto pelos dois remadores. Usando a transformação clássica de velocidades (Equações 1-3), verificamos que a velocidade do barco 1 em relação à margem é $(c^2 - v^2)^{1/2}$ (Figura 1-6*b*). Assim, o tempo total de percurso t_1 para o barco 1 é dado por

$$t_1 = t_{A\to B} + t_{B\to A} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

$$= \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

$$\approx \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) \qquad \textbf{1-4}$$

onde em que usamos a expansão binomial (veja o Apêndice B2). O barco 2 viaja do ponto *A* ao ponto *C* com uma velocidade $c + v$ em relação à margem e viaja de volta ao ponto *A* com uma velocidade $c - v$, também em relação à margem. O tempo total de percurso t_2 para o barco 2 é, portanto,

$$t_2 = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

$$= \frac{2L}{c}\frac{1}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \approx \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \cdots\right) \qquad \textbf{1-5}$$

que, como o leitor deve ter notado, é o mesmo resultado obtido em nossa discussão do experimento da velocidade da luz na *Revisão de Conceitos Clássicos*.

A diferença Δt entre os tempos totais de percurso dos dois barcos é, portanto,

$$\Delta t = t_2 - t_1 \approx \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \approx \frac{Lv^2}{c^3} \qquad \textbf{1-6}$$

Como o valor de Lv^2/c^3 é sempre positivo, $t_2 > t_1$ e o remador 1 consegue completar o percurso em menos tempo, ganhando a corrida.

Resultados Michelson e Morley executaram o experimento em Cleveland, Ohio, Estados Unidos, em 1887, repetindo, com um equipamento muito mais sofisticado, um experimento inconcludente que Michelson havia realizado, sozinho, em Potsdam, Alemanha, em 1881. A distância L no novo interferômetro (Figura 1-7) era aproximadamente 11 m, graças a reflexões múltiplas. A Figura 1-8*a* mostra como funcionava o instrumento. A imagem vista pelo observador consistia em uma série de faixas claras e escuras denominadas *franjas de interferência* (Figura 1-8*b*). Os dois raios luminosos presentes no interferômetro são análogos aos dois barcos a remo do Exemplo 1-1; era de se esperar que o movimento da Terra em relação ao éter introduzisse uma diferença de tempo (de fase) dada pela Equação 1-6. Uma rotação de 90° do interferômetro multiplicaria por dois a diferença de tempo e mudaria a fase, fazendo com que a figura de interferência se deslocasse de uma distância ΔN. Para fazer girar o aparelho, foi usado um sistema especial no qual o bloco de pedra onde estava montado o interferômetro flutuava em um banho de mercúrio. Esse arranjo atenuava as vibrações e permitia que os cientistas girassem o aparelho sem introduzir deformações mecânicas capazes de provocar variações de L e, portanto, da posição das franjas. Usando uma lâmpada de sódio com $\Delta = 590$ nm e supondo que $v = 30$ km/s (ou seja, uma velocidade da Terra em relação ao éter igual à velocidade orbital do planeta), os pesquisadores esperavam que o deslocamento ΔN fosse da ordem de 40% da largura de uma franja, ou seja, um valor 40 vezes maior do que o deslocamento mínimo (1% da largura de uma franja) que o equipamento era capaz de medir.

Para grande decepção de Michelson e da maioria dos cientistas da época, o deslocamento previsto não foi observado. Em vez disso, as franjas se deslocaram de apenas 1% da largura de uma franja, um valor da mesma ordem que a precisão do instrumento. Com a circunspeção que lhe era característica, Michelson descreveu os resultados da seguinte forma:[6]

> O deslocamento observado foi certamente menor que um vinte avos (de 40% da largura de uma franja) e provavelmente menor que um quarenta avos. Como, porém, o deslocamento é proporcional ao quadrado da velocidade, a velocidade relativa entre a Terra e o éter é provavelmente menor que um sexto da velocidade orbital da Terra e certamente menor que um quarto.

Michelson e Morley haviam acabado de mostrar que a velocidade da Terra em relação ao éter não podia ser maior que 5 km/s. Do nosso ponto de vista, é difícil apreciar o efeito devastador desse resultado. A teoria da propagação da luz aceita na época não podia estar correta; a ideia de que o éter se comportava como um referencial privilegiado para as equações de Maxwell teria que ser descartada. O experimento foi repetido por outros cientistas mais de uma dúzia de vezes, em diferentes condições e com maior precisão, mas nenhum deslocamento jamais foi observado. No mais preciso desses experimentos, o limite superior da velocidade relativa foi reduzido para 1,5 km/s por Georg Joos em 1930, usando um interferômetro no qual o percurso dos raios luminosos era muito maior do que no interferômetro de Michelson. Recentemente, versões modernas do experimento, usando lasers, reduziram esse limite para 15 m/s.

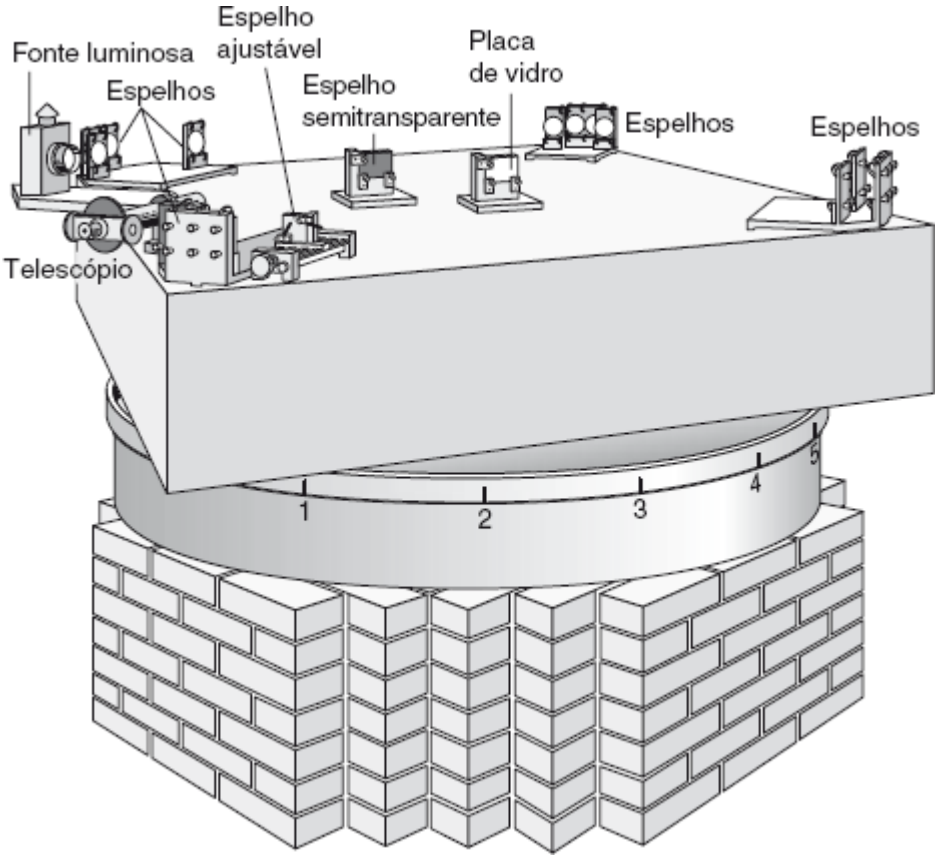


FIGURA 1-7 Equipamento usado por Michelson e Morley no experimento de 1887. Os dispositivos óticos foram montados em um bloco quadrado, de arenito, com 5 pés de lado, que flutuava em mercúrio, para reduzir as tensões e vibrações que haviam prejudicado os experimentos anteriores. Para fazer observações em qualquer direção, bastava girar o bloco no plano horizontal. [Extraído de R.S. Shankland, *The Michelson-Morley Experiment*, Copyright © November 1964 by Scientific American, Inc. Todos os direitos reservados.]

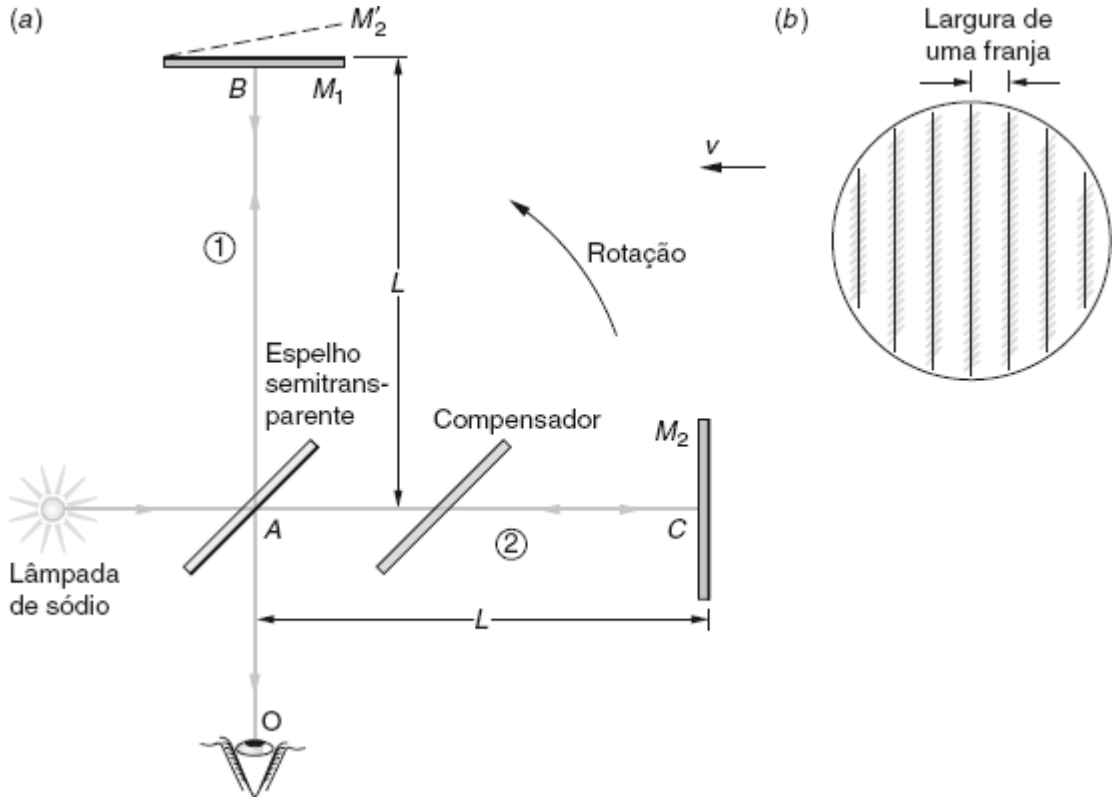


FIGURA 1-8 Princípio de funcionamento do interferômetro de Michelson. (*a*) A luz amarela produzida por uma lâmpada de sódio é dividida em dois feixes por um espelho semitransparente instalado no ponto *A*. Os feixes se propagam ao longo de dois trajetos mutuamente perpendiculares 1 e 2, são refletidos pelos espelhos M_1 e M_2 e voltam a *A*, onde se recombinam e são observados. A presença do compensador tem por objetivo igualar os comprimentos óticos dos dois percursos, fazendo com que as distâncias *L* contenham o mesmo número de ciclos da onda luminosa. Se o espelho M_2 é inclinado ligeiramente, deixando de ser perpendicular a M_1, o observador passa a ver M_1 e M'_2, a imagem de M_2, formando uma cunha. A interferência dos feixes refletidos pelos dois espelhos depende do número

de ciclos de onda em cada trajeto, que, por sua vez, depende (1) do comprimento de cada trajeto e (2) da velocidade da luz (em relação ao instrumento) em cada trajeto. Qualquer que seja o valor dessas velocidades, o fato de que as imagens M_1 e M'_2 formam uma cunha significa que a diferença entre a distância percorrida pelo feixe 2 e a distância percorrida pelo feixe 1 varia gradualmente ao longo da imagem vista pelo observador. Isso faz com que o observador veja uma série de franjas claras e escuras, como em (*b*), que resultam da interferência construtiva e destrutiva, respectivamente, dos dois feixes.

Interferômetros de Michelson com braços de até 4 km estão sendo usados atualmente para tentar detectar ondas gravitacionais (veja a Seção 2-5).

Conclusões Em um contexto mais amplo, com base neste e em outros experimentos, devemos concluir que as equações de Maxwell estão corretas e que a velocidade das ondas eletromagnéticas é a mesma em todos os referenciais inerciais, independentemente do movimento da fonte em relação ao observador. Essa invariância da velocidade da luz para os referenciais inerciais significa que deve haver algum princípio de relatividade que se aplique tanto à mecânica quanto ao eletromagnetismo. Tal princípio não pode ser o da relatividade newtoniana, que leva a uma variação da velocidade da luz com a velocidade relativa entre a fonte e o observador. Isso significa que a transformação de Galileu não está correta e deve ser substituída por uma nova transformação de coordenadas que assegure a invariância das leis do eletromagnetismo. As leis fundamentais da mecânica, que eram compatíveis com a transformação de Galileu, devem ser modificadas para que permaneçam invariantes ao serem submetidas à nova transformação. A dedução teórica dessa nova transformação foi uma das pedras fundamentais da teoria da relatividade especial de Einstein.



Leitura Suplementar

Uma descrição mais completa do *experimento de Michelson-Morley*, incluindo a interpretação dos resultados e as versões mais recentes do mesmo, está disponível no site da LTC Editora para este livro, no qual também se encontram as Figuras 1-9 a 1-11 e as Equações 1-7 a 1-10.

1-2 Os Postulados de Einstein

Em 1905, com 26 anos, Albert Einstein publicou vários artigos, entre os quais um sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento.[11] Neste, ele propôs um princípio de relatividade mais abrangente, que se aplicava tanto às leis da mecânica quanto às leis da eletrodinâmica. Uma das consequências desse princípio é que não existe nenhum experimento capaz de detectar o movimento absoluto. Sendo esse o caso, nada nos impede de supor que a Terra e o interferômetro de Michelson estão em repouso, caso em que nenhum deslocamento das franjas é esperado quando o interferômetro gira de 90°, já que todas as direções são equivalentes. O resultado nulo do experimento de Michelson-Morley se torna, portanto, uma consequência natural do princípio da relatividade de Einstein. É preciso ressaltar que Einstein não formulou essa teoria com o intuito de explicar o experimento de Michelson-Morley, mas foi levado a ela por considerações a respeito da teoria da eletricidade e do magnetismo e das propriedades incomuns das ondas eletromagnéticas no espaço livre. No primeiro artigo, que contém a teoria completa da relatividade restrita, Einstein se refere, apenas de passagem, às tentativas experimentais de detectar o movimento da Terra em relação ao éter. Mais tarde, afirmou não lembrar se estava a par dos detalhes do experimento de Michelson-Morley quando propôs a teoria.

A teoria da relatividade restrita se baseia em dois postulados que Einstein menciona explicitamente no artigo de 1905:

Postulado 1. As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais.
Postulado 2. A velocidade da luz no vácuo tem o mesmo valor *c*, qualquer que seja o movimento da fonte.

O Postulado 1 é uma extensão do princípio da relatividade newtoniana para incluir todos os fenômenos físicos, não só os mecânicos, mas também os eletromagnéticos. Uma consequência direta dele é que não existe nenhum referencial inercial privilegiado e, portanto, o movimento absoluto é impossível de se detectar. O Postulado 2 descreve uma propriedade comum a todas as ondas. Assim, por exemplo, a velocidade das ondas sonoras não depende do movimento da fonte. Quando um carro buzina ao se aproximar de uma pessoa, o som ouvido é mais agudo que se o carro estivesse parado (o chamado efeito Doppler), mas a velocidade das ondas não depende da velocidade do carro. Por outro lado, a velocidade das ondas sonoras depende das propriedades do ar, como a densidade do ar e a velocidade com a qual o ar está se movendo. A importância deste postulado está no fato de que coloca as ondas luminosas, que se propagam no vácuo, na mesma categoria que os outros tipos de onda, que necessitam de um meio para se propagar. Uma análise recente do espectro dos raios gama emitidos por fontes situadas perto do limite do universo observável revela que a velocidade da luz não depende da velocidade da fonte com uma precisão de uma parte em 10^{20}.

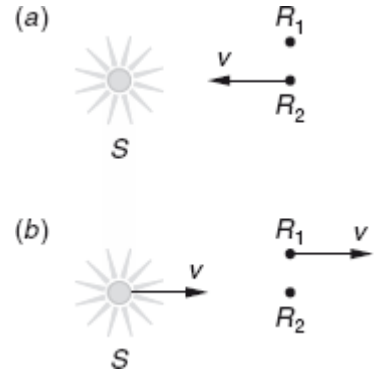


FIGURA 1-12 (*a*) Uma fonte luminosa estacionária S e um observador estacionário R_1, com um segundo observador R_2 se aproximando da fonte com velocidade v. (*b*) No referencial em que o observador R_2 está em repouso, a fonte luminosa S e o observador R_1 se movem para a direita com velocidade v. Se o movimento absoluto não pode ser detectado, os dois pontos de vista são equivalentes. Como a velocidade da luz não depende do movimento da fonte, o observador R_2 mede o mesmo valor para a velocidade da luz que o observador R_1.

Embora os dois postulados, separadamente, pareçam bastante razoáveis, muitos dos resultados obtidos quando são aplicados simultaneamente parecem contrariar o senso comum. Uma importante consequência desses postulados é que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores, independentemente da velocidade relativa entre a fonte e o observador. Considere uma fonte luminosa S e dois observadores: R_1, em repouso em relação a S, e R_2, viajando na direção de S com velocidade v (Figura 1-12*a*). A velocidade da luz medida por R_1 é $c = 3 \times 10^8$ m/s. Qual é a velocidade medida por R_2? A resposta *não* é $c + v$, o resultado que obteríamos aplicando ao problema a transformação de Galileu. De acordo com o Postulado 1, a situação da Figura 1-12*a* equivale à da Figura 1-12*b*, na qual R_2 está em repouso e a fonte S e R_1 estão se movendo com velocidade v. Em outras palavras, como o movimento absoluto é impossível de ser detectado, não sabemos quem está se movendo e quem está em repouso. De acordo com o Postulado 2, a velocidade da luz não depende do movimento da fonte. Assim, olhando para a Figura 1-12*b*, vemos que a velocidade medida por R_2 é c, a mesma medida por R_1. O fato de que a velocidade medida para a luz não depende da velocidade do observador é uma forma alternativa de enunciar o segundo postulado de Einstein.

Este resultado está em desacordo com nossa intuição. O que acontece é que ideias intuitivas a respeito de velocidades relativas são válidas, para todos os efeitos práticos, quando as velocidades são pequenas em comparação com a velocidade da luz. Mesmo em um avião que esteja se movendo com a velocidade do som, não é possível medir a velocidade da luz com precisão suficiente para observar a diferença entre as velocidades c e $c + v$, na qual v é a velocidade do avião. Para perceber essa diferença, devemos examinar um corpo que esteja se movendo com grande velocidade (muito maior do que a velocidade do som) ou realizar medidas extremamente precisas, como no experimento de Michelson-Morley. Quando fazemos isso, descobrimos, como Einstein comentou no primeiro artigo a respeito da relatividade, que as contradições são "apenas aparentemente irreconciliáveis".

Eventos e Observadores

Para examinar as consequências dos postulados de Einstein com maior profundidade, isto é, para estudar a teoria da relatividade restrita, precisamos, em primeiro lugar, definir com precisão alguns termos importantes. O primeiro é o conceito de *evento*. Um evento é algo que acontece, como uma porta que é fechada, um raio que cai, duas partículas que se chocam ou uma estrela que explode. Todo evento ocorre em um certo ponto do espaço e em um dado instante, mas é importante chamar a atenção para o fato de que os eventos não dependem do referencial inercial usado para descrevê-los. Os eventos não "pertencem" a um único referencial.

Os eventos são descritos por *observadores* que, estes sim, estão associados a referenciais inerciais particulares. Os observadores podem ser pessoas (como na Seção 1-1), instrumentos eletrônicos, ou outras formas de aparelhos, mas em nossas discussões da relatividade restrita seremos extremamente específicos. Para nós, o observador será uma série de relógios instalados em vários pontos de referencial inercial. O leitor pode pensar no observador como uma pessoa que circula pelo referencial observando os mostradores dos relógios ou recebe remotamente as informações registradas nos relógios, mas precisa ter em mente que essa pessoa deve se basear apenas nos dados dos relógios. Em particular, já que a luz leva um tempo finito para se propagar, um observador não pode se basear em uma informação colhida visualmente em um relógio distante. É neste sentido que estaremos usando a palavra *observador* em nossas discussões.



(*Esquerda*) Albert Einstein, em 1905, no escritório de patentes de Berna, na Suíça. [*Hebrew University of Jerusalem Albert Einstein Archives, cortesia de AIP Emilio Segrè Visual Archives*.] (*Direita*) Bonde e torre com relógio na Kramstrasse, a rua onde Einstein morava em Berna. Se uma pessoa estivesse no bonde em movimento, afastando-se do relógio, e olhasse para trás, a luz do relógio levaria um certo tempo para alcançá-la. Caso o bonde estivesse se movendo com uma velocidade próxima da velocidade da luz, o relógio visto por um passageiro apresentaria um atraso significativo em relação ao relógio visto por um observador estacionário. Esse tipo de raciocínio levou Einstein à conclusão de que o tempo não era uma grandeza absoluta. [*Underwood & Underwood/CORBIS.*]

Podemos imaginar um referencial inercial como uma rede tridimensional cúbica formada por réguas de mesmo comprimento (um metro, digamos) com um relógio em cada vértice, como na Figura 1-13. Os relógios são todos iguais e, naturalmente, queremos que indiquem "a mesma hora", isto é, que estejam *sincronizados*. Existem várias formas de sincronizá-los, mas um método muito simples, baseado no segundo postulado, consiste em usar um dos relógios da rede como padrão, ou *relógio de referência*. Por conveniência, vamos escolher como relógio de referência aquele que está situado na origem dos eixos do referencial. O relógio de referência é colocado para funcionar com o indicador (ponteiro ou mostrador digital) em zero. Nesse momento, também é gerado um sinal luminoso que se espalha como uma onda esférica em todas as direções. Quando esse sinal chega aos relógios que se encontram a 1 m de distância (observe na Figura 1-13 que existem seis relógios nessa situação, dois dos quais estão fora dos limites da figura), queremos que os indicadores mostrem o tempo necessário para que a luz percorra uma distância de 1 m (= 1/299.792.458 s). Para isso, basta ajustar o indicador de cada relógio para esse valor e programá-lo para começar a funcionar no momento em que for atingido pelo raio luminoso. Com isso, os relógios situados a 1 m da origem passarão a indicar o mesmo tempo que o relógio de referência, isto é, estarão sincronizados com ele. Todos os relógios do referencial inercial podem ser sincronizados da mesma forma, já que a distância de qualquer relógio ao relógio de referência pode ser calculada a partir das coordenadas espaciais do relógio além disso, essa distância pode ser usada para calcular o valor inicial para o qual deve ser ajustado o indicador do relógio com base no tempo de percurso do raio luminoso. Observe que esse método pode ser usado para sincronizar todos os relógios de um referencial inercial, *mas* não serve para sincronizar os relógios de dois referenciais inerciais diferentes que estejam se movendo um em relação ao outro. Na verdade, como veremos a seguir, os relógios de dois referenciais diferentes não podem ser sincronizados, a não ser em casos especiais.

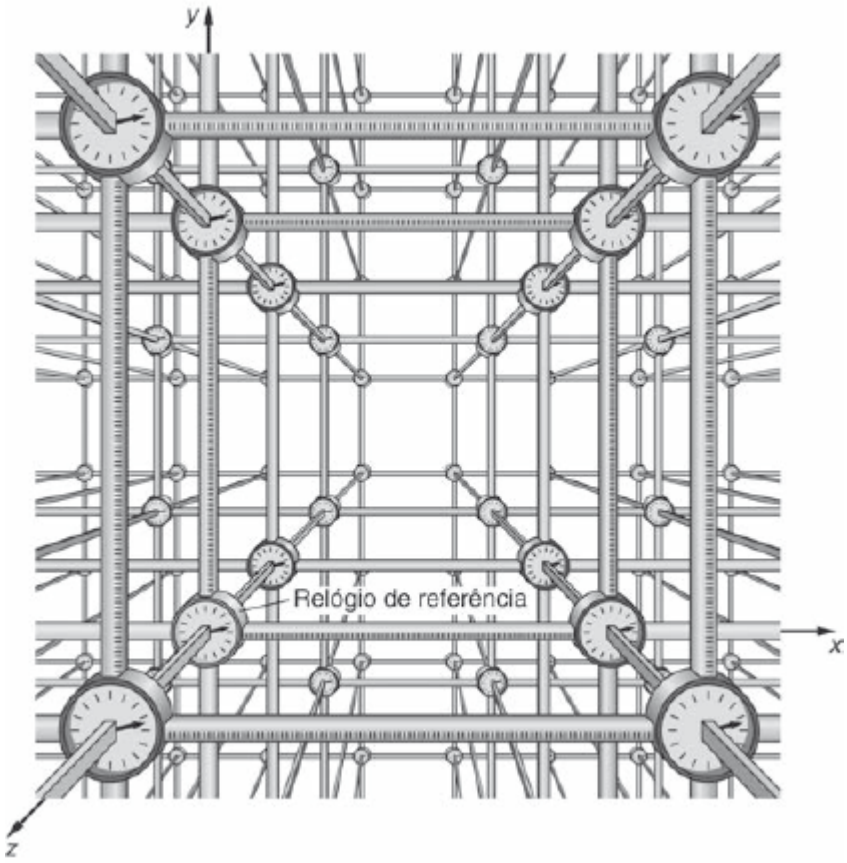


FIGURA 1-13 Referencial inercial formado por uma rede de réguas com um relógio em cada vértice. Os relógios são todos sincronizados a partir de um relógio de referência. As réguas têm 1 m de comprimento neste diagrama, mas poderiam ter 1 cm, 1 μm ou 1 km, dependendo da escala e da precisão das medidas executadas. As três dimensões espaciais são as posições dos relógios. A quarta dimensão do espaço-tempo, o tempo, é representada pelas leituras dos relógios.

Quando um evento acontece, a sua localização no espaço e no tempo é registrada instantaneamente pelo relógio mais próximo. Suponha que um átomo localizado em $x = 2$ m, $y = 3$ m, $z = 4$ m na Figura 1-13 emita luz no momento em que o relógio local está marcando $t = 21$ s. Esse evento é descrito por quatro coordenadas no espaço e no tempo (ou, como diremos daqui em diante, por coordenadas no *espaço-tempo*), ou seja, pelo conjunto de números (2, 3, 4, 21). O observador pode ler e analisar essa informação no momento que quiser, dentro dos limites estabelecidos pela velocidade de transmissão, que não pode ser maior do que a velocidade de luz. Assim, por exemplo, a trajetória de uma partícula é revelada pela análise dos registros que mostram o momento em que a partícula passou pelos diferentes relógios. O conhecimento das distâncias entre posições sucessivas e dos intervalos de tempo correspondentes permite determinar a velocidade da partícula. Naturalmente, é possível obter registros semelhantes das coordenadas da partícula no espaço-tempo usando outro referencial inercial que esteja em movimento em relação ao primeiro. Entretanto, para comparar as distâncias e intervalos de tempo medidos nos dois referenciais, é preciso levar em conta a relatividade da simultaneidade.

A Relatividade da Simultaneidade

Os postulados de Einstein levam a algumas previsões a respeito dos resultados de medidas feitas por observadores situados em diferentes referenciais inerciais que, a princípio, parecem estranhas ou mesmo absurdas, mas foram comprovadas experimentalmente. Na verdade, quase todos os supostos paradoxos podem ser explicados se reconhecermos que os postulados da relatividade restrita são compatíveis com a *relatividade da simultaneidade*, segundo a qual

> Dois eventos que são simultâneos em um referencial não são simultâneos em outro referencial inercial que esteja se movendo em relação ao primeiro.

Um corolário da afirmação anterior é o seguinte:

> Dois relógios que estão sincronizados em um referencial não estão sincronizados em outro referencial inercial que esteja se movendo em relação ao primeiro.

O que queremos dizer com eventos simultâneos? Suponha que dois observadores, ambos situados no referencial *S*, um no

ponto A e outro no ponto B, tenham combinado fazer explodir bombas no instante t_0 (lembre-se de que os relógios de S estão sincronizados). O relógio que se encontra no ponto C, equidistante de A e de B, registrará a chegada da luz proveniente das duas explosões no mesmo instante. Outros relógios de S registrarão primeiro a chegada da luz emitida pela bomba que explodiu em A ou em B, dependendo da localização, mas, depois de corrigidos para levar em conta o tempo de percurso da luz, os dados registrados por todos os relógios indicarão que as duas explosões foram simultâneas. *Vamos, portanto, definir dois eventos como simultâneos em um referencial inercial se os sinais luminosos associados a eles forem vistos simultaneamente por um observador situado em um ponto equidistante dos dois eventos, de acordo com a indicação de um relógio situado na posição desse observador*, que recebe o nome de relógio local.

O Exemplo de Einstein Para mostrar que dois eventos simultâneos no referencial S não são simultâneos em um referencial S' que esteja se movendo em relação a S, vamos usar um exemplo proposto por Einstein. Um trem está passando pela plataforma de uma estação, com velocidade v. Três observadores, A', B' e C', estão situados no primeiro vagão, no vagão central e no último vagão do trem. (Vamos associar o referencial S' ao trem e o referencial S à plataforma da estação.) Suponhamos que o trem e a plataforma sejam atingidos por dois relâmpagos, um no primeiro vagão e outro no último, e que os relâmpagos sejam simultâneos no referencial da plataforma, S (Figura 1-14*a*). Em outras palavras, um observador situado em C, a meio caminho entre A e B, observa os dois raios simultaneamente. É conveniente supor que o raio deixa o trem e a plataforma chamuscados, pois, nesse caso, os eventos podem ser localizados com facilidade nos dois referenciais. Como o observador C' está no centro do trem, a meio caminho entre os pontos que foram chamuscados pelo raio, os dois eventos seriam simultâneos em S' apenas se fossem observados ao mesmo tempo por C'. Entretanto, C' observa o raio que atingiu o primeiro vagão antes de observar o raio que atingiu o último. No referencial S, quando a luz proveniente do raio que atingiu os pontos A e A' chega ao ponto C', o trem se deslocou de uma certa distância em direção a A e, por isso, a luz proveniente do raio que atingiu os pontos B e B' ainda não chegou a C', como mostra a Figura 1-14*b*. O observador em C' chega, portanto, à conclusão de que os eventos não foram simultâneos, mas o raio que atingiu a parte da frente do trem aconteceu primeiro. As Figuras 1-14*c* e 1-14*d* ilustram, respectivamente, a chegada simultânea dos dois clarões ao ponto C e a chegada (posterior) ao ponto C' do clarão proveniente do raio que atingiu o último vagão. Na verdade, todos os observadores estacionários em relação ao referencial S' obtêm o mesmo resultado que o observador em C', depois de levarem em conta o tempo de percurso da luz.

Corolário do Exemplo de Einstein O corolário pode ser demonstrado por meio de um exemplo semelhante. Considere novamente um trem em repouso no referencial S' que esteja passando com velocidade v por uma plataforma em repouso no referencial S. A Figura 1-15 mostra três relógios do referencial S e três do referencial S'. Os relógios dos dois referenciais foram sincronizados da forma descrita anteriormente, mas os relógios de S não estão sincronizados com os de S'. Um observador que esteja no ponto C da plataforma, a meio caminho entre A e B, anuncia que duas lâmpadas localizadas em A e B irão acender quando os relógios desses dois pontos marcarem t_0 (Figura 1-15*a*). Um observador que esteja em C', a meio caminho entre A' e B', verá a luz produzida pela lâmpada que foi acesa em A (Figura 1-15*b*) *antes* de ver a luz produzida pela lâmpada que foi acesa em B (Figura 1-15*d*). Ele concluirá que se as lâmpadas foram acesas no momento em que os relógios em A e B marcavam t_0, conforme anunciado, os relógios em A e B não podem estar sincronizados. Depois de levarem em conta o tempo de percurso da luz, todos os observadores situados no referencial S' concordarão com essa conclusão. Por outro lado, o observador em C observará as duas luzes simultaneamente, já que todos os relógios de S estão sincronizados (Figura 1-15*c*). Observe ainda, na Figura 1-15, que o observador em C' também conclui que o relógio de A está adiantado em relação ao relógio de B. Essa conclusão é importante, e voltaremos a ela em breve. Já a Figura 1-16 ilustra a relatividade da simultaneidade de um ponto de vista diferente.

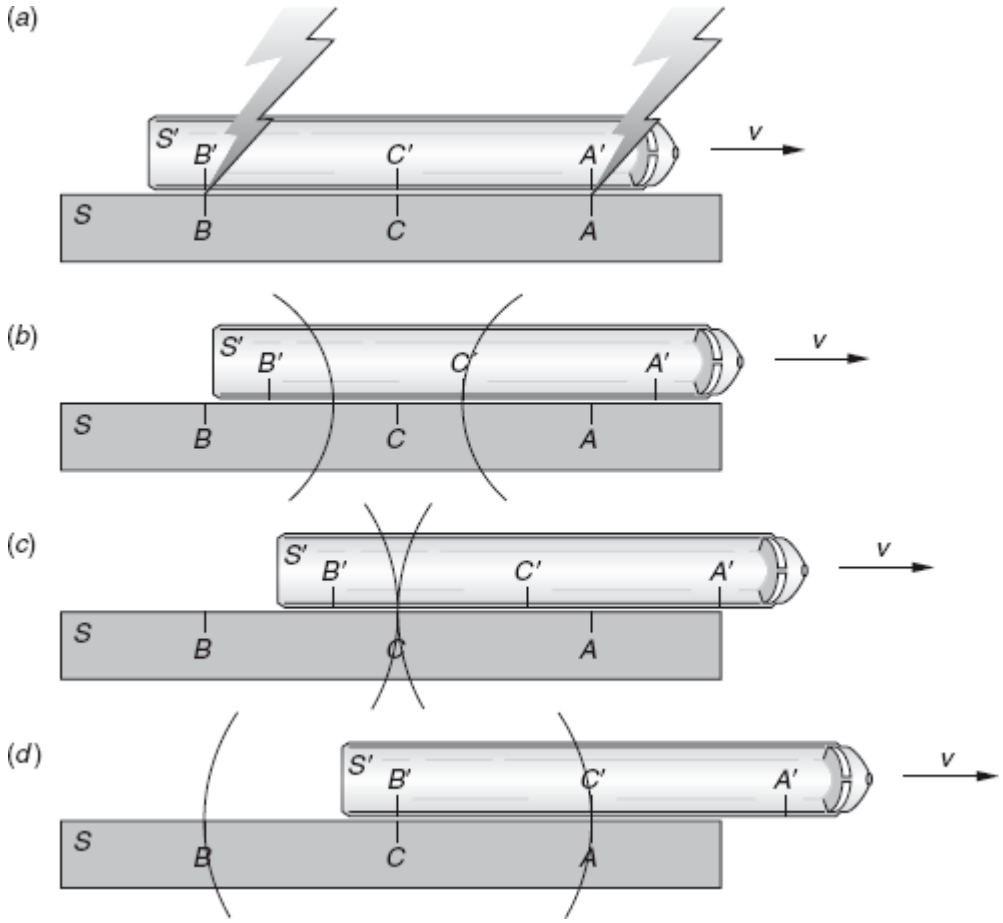


FIGURA 1-14 Dois relâmpagos atingem as extremidades de um trem, chamuscando tanto o trem quanto a plataforma, no momento em que o trem (referencial *S*′) está passando pela plataforma (referencial *S*) com velocidade *v*. (*a*) Os relâmpagos ocorrem simultaneamente em *S* e são vistos simultaneamente pelo observador *C*, localizado na plataforma, a meio caminho entre *A* e *B* (*c*). Em *S*′, o relâmpago que atingiu o primeiro vagão é visto antes do relâmpago que atingiu o último vagão pelo observador *C*′, localizado no trem, a meio caminho entre os pontos que foram chamuscados pelo raio (*b* e *d*, respectivamente). Assim, o observador em *C*′ conclui que os relâmpagos não foram simultâneos.

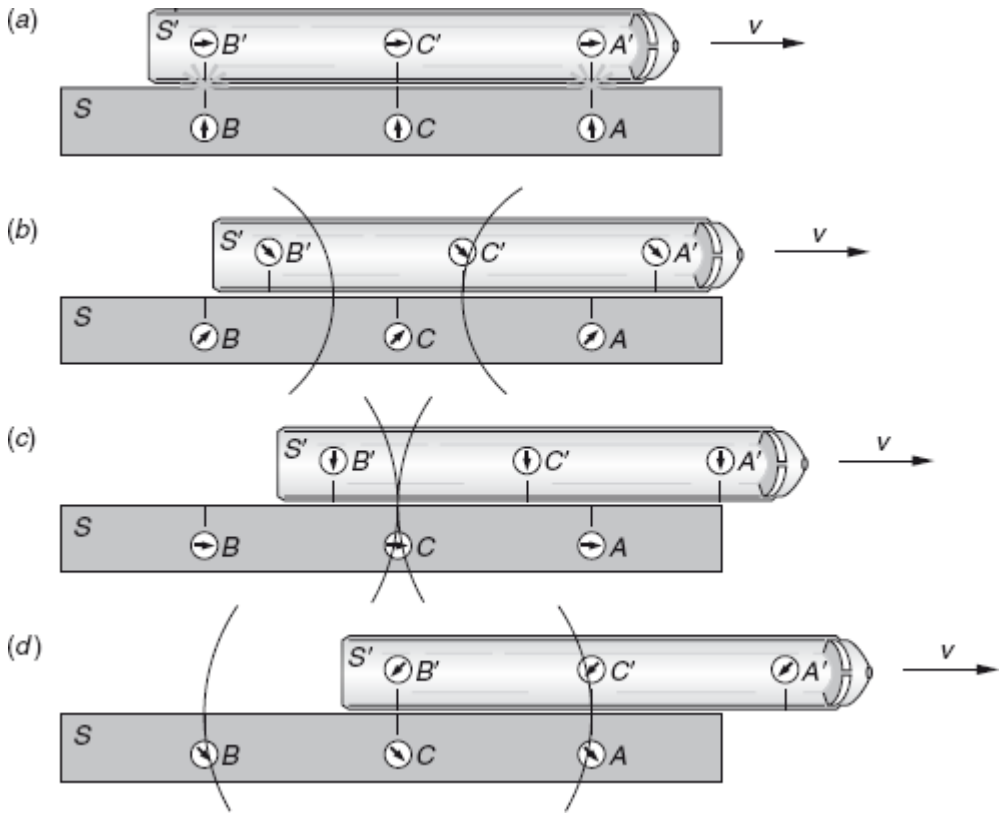


FIGURA 1-15 (*a*) Duas lâmpadas são acesas simultaneamente nos pontos *A* e *B*, onde existem relógios sincronizados em *S*. (*b*) O observador situado em *C*′, a meio caminho entre *A*′ e *B*′ no trem em movimento, registra a chegada do raio luminoso proveniente de *A*

antes da chegada do raio proveniente de B, mostrada em (d). Como o observador em S anunciou que as lâmpadas seriam acesas no instante t_0 de acordo com os relógios locais, o observador em C' conclui que os relógios locais em A e B não indicaram simultaneamente o instante t_0, isto é, que não estavam sincronizados. (c) Os dois raios são vistos simultaneamente por um observador situado em C.

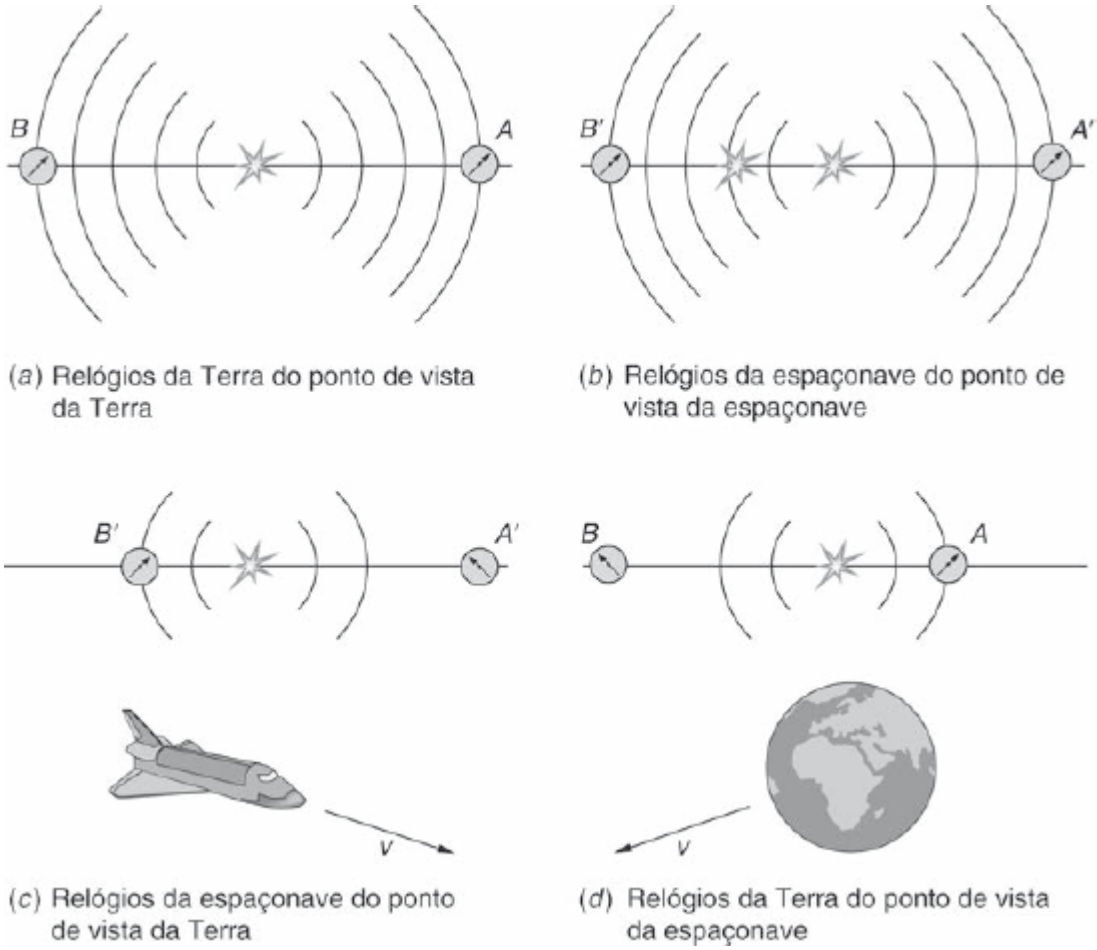


FIGURA 1-16 Um clarão é produzido na Terra, no ponto médio entre dois relógios situados da Terra. No instante em que a luz é emitida, o ponto médio de uma espaçonave em movimento coincide com a fonte luminosa. (a) Os relógios da Terra registram a chegada simultânea dos raios luminosos, o que significa que os relógios estão sincronizados. (b) Os relógios situados nas extremidades da espaçonave também registram a chegada simultânea dos raios luminosos (segundo postulado de Einstein), o que significa que os relógios da espaçonave também estão sincronizados. (c) Entretanto, o observador da Terra vê a luz chegar ao relógio que está em B' *antes* de chegar ao relógio que está em A'. Como os relógios da espaçonave mostram a mesma hora no instante em que são atingidos pelos raios luminosos, o observador da Terra conclui que os relógios da espaçonave, A' e B', não estão sincronizados. (d) Um observador a bordo da espaçonave conclui que os relógios da Terra, A e B, não estão sincronizados.

Exercícios

3. Cite pelo menos mais um método para sincronizar todos os relógios de um referencial inercial além do que é descrito no texto.

4. Use a Figura 1-16*d* para explicar por que um observador a bordo da espaçonave chega à conclusão de que os relógios da Terra não estão sincronizados.

1-3 A Transformação de Lorentz

Vamos agora discutir uma importante consequência dos postulados de Einstein, a relação geral entre as coordenadas do espaço-tempo x, y, z e t de um evento em um referencial S e as coordenadas x', y', z' e t' do mesmo evento em um referencial S' que esteja se movendo com velocidade uniforme em relação a S. Para simplificar os cálculos, vamos considerar apenas o caso especial no qual as origens dos dois sistemas de coordenadas coincidem no instante $t = t' = 0$ e S' está se movendo em relação a S com velocidade v ao longo do eixo x (ou x') e com os eixos y'e z' paralelos, respectivamente, aos eixos y e z (Figura 1-17). Como vimos, a transformação clássica ou transformação de Galileu é a Equação 1-2,

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t \qquad \textbf{1-2}$$

que expressa os valores das coordenadas medidos por um observador em S' em termos dos valores medidos por um observador em S. A transformação inversa é

$$x = x' + vt' \quad y = y' \quad z = z' \quad t = t'$$

que simplesmente reflete o fato de que o sinal da velocidade relativa dos referenciais é diferente para os dois observadores. A transformação clássica de velocidades é a Equação 1-2 e a transformação de acelerações, como vimos, é invariante para uma transformação de Galileu. (Deste ponto em diante, vamos ignorar as equações para os eixos y e z, que são $y' = y$ e $z' = z$ na situação especial descrita no início desta seção.) As Equações 1-2, 1-3 e 1-4 estão de acordo com os resultados experimentais para $v << c$.

A essa altura, deve ser evidente para o leitor que a transformação clássica de velocidades não é compatível com os postulados de Einstein da relatividade restrita. Se a luz se propaga ao longo do eixo x com velocidade c no referencial S, a velocidade no referencial S', de acordo com a Equação 1-3, deveria ser $u'_x = c - v$, e não $u'_x = c$. As equações da transformação de Galileu devem, portanto, ser modificadas para se tornarem compatíveis com os postulados de Einstein, mas de uma forma tal que se reduzam às equações clássicas para $v << c$. Vamos mostrar em seguida uma das formas de obter a transformação correta, que recebe o nome de *transformação de Lorentz* em homenagem ao descobridor, H. A. Lorentz.[12] Suponhamos que a equação correta para x' seja da forma

$$x' = \gamma(x - vt) \qquad \textbf{1-11}$$

em que Δ é uma constante que pode depender de v e c, mas não das coordenadas. Para que a Equação 1-11 se reduza às equações clássicas, é preciso que $\gamma \rightarrow 1$ quando $v/c \rightarrow 0$. A transformação inversa deve ser semelhante, a não ser pelo sinal da velocidade:

$$x = \gamma(x' + vt') \qquad \textbf{1-12}$$

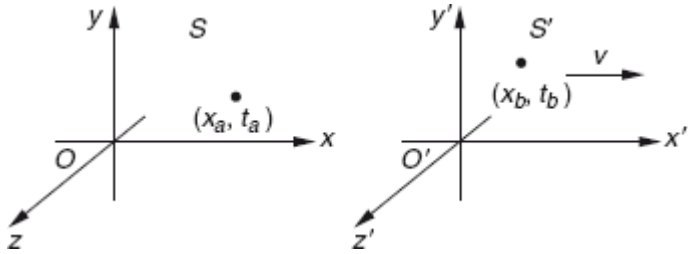


FIGURA 1-17 Dois referenciais inerciais, S e S', com o segundo se movendo com uma velocidade v no sentido positivo do eixo x do sistema S. Os sistemas de eixos podem ser considerados como os eixos coordenados de duas redes como a rede da Figura 1-13, com um relógio em cada vértice. Pouco antes do instante representado na figura, as origens O e O' coincidiam e as duas redes estavam superpostas.

Se os eixos estiverem dispostos como na Figura 1-17, não haverá movimento relativo entre os referenciais nas direções y e z; portanto, $y' = y$ e $z' = z$. Por outro lado, a introdução do multiplicador γ, de valor ainda desconhecido, modifica a transformação clássica dos tempos, $t' = t$. Para mostrar que isso é verdade, basta substituir x', dado pela Equação 1-11, na Equação 1-12 e explicitar t'. O resultado é o seguinte:

$$t' = \gamma\left[t + \frac{(1 - \gamma^2)}{\gamma^2}\frac{x}{v}\right] \qquad \textbf{1-13}$$

Suponha que uma lâmpada seja acesa na origem de S em $t = 0$. Como estamos supondo que as origens coincidem em $t = t' = 0$, a lâmpada também é acesa na origem de S' em $t' = 0$. A luz se expande a partir das *duas* origens na forma de uma onda esférica. Do ponto de vista de um observador em S, a equação da frente de onda é

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \qquad \textbf{1-14}$$

enquanto, do ponto de vista de um observador em S', é

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \qquad \textbf{1-15}$$

observe que as duas equações são compatíveis com o segundo postulado. Para que sejam também compatíveis com o primeiro, é preciso que a transformação relativística que estamos buscando transforme a Equação 1-14 na Equação 1-15, e vice-versa. Assim, por exemplo, substituindo as Equações 1-11 e 1-13 na Equação 1-15, devemos obter a Equação 1-14. Para isso, é necessário que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad \textbf{1-16}$$

na qual $\beta = v/c$. Note que $\gamma = 1$ para $v = 0$ e $\gamma - \infty$ para $v = c$. O cálculo de γ é objeto do Exemplo 1-2.

EXEMPLO 1-2 **Cálculo da Constante γ da Transformação de Lorentz** Mostre que a constante γ deve ser dada pela Equação 1-16 para que a Equação 1-15 se transforme na Equação 1-14, como exige o primeiro postulado de Einstein.

SOLUÇÃO

Substituindo as Equações 1-11 e 1-13 na Equação 1-15 e levando-se em conta que $y' = y$ e $z' = z$, temos:

$$\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2\gamma^2\left[t + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2}\frac{x}{v}\right]^2 \qquad \textbf{1-17}$$

De acordo com o primeiro postulado, a Equação 1-15 deve ser igual à Equação 1-14. Para isso, é preciso que o coeficiente do termo em x^2 da Equação 1-17 seja igual a 1, que o coeficiente do termo em t^2 seja igual a c^2 e que o coeficiente do termo em xt seja igual a 0. Qualquer dessas condições pode ser usada para determinar o valor de γ; todas levam ao mesmo resultado. Usando, por exemplo, o coeficiente de x^2 na Equação 1-17, obtemos:

$$\gamma^2 - c^2\gamma^2\frac{(1 - \gamma^2)^2}{\gamma^4 v^2} = 1$$

que pode ser escrita na forma

$$-c^2\frac{(1 - \gamma^2)^2}{\gamma^2 v^2} = (1 - \gamma^2)$$

Dividindo ambos os membros por $1 - \gamma^2$ e explicitando γ, temos:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Usando o valor de γ calculado no Exemplo 1-2, podemos escrever a Equação 1-13 em uma forma mais simples. A transformação de Lorentz, completa, se torna:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) & y' &= y \\ t' &= \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) & z' &= z \end{aligned} \qquad \textbf{1-18}$$

e a transformação inversa:

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') & y &= y' \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) & z &= z' \end{aligned} \qquad \textbf{1-19}$$

em que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

EXEMPLO 1-3 **Transformação de Intervalos de Tempo** A chegada de dois léptons μ (múons) produzidos por raios cósmicos é registrada em um laboratório, um no instante t_a e na posição x_a e outro no instante t_b e na posição x_b do referencial do laboratório, S na Figura 1-17. Qual é o intervalo de tempo entre os dois eventos no referencial S', que se move com velocidade v em relação ao referencial S?

SOLUÇÃO

Usando a transformação de tempos dada pela Equação 1-18, temos:

$$t'_b - t'_a = \gamma\left(t_b - \frac{vx_b}{c^2}\right) - \gamma\left(t_a - \frac{vx_a}{c^2}\right)$$

$$t'_b - t'_a = \gamma(t_b - t_a) - \frac{\gamma v}{c^2}(x_b - x_a) \qquad \textbf{1-20}$$

Podemos ver que o intervalo de tempo medido em S' depende não só do intervalo de tempo correspondente em S, mas também da distância entre os relógios de S com os quais o intervalo foi medido. Esse resultado não deve ser considerado surpreendente, já que, como vimos, os relógios de S estão sincronizados do ponto de vista de um observador em S, mas não do ponto de vista de um observador em outro referencial inercial.

Caso Especial 1

Quando os eventos ocorrem no mesmo local de S, isto é, quando $x_a = x_b$, a diferença $t_b - t_a$, que no caso é o intervalo de tempo medido por um único relógio, é chamada de *intervalo de tempo próprio*. Observe que, como $\gamma > 1$ para todos os referenciais inerciais em movimento em relação a S, o intervalo de tempo próprio é o *menor* intervalo de tempo que pode ser medido para esses eventos.

Caso Especial 2

Existe algum referencial inercial para o qual os eventos descritos acima sejam simultâneos? Já que formulamos esta pergunta, o leitor deve ter suspeitado que a resposta seja afirmativa, e ele está certo. Os dois eventos serão simultâneos em um referencial S'' para o qual $t''_b - t''_a = 0$, ou seja, para o qual

$$\gamma(t_b - t_a) = \frac{\gamma v}{c^2}(x_b - x_a)$$

ou

$$\beta = \frac{v}{c} = \left(\frac{t_b - t_a}{x_b - x_a}\right)c \qquad \textbf{1-21}$$

Observe que a relação $(x_b - x_a)/c$ é igual ao tempo que um raio luminoso leva para se propagar de x_a a x_b. Podemos, portanto, definir S'' como o referencial cuja velocidade em relação a S é a fração de c dada pelo intervalo de tempo entre os eventos dividido pelo tempo que a luz leva para se propagar de um até outro. (Note, também, que, para que $c(t_b - t_a) > x_b - x_a$, seria preciso que $v > c$, uma condição fisicamente inaceitável, como será discutido na Seção 1-4.)

Embora seja possível estudar a relatividade restrita sem usar a transformação de Lorentz, esta transformação tem uma aplicação muito importante: permite que as coordenadas no espaço-tempo de eventos medidos com réguas e relógios no referencial de um observador sejam convertidas em coordenadas medidas com réguas e relógios no referencial de outro observador que esteja se movendo com velocidade constante em relação ao primeiro. Como veremos na Seção 1-4, isso pode levar a resultados muito curiosos.

Transformação Relativística de Velocidades

A transformação de velocidades na relatividade restrita pode ser obtida derivando a transformação de Lorentz. Suponha que uma partícula esteja se movendo em S com uma velocidade **u** de componentes $u_x = dx/dt$, $u_y = dy/dt$ e $u_z = dz/dt$. Um observador em S' medirá as componentes $u'_x = dx'/dt'$, $u'_y = dy'/dt'$ e $u'_z = dz'/dt'$. Usando as equações da transformação de Lorentz, temos:

$$dx' = \gamma(dx - vdt) \qquad dy' = dy$$

$$dt' = \gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right) \qquad dz' = dz$$

e, portanto,

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{(dx/dt - v)}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}}$$

ou

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}} \qquad \textbf{1-22}$$

se a velocidade da partícula tem componentes nas direções y e z, não é difícil mostrar que

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \qquad u'_z = \frac{u_z}{\gamma\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

É importante notar que esta forma da transformação de velocidades é válida apenas para o caso especial em que os dois referenciais estão relacionados como na Figura 1-17. Observe também que, para $v << c$, ou seja, para $\beta = v/c \approx 0$, a transformação relativística de velocidades se reduz à transformação clássica (Equação 1-3). A transformação de velocidades inversa é a seguinte:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} \quad u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} \quad u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} \qquad \textbf{1-23}$$

EXEMPLO 1-4 **Velocidade Relativística dos Raios Cósmicos** Suponha que dois prótons se aproximem da Terra vindo de direções opostas (Figura 1-18*a*). As velocidades dos prótons, medidas no referencial da Terra, são $v_1 = 0{,}6c$ e $v_2 = -0{,}8c$. Qual é a velocidade da Terra medida no referencial de cada próton e qual a velocidade dos prótons um em relação ao outro?

SOLUÇÃO

Considere os referenciais das partículas e o referencial da Terra como os referenciais inerciais S', S'' e S, respectivamente, com os eixos dos x alinhados (Figura 1-18*b*). Nesse caso, $v_1 = u_{1x} = 0{,}6c$ e $v_2 = u_{2x} = -0{,}8c$. Assim, a velocidade da Terra medida em S' é $v'_{Tx} = -0{,}6c$ e a velocidade da Terra medida em S'' é $v''_{Tx} = 0{,}8c$.

Para determinar a velocidade do próton 2 em relação ao próton 1, usamos a Equação 1-22 para calcular o valor de u'_{2x}, ou seja, a velocidade da partícula 2 em S'. Sabemos que a velocidade da partícula 2 em S é $u_{2x} = -0{,}8c$ e que o referencial S' está se movendo com uma velocidade $v_1 = 0{,}6c$ em relação a S. Nesse caso, de acordo com a Equação 1-22, temos:

$$u'_{2x} = \frac{-0{,}8c - (0{,}6c)}{1 - (0{,}6c)(-0{,}8c)/c^2} = \frac{-1{,}4c}{1{,}48} = -0{,}95c$$

e, portanto, do ponto de vista do primeiro próton, o segundo está se aproximando (já que se move no sentido negativo do eixo x') com uma velocidade de $0{,}95c$.

Naturalmente, a medida do observador em S'' deve ser compatível com a medida do observador em S', ou seja, do ponto de vista do segundo próton, o primeiro deve estar se aproximando com uma velocidade de $0{,}95c$. Podemos verificar que isso é verdade usando a Equação 1-22 para calcular u''_{1x}:

$$u''_{1x} = \frac{0{,}6c - (-0{,}8c)}{1 - (0{,}6c)(-0{,}8c)/c^2} = \frac{1{,}4c}{1{,}48} = 0{,}95c$$

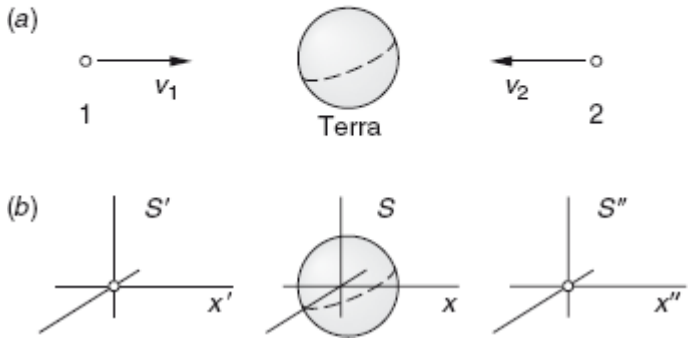


FIGURA 1-18 (*a*) Dois prótons se aproximam da Terra vindo de direções opostas com velocidades v_1 e v_2 em relação à Terra. (*b*) Associando referenciais inerciais à Terra e às duas partículas, podemos visualizar as velocidades relativas envolvidas e aplicar corretamente a transformação de velocidades.

Exercícios

5. A transformação de Lorentz para os eixos y e z é igual à transformação clássica: $y' = y$ e $z' = z$. Entretanto, a transformação relativística de velocidades, $u'_y = u_y/\gamma(1 - vu_x/c^2)$, $u'_z = u_z/\gamma(1 - vu_x/c^2)$, não é igual à transformação clássica, $u'_y = u_y$, $u'_z = u_z$. Por quê?

6. Como, no caso geral, as três componentes da velocidade de uma partícula em movimento não são iguais em diferentes referenciais inerciais, a *direção* do vetor velocidade também é diferente. Explique por que o fato de observadores em S e S' considerarem que a mesma partícula está se movendo em direções diferentes não constitui uma incongruência.

Diagramas Espaço-tempo

A descoberta da física relativística de que os intervalos de tempo entre eventos não são iguais para observadores em diferentes referenciais inerciais ressalta o caráter quadridimensional do espaço-tempo. Com os diagramas que usamos até agora, é difícil representar em duas dimensões eventos que ocorrem em instantes diferentes, já que cada diagrama equivale a uma "fotografia" do espaço-tempo em um determinado instante. Para mostrar eventos que variam com o tempo, torna-se necessário recorrer a uma série de diagramas, como os que aparecem nas Figuras 1-14, 1-15 e 1-16. Mesmo assim, a atenção do leitor tende a ser atraída para os sistemas de coordenadas espaciais e não para os *eventos*, que são o que realmente importa. Esse problema é resolvido na relatividade restrita com o uso de um tipo especial de representação denominado *diagrama espaço-tempo*. (Este é apenas um novo nome atribuído às curvas de t em função de x usadas para discutir o movimento nos cursos de física básica.) Nos diagramas espaço-tempo, podemos representar as coordenadas especiais e temporais de muitos eventos em um ou mais referenciais inerciais, embora com uma limitação. Como é possível representar apenas duas dimensões no papel, temos que ignorar duas dimensões espaciais, normalmente as dimensões y e z. Na verdade, da forma como definimos o movimento relativo entre S e S' (Figura 1-17), $y' = y$ e $z' = z$, de modo que todas as mudanças importantes ocorrem ao longo do eixo dos x. (Esta é uma das razões para nossa escolha; a outra é a simplicidade matemática.) Isso significa que, no momento, vamos limitar nossa atenção ao tempo e a uma das coordenadas espaciais, ou seja, a eventos que ocorrem em apenas uma dimensão do espaço. Caso seja necessário considerar as outras duas dimensões, como acontece na transformação relativística de velocidades, podemos recorrer às equações da transformação de Lorentz.

Nos diagramas espaço-tempo, as posições dos eventos são representadas em um eixo horizontal, denominado *eixo x*, e os instantes em que ocorrem os eventos são representados em um eixo vertical, denominado *eixo ct*. Em vez do arranjo tridimensional de réguas e relógios que aparece na Figura 1-13, usamos apenas os relógios localizados no eixo x (Figura 1-19). (Como o leitor pode ver, as coisas já começam a ficar mais simples!) Como os eventos que exibem efeitos relativísticos quase sempre ocorrem em altas velocidades, é conveniente multiplicar a escala de tempos pela velocidade da luz (uma constante), o que permite usar a mesma escala e as mesmas unidades nos eixos espacial e temporal (metros de distância e metros percorridos pela luz, por exemplo).[13] É por isso que o eixo dos tempos é chamado de ct, onde c normalmente é a velocidade de luz em metros por segundo e t é o tempo em segundos. Como veremos, essa forma de representar os eventos distribui melhor os pontos sobre o gráfico e facilita a introdução de outros referenciais inerciais na figura.

Observe na Figura 1-19 que, com o passar do tempo, os relógios se movem verticalmente para cima ao longo das linhas tracejadas. Assim, quando os eventos *A*, *B*, *C* e *D* ocorrem no espaço-tempo, existe sempre um relógio nas proximidades do evento. Como os relógios do referencial estão sincronizados, a diferença entre as leituras dos relógios localizados nas proximidades dos eventos corresponde ao *intervalo de tempo próprio* entre os eventos (veja o Exemplo 1-3). Na figura, os eventos *A* e *D* ocorrem no mesmo local (x = 2 m), embora em instantes diferentes. O intervalo de tempo entre esses eventos, medido pelo relógio 2, é um intervalo de tempo próprio, já que o relógio 2 está situado nas proximidades dos *dois* eventos. Os eventos *A* e *B* ocorrem em locais diferentes, mas ao mesmo tempo (isto é, simultaneamente) nesse referencial. O evento *C* ocorreu no passado, já que $ct = -1$ m para este evento. (Nesta discussão, estamos considerando o instante em que as origens dos sistemas de coordenadas coincidem, $ct = ct' = 0$, como o instante presente.)

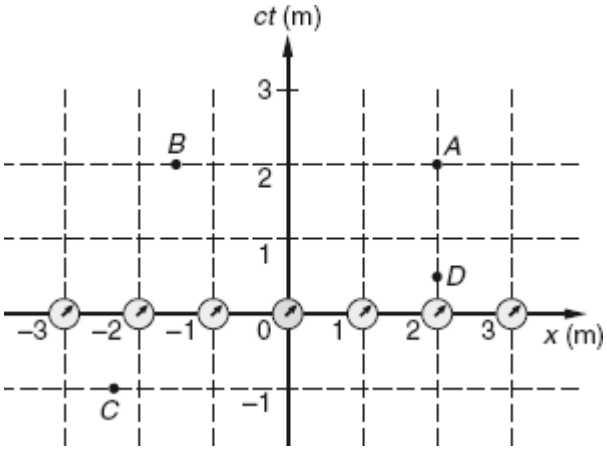


FIGURA 1-19 Diagrama espaço-tempo para um referencial inercial *S*. Duas das dimensões espaciais (y e z) foram suprimidas. A mesma unidade (o metro) é usada para o eixo espacial e o eixo temporal. Um metro de tempo corresponde ao tempo necessário para que a luz percorra um metro, ou seja, $3{,}3 \times 10^{-9}$ s.

Linhas do Universo no Espaço-Tempo O lugar geométrico das posições ocupadas por uma partícula no diagrama espaço-tempo é denominado *linha do universo* da partícula. A linha do universo é a "trajetória" da partícula no gráfico de ct em função de x. Considere, por exemplo, quatro partículas em movimento. A Figura 1-20*a* mostra o conjunto de relógios sincronizados associados aos diferentes pontos do eixo dos x e as trajetórias no espaço (não no espaço-tempo) das quatro partículas, todas partindo do ponto $x = 0$ e se movendo com velocidade constante durante um tempo $ct = 3$ m. A Figura 1-20*b* mostra as linhas do universo das mesmas partículas no espaço-tempo. Como a velocidade das partículas é constante, as linhas do universo têm inclinação constante (são linhas retas), já que a inclinação de uma curva no diagrama espaço-tempo é proporcional ao inverso da velocidade (inclinação = $\Delta t/\Delta x = 1/(\Delta x/\Delta t) = 1/$velocidade). A mesma coisa acontece nas curvas de t em função de x dos cursos de física básica. Já naquela época, o leitor, sem saber, estava plotando trajetórias no espaço-tempo e desenhando linhas do universo! Quando a velocidade da partícula está aumentando ou diminuindo, como acontece com as partículas 5 e 6, respectivamente, da Figura 1-20*c*, as linhas do universo não são retas. Assim, a linha do universo é o registro do percurso da partícula no espaço-tempo, pois fornece a velocidade (1/inclinação) e a aceleração (1/taxa de variação da inclinação) da partícula a cada instante.

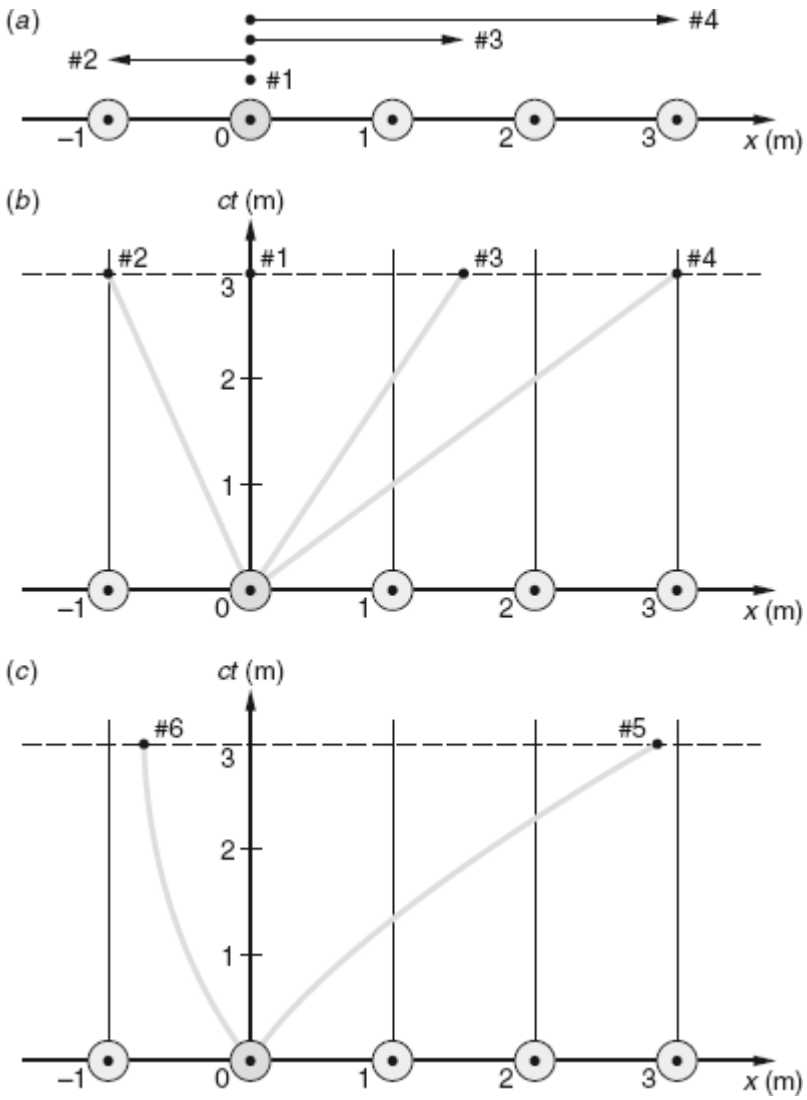


FIGURA 1-20 (a) As trajetórias no espaço de quatro partículas com diferentes velocidades constantes. Observe que a velocidade da partícula 1 é zero e que a partícula 2 está se movendo no sentido negativo do eixo x. As linhas do universo das partículas são linhas retas. (*b*) A linha do universo da partícula 1 coincide com o eixo ct, já que a partícula permanece em $x = 0$. As inclinações constantes são uma consequência do fato de que as velocidades são constantes. (*c*) No caso das partículas aceleradas 5 e 6 que não aparecem em (*a*), as linhas do universo não são linhas retas; a velocidade instantânea pode ser calculada a partir da tangente em cada ponto.

EXEMPLO 1-5 **Cálculo de Velocidades no Espaço-Tempo** Determine a velocidade u da partícula 3 da Figura 1-20.

SOLUÇÃO

A velocidade é dada por $u = \Delta x/\Delta t$. De acordo com a Figura 1-20, $\Delta x = 1{,}5 - 0 = 1{,}5$ m e $\Delta(ct) = c\Delta t = 3{,}0$ m. Assim, $\Delta t = 3{,}0/c = 3{,}0/(3{,}0 \times 10^8) = 10^{-8}$ s e $u = 1{,}5/10^{-8}$ s $= 1{,}5 \times 10^8$ m/s.

Quando calculamos a velocidade da partícula 4 usando o método do Exemplo 1-5, verificamos que é igual a c, a velocidade da luz (em outras palavras, a partícula 4 é um pulso luminoso). A inclinação da sua linha do universo é $\Delta(ct)/\Delta x = 3/3 = 1$. Da mesma forma, a inclinação da linha do universo de um pulso luminoso que esteja se propagando no sentido negativo do eixo dos x é -1. Como será mostrado no próximo capítulo, de acordo com a teoria da relatividade restrita, nenhuma partícula pode se mover mais depressa que a luz. Isso significa que as inclinações das linhas do universo de todas as partículas que passam pelo ponto $x = 0$ no instante $t = 0$ estão limitadas ao triângulo sombreado maior da Figura 1-21. Os mesmos limites se aplicam a todos os pontos da linha do universo de uma partícula, como, por exemplo, o ponto A da linha do universo tortuosa da Figura 1-21. Assim, a linha do universo de uma partícula que se encontra no ponto A no instante $ct = 2$ m deve se manter no interior do triângulo sombreado menor da Figura 1-21 para tempos maiores que $ct = 2$ m.

Análise de Eventos Usando Linhas do Universo É mais fácil analisar os eventos e movimentos em referenciais inerciais usando diagramas espaço-tempo do que diagramas como os que aparecem nas Figuras 1-15 a 1-18. Suponha que existam dois referenciais inerciais, S e S', e que S' esteja se movendo com velocidade v no sentido positivo do eixo dos x, como

nas figuras mencionadas. Os relógios dos dois sistemas começam a funcionar em $t = t' = 0$ (o presente) no momento em que as duas origens, $x = 0$ e $x' = 0$, coincidem; como antes, todos os relógios de cada sistema estão sincronizados entre si. O diagrama espaço-tempo para S é, naturalmente, semelhante ao da Figura 1-19, mas de que forma S' aparece no diagrama, ou seja, como é visto por um observador em S? A linha do universo da origem de S' é o eixo ct', já que o eixo ct' é o lugar geométrico dos pontos para os quais $x' = 0$, assim como o eixo ct é o lugar geométrico dos pontos para os quais $x = 0$. A inclinação do eixo ct' do ponto de vista de um observador em S pode ser determinada com o auxílio da Equação 1-18 (transformação de Lorentz):

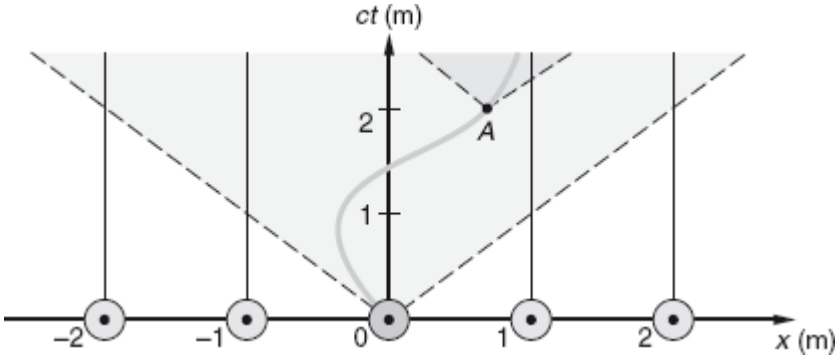


FIGURA 1-21 O limite da velocidade da luz faz com que as inclinações das linhas do universo das partículas que passam por $x = 0$ no instante $ct = 0$ fiquem restritas à região sombreada do diagrama espaço-tempo, ou seja, aos valores entre −1 e +1. As retas tracejadas são as linhas do universo de raios luminosos que se propagam nos dois sentidos do eixo x. A linha do universo tortuosa da partícula representada na figura tem os mesmos limites a cada instante. Observe que a velocidade da partícula é igual ao inverso da inclinação da linha do universo.

$$x' = \gamma(x - vt) = 0 \quad \text{para} \quad x' = 0$$

ou

$$x = vt = (v/c)(ct) = \beta ct$$

e

$$ct = (1/\beta)x$$

o que significa que a inclinação (do ponto de vista de S) da linha do universo do eixo ct' é $1/\beta$ (veja a Figura 1-22*a*).

Da mesma forma, o eixo x' pode ser determinado a partir do fato de que é lugar geométrico dos pontos para os quais $ct' = 0$. A transformação de Lorentz mais uma vez pode ser usada para calcular a inclinação:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) = 0$$

ou

$$t = \frac{vx}{c^2} \qquad \text{e} \qquad ct = \frac{v}{c}x = \beta x$$

Assim, a inclinação do eixo x' do ponto de vista de um observador em S é β, como mostra a Figura 1-22*a*. O leitor não deve ficar surpreso com o fato de os eixos x e x' não serem paralelos na Figura 1-22. Os eixos são paralelos no *espaço*, mas esse é um diagrama *espaço-tempo*, que mostra o movimento tanto no espaço como no tempo. O relógio em $x' = 1$ da Figura 1-22*b*, por exemplo, passou pelo ponto $x = 0$ aproximadamente em $ct = -1{,}5$ m, pois o eixo x' está se movendo para cima e para a direita em relação a S. Não se esqueça de que, à medida que o tempo avança, o conjunto de réguas e relógios sincronizados que constitui o eixo x também se move para cima, de modo que, por exemplo, para $ct = 1$, a origem de S' ($x' = 0$, $ct' = 0$) se moveu de uma distância $vt = (v/c)ct = \beta ct$ para a direita ao longo do eixo x.

Exercício

7. Explique como seria o diagrama espaço-tempo da Figura 1-22*b* para um observador em S'.

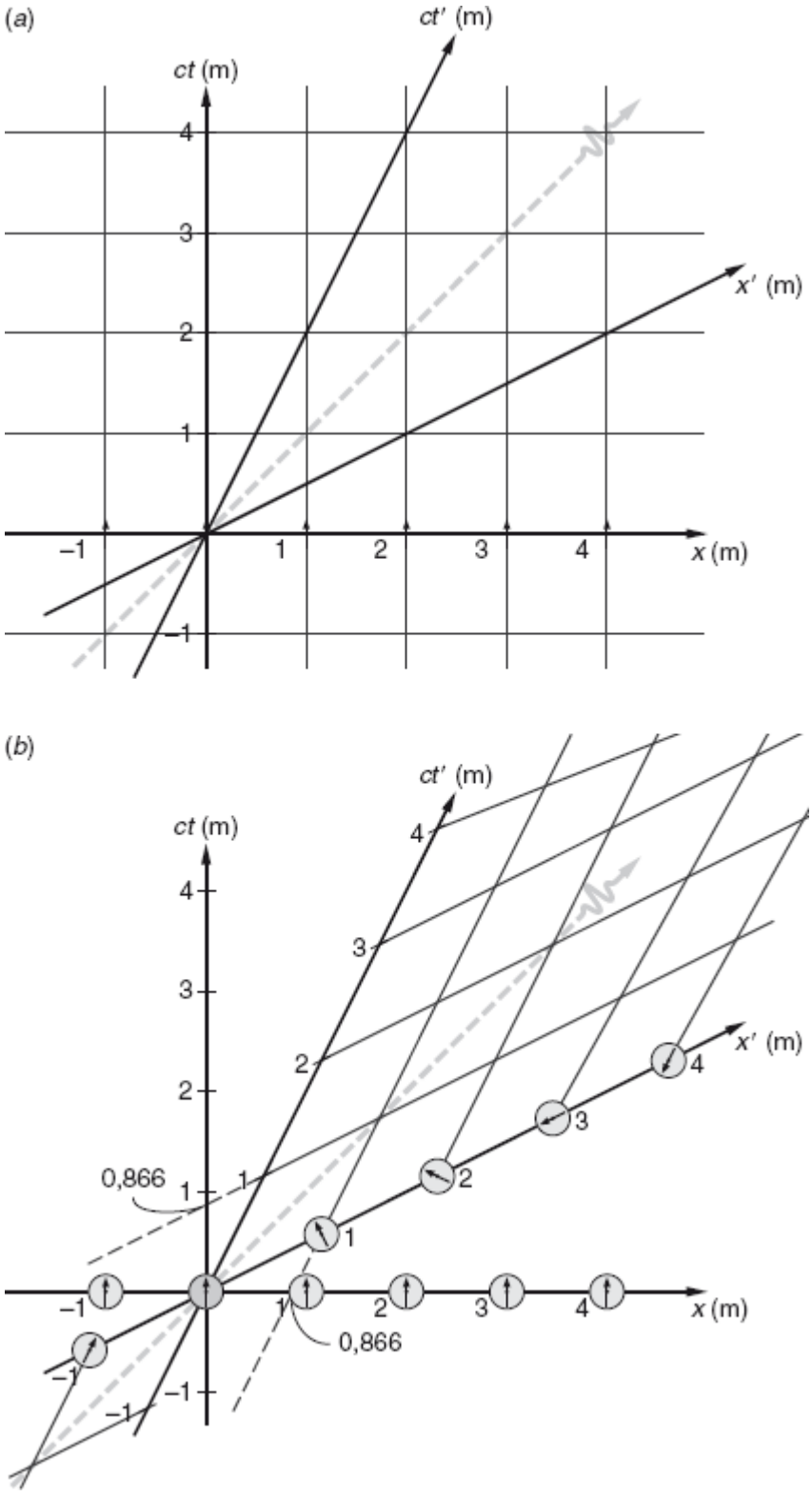


FIGURA 1-22 Diagrama no espaço-tempo do referencial S, mostrando um referencial S' que se move com velocidade $v = 0{,}5c$ no sentido positivo do eixo x. O diagrama foi desenhado supondo que $t = t' = 0$ no instante em que as origens dos dois referenciais coincidiam. A reta tracejada mostra a linha do universo de um raio luminoso, no sentido positivo do eixo x, que passou pelo ponto $x = 0$ em $t = 0$. A inclinação é igual a 1 tanto em S como em S'. Os eixos x' e ct' têm inclinações $1/\beta = 2$ e $\beta = 0{,}5$, respectivamente. (*a*) Calibrando os eixos de S' da forma descrita no texto, podemos desenhar a grade de coordenadas de S'. A interpretação fica mais fácil quando nos lembramos de que (*b*) mostra o sistema S' como é observado no diagrama espaço-tempo de S.

EXEMPLO 1-6 **Simultaneidade no Espaço-Tempo** Use o exemplo do trem (Figura 1-15) e um diagrama espaço-tempo para mostrar que dois eventos simultâneos em um referencial não são simultâneos em um referencial que esteja em movimento em relação ao primeiro. (Este é o corolário da relatividade da simultaneidade que demonstramos na seção anterior usando a Figura 1-15.)

SOLUÇÃO

Suponha que um trem esteja passando pela plataforma de uma estação com velocidade v, e um observador C, no ponto médio da

plataforma (referencial S), anuncie que em $t = 0$ serão emitidos pulsos luminosos nos pontos A e B, situados nas extremidades da plataforma. Suponha que o trem (referencial S′) seja um trem-foguete com uma velocidade $v = 0{,}5\ c$. Como na discussão anterior, vamos supor que os relógios em C e C' sejam ajustados para 0 no momento em que C' esteja passando por C. A Figura 1-23 mostra essa situação; ela é o diagrama espaço-tempo correspondente à Figura 1-15.

Dois eventos acontecem, os pulsos luminosos. Os pulsos luminosos são simultâneos em S, já que ambos ocorrem em $ct = 0$. Em S', porém, o evento em A ocorre em $ct'(A')$ (veja a Figura 1-23), cerca de 1,2 unidade de ct' *antes* de $ct' = 0$, enquanto o evento em B ocorre em $ct'(B')$, cerca de 1,2 unidade de ct' *depois* de $ct' = 0$. Assim, os pulsos não são simultâneos em S' e A ocorre antes de B, como já havíamos visto na Figura 1-15.

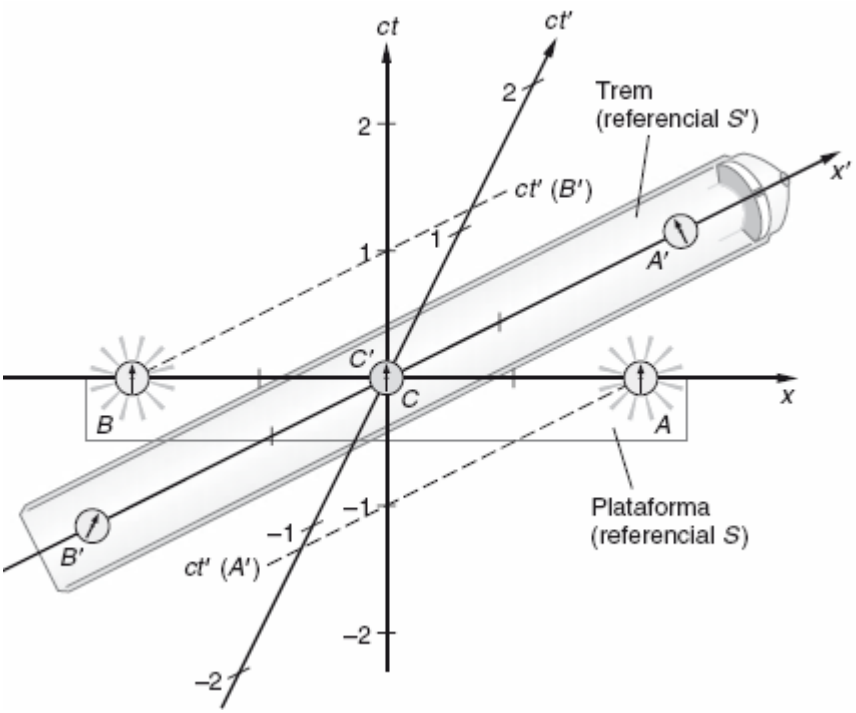


FIGURA 1-23 Figura equivalente à Figura 1-15, mostrando o diagrama espaço-tempo para o referencial S, em que a plataforma está em repouso. As medidas feitas por observadores em S' devem ser lidas nos eixos x' e ct'.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Calibração dos Eixos do Espaço-Tempo

Calibrando os eixos do referencial S' de uma forma compatível com a transformação de Lorentz, podemos ler as coordenadas de eventos e calcular intervalos entre eventos, tanto em S como em S', diretamente no diagrama espaço-tempo, sem necessidade de usar as Equações 1-18 e 1-19. A calibração dos eixos do referencial S' pode ser executada da seguinte forma: O lugar geométrico, por exemplo, de um ponto estacionário no referencial S' em $x' = 1$ m, é uma reta paralela ao eixo ct' passando pelo ponto $x' = 1$ m, $ct' = 0$. Substituindo esses valores nas Equações 1-18, vemos que a reta que passa por $x' = 1$ intercepta o eixo x, isto é, o lugar geométrico dos pontos para os quais $ct = 0$, em

$$x' = \gamma(x - vt) = \gamma(x - \beta ct)$$
$$1 = \gamma x \qquad \text{ou} \qquad x = 1/\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} \qquad \textbf{1-24}$$

ou, no caso geral, em

$$x = x'\sqrt{1 - \beta^2}$$

Na Figura 1-22*b*, sendo $\beta = 0{,}5$, a reta $x' = 1$ m intercepta o eixo x em $x = 0{,}866$ m. Da mesma forma, para $x' = 2$ m, $x = 1{,}73$ m; para $x' = 3$ m, $x = 2{,}60$ m, e assim por diante.

O eixo ct' pode ser calibrado de maneira análoga. O lugar geométrico dos pontos para os quais $ct' = 1$ m é uma reta paralela ao eixo x' passando pelo ponto $ct' = 1$ m, $x' = 0$. Usando a transformação de Lorentz, é possível determinar a interseção dessa reta com o eixo ct (o lugar geométrico dos pontos para os quais $x = 0$) da seguinte forma:

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)$$

que também pode ser escrito como

$$ct' = \gamma(ct - \beta x) \qquad \textbf{1-25}$$

ou $ct' = \gamma ct$ para $x = 0$. Assim, para $ct' = 1$, temos $1 = \gamma ct$ ou $ct = (1 - \beta^2)^{1/2}$ ou, no caso geral, $ct = ct'(1 - \beta^2)^{1/2}$. O sistema de coordenadas $ct' - x'$ aparece na Figura 1-22*b*.

Note, na Figura 1-22*b*, que os relógios de S' *não* estão sincronizados do ponto de vista de um observador em S, embora estejam sincronizados do ponto de vista de um observador em S'. Essa é exatamente a conclusão à qual chegamos quando discutimos o exemplo em que o trem e a plataforma eram atingidos por relâmpagos. Além disso, os relógios situados no semieixo positivo x' estão atrasados em relação ao relógio de referência de S', e os relógios situados no semieixo negativo x', atrasados em relação ao relógio de referência; quanto mais distante o relógio, maior a diferença. Essa é uma consequência direta da transformação de Lorentz dos tempos: quando $ct = 0$ na Equação 1-25, $ct' = -\gamma\beta x$. Observe, também, que a inclinação da linha do universo de um raio luminoso é igual a 1 tanto em S como em S', como exige o segundo postulado.

1-4 A Dilatação dos Tempos e Contração das Distâncias

Os resultados das medidas de intervalos de tempo e espaço entre eventos não dependem do tipo de equipamento usado ou do tipo de evento investigado. Estamos, portanto, livres para escolher os eventos e equipamentos que sejam mais apropriados para ilustrar a aplicação dos postulados de Einstein aos resultados de medições. Como vimos em exemplos anteriores, os eventos mais convenientes para o estudo da relatividade são os que produzem pulsos luminosos. Um relógio conveniente é o *relógio de luz*, representado esquematicamente na Figura 1-24. Uma fotocélula detecta o pulso luminoso e envia um pulso de tensão a um osciloscópio, produzindo uma deflexão vertical na tela do equipamento. O material fosforescente que reveste essa tela produz uma luz persistente que pode ser observada, fotografada ou registrada eletricamente. O intervalo de tempo entre dois pulsos luminosos pode ser determinado a partir da distância entre pulsos na tela do osciloscópio e da velocidade de varredura. Relógios desse tipo, que podem ser facilmente calibrados e comparados com outros relógios, são frequentemente usados em experimentos de física nuclear. Mesmo que não sejam desenhados como na Figura 1-24, os relógios usados em todas as explicações desta seção podem ser imaginados como relógios de luz.

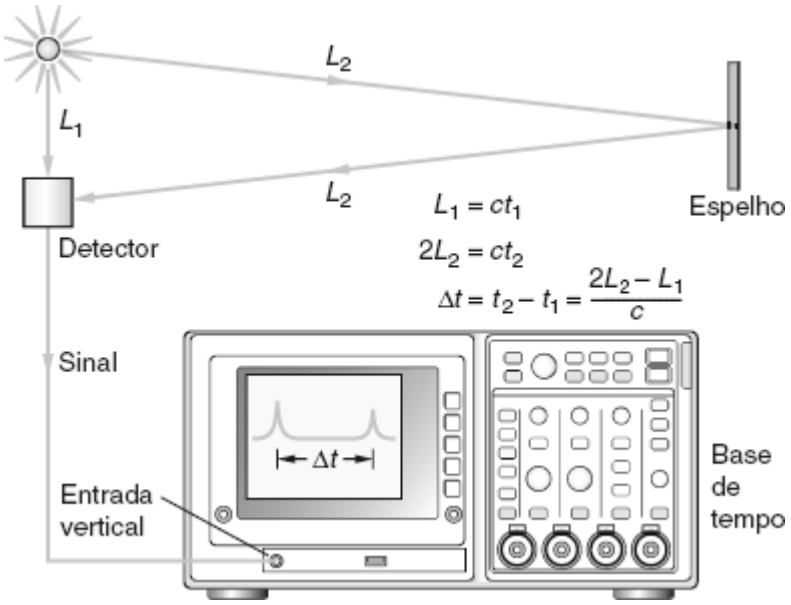


FIGURA 1-24 Relógio de luz para medir intervalos de tempo. O tempo é medido observando a distância entre os pulsos no osciloscópio, depois de calibrada a velocidade de varredura.

Dilatação dos Tempos

Considere um observador A' em repouso no referencial S', a uma distância D de um espelho também em repouso no mesmo referencial (Figura 1-25*a*). O observador produz um pulso luminoso e mede o intervalo de tempo $\Delta t'$ entre o momento em que o pulso é gerado e o momento em que detecta o pulso após este ser refletido no espelho. Como a luz viaja com velocidade c, esse intervalo é dado por $\Delta t' = 2D/c$.

Considere agora os mesmos dois eventos, a geração do pulso e a detecção do pulso refletido, do ponto de vista de um referencial S em relação ao qual o referencial S' esteja se movendo para a direita com velocidade v. No referencial S, os eventos ocorrem em dois locais diferentes, x_1 e x_2, já que, entre os instantes em que o pulso original é gerado e o pulso refletido é

detectado, o observador A' se desloca horizontalmente de uma distância $v\Delta t$, na qual Δt é o intervalo entre os eventos no referencial S. Na Figura 1-25*b*, um diagrama espacial, vemos que a distância percorrida pela luz é maior em S do que em S'. Entretanto, de acordo com os postulados de Einstein, a luz se propaga com a mesma velocidade nos dois referenciais. Como a luz percorre uma distância maior em S com a mesma velocidade, leva mais tempo para chegar ao espelho e voltar ao ponto de partida. O intervalo de tempo entre os dois pulsos em S é, portanto, maior que em S'. Podemos facilmente calcular Δt em termos de $\Delta t'$. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo da Figura 1-25*c*, temos:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = D^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2$$

ou

$$\Delta t = \frac{2D}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2D}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

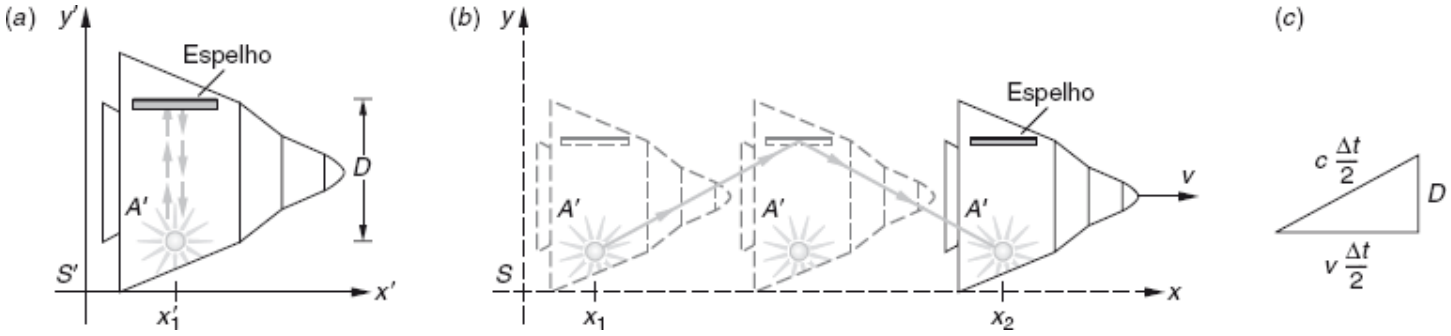


FIGURA 1-25 (*a*) O observador A' e o espelho estão em uma espaçonave em repouso no referencial S'. O tempo que um pulso luminoso leva para chegar ao espelho e voltar é medido por A' como igual a $2D/c$. (*b*) No referencial S, a espaçonave está se movendo para a direita com velocidade v. Se a velocidade da luz é a mesma nos dois referenciais, o tempo que ela leva para chegar ao espelho e voltar é maior que $2D/c$ em S porque a distância percorrida é maior que $2D$. (*c*) Triângulo retângulo usado para calcular o intervalo de tempo Δt no referencial S.

Como $2D/c = \Delta t'$, temos

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma \Delta t' = \gamma\tau \qquad \textbf{1-26}$$

na qual $\tau = \Delta t'$ é o *intervalo de tempo próprio* definido no Exemplo 1-3. A Equação 1-26 expressa a *dilatação dos tempos*, isto é, mostra que o observador em um referencial qualquer S sempre mede um intervalo de tempo maior (já que $\gamma > 1$) que o intervalo medido por um observador no referencial em que os dois eventos ocorrem no mesmo local. Assim, o observador em S conclui que o relógio A' em S' está atrasando, já que esse relógio mede um intervalo menor de tempo entre os dois eventos. Quanto maior a velocidade de S' em relação a S, maior o valor de γ e maior o atraso dos relógios de S'. Assim, o observador em S tem a impressão de que os tempos em S' estão sendo dilatados.

Atenção! Para que $\Delta t'$ seja o intervalo de tempo próprio τ, é preciso que os dois eventos sejam medidos pelo *mesmo* relógio. Para compreender a razão dessa ressalva, note que a Equação 1-26 pode ser obtida a partir da transformação de Lorentz inversa. Examinando novamente a Figura 1-25 e chamando de evento 1 a emissão do pulso e de evento 2 a detecção do pulso refletido, temos:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2}\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2}\right)$$

$$\Delta t = \gamma(t'_2 - t'_1) + \frac{\gamma v}{c^2}(x'_2 - x'_1)$$

ou

$$\Delta t = \gamma \Delta t' + \frac{\gamma v}{c^2}\Delta x' \qquad \textbf{1-27}$$

Se os tempos t'_2 e t'_1 forem medidos pelo mesmo relógio, $\Delta x' = 0$. Se os tempos forem medidos por relógios diferentes, $\Delta x' \neq 0$ e

o intervalo $\Delta t'$, embora não deixe de ser uma medida válida, não é um intervalo de tempo próprio. Apenas um relógio situado no *local* do evento no *momento* em que esse ocorre pode registrar o tempo próprio.

EXEMPLO 1-7 **Distância entre Eventos** Dois eventos ocorrem no mesmo ponto x'_0 nos instantes t'_1 e t'_2 no referencial S', que está se movendo com velocidade v em relação a S. Qual é a distância entre esses eventos no referencial S?

SOLUÇÃO

1. A localização dos eventos em S é dada pela transformação de Lorentz inversa, Equação 1-19:

$$x = \gamma(x' + vt')$$

2. A distância entre os dois eventos, $\Delta x = x_2 - x_1$, é, portanto,

$$\Delta x = \gamma(x'_0 + vt'_2) - \gamma(x'_0 + vt'_1)$$

3. Os termos $\gamma x'_0$ e $-\gamma x'_0$ se cancelam:

$$\Delta x = \gamma v(t'_2 - t'_1) = \gamma v \Delta t'$$

4. Como $\Delta t'$ é o intervalo de tempo próprio τ, temos, de acordo com a Equação 1-26:

$$\Delta x = v\gamma\tau = v\Delta t$$

5. Usando a situação da Figura 1-26, $\beta = 0{,}5$ e $\gamma = 1{,}15$, como exemplo numérico, temos:

$$\Delta x = \gamma\frac{v}{c}\Delta(ct') = (1{,}15)(0{,}5)(2) = 1{,}15 \text{ m}$$

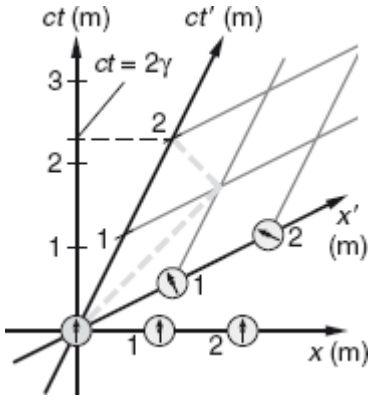


FIGURA 1-26 Diagrama do espaço-tempo ilustrando a dilatação dos tempos. A linha tracejada é a linha do universo de um pulso luminoso emitido no ponto $x' = 0$ e refletido de volta para esse ponto por um espelho situado no ponto $x' = 1$ m. $\beta = 0{,}5$.

EXEMPLO 1-8 **A Elefanta Grávida**[14] Os elefantes têm um tempo de gestação de 21 meses. Suponha que uma elefanta recém-fecundada seja colocada a bordo de uma espaçonave e enviada para o espaço a uma velocidade $v = 0{,}75c$. Se houver um microfone na espaçonave acoplado a um transmissor de rádio, quanto tempo a base levará para ouvir o primeiro barrido do filhote recém-nascido?

SOLUÇÃO

1. Em S', o referencial da elefanta, o intervalo de tempo entre o lançamento da espaçonave e o nascimento do filhote é $\tau = 21$ meses. Em S, o referencial da Terra, o intervalo de tempo é Δt_1, dado pela Equação 1-26:

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= \gamma\tau = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}75)^2}}(21 \text{ meses}) \\ &= 31{,}7 \text{ meses}\end{aligned}$$

2. Uma vez transcorrido o tempo Δt_1, o sinal de rádio que anuncia o feliz evento começa a viajar para a Terra com velocidade c, mas

qual é a distância que o sinal tem de percorrer? De acordo com a equação que aparece no item 4 do Exemplo 1-7, o deslocamento Δx da espaçonave no referencial S é dado por

$$\begin{aligned}\Delta x &= \gamma v\tau = \gamma\beta c\tau \\ &= (1{,}51)(0{,}75)(21\ c\cdot\text{meses}) \\ &= 23{,}8c\cdot\text{meses}\end{aligned}$$

em que 1 mês-luz é a distância percorrida pela luz em um mês.

3. Observe que não há necessidade de converter Δx em metros, já que estamos interessados apenas no tempo que o sinal de rádio leva para percorrer essa distância em S. O tempo é dado por

$$\begin{aligned}\Delta t_2 &= \Delta x/c \\ &= 23{,}8c\cdot\text{meses}/c \\ &= 23{,}8\ \text{meses}\end{aligned}$$

4. Assim, tomando como referência o instante do lançamento, a notícia chega à Terra após um intervalo de tempo

$$\begin{aligned}\Delta t &= \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ &= 31{,}7 + 23{,}8 \\ &= 55{,}5\ \text{meses}\end{aligned}$$

Observação: *Este resultado também pode ser obtido com o auxílio de um diagrama espaço-tempo. A Figura 1-27 mostra o aspecto geral do diagrama espaço-tempo para este exemplo, com as linhas do universo da elefanta e do sinal de rádio.*

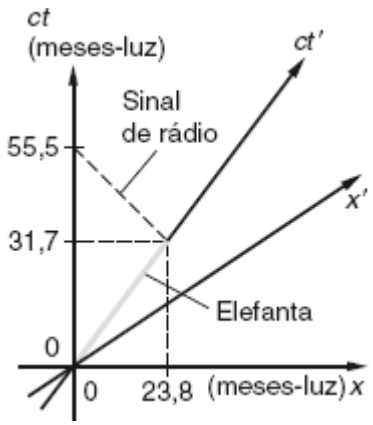


FIGURA 1-27 Diagrama do espaço-tempo para o Exemplo 1-8. β = 0,75. A reta mais clara é a linha do universo da elefanta grávida. A linha do universo do sinal de rádio é a reta tracejada a 45º na extremidade superior esquerda do gráfico.

Exercício

8. Um homem está parado em uma esquina e um amigo passa de automóvel. Os dois observam, em seus respectivos relógios, o instante em que o carro passou por duas placas de trânsito e determinam assim o intervalo entre os dois eventos. Qual dos dois mediu o intervalo de tempo próprio?

A dilatação dos tempos expressa pela Equação 1-26 é fácil de se constatar em um diagrama espaço-tempo como o da Figura 1-26. Suponha que um pulso luminoso seja produzido em $x' = 0$ no instante $ct' = 0$ em que as origens dos referenciais S e S' coincidem. O pulso se propaga até $x' = 1$ m, é refletido em um espelho e volta ao ponto $x' = 0$. Suponha que $\beta = 0{,}5$. A linha tracejada mostra a linha do universo do raio luminoso, que é refletido em ($x' = 1$ m, $ct' = 1$ m) e volta a $x' = 0$ em $ct' = 2$ m. Note que, para o observador em S, o pulso volta a $x' = 0$ em um tempo $ct > 2$ m. Isso significa que, do ponto de vista do observador em S, o relógio de S' está atrasando.

A dilatação dos tempos foi verificada experimentalmente pelos cientistas com o auxílio de relógios de alta precisão. Em 1975, C. O. Alley realizou um teste de relatividade restrita e geral no qual relógios atômicos foram colocados a bordo de um avião de patrulha antissubmarino da Marinha Americana. O avião repetiu várias vezes o mesmo trajeto durante 15 horas, voando a uma altitude de 8.000 a 10.000 m na região da Baía de Chesapeake. Os relógios do avião foram comparados com relógios em terra através de pulsos de laser. (A Figura 1-13 mostra uma das formas de fazer essa comparação.) Como o objetivo

principal do experimento era testar o efeito da gravidade sobre os relógios (veja a Seção 2-5), a aeronave manteve deliberadamente a velocidade moderada de 270 nós (140 m/s) = $4{,}7 \times 10^{-7}c$ para reduzir o efeito da dilatação dos tempos causado pela diferença de velocidade entre os referenciais. Mesmo assim, depois de descontado o efeito da gravidade previsto pela relatividade geral, os relógios do avião perderam em média $5{,}6 \times 10^{-9}$ s durante o voo de 15 horas. Este resultado está de acordo com a previsão da relatividade restrita, $5{,}7 \times 10^{-9}$ s, dentro de uma margem de erro de apenas 2%, mesmo a essa velocidade relativamente baixa. Mais recentemente, em 2010, J. C.-W. Chou e colaboradores do National Institute of Technology (NIST) usaram relógios óticos de precisão para detectar uma pequena dilatação do tempo a uma velocidade de apenas 10 m/s, a velocidade de um corredor de 100 metros rasos. Os resultados experimentais não deixam margem a dúvidas; todo relógio em movimento se atrasa em relação a um relógio estacionário.

Contração das Distâncias

Um fenômeno intimamente associado à dilatação dos tempos é o da *contração das distâncias*. O comprimento de um objeto no referencial em que o objeto está em repouso é conhecido como o mesmo *comprimento próprio* e representado pelo símbolo L_p. Em um referencial no qual o objeto está se movendo, o comprimento na direção do movimento é sempre menor que o comprimento próprio. Considere uma barra em repouso no referencial S' com uma das extremidades em x'_2 e a outra em x'_1 (Figura 1-28). O comprimento da barra nesse referencial é o comprimento próprio $L_p = x'_2 - x'_1$. No referencial S, a barra está se movendo para a direita com velocidade v, a velocidade do referencial S' em relação a S. O comprimento da barra no referencial S é *definido* como $L = x_2 - x_1$, em que x_2 é a posição de uma das extremidades em um certo instante t_2 e x_1 é a posição da outra extremidade *no mesmo instante* $t_1 = t_2$, ambos os tempos sendo medidos no referencial S. Observe que, como S' está se movendo em relação a S, t'_2 não é igual a t'_1. A Equação 1-18 é conveniente para calcular $x_2 - x_1$ em um dado instante t porque relaciona x, x' e t, enquanto a Equação 1-19 não é conveniente, já que relaciona x, x' e t':

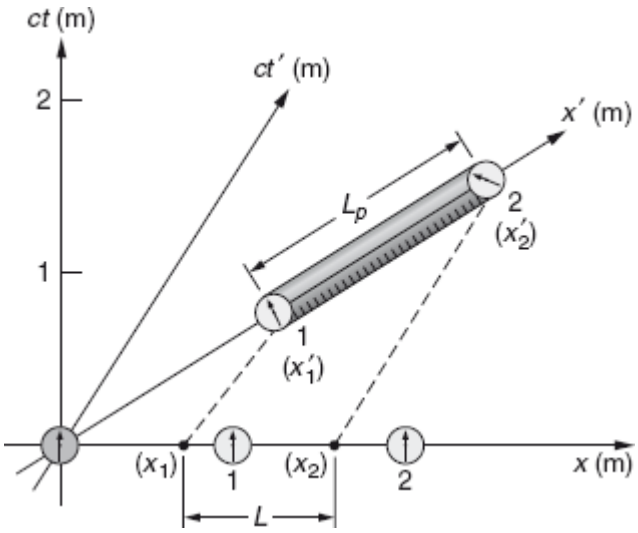


FIGURA 1-28 Uma barra está em repouso no referencial S', entre os pontos $x'_2 = 2$ m e $x'_1 = 1$ m. O referencial S' está se movendo com $\beta = 0{,}79$ em relação ao referencial S. Como a barra está em movimento no referencial S, um observador em repouso no referencial S deve medir simultaneamente as posições das duas extremidades da barra, x_2 e x_1, para conhecer o seu comprimento. Como se pode ver na figura, L é necessariamente menor que L_p. Medindo as distâncias na figura com uma régua, obtemos $L/L_p = 0{,}61 = 1/\gamma$.

$$x'_2 = \gamma(x_2 - vt_2) \qquad \text{e} \qquad x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1)$$

Como $t_2 = t_1$, temos:

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(x'_2 - x'_1)$$

ou

$$L = \frac{1}{\gamma}L_p = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}L_p \qquad \textbf{1-28}$$

Assim, o comprimento de uma barra é menor quando ela é medida em um referencial no qual está em movimento. Antes que

o artigo de Einstein a respeito da relatividade restrita fosse publicado, Lorentz e FitzGerald haviam mostrado independentemente que o resultado nulo do experimento de Michelson-Morley podia ser explicado supondo que as distâncias na direção do movimento do interferômetro sofriam uma contração dada pela Equação 1-28. Por esse motivo, a contração das distâncias também é conhecida como *contração de Lorentz-FitzGerald*.

EXEMPLO 1-9 **Velocidade de uma Régua** Uma régua com 1 m de comprimento próprio se move paralelamente a sua maior dimensão com uma velocidade v em relação a um observador. O comprimento medido pelo observador é 0,914 m. Determine o valor de v.

SOLUÇÃO

1. A relação entre o comprimento da régua em um referencial qualquer e o comprimento próprio é dada pela Equação 1-28:

$$L = \frac{L_p}{\gamma}$$

2. Explicitando γ, temos:

$$\gamma = \frac{L_p}{L}$$

3. Substituindo L_p e L por seus valores, temos:

$$\gamma = \frac{1\text{ m}}{0{,}914\text{ m}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

4. Explicitando v, temos:

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0{,}914$$
$$1 - v^2/c^2 = (0{,}914)^2 = 0{,}835$$
$$v^2/c^2 = 1 - 0{,}835 = 0{,}165$$
$$v^2 = 0{,}165c^2$$
$$v = 0{,}406c$$

É importante observar que a contração relativística das distâncias ocorre apenas na direção do movimento relativo dos referenciais. Em particular, os observadores nos referenciais S e S' medem os mesmos comprimentos nas direções y e y' e z e z', perpendiculares à direção do movimento relativo. Uma das consequências desse fato é que os objetos bidimensionais e tridimensionais têm formas diferentes em diferentes referenciais (veja o Exemplo 1-10 e as Figuras 1-29 e 1-30).

EXEMPLO 1-10 **A Forma de um Quadrado em Movimento** Considere um quadrado no plano $x'y'$ de S' com um dos lados fazendo um ângulo de 30° com o eixo x' (Figura 1-30*a*). Se S' está se movendo com $\beta = 0{,}5$ em relação a S, qual a forma e qual a orientação da figura em S?

SOLUÇÃO

Para o observador em S, as componentes x dos lados do quadrado são divididas por γ. Assim, os lados do quadrado em S são dados por

$$A = [\cos^2 30 + \text{sen}^2\, 30/\gamma^2]^{1/2} A' = 0{,}968A'$$

$$B = [\text{sen}^2\, 30 + \cos^2 30/\gamma^2]^{1/2} B' = 0{,}901\text{B}'$$

Como a figura é um quadrado em S', $A' = B'$. Além disso, os ângulos entre B e o eixo x e entre A e o eixo x são, respectivamente,

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{B'\operatorname{sen} 30}{B'\cos 30/\gamma}\right] = \tan^{-1}\left[\gamma\frac{\operatorname{sen} 30}{\cos 30}\right] = 33{,}7°$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left[\frac{A'\cos 30}{A'\operatorname{sen} 30/\gamma}\right] = \tan^{-1}\left[\gamma\frac{\cos 30}{\operatorname{sen} 30}\right] = 63{,}4°$$

Assim, do ponto de vista de *S*, o ângulo interno do vértice 1 não é 90°, e sim 180° − (63,4° + 33,7°) = 82,9°. A figura, portanto, não é um quadrado, mas um paralelogramo cujos lados mais curtos fazem um ângulo de 33,7° com o eixo *x*. A forma e a orientação da figura no referencial *S* aparecem na Figura 1-30*b*.

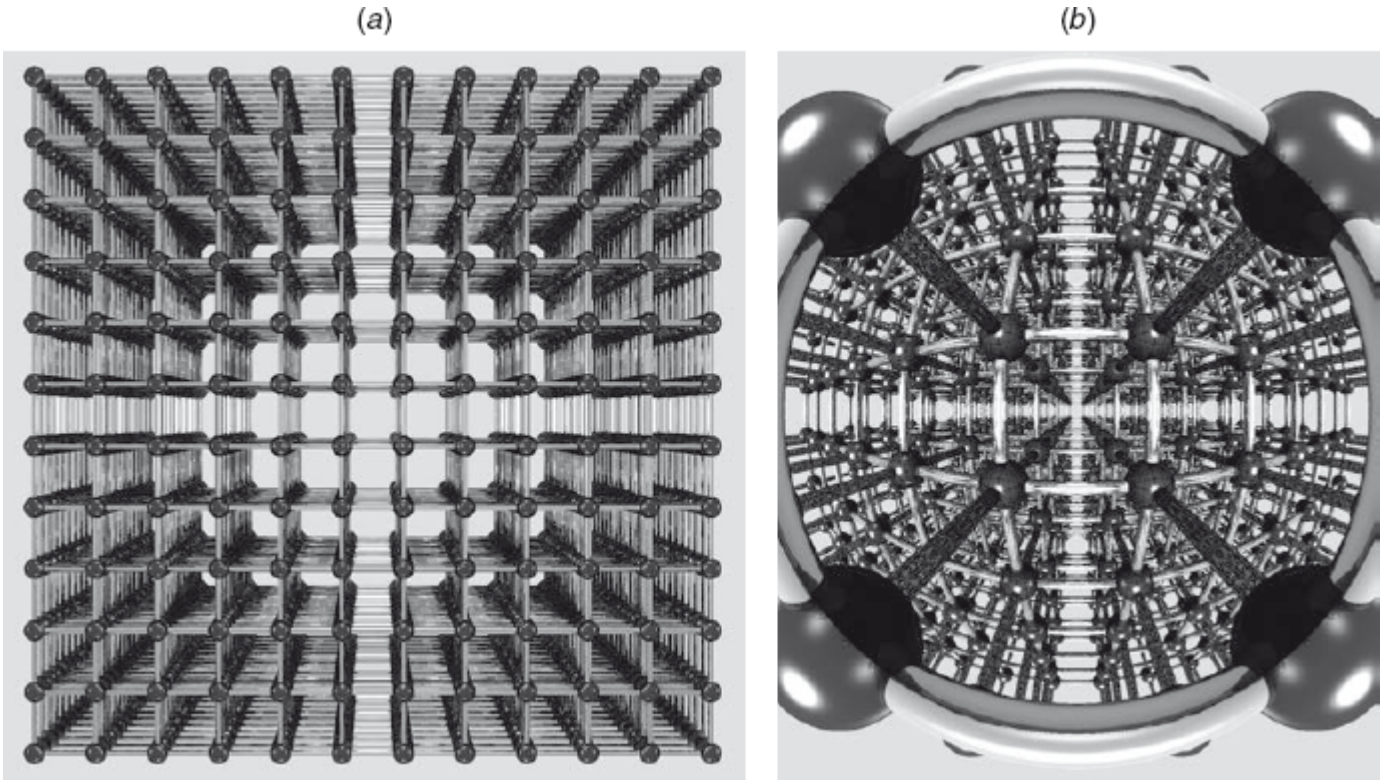


FIGURA 1-29 A aparência de um objeto que se move rapidamente depende tanto da contração das distâncias na direção do movimento como do instante em que a luz observada deixou o objeto. (*a*) O conjunto de relógios e barras que representa *S*′, visto por um observador em *S* com β = 0. (*b*) Quando *S*′ se aproxima do observador em *S* com β = 0,9, a distorção das barras se torna evidente. Isso é o que um observador a bordo de um próton dos raios cósmicos poderia ver ao passar pela rede cristalina de um cristal cúbico de faces centradas como o NaCl. [P.-K. Hsiung, R. Dunn e C. Cox. Cortesia de C. Cox, Adobe Systems, Inc., San Jose, CA.]

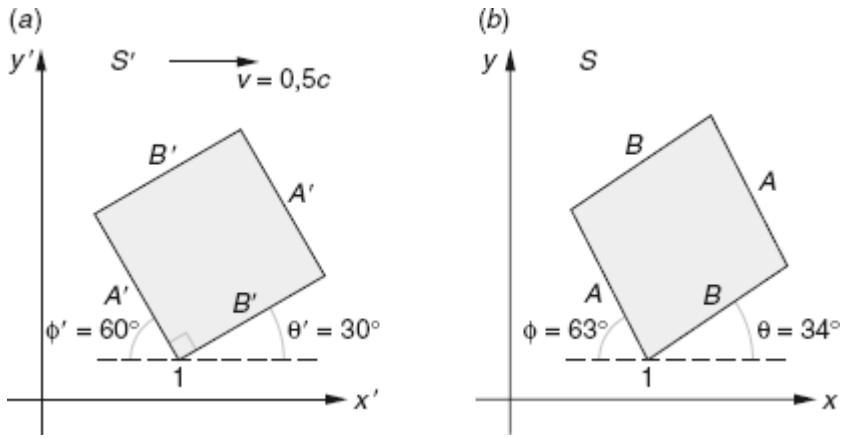


FIGURA 1-30 A contração das distâncias distorce a forma e a orientação de objetos bidimensionais e tridimensionais. Para o observador em *S*, uma figura que era um quadrado em *S* (*a*) se transforma em um paralelogramo com uma orientação diferente (*b*).

Decaimento dos Múons

Um exemplo interessante da dilatação dos tempos e da contração das distâncias está relacionado aos múons que se formam na

atmosfera a partir dos raios cósmicos. Os múons decaem de acordo com a lei estatística da radioatividade:

$$N(t) = N_0 e^{(-t/\tau)} \qquad \textbf{1-29}$$

em que N_0 é o número de múons no instante $t = 0$, $N(t)$ é o número de múons no instante t e τ é o tempo médio de vida (um intervalo de tempo próprio), que, no caso dos múons, é aproximadamente 2 μs. Como os múons são criados (a partir do decaimento de píons) na parte superior da atmosfera, milhares de quilômetros acima do nível do mar, muito poucos múons deveriam chegar ao nível do mar. Um múon típico, com uma velocidade de 0,998c, percorreria apenas 600 m em 2 μs. Acontece que o efeito de dilatação dos tempos (Equação 1-26) faz com que o tempo de vida dos múons no referencial da Terra seja multiplicado pelo fator $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, que é igual a 15 para esta velocidade em particular. O tempo médio de vida no referencial da Terra é, portanto, 30 μs, e um múon com uma velocidade de 0,998c percorre uma distância de cerca de 9.000 m nesse tempo. Do ponto de vista do múon, ele leva apenas 2 μs para se desintegrar, mas a atmosfera está passando com uma velocidade de 0,998c, o que faz com que a distância de 9.000 m no referencial da Terra se contraia para apenas 600 m no referencial do múon, como mostra a Figura 1-31.

É fácil distinguir experimentalmente as previsões clássica e relativística quanto ao número de múons presentes ao nível do mar. Suponha que, durante um certo intervalo de tempo, sejam detectados 10^8 múons a uma altitude de 9.000 m. Quantos múons deveriam ser detectados no mesmo intervalo de tempo ao nível do mar? De acordo com a previsão não relativística, o tempo que os múons levam para percorrer 9.000 m é $9.000/0{,}998c \approx 30$ μs, ou seja, 15 tempos de vida. Fazendo $N_0 = 10^8$ e $t = 15\ \tau$ na Equação 1-29, obtemos

$$N = 10^8 e^{-15} = 30{,}6$$

A expectativa, portanto, é de que apenas 31 dos 100 milhões de múons originais consigam chegar ao nível do mar.

De acordo com a previsão relativística, a Terra deve percorrer apenas a distância contraída de 600 m no referencial do múon. O tempo necessário para que isso ocorra é apenas 2 μs = 1 τ. Assim, o número esperado de múons ao nível do mar é

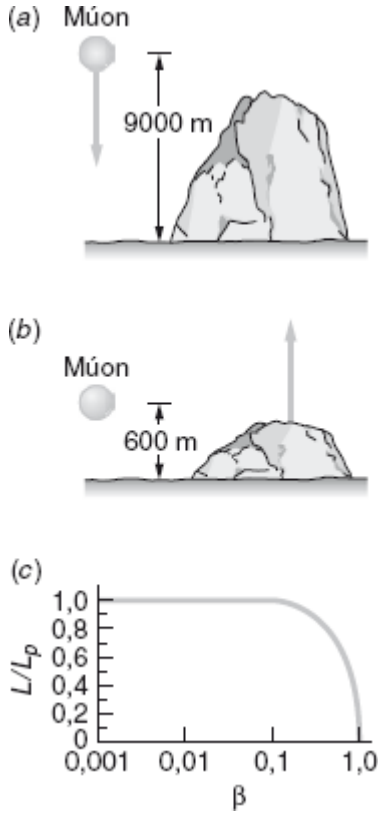


FIGURA 1-31 Embora os múons sejam criados a uma grande distância da superfície terrestre e o tempo médio de vida seja apenas 2 μs para a partícula em repouso, muitos múons são observados na superfície da Terra. (*a*) No referencial da Terra, um múon típico, com velocidade de 0,998c, tem um tempo médio de vida de 30 μs, o suficiente para percorrer uma distância de 9.000 m. (*b*) No referencial do múon, a distância percorrida pela Terra durante o tempo médio de vida de 2 μs é apenas 600 m. (*c*) L é praticamente igual a L_p para $v < 0{,}1c$; entretanto, $L \to 0$ quando $v \to c$.

$$N = 10^8 e^{-1} = 3{,}68 \times 10^7$$

De acordo com a previsão relativística, portanto, devemos detectar 36,8 milhões de múons no mesmo intervalo de tempo. Experimentos desse tipo confirmaram as previsões relativísticas.

O Intervalo no Espaço-Tempo

Os efeitos de dilatação dos tempos e contração das distâncias mostram que os intervalos de tempo e as distâncias (intervalos de espaço), grandezas que são absolutas, ou invariantes, quando submetidas à transformação clássica ou de Galileu, não são invariantes na relatividade restrita. A transformação de Lorentz e a relatividade da simultaneidade fazem com que os intervalos de tempo e as distâncias tenham valores diferentes para observadores situados em diferentes referenciais inerciais. Surge naturalmente a pergunta: Será que existe *alguma* grandeza associada às coordenadas de espaço e de tempo que seja invariante em relação à transformação de Lorentz? A resposta é afirmativa; na verdade, já lidamos com um caso especial dessa grandeza invariante quando obtivemos pela primeira vez a forma correta da transformação de Lorentz. Ela é chamada de *intervalo no espaço-tempo* ou simplesmente *intervalo* e representada pelo símbolo Δs. Seu valor é dado por

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - [\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2] \qquad \textbf{1-30}$$

Experimentos com múons que se movem com velocidades próximas da velocidade da luz são executados em muitos laboratórios, apesar do tempo médio de vida relativamente curto dessas partículas. A dilatação dos tempos faz com que o tempo médio de vida dos múons seja muito maior no referencial do laboratório, o que proporciona aos cientistas tempo suficiente para executar esses experimentos.

ou, particularizando para sistemas com apenas uma dimensão espacial,

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x^2) \qquad \textbf{1-31}$$

As Equações 1-30 e 1-31 podem ser interpretadas da seguinte forma:

$$[\text{intervalo}]^2 = [\text{distância no tempo}]^2 - [\text{distância no espaço}]^2$$

O intervalo Δs é a única das grandezas mensuráveis que descrevem pares de eventos no espaço-tempo para a qual qualquer observador localizado em um referencial inercial obtém o mesmo valor numérico. A presença do sinal negativo nas Equações 1-30 e 1-31 significa que o valor de $(\Delta s)^2$ pode ser positivo, negativo ou nulo, dependendo dos valores relativos dos intervalos de tempo e espaço. Com o sinal de $(\Delta s)^2$, a natureza nos informa a respeito da relação causal entre dois eventos. Observe que, se uma das três possibilidades ocorre para um observador, acontece para todos os observadores, já que Δs é invariante. Dizemos que o intervalo é *do tipo temporal* quando o intervalo de tempo é maior que o intervalo de espaço, e *do tipo espacial* quando o intervalo de espaço é maior que o intervalo de tempo. Quando os dois intervalos são iguais, $\Delta s = 0$ e o intervalo é *do tipo luminoso*.

Intervalo do Tipo Temporal Considere uma partícula material[15] ou mesmo um objeto, como a elefanta da Figura 1-27, que esteja se movendo no referencial S. Como jamais foi observada uma partícula material que se movesse com uma velocidade maior do que a da luz, as partículas sempre percorrem menos de 1 m no tempo que a luz leva para percorrer 1 m. No Exemplo 1-8, por exemplo, o intervalo de tempo entre o lançamento da espaçonave e o nascimento do elefantinho foi 31,7 meses no referencial S, e, durante esse tempo, a elefanta percorreu uma distância de 23,8 mesesluz. De acordo com a Equação 1-31, temos: $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (31{,}7c)^2 - (23{,}8c)^2 = (21{,}0)^2$, e o intervalo em S é, portanto, $\Delta s = 21{,}0$ meses-luz. Como o intervalo de tempo é maior que o intervalo de espaço, Δs é um intervalo do tipo temporal; na verdade, as linhas do universo de todas as partículas materiais são do tipo temporal. Essas linhas do universo estão todas na região sombreada do diagrama espaço-tempo da Figura 1-21. Observe que em S', o referencial da elefanta, a distância no espaço entre o lançamento e o nascimento é nula e $c\Delta t$ é igual a 21,0 meses. Assim, o intervalo Δs também é igual a 21,0 meses-luz no referencial S'. É isso que queremos dizer quando afirmamos que o intervalo é invariante: quando dois observadores, um em S e outro em S', calculam o intervalo entre dois eventos no espaço-tempo e obtêm o mesmo valor numérico.

O intervalo de tempo próprio τ entre dois eventos pode ser determinado a partir da Equação 1-31 usando medidas de tempos e distâncias executadas em *qualquer* referencial inercial e já que a equação pode ser escrita na forma

$$\frac{\Delta s}{c} = \sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2}$$

Como $\Delta t = \tau$ para $\Delta x = 0$, isto é, se o intervalo de tempo é medido em sistema que se move de tal forma que o mesmo relógio está presente nos locais dos dois eventos, temos:

$$\sqrt{(\Delta t)^2 - (\Delta x/c)^2} = \sqrt{\tau^2 - 0} = \tau = \frac{\Delta s}{c} \qquad \textbf{1-32}$$

Note que a Equação 1-32 fornece o tempo próprio correto, $\tau = 21{,}0$ meses, no exemplo da elefanta.

Intervalo do Tipo Espacial Quando dois eventos são separados no espaço por uma distância cujo quadrado é maior que $(c\Delta t)^2$, dizemos que o intervalo Δs é do tipo *espacial*. Neste caso, é conveniente escrever a Equação 1-31 na forma:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2 \qquad \textbf{1-33}$$

para que, como no caso dos intervalos do tipo temporal, o valor de $(\Delta s)^2$ seja positivo.[16] Os eventos do tipo espacial ocorrem em pontos suficientemente próximos no tempo e afastados no espaço para que nenhum relógio possa estar presente nos locais dos dois eventos. Suponha, por exemplo, que dois observadores no referencial da Terra, S, um em São Francisco e outro em Londres, produzam simultaneamente um pulso luminoso, de modo que $c\Delta t = 0$ em S e $\Delta x = 1{,}08 \times 10^7$ m. Para *qualquer* outro referencial inercial, $(c\Delta t)^2 > 0$ e, portanto, de acordo com a Equação 1-33, $(\Delta x)^2$ deve ser maior que $(1{,}08 \times 10^7)^2$ para que Δs seja invariante. Em outras palavras, $1{,}08 \times 10^7$ m é o menor intervalo espacial possível entre os dois eventos; em consequência, não é possível encontrar um referencial suficientemente veloz para que um relógio esteja presente nos dois eventos (ou seja, um referencial no qual $\Delta x = 0$). Para isso, seria necessária uma velocidade maior do que c (no caso, uma velocidade infinita). Observe que, quando dois eventos ocorrem simultaneamente no mesmo referencial, a distância entre eles é $\Delta x = \Delta s = L_p$, a distância própria. Assim como no caso do tempo próprio τ, a distância própria entre dois eventos pode ser determinada usando medidas de tempo e distância executadas em qualquer referencial inercial.

Intervalo do Tipo Luminoso (ou Nulo) A relação entre dois eventos é do tipo *luminoso* se $\Delta s = 0$ na Equação 1-31. Nesse caso:

$$c\Delta t = \Delta x \qquad \textbf{1-34}$$

e um pulso luminoso que deixa o local do primeiro evento no instante em que este ocorre chega ao local do segundo evento no instante em que este ocorre.

Não existe nada parecido com o intervalo do tipo luminoso em nossa experiência diária, pois estamos acostumados a viver em um espaço aproximadamente euclidiano. Nesse tipo de espaço, para que a distância entre dois pontos seja nula, é preciso que possuam as mesmas coordenadas espaciais. No espaço-tempo, porém, o intervalo entre dois eventos pode ser nulo, mesmo que as diferenças entre as coordenadas espaciais e temporais dos dois eventos sejam consideráveis. Observe, também, que se o intervalo entre dois eventos é do tipo luminoso, o intervalo de tempo próprio e a distância própria são nulos, já que $\Delta s = 0$.

A linha do universo das entidades que se movem com a velocidade de luz[17] é do tipo luminoso. Como vimos anteriormente (Figura 1-22), a linha do universo de um raio luminoso é a bissetriz dos eixos ct e x do diagrama espaço-tempo. Os intervalos do tipo temporal estão na região sombreada da Figura 1-32 e têm em comum o fato de que sua ordem no tempo é a mesma para qualquer observador localizado em um sistema inercial. Os eventos A e B da Figura 1-32 formam um par desse tipo. Os observadores em S e S' estão de acordo quanto ao fato de que A ocorre *antes* de B, embora, naturalmente, obtenham valores diferentes para os intervalos de tempo e de espaço. Os intervalos de tempo entre dois eventos causais, que dependem um do outro ou afetam um ao outro de alguma forma, como o intervalo entre o nascimento de uma pessoa e o do seu filho, são sempre do tipo temporal. Por outro lado, a ordem no tempo de eventos separados por um intervalo do tipo espacial, como os eventos A e C da Figura 1-32, depende do referencial considerado. Como se pode ver na figura, A ocorre antes de C em S, mas C ocorre antes de A em S'. Assim, a ordem de pares de eventos é absoluta na parte sombreada da figura, mas relativa na parte não sombreada.

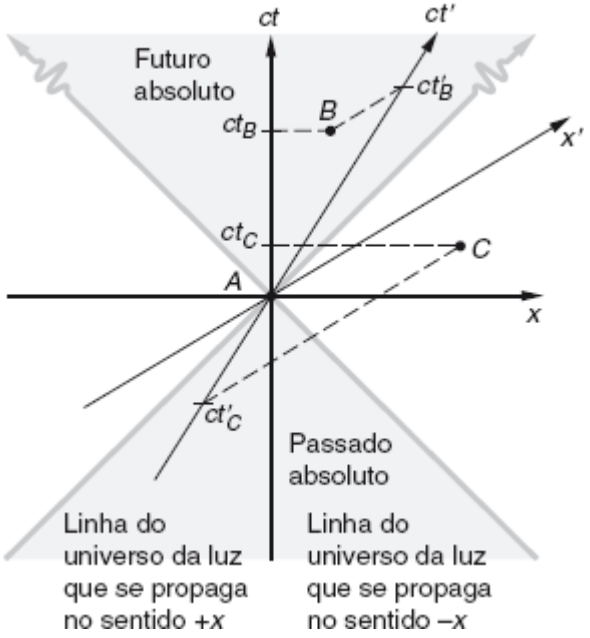


FIGURA 1-32 No caso de pares caracterizados por intervalos do tipo temporal, como os pontos *A* e *B*, a ordem dos eventos no tempo é a mesma para todos os observadores inerciais. Os eventos na região sombreada superior estão no futuro de *A*; os eventos na região sombreada inferior estão no passado de *A*. Os pares de eventos cujos intervalos são do tipo espacial, como *A* e *C*, podem ocorrer em ordens diferentes, dependendo do referencial. Assim, *C* ocorre depois de *A* em *S*, mas antes de *A* em *S*′.

Exercício

9. Em 1987 chegou à Terra a luz resultante da explosão de uma estrela (uma supernova) na Grande Nuvem de Magalhães, uma pequena galáxia satélite da Via Láctea situada a cerca de 170.000 anos-luz de distância da Terra. Dê exemplos de eventos que estejam separados da explosão de estrela por um intervalo do tipo (*a*) espacial; (*b*) luminoso; (*c*) temporal.

EXEMPLO 1-11 **Classificação de Intervalos no Espaço-Tempo** A Figura 1-33 é um diagrama espaço-tempo que mostra três eventos, a emissão de luz por parte de três átomos diferentes.

1. Determine a natureza dos intervalos entre os três pares possíveis de eventos.
2. Em algum ou alguns dos pares de eventos um deles poderia ter sido causado pelo outro?

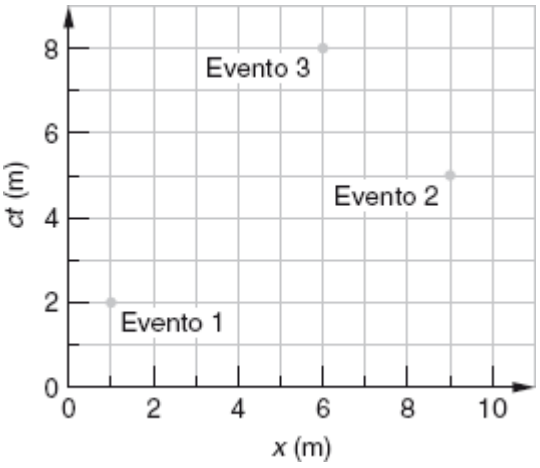


FIGURA 1-33 Diagrama espaço-tempo de três eventos cuja separação é discutida no Exemplo 1-11.

SOLUÇÃO

1. As coordenadas dos três eventos no espaço-tempo são as seguintes:

evento	*ct*	*x*
1	2	1
2	5	9

3	8	6

e para os três pares possíveis, 1 e 2, 2 e 3 e 1 e 3, temos:

par	$c\Delta t$	Δx	$(c\Delta t)^2$	$(\Delta x)^2$	
1 & 2	5-2	9-1	9	64	espacial
2 & 3	8-5	6-9	9	9	luminoso
1 & 3	8-2	6-1	36	25	temporal

2. Sim, o evento 3 poderia ter sido causado pelo evento 1, já que 3 está no futuro absoluto de 1, ou pelo evento 2, já que o intervalo entre 2 e 3 é nulo.

1-5 O Efeito Doppler

No caso das ondas sonoras, a variação de frequência com a velocidade (efeito Doppler) depende de se é a fonte ou o observador que está se movendo com essa velocidade. Tal distinção é possível porque existe um meio (o ar) em relação ao qual podemos medir os movimentos da fonte e do observador. No caso da luz e outras ondas eletromagnéticas, porém, que podem se propagar no espaço vazio, essa distinção não existe. Isso significa que a expressão clássica usada para calcular o efeito Doppler não pode estar correta no caso da luz. Vamos agora determinar a expressão correta do efeito Doppler para a luz.

Considere uma fonte luminosa que esteja se movendo em direção a um observador A com velocidade v (Figura 1-34*a*). A fonte está emitindo uma série de ondas em direção aos observadores A e B enquanto se aproxima de A e se afasta de B. A Figura 1-34*b* mostra o diagrama espaço-tempo do sistema em S, o referencial no qual A e B estão em repouso. A fonte está localizada em $x' = 0$ (o eixo x' não aparece na figura) e, naturalmente, sua linha do universo é o eixo ct'. Suponha que a fonte emita uma série de N ondas eletromagnéticas nas duas direções a partir do instante em que as origens de S e S' coincidem. Considere primeiro a série de ondas emitidas em direção a A. Durante o intervalo de tempo Δt no qual a fonte emite N ondas, a primeira onda a ser emitida percorre uma distância $c\Delta t$ e a fonte percorre uma distância $v\Delta t$ em S. Do ponto de vista do observador em A, as N ondas ocupam uma extensão $c\Delta t - v\Delta t$ e, portanto, o comprimento de onda λ é dado por

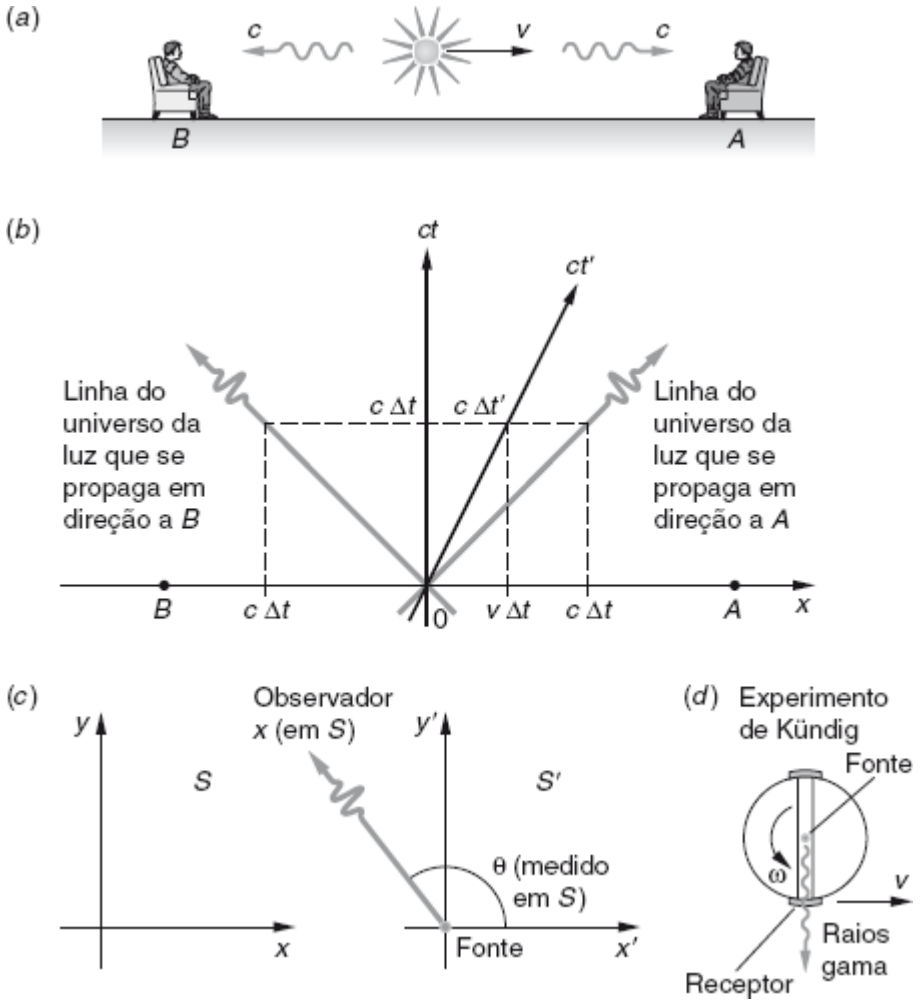


FIGURA 1-34 No caso da luz, como no do som, o efeito Doppler é causado pelo movimento relativo entre a fonte e o receptor; entretanto, o fato de que a velocidade da luz não depende do movimento faz com que as expressões do desvio de frequência sejam diferentes nos dois casos. (*a*) Uma fonte se aproxima do observador *A* e se afasta do observador *B*. O diagrama espaço-tempo para o referencial *S*, no qual *A* e *B* estão em repouso e a fonte se move com velocidade *v*, ilustra as duas situações. (*b*) A fonte situada em $x' = 0$ (o eixo x' foi omitido) se move ao longo de sua linha do universo, o eixo ct'. As *N* ondas emitidas em direção a *A* no intervalo de tempo Δt ocupam a região $\Delta x = c\Delta t - v\Delta t$, enquanto as que se dirigem a *B* ocupam a região $\Delta x = c\Delta t + v\Delta t$. Em três dimensões, o observador em *S* pode ver a luz emitida fazendo um ângulo θ em relação ao eixo *x* (*c*). Nesse caso, é observado o chamado efeito Doppler transversal. (*d*) Método usado por Kündig para medir o efeito Doppler transversal.

$$\lambda = \frac{c\Delta t - v\Delta t}{N}$$

e a frequência $f = c/\lambda$ é dada por

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{cN}{(c - v)\Delta t} = \frac{1}{1 - \beta}\frac{N}{\Delta t}$$

A frequência da fonte em S', denominada *frequência própria*, é dada por $f_0 = c/\lambda' = N/\Delta t'$, na qual $\Delta t'$ é medido em S', o referencial no qual a fonte se encontra em repouso. O intervalo de tempo $\Delta t'$ é o tempo próprio, já que as ondas luminosas, em particular a primeira e a enésima, são todas emitidas em $x' = 0$; assim, $\Delta x' = 0$ entre a primeira e a enésima onda em S'. A relação entre Δt e $\Delta t'$ é dada pela equação de dilatação dos tempos, Equação 1-26: $\Delta t = \gamma\Delta t'$. Assim, a frequência medida pelo observador *A* em *S* é dada por

$$f = \frac{1}{1 - \beta}\frac{f_0\Delta t'}{\Delta t} = \frac{f_0}{1 - \beta}\frac{1}{\gamma} \qquad \textbf{1-35}$$

ou

$$f = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta} f_0 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} f_0 \quad \text{(aproximando-se)} \qquad \textbf{1-36}$$

A única diferença entre a Equação 1-35 e a equação clássica é a presença do fator de dilatação dos tempos, γ. Note que se a distância entre a fonte e o observador estiver diminuindo, $f > f_0$. Como no caso da luz visível, isto corresponde a um desvio em direção à parte azul do espectro; o fenômeno é conhecido como *desvio para o azul*.

Suponha que a distância entre a fonte e o observador esteja aumentando, como acontece com o observador *B* da Figura 1-34*b*. Para o observador *B*, também estacionário em relação a *S*, as *N* ondas ocupam uma extensão $c\Delta t + v\Delta t$, e uma análise semelhante à anterior mostra que a frequência medida pelo observador *B* é dada por

$$f = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta} f_0 = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0 \quad \text{(afastando-se)} \qquad \textbf{1-37}$$

O uso do radar Doppler para observar fenômenos atmosféricos é uma aplicação direta da relatividade restrita.

Observe que se a distância entre a fonte e o observador está aumentando, $f < f_0$. Como no caso da luz visível, isto corresponde a um desvio em direção à parte vermelha do espectro; o fenômeno é conhecido como *desvio para o vermelho*. Fica a cargo do leitor mostrar que os mesmos resultados são obtidos quando a análise é executada no referencial em que a fonte está em repouso.

Algumas Aproximações Úteis

Se $v << c$ (ou seja, $\beta << 1$), uma situação muito comum na prática, as Equações 1-36 e 1-37 podem ser substituídas por aproximações bem mais fáceis de memorizar. A Equação 1-36, por exemplo, pode ser escrita na forma

$$f = f_0 (1+\beta)^{1/2} (1-\beta)^{-1/2}$$

Substituindo os fatores entre parênteses por suas expansões binomiais, temos:

$$f = f_0\left(1 + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{8}\beta^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 + \cdots\right)$$

Multiplicando termo a termo e desprezando os termos de ordem mais elevada que β, temos:

$$f/f_0 \approx 1 + \beta \quad \text{(aproximando-se)}$$

No caso da Equação 1-37, um cálculo semelhante leva à seguinte expressão:

$$f/f_0 \approx 1 - \beta \quad \text{(afastando-se)}$$

em ambos os casos, $|\Delta f/f_0| \approx \beta$, sendo $\Delta f = f_0 - f$.

EXEMPLO 1-12 **Rotação do Sol** O equador do Sol completa uma rotação em aproximadamente 25,4 dias. O raio do Sol é $7{,}0 \times 10^8$ m. Calcule o efeito Doppler observado nas bordas do Sol, perto do equador, para uma luz cujo comprimento de onda é $\lambda = 550$ nm $= 550 \times 10^9$ m (luz amarela). Trata-se de um desvio para o vermelho ou para o azul?

SOLUÇÃO

A velocidade *v* das bordas do Sol é dada pelo comprimento do equador dividido pelo período de rotação, ou seja,

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi\,(7{,}0 \times 10^8)\ \text{m}}{25{,}4\ \text{d} \cdot 3600\ \text{s/h} \cdot 24\ \text{h/d}} = 2000\ \text{m/s}$$

Como $v << c$, podemos usar as equações aproximadas. Usando a relação $|\Delta f/f_0| \approx \beta$, temos $\Delta f \approx \beta f_0 = \beta c/\lambda_0 = v/\lambda_0$ ou $\Delta f \approx 2.000/(550 \times 10^{-9}) = 3{,}64 \times 10^9$ Hz. Como $f_0 = c/\lambda_0 = (3 \times 10^8)/(550 \times 10^{-9}) = 5{,}45 \times 10^{14}$ Hz, Δf representa uma variação relativa de $(3{,}64 \times 10^{-9})/(5{,}45 \times 10^{14}) = 0{,}67 \times 10^{-5}$ ou aproximadamente uma parte em cem mil. O desvio é para o vermelho na borda que está se afastando do observador e para o azul na borda que está se aproximando.

O Efeito Doppler e a Luz das Estrelas

Em 1929, o astrônomo americano E. P. Hubble lançou a teoria de que o universo está se expandindo.[18] Hubble propôs uma

equação simples (a Equação 13-28) para descrever essa expansão com base nas medidas do efeito Doppler sobre a luz das galáxias. As frequências presentes na luz das galáxias distantes são menores do que as frequências presentes na luz emitida por fontes semelhantes situadas nas nossas vizinhanças. Como a expressão geral que relaciona a frequência f ao comprimento de onda Δ da luz é $c = f\lambda$, esse desvio é no sentido de comprimentos de onda maiores. Como já dissemos, a cor vermelha está na extremidade do espectro da luz visível correspondente a grandes comprimentos de onda (veja o Capítulo 4) e, por isso, esse tipo de desvio, observado quando a distância entre a fonte e o observador está aumentando, é conhecido como *desvio para o vermelho*. Analogamente, o termo *desvio para o azul* é usado para descrever o desvio experimentado pela luz de algumas estrelas, quase todas situadas em nossa galáxia, na direção de frequências mais altas ou comprimentos de onda menores. A existência desse desvio para o azul é interpretada como uma indicação de que a estrela está se aproximando da Terra.

Como será visto no Capítulo 13, o desvio para o vermelho observado para a maioria dos objetos celestes se deve à expansão geral do espaço, e não, como supunha Hubble, ao efeito Doppler. Acontece que no caso de galáxias pequenas, relativamente próximas da Terra, como as que foram observadas por Hubble, a diferença entre o desvio para o vermelho causado pelo efeito Doppler e o desvio causado pela expansão do espaço é relativamente pequena, da ordem de uns poucos por cento. Os astrônomos definem o desvio para o vermelho da luz produzida por corpos celestes por meio da expressão $z = (f_0 - f)/f$, na qual f_0 é a frequência medida no referencial da estrela ou galáxia e f é a frequência medida no referencial da Terra. Isso permite escrever $\beta = v/c$ na forma

$$\beta = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \qquad \textbf{1-38}$$

Nesse tipo de cálculo deve ser usada a equação exata, Equação 1-37, e não uma aproximação, já que as velocidades de afastamento das galáxias podem ser consideráveis. Assim, por exemplo, o quasar 2000-330 apresenta um desvio para o vermelho $z = 3{,}78$, o que indica, segundo a Equação 1-38, que está se afastando da Terra a uma velocidade de $0{,}91c$ devido à expansão do espaço.

EXEMPLO 1-13 **O Desvio para o Vermelho da Luz das Estrelas** O maior comprimento de onda emitido pelo átomo de hidrogênio na série de Balmer (veja o Capítulo 4) é $\lambda_0 = 656$ nm. Na luz de uma galáxia distante, o comprimento de onda da mesma linha espectral é $\lambda = 1.458$ nm. Determine a velocidade com a qual a galáxia está se afastando da Terra, supondo que o desvio se deve ao efeito Doppler.

SOLUÇÃO

1. A velocidade de afastamento é igual a βc. Como $\lambda > \lambda_0$, trata-se de um desvio para o vermelho e, portanto, deve ser usada a Equação 1-37:

$$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0$$

2. A Equação 1-37 pode ser escrita em termos dos comprimentos de onda:

$$\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \frac{f}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

3. Elevando os dois membros ao quadrado e substituindo λ_0 e λ por seus valores, temos:

$$\frac{1-\beta}{1+\beta} = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2$$
$$= \left(\frac{656\text{ nm}}{1458\text{ nm}}\right)^2 = 0{,}202$$

4. Explicitando β, temos:

$$1 - \beta = (0{,}202)(1+\beta)$$
$$1{,}202\beta = 1 - 0{,}202 = 0{,}798$$
$$\beta = \frac{0{,}798}{1{,}202} = 0{,}664$$

5. A velocidade de afastamento da galáxia é, portanto,

$$v = c\beta = 0{,}664c$$



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
O Efeito Doppler Transversal

Nossa discussão do efeito Doppler na Seção 1-5 envolveu apenas uma dimensão espacial, já que supusemos que a fonte e o observador estavam no eixo x e o movimento relativo se dava ao longo desse mesmo eixo. No caso tridimensional, uma análise mais completa, que não será reproduzida aqui, revela que a Equação 1-35 continua a ser válida, com uma pequena modificação. Se a fonte está se movendo no sentido positivo do eixo x mas o observador detecta a luz emitida em uma direção que faz um ângulo θ com o eixo x, como na Figura 1-34*c*, a Equação 1-35 se torna

$$f = \frac{f_0}{\gamma}\frac{1}{1 - \beta\cos\theta} \qquad \textbf{1-35}a$$

Para $\theta = 0$, esta equação é equivalente à Equação 1-36; para $\theta = \pi$, é equivalente à Equação 1-37. A Equação 1-35*a* também revela, surpreendentemente, que existe um desvio de frequência $f = f_0/\gamma$, mesmo quando o observador detecta a luz emitida na direção perpendicular ao movimento ($\theta = \pi/2$); é o chamado *efeito Doppler transversal*. Como $\gamma > 1$, $f < f_0$. Esse efeito, também conhecido como efeito Doppler de segunda ordem, é uma consequência da dilatação dos tempos para uma fonte em movimento. [A demonstração da Equação 1-35*a* pode ser encontrada em French (1968), Resnick (1992) e Ohanian (2001); as referências completas estão no final do capítulo.]

Aproveitando uma ideia proposta por Einstein em 1907, Kündig fez em 1962 uma excelente verificação quantitativa do efeito Doppler transversal.[19] Como fonte luminosa, Kündig usou raios gama de 14,4 keV emitidos por um isótopo de Fe (veja o Capítulo 11). A fonte estava em repouso no laboratório, no eixo de uma ultracentrífuga, e o receptor (uma placa fina de ferro) foi montado na borda da ultracentrífuga, como mostra a Figura 1-34*d*. Usando uma técnica de medida extremamente sensível denominada efeito Mössbauer (veja o Capítulo 11), Kündig observou um efeito Doppler transversal que estava de acordo com as previsões relativísticas dentro de uma margem de erro de ±1% para velocidades relativas até 400 m/s.

1-6 O Paradoxo dos Gêmeos e Outras Surpresas

As consequências dos postulados de Einstein (a transformação de Lorentz, a adição relativística de velocidades, a dilatação dos tempos, a contração das distâncias e a relatividade da simultaneidade) levam a muitas previsões inesperadas ou mesmo surpreendentes quando comparadas com nossas experiências em um mundo macroscópico onde $\beta \approx 0$ e a geometria é aproximadamente euclidiana. Outras previsões chegam a parecer absurdas, como a de que dois observadores diferentes podem obter resultados igualmente válidos mas aparentemente incompatíveis. Vamos encerrar este capítulo com a discussão de alguns desses exemplos, o que ajudará a familiarizar os leitores com as sutilezas da relatividade restrita.

O Paradoxo dos Gêmeos

Talvez o mais famoso paradoxo da relatividade restrita seja o paradoxo dos gêmeos, também conhecido como paradoxo do relógio, que está ligado ao fenômeno da dilatação dos tempos (Equação 1-26). Homero e Ulisses são irmãos gêmeos. Ulisses viaja com velocidade constante até uma estrela distante e volta à Terra, enquanto Homero permanece o tempo todo em nosso planeta. Quando Ulisses chega em casa, descobre que o irmão envelheceu muito mais do que ele, o que está de acordo, como veremos em seguida, com as previsões da teoria de relatividade restrita. O paradoxo resulta da ideia de que todo movimento é relativo. Sendo esse o caso, cada um dos gêmeos poderia ter a impressão de que foi o outro que viajou e, portanto, observaria que o outro voltou mais jovem. Isso levaria a uma contradição lógica, ou seja, a um paradoxo. Vamos ilustrar esse paradoxo com um exemplo específico. Suponha que a Terra e a estrela de destino estejam estacionárias em um mesmo referencial inercial S. Dois outros referenciais, S' e S'', estão em movimento em relação a S com velocidades $v = +0{,}8c$ e $v = -0{,}8c$, respectivamente. Assim, $\gamma = 5/3$ em ambos os casos. A espaçonave de Ulisses acelera rapidamente de S para S', permanece em S' até chegar à estrela, acelera rapidamente de S' para S'', permanece em S'' até chegar à Terra, e freia até parar ao lado de Homero no referencial S.

É fácil analisar o problema do ponto de vista de Homero, que permaneceu na Terra. Suponha que, de acordo com o relógio de Homero, Ulisses permaneça em S' por um intervalo de tempo $\Delta t = 5$ anos e permaneça em S'' pelo mesmo intervalo de tempo. Nesse caso, Homero estará 10 anos mais velho quando Ulisses voltar. O intervalo de tempo em S' entre a partida de

Ulisses da Terra e sua chegada à estrela é menor porque se trata de tempo próprio. O tempo necessário para chegar à estrela, do ponto de vista de Ulisses, é dado por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{5 \text{ anos}}{5/3} = 3 \text{ anos}$$

Como o mesmo tempo é gasto na viagem de volta, o tempo total de viagem do ponto de vista de Ulisses é 6 anos e, portanto, ele estará 4 anos mais novo que Homero quando os dois se reencontrarem.

O problema com esse raciocínio parece estar no fato de que se aplicaria igualmente bem ao outro gêmeo. Se imaginarmos que Ulisses permaneceu o tempo todo em repouso e foi Homero que viajou, o tempo total de viagem, do ponto de vista de Homero, será apenas $6/\gamma = 3{,}6$ anos e, portanto, ele estará 2,4 anos mais novo que Ulisses quando os dois se reencontrarem. Esse, naturalmente, é o paradoxo. As duas previsões não podem estar simultaneamente corretas. Entretanto, tal raciocínio se baseia na premissa incorreta de que as situações dos gêmeos são simétricas e intercambiáveis. Isso não é verdade. Homero permanece o tempo todo no mesmo referencial inercial, enquanto Ulisses muda de referencial, como se pode ver na Figura 1-35*a*, que mostra o diagrama espaço-tempo da viagem do ponto de vista dos dois irmãos. Mesmo que o tempo necessário para a mudança de referencial seja apenas uma pequena fração do tempo total da viagem, essa mudança é essencial para que as idades de Homero e Ulisses possam ser comparadas no final do experimento.

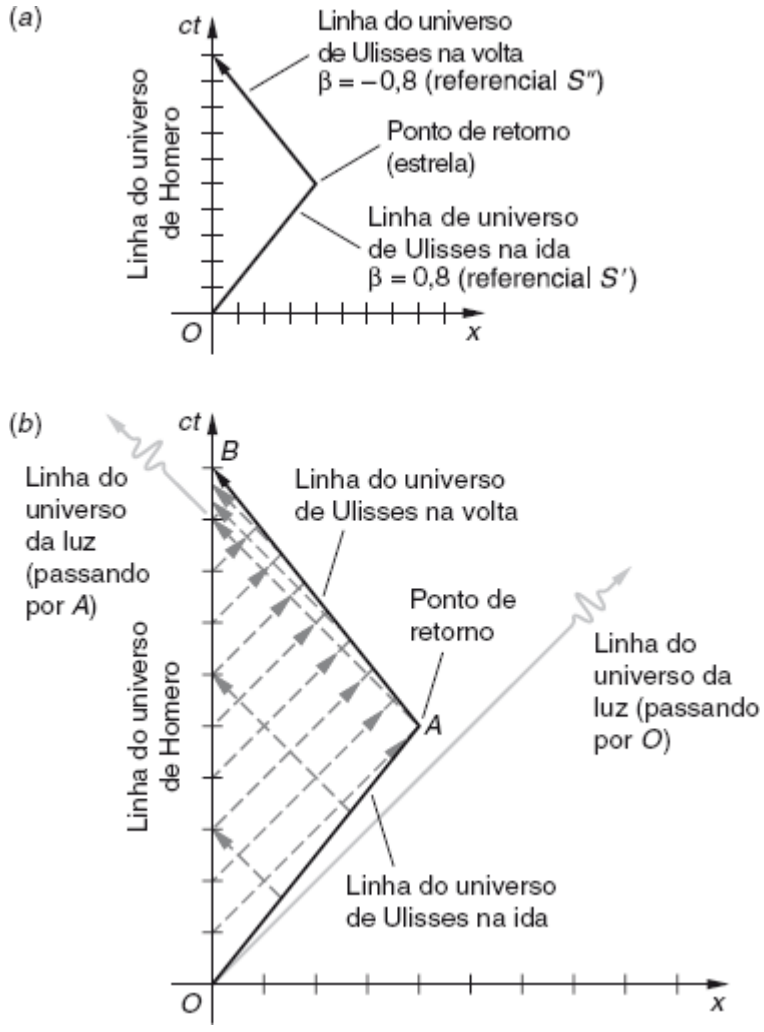


FIGURA 1-35 (*a*) Diagrama espaço-tempo da viagem de Ulisses a uma estrela distante no referencial inercial em que Homero e a estrela estão em repouso. (*b*) As divisões do eixo *ct* correspondem a anos no relógio de Homero. As retas tracejadas mostram as linhas do universo de sinais luminosos transmitidos pelos gêmeos com uma frequência de um sinal por ano, de acordo com seus relógios. Observe que as frequências dos sinais recebidos pelos dois gêmeos são muito diferentes.

A análise correta da situação se baseia no intervalo invariante Δs da Equação 1-31, que pode ser escrito na forma:

$$\left(\frac{\Delta s}{c}\right)^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2$$

em que o membro da esquerda é constante e igual a $(\tau)^2$, o quadrado do intervalo de tempo próprio, enquanto os intervalos Δt e

Δx do membro da direita podem ser medidos em qualquer referencial inercial. Assim, ao longo de toda a linha do universo de Ulisses (Figura 1-35*a*), $\Delta x = 0$ e $\Delta t = \tau = 3$ anos para a viagem de ida, ou seja, 6 anos para a viagem completa. Do ponto de vista de Homero, porém, o intervalo de tempo é dado por

$$(\Delta t)^2 = (\tau)^2 + \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2$$

e como $(\Delta x/c)^2$ é sempre positivo, Homero sempre observa um intervalo de tempo $\Delta t > \tau$. Neste exemplo, $\Delta x = 0{,}8c\ \Delta t$ e, portanto,

$$(\Delta t)^2 = (3 \text{ anos})^2 + (0{,}8c\Delta t/c)^2$$
$$\text{ou} \quad (\Delta t)^2(0{,}36) = (3)^2$$
$$\Delta t = \frac{3}{0{,}6} = 5 \text{ anos}$$

ou 10 anos para a viagem completa, como vimos anteriormente. O motivo pelo qual a situação dos gêmeos não pode ser tratada de forma simétrica é que a teoria da relatividade restrita só prevê corretamente o comportamento de sistemas acelerados, como o da espaçonave de Ulisses durante as mudanças de referencial, se na formulação das leis da física assumirmos o ponto de vista de um observador inercial, ou seja, não acelerado. Assim, no contexto da relatividade restrita, o problema pode ser analisado do ponto de vista de Homero, mas não do ponto de vista da espaçonave de Ulisses, já que ela não permaneceu em um referencial inercial durante todo o experimento. Assim, o estudo do problema do ponto de vista de Ulisses foge ao âmbito da relatividade restrita e o paradoxo deixa de existir. Quando as leis da física são reformuladas de modo a se tornarem invariantes em relação a observadores acelerados, como na teoria da relatividade geral (veja o Capítulo 2), o resultado é confirmado: Ulisses volta realmente mais jovem do que Homero e a diferença de idades é exatamente a prevista pela relatividade restrita.

EXEMPLO 1-14 **O Paradoxo dos Gêmeos e o Efeito Doppler** Este exemplo, proposto por C. G. Darwin,[20] pode ajudar o leitor a compreender o que se passa com os dois gêmeos durante a viagem de Ulisses. Homero e Ulisses combinam que todo ano, no aniversário do lançamento da espaçonave de Ulisses (momento em que os relógios dos gêmeos foram sincronizados), cada irmão enviará um sinal luminoso ao outro. A Figura 1-35*b* mostra as linhas do universo desses sinais. Durante a viagem, Homero envia 10 sinais (o eixo *ct*, que coincide com a linha do universo de Homero, pode ser dividido em 10 intervalos iguais, correspondentes aos 10 anos de viagem, do ponto de vista de Homero) e Ulisses envia 6 sinais (as linhas do universo correspondentes à viagem de ida e à viagem de volta de Ulisses podem ser divididas em 3 intervalos iguais, cada um correspondente aos 3 anos de viagem, do ponto de vista de Ulisses). Observe que o último sinal é transmitido no momento em que os gêmeos voltam a se encontrar no ponto *B*. Embora ambos transmitam os sinais com uma frequência de um por ano, obviamente os sinais não são recebidos com a mesma frequência. Assim, por exemplo, Ulisses não recebe nenhum sinal de Homero durante os primeiros 3 anos de viagem! Como podemos explicar a diferença entre as frequências observadas?

SOLUÇÃO

A explicação para as frequências observadas está no efeito Doppler. Enquanto a distância entre os gêmeos está aumentando, a frequência dos sinais é reduzida de acordo com a Equação 1-37:

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = \sqrt{\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8}} = \frac{1}{3}$$

Isto é exatamente o que os gêmeos observam (Figura 1-35*b*): Homero recebe 3 sinais nos primeiros 9 anos, e Ulisses, apenas um sinal nos primeiros 3 anos, ou seja, $f = f_0/3$ em ambos os casos.

Depois que Ulisses inicia a viagem de volta, a distância entre os gêmeos começa a diminuir e devemos empregar a Equação 1-38:

$$\frac{f}{f_0} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1+0{,}8}{1-0{,}8}} = 3$$

Mais uma vez, o resultado está de acordo com as observações dos gêmeos: Homero recebe 3 sinais durante o último ano (o décimo) e Ulisses recebe 9 sinais durante os últimos 3 anos, ou seja, $f = 3f_0$ em ambos os casos.

Exercício

10. A diferença entre as idades dos gêmeos é um exemplo da relatividade da simultaneidade que foi discutida anteriormente. Explique a relação entre esse efeito e o fato de que os relógios biológicos dos dois gêmeos não estão mais sincronizados após a viagem.



Leitura Suplementar

É a relatividade da simultaneidade, e não a diferença entre as acelerações dos dois gêmeos, que faz com que envelheçam em ritmos diferentes. Esse fato está ilustrado em *O Caso dos Gêmeos Identicamente Acelerados*, disponível no site da LTC Editora, onde também se encontra a Figura 1-36.

O Paradoxo da Vara e do Celeiro

Um problema interessante, relacionado à contração das distâncias, foi proposto por W. Rindler em 1961 e é mencionado em vários livros sobre relatividade. Na versão de E.F. Taylor e J.A. Wheeler,[22] um corredor entra em um celeiro de 5 m de profundidade com uma barra de 10 m de comprimento. Um fazendeiro está do lado de fora do celeiro em uma posição tal que pode ver a porta da frente, que está aberta, e a porta dos fundos, que está fechada (Figura 1-37*a*). O corredor, que está se movendo com velocidade v, entra no celeiro; pouco depois, o fazendeiro observa que a vara está totalmente dentro do celeiro e fecha a porta da frente, guardando assim uma vara de 10 m de comprimento no interior de um celeiro de 5 m. Para calcular a menor velocidade v necessária para que isso aconteça, basta usar a Equação 1-28, tomando o comprimento próprio L_p como o comprimento da vara (10 m) e o comprimento da vara $L = L_p/\gamma$ medido pelo fazendeiro como igual à profundidade do celeiro (5 m). O cálculo é o seguinte:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L_p}{L} = \frac{10}{5}$$

$$1 - v^2/c^2 = (5/10)^2$$

$$v^2/c^2 = 1 - (5/10)^2 = 0{,}75$$

$$v = 0{,}866c \quad \text{ou} \quad \beta = 0{,}866$$

O paradoxo parece surgir quando a situação é analisada do ponto de vista do corredor. Para ele, a vara, que se encontra em repouso no mesmo referencial inercial, tem o comprimento próprio, 10 m. Por outro lado, a profundidade do celeiro, do ponto de vista do corredor, é

$$L = L_p/\gamma = 5\sqrt{1 - \beta^2}$$

$$L = 2{,}5 \text{ m}$$

Como é possível que uma vara de 10 m caiba em um celeiro com apenas 2,5 m de profundidade? A resposta, naturalmente, é que isso não é possível, mas, nesse caso, qual é a explicação? Para encontrar a resposta, precisamos analisar dois eventos (as coincidências das extremidades anterior e posterior da vara com as portas traseira e dianteira do celeiro, respectivamente) no referencial do fazendeiro e no referencial do corredor.

A situação pode ser descrita por diagramas espaço-tempo no referencial S do fazendeiro e do celeiro (Figura 1-37*b*) e no referencial S' do corredor (Figura 1-37*c*). Os dois diagramas foram desenhados partindo da hipótese de que a extremidade anterior da vara coincide com a porta dianteira do celeiro no instante em que os relógios são ligados. Na Figura 1-37*b*, as linhas do universo das portas do celeiro são verticais e as linhas associadas às extremidades da vara fazem um ângulo $\theta = \tan^{-1}(1/\beta) = 49{,}1°$ com o eixo x. Observe que, em S, a extremidade anterior da vara atinge a porta traseira do celeiro no instante $ct = 5/0{,}866 = 5{,}8$ m, *simultaneamente* com a chegada da extremidade posterior da vara à porta dianteira. Assim, para um observador em S, nesse instante a vara está inteiramente contida no celeiro.

No referencial S' do corredor, as linhas do universo das extremidades da vara que são verticais, enquanto as portas do celeiro fazem um ângulo de 49,1° com o eixo $-x'$ (neste referencial, o celeiro está se movendo com velocidade v no sentido negativo do eixo x'). Agora podemos ver que a porta traseira do celeiro passa pela extremidade anterior da vara em $ct' = 2{,}5/0{,}866 = 2{,}9$ m, mas a porta dianteira do celeiro não atinge a extremidade posterior da barra até o instante $ct' = 10/0{,}866 = 11{,}5$ m. Assim, o primeiro desses dois eventos ocorre *antes* do segundo e o corredor nunca vê a vara inteiramente no interior do celeiro. Mais uma vez, a explicação está na relatividade da simultaneidade: eventos que são simultâneos em um certo referencial inercial deixam de ser simultâneos quando observados em outro referencial inercial.

Vamos agora considerar uma versão diferente desse paradoxo, a que foi originalmente proposta por W. Rindler. Suponha que a parede dos fundos do celeiro fosse feita de aço e não houvesse uma porta. O que veriam o fazendeiro e o corredor nesse caso? Mais uma vez, no referencial de repouso do fazendeiro (e do celeiro), a extremidade anterior da vara atinge a parede traseira do celeiro simultaneamente com a chegada da extremidade posterior da vara à porta dianteira, de modo que, nesse instante, a vara de 10 m está realmente contida no celeiro de 5 m. No instante *seguinte*, porém, a vara se choca com a parede dos fundos e se quebra ou se dobra (ou seja, sofre uma rotação no espaço-tempo). De acordo com os postulados da relatividade, o corredor deve chegar à mesma conclusão no seu referencial de repouso quando o celeiro de 2,5 m de profundidade se aproxima dele a uma velocidade $v = 0{,}866c$. Agora, porém, quando a parede dos fundos se choca com a extremidade anterior da vara, o celeiro continua a se mover, arrastando a vara com ele e deixando, nesse instante, 7,5 m da vara ainda do lado de fora do celeiro. Entretanto, como o fazendeiro, o corredor deve ver a vara de 10 m inteiramente contida no celeiro de 2,5 m. Como isso é possível? Da seguinte forma: no instante em que a ponta da vara se choca com a parede dos fundos do celeiro, essa informação (uma onda de choque) começa a se propagar ao longo da vara. Mesmo que a onda de choque se propagasse à velocidade da luz, c, levaria 10 m/3,0 × 10^8 m/s = 3,33 × 10^{-8} s para chegar à outra extremidade da vara. Nesse intervalo de tempo, a porta do celeiro deve percorrer apenas 7,5 m para chegar ao local onde se encontra a extremidade posterior da vara e cobre essa distância em apenas 7,5 m/(0,866 × 3,0 × 10^8 m/s) = 2,89 × 10^{-8} s. Assim, o corredor, da mesma forma que o fazendeiro, vê a vara de 10 m inteiramente contida no celeiro de 2,5 m, pelo menos por alguns instantes!

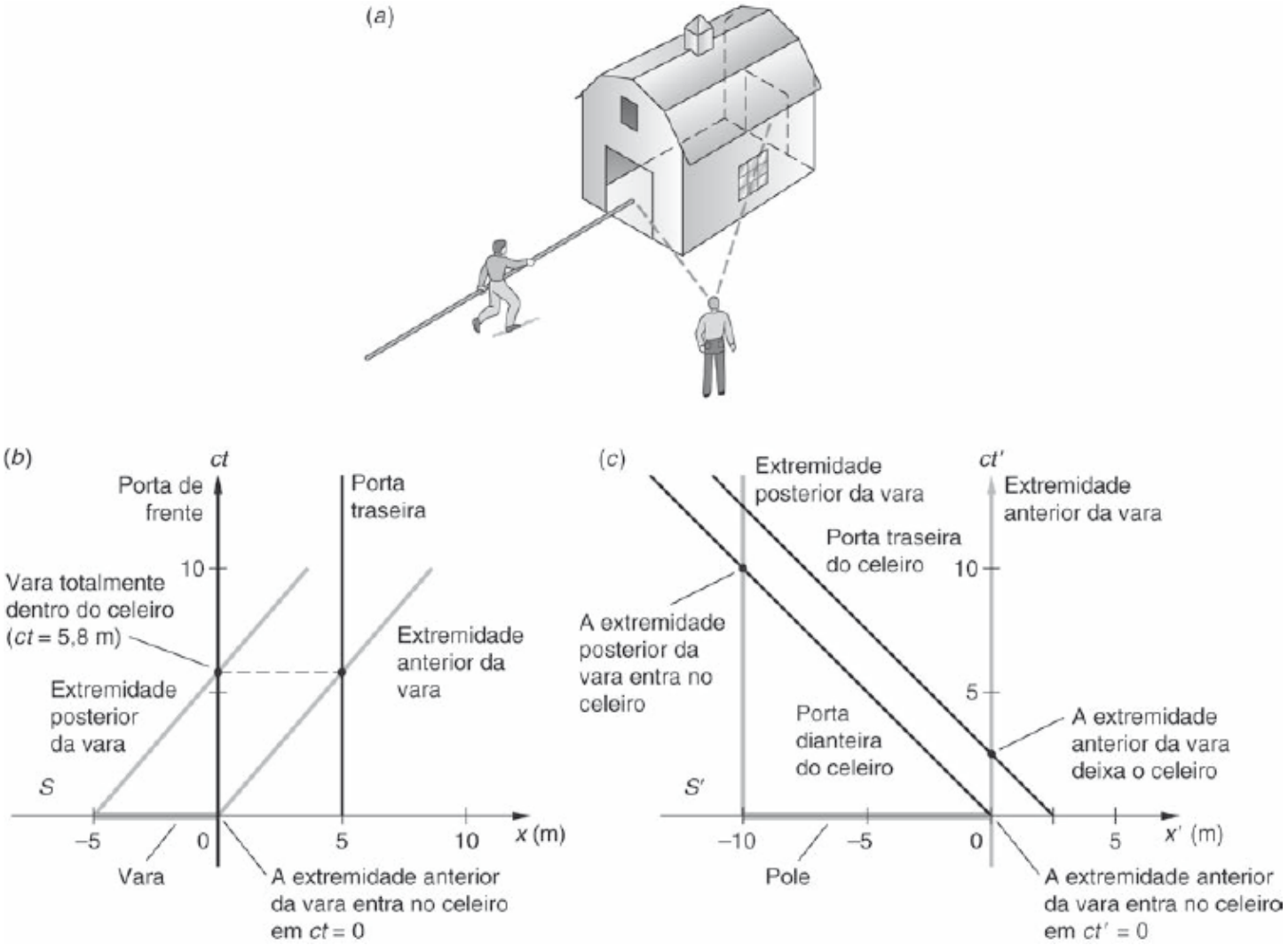


FIGURA 1-37 (*a*) Um corredor com uma vara de 10 m se move tão depressa que o fazendeiro vê a vara totalmente no interior do celeiro, que tem apenas 5 m de profundidade. Diagramas espaço-tempo do ponto de vista do fazendeiro (*b*) e do corredor (*c*). A explicação do aparente paradoxo está no fato de que os eventos de interesse, indicados por pontos nos diagramas, são simultâneos em *S*, mas não em *S*′.

Exercício

11. Na situação em que não existe uma porta na parede dos fundos do celeiro, tanto o fazendeiro como o corredor veem a vara inteiramente contida no celeiro, qualquer que seja a velocidade relativa entre eles? Justifique sua resposta.

Efeito Farol

Já nos referimos várias vezes ao segundo postulado de Einstein, segundo o qual a velocidade da luz não depende do movimento da fonte; entretanto, não se pode dizer o mesmo da *direção* da luz. Considere uma fonte luminosa em S' que emite luz uniformemente em todas as direções. A Figura 1-38*a* mostra um raio de luz emitido por essa fonte que faz um ângulo θ' com o eixo x'. Durante um intervalo de tempo $\Delta t'$, o raio percorre uma distância $\Delta x'$ e podemos escrever:

$$\frac{\Delta x'}{c\Delta t'} = \frac{\Delta x'}{\Delta (ct')} = \cos\theta' \qquad \textbf{1-39}$$

Da mesma forma, a relação entre o ângulo θ e os intervalos Δt e Δx em S é dada por

$$\frac{\Delta x}{\Delta (ct)} = \cos\theta \qquad \textbf{1-40}$$

Aplicando a transformação de Lorentz inversa à Equação 1-40, temos:

$$\cos\theta = \frac{\Delta x}{c\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x' + v\Delta t')}{c\gamma(\Delta t' + v\Delta x'/c^2)}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\Delta t'$ e depois por c, obtemos:

$$\cos\theta = \frac{(\Delta x'/\Delta t' + v)}{c\left(1 + \frac{v}{c^2}\Delta x'/\Delta t'\right)} = \frac{\Delta x'/\Delta (ct') + v/c}{1 + \frac{v}{c}\cdot\frac{\Delta x'}{\Delta (ct')}}$$

Combinando esse resultado com a Equação 1-39, temos:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'} \qquad \textbf{1-41}$$

Considerando apenas os raios emitidos pela fonte em S' no hemisfério dianteiro, ou seja, os raios para os quais $-\pi/2 < \theta' < \pi/2$, vemos que a Equação 1-41 restringe os ângulos θ medidos em S para esses raios (50% de toda a luz) ao intervalo $-\cos^{-1}\beta < \theta < \cos^{-1}\beta$. Assim, por exemplo, para $\beta = 0{,}5$, o observador em S veria metade da luz emitida pela fonte no intervalo $-60° < \theta < 60°$, ou seja, em um cone com 120º de abertura e eixo coincidente com a direção da velocidade da fonte. Para valores de β próximos da unidade, θ é muito pequeno; para $\beta = 0{,}99$, $\theta = 8{,}1°$. Isso significa que o observador em S vê metade de toda a luz emitida pela fonte concentrada em um cone com apenas 16,2° de abertura (Figura 1-38*b*). Observe também que os outros 50% da luz emitida estão distribuídos pelos 343,8º restantes do espaço bidimensional.[23] Em consequência do efeito farol, a luz proveniente de uma fonte que se aproxima rapidamente parece muito mais intensa do que a luz da mesma fonte em repouso. Pela mesma razão, a luz de uma fonte que se afasta rapidamente parece muito menos intensa que a da mesma fonte em repouso. Esse resultado tem importantes implicações para a astrofísica e a física das partículas elementares.

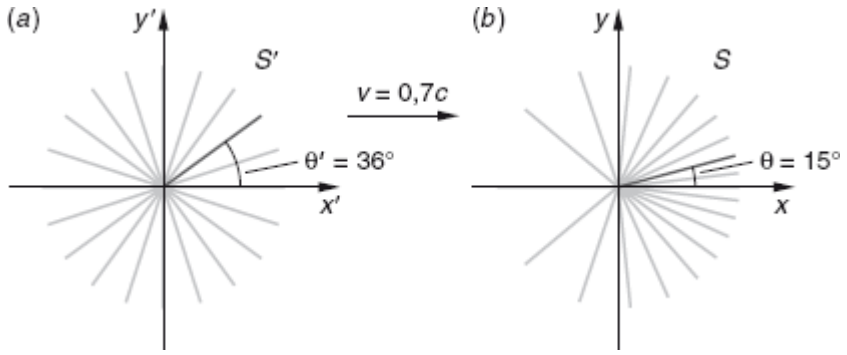


FIGURA 1-38 (*a*) A fonte em repouso em S' está se movendo com uma velocidade $\beta = 0{,}7$ em relação a S. (*b*) Um pulso luminoso que se propaga uniformemente em S', quando observado do ponto de vista de S, parece concentrar-se em um cone. O ângulo entre os raios mostrados em (*a*) é 18°. O ângulo entre os raios mostrados em (*b*) pode ser calculado com o auxílio da Equação 1-41. As linhas mais grossas são raios correspondentes nos dois referenciais.

Nas estimativas do brilho intrínseco de estrelas e galáxias, um parâmetro importante para os estudos de astrofísica, os astrônomos precisam levar em conta o efeito farol, especialmente se o objeto está se movendo muito depressa em

relação à Terra.

Exercício

12. Observe na Equação 1-41 que parte da luz emitida por uma fonte em movimento no hemisfério traseiro é vista pelo observador em *S* como se tivesse sido emitida no hemisfério dianteiro. Explique como isso pode acontecer, usando argumentos qualitativos.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Velocidades Superluminares

Concluímos este capítulo com alguns comentários a respeito de corpos que se movem mais depressa que a luz. As transformações de Lorentz (Equações 1-18 e 1-19) não se aplicam quando a velocidade relativa de dois referenciais inerciais é maior que a velocidade da luz, já que o fator γ se tornaria imaginário. Esse fato em geral é interpretado como uma indicação de que nenhum tipo de massa, energia ou informação pode viajar mais depressa que a luz. Entretanto, é possível que certos processos ocorram com velocidades maiores que *c* sem contrariar a teoria da relatividade. Um exemplo simples é o movimento do ponto em que as lâminas de uma tesoura se interceptam quando a tesoura é fechada rapidamente, um fenômeno conhecido como paradoxo da tesoura (Figura 1-39). Uma das lâminas faz um ângulo θ com o eixo *x* (a segunda lâmina) e se move na direção $-y$ com uma velocidade constante $v_y = \Delta y/\Delta t$. Durante o intervalo de tempo Δt, o ponto *P* de interseção das lâminas se desloca de uma distância Δx. Como podemos ver na figura, $\Delta y/\Delta x = \tan\theta$. A velocidade com a qual *P* se desloca para a direita é dada por

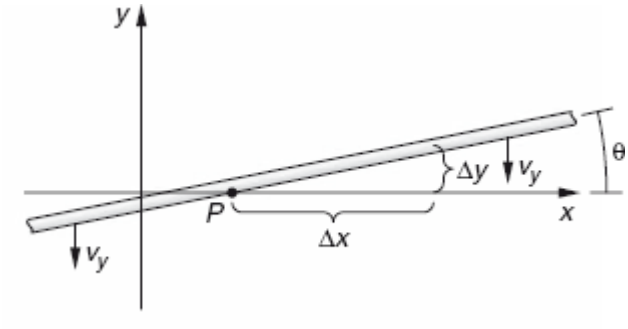


FIGURA 1-39 Quando a barra inclinada se move verticalmente para baixo, a interseção das "lâminas", ponto *P*, se move para a direita com uma velocidade $v_P = \Delta x/\Delta t$. Em termos de v_y e θ, $v_P = v_y/\tan\theta$.

$$v_p = \Delta x/\Delta t = \frac{\Delta x}{\Delta y/v_y} = \frac{v_y\,\Delta x}{\Delta x \tan\theta} \qquad \textbf{1-42}$$

ou

$$v_p = \frac{v_y}{\tan\theta}$$

Como $\tan\theta \to 0$ quando $\theta \to 0$, é sempre possível encontrar um valor de θ suficientemente próximo de zero para que $v_P > c$, seja qual for o valor v_y. Quando uma tesoura de verdade é fechada, o ângulo diminui progressivamente, de modo que, em princípio, tudo que é preciso para que $v_P > c$ é que as lâminas sejam suficientemente compridas para que a condição seja satisfeita antes que a tesoura esteja totalmente fechada.

Exercício

13. Use um diagrama como o da Figura 1-32 para explicar por que o movimento do ponto *P* não pode ser usado para transmitir informações a observadores situados ao longo das lâminas.

Naturalmente, o ponto *P* do paradoxo da tesoura é um ponto geométrico, e não um objeto físico e, portanto, nada impede que se mova mais depressa que a luz. Como exemplo de um objeto com massa que parece se mover mais depressa que a luz, considere um pequeno meteorito aproximando-se da Terra com velocidade *v*. Quando o meteorito entra na atmosfera, a cerca de 9 km de altitude, o atrito com o ar o torna luminoso e a primeira luz começa a viajar em direção a um observador situado na superfície do planeta. Depois de um intervalo de tempo Δt, o meteorito é totalmente consumido, deixa de brilhar e a última luz inicia sua viagem em direção ao

observador (Figura 1-40). No intervalo de tempo entre a primeira e a última luz, o meteorito percorre uma distância $v\Delta t$. Durante esse mesmo intervalo, a primeira luz percorre uma distância $c\Delta t$. Assim, o intervalo espacial entre a primeira e a última luz é dado por

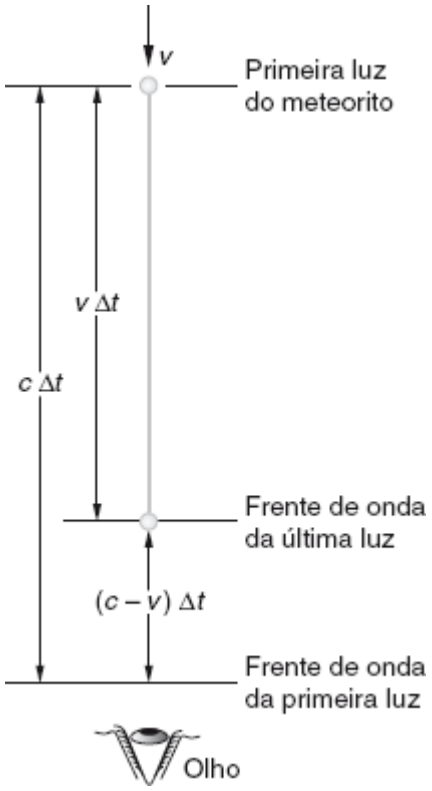


FIGURA 1-40 Um meteorito se move na direção do observador com velocidade v. A distância espacial entre as frentes de onda associadas à primeira e à última luz, que se movem com velocidade c, é $(c - v)\Delta t$. Assim, o intervalo de tempo entre as duas frentes de onda ao atingirem o olho do observador não é Δt, e sim Δt_{olho}, que é dado por $(c - v)\Delta t/c = (1 - \beta)\Delta t$. A velocidade aparente de aproximação do meteorito é $v_a = v\Delta t/\Delta t_{\text{olho}} = \beta c/(1 - \beta)$.

$$\Delta y = c\Delta t - v\Delta t = \Delta t(c - v)$$

e o intervalo temporal do ponto de vista do observador Δt_{olho} entre a chegada da primeira luz e a chegada da segunda luz é dado por

$$\Delta t_{\text{olho}} = \Delta y/c = \frac{\Delta t(c - v)}{c} = \Delta t(1 - \beta)$$

Finalmente, a velocidade aparente v_a do meteorito é dada por:

$$v_a = \frac{v\Delta t}{\Delta t_{\text{olho}}} = \frac{v\Delta t}{\Delta t(1 - \beta)} = \frac{\beta c}{1 - \beta} \qquad \textbf{1-43}$$

De acordo com a Equação 1-43, $v_a > c$ para $\beta > 0{,}5$. Para $v = 0{,}8c$, por exemplo, a velocidade aparente do meteorito é $v_a = 4c$. Certas estruturas galácticas também parecem se mover com velocidades superluminares, como na sequência de imagens do jato da galáxia M87 que aparece na Figura 1-41.

Como exemplo final de objetos que se movem mais depressa que a luz, alguns cientistas levantaram a possibilidade de que existam partículas cuja velocidade é sempre maior que a da luz. Uma das razões para essa sugestão é uma atraente simetria: como $v < c$ para as partículas comuns e $v = c$ para os fótons e outras partículas sem massa de repouso, a presença de partículas com $v > c$ tornaria simétrica a classificação das partículas elementares. A existência dessas partículas, denominadas *táquions*, traria alguns problemas sérios, mas não insuperáveis, para a teoria da relatividade, entre eles a existência de energias de repouso infinitas e paradoxos de causalidade como a possibilidade de alterar o passado (veja o exemplo a seguir). Não existe nenhum argumento teórico que impeça a existência dos táquions; entretanto, até o momento todas as tentativas experimentais de observar um táquion fracassaram[24] e os limites estabelecidos por esses experimentos indicam que é altamente improvável que os táquions existam.

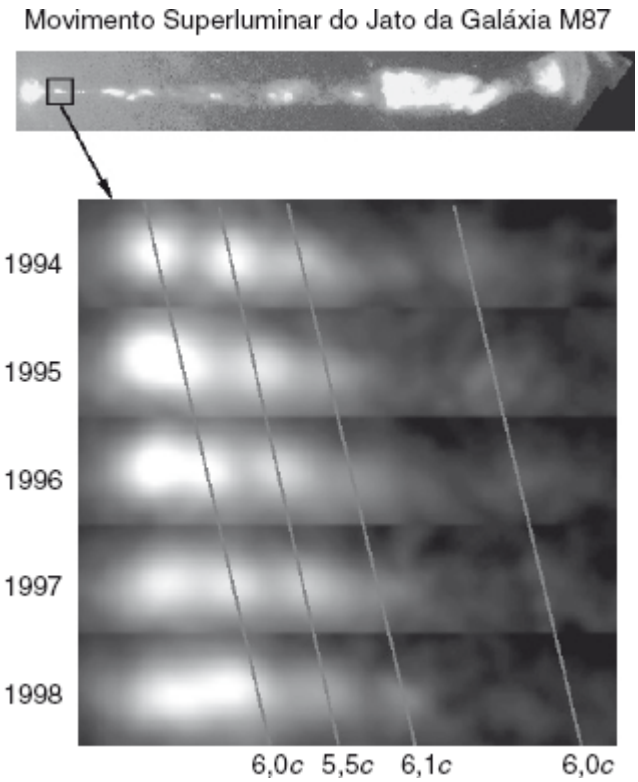


FIGURA 1-41 Movimentos superluminares foram observados em vários objetos astronômicos. Essa sequência de imagens obtidas pelo Telescópio Espacial Hubble mostra um movimento aparente seis vezes mais rápido que a velocidade da luz na galáxia M87. O jato emitido pelo núcleo da galáxia (a região arredondada na extremidade esquerda da primeira foto) tem cerca de 5.000 anos-luz de comprimento. A região assinalada por um quadrado aparece ampliada nas outras fotos. As retas inclinadas mostram as posições sucessivas de diferentes regiões do jato e indicam as velocidades aparentes dessas regiões. [John Biretta, *Space Telescope Science Institute*.]

EXEMPLO 1-15 **Mudando o Passado com Táquions** Imagine que os táquions existam e use um diagrama espaço-tempo para mostrar que essas partículas poderiam ser usadas para mudar o passado e, assim, alterar o presente, criando um paradoxo.

SOLUÇÃO

Em um diagrama espaço-tempo no referencial do laboratório, S, a linha do universo de uma partícula com uma velocidade $v > c$, criada na origem e viajando no sentido positivo dos x, faz um ângulo menor que 45° com o eixo x, ou seja, está abaixo da linha do universo de um raio luminoso (Figura 1-42). Depois de algum tempo, a partícula atinge um detector de táquions instalado a bordo de uma espaçonave que está se movendo com velocidade $v < c$ no sentido positivo do eixo x. A figura mostra o referencial S' da espaçonave, cuja origem está no ponto P. O detector cria imediatamente um novo táquion e o envia no sentido negativo do eixo x e, naturalmente, no sentido do futuro de S', isto é, no sentido positivo do eixo ct'. O segundo táquion chega ao laboratório ($x = 0$) no ponto M, ou seja, em um instante *anterior* àquele no qual o primeiro táquion foi emitido (ponto O). Tendo enviado uma partícula para o passado do laboratório, poderíamos modificar os eventos ocorridos no intervalo de tempo entre M e O, o que levaria a contradições causais. Assim, por exemplo, o detector de táquions do laboratório poderia ser ligado ao equipamento usado para criar o primeiro táquion por meio de um computador programado para cancelar a emissão do primeiro táquion, caso o segundo táquion fosse detectado. (Isso não faz lembrar *O Exterminador do Futuro*?) Contradições lógicas como essa, combinadas com a ausência de indícios experimentais, levam a maioria dos cientistas a concluir que não existem partículas capazes de se mover mais depressa que a luz.

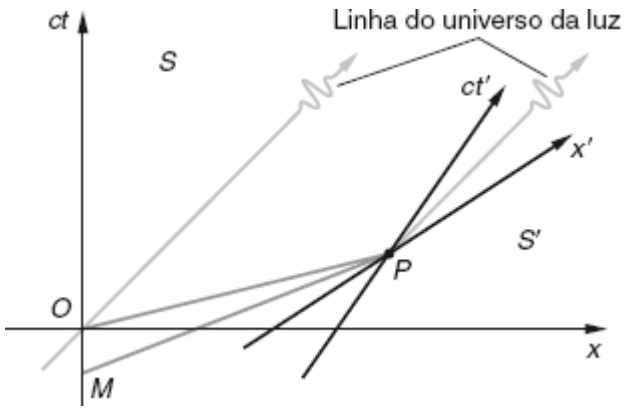


FIGURA 1-42 Um táquion emitido na origem O de S, o referencial do laboratório, alcança uma espaçonave no ponto P. Sua detecção provoca a emissão de um segundo táquion. Este chega ao laboratório ($x = 0$) em $ct < 0$, isto é, antes da emissão do primeiro táquion.

Como foi dito, um atrativo (ou estigma) da existência de objetos capazes de se mover mais depressa que a luz é a possibilidade de mudar a história viajando para o passado. Encerramos este capítulo sobre a relatividade ilustrando um paradoxo desse tipo na Figura 1-43.

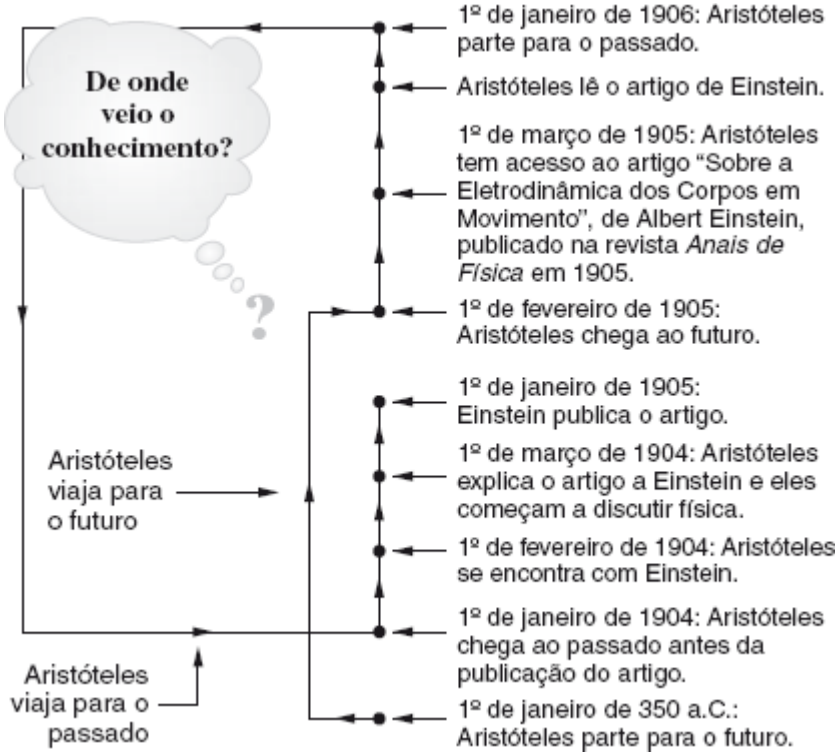


FIGURA 1-43 O paradoxo da criação de conhecimento ilustra um problema de causalidade associado a viagens para o passado, uma possível consequência da existência de objetos capazes de se mover mais depressa que a luz. [*Os autores agradecem a Costas Efthimiou por este exemplo*.]

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Relatividade clássica	$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$ **1-2**
Transformação de Galileu	As leis de Newton são invariantes em todos os sistemas ligados por uma transformação de Galileu

Relatividade de Newton	
2. Postulados de Einstein	As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais. A velocidade da luz é c, independentemente do movimento da fonte.
3. Relatividade da simultaneidade	Eventos que são simultâneos em um referencial inercial podem não ser simultâneos em outro referencial inercial.
4. Transformação de Lorentz	$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z$ **1-18** $t' = \gamma(t - vx/c^2) \quad$ em que $\quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$
5. Dilatação dos tempos	Intervalo de tempo próprio é o intervalo de tempo entre dois eventos que ocorrem no mesmo ponto do espaço. Se esse intervalo é $\Delta t' = \tau$ no referencial S', o intervalo no referencial S é dado por $\Delta t = \gamma \Delta t' = \gamma\tau \quad$ em que $\quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ **1-26**
6. Contração das distâncias	Comprimento próprio de um objeto é o comprimento medido no sistema no qual o objeto se encontra em repouso. Se esse comprimento é L_p no referencial S', o comprimento no referencial S é dado por $L = L_p/\gamma$ **1-28**
7. Intervalo do espaço-tempo	Todos os observadores situados em referenciais inerciais medem o mesmo intervalo Δs entre pares de eventos no espaço-tempo, dado por $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ **1-31**
8. Efeito Doppler	
Fonte e observador se aproximando	$f = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} f_0$ **1-36**
Fonte e observador se afastando	$f = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} f_0$ **1-37**

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Bohm, D., *The Special Theory of Relativity*, W.A. Benjamin, New York, 1965.

French, A.P., *Special Relativity*, Norton, New York, 1968. Contém uma excelente discussão da história da relatividade.

Gamow, G., *Mr. Tompkins in Paperback*, Cambridge University Press, Cambridge, 1965. Contém as deliciosas histórias do Sr. Tompkins. Em uma delas, o Sr. Tompkins visita um mundo no qual a velocidade da luz é apenas 10 milhas por hora e os efeitos relativísticos são claramente visíveis.

Lorentz, H.A., A. Einstein, H. Minkowski e W. Weyl, *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity* (tradução para o inglês de W. Perrett e G.B. Jeffery), Dover, New York, 1923. Um livrinho fascinante, que contém o artigo original de Einstein ["On the Electrodynamics of Moving Bodies", Annalen der Physik, **17** (1905)], além de vários outros artigos originais a respeito da relatividade restrita.

Ohanian, H. C., *Special Relativity: A Modern Introduction*, Physics Curriculum & Instruction, 2001.

Pais, A., *Subtle Is the Lord*..., Oxford University Press, Oxford, 1982.
Resnick, R. e D. Halliday, *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2nd ed., Macmillan, New York, 1992.
Rindler, W., *Essential Relativity*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.
Taylor, E.F. e J.A. Wheeler, *Spacetime Physics*, 2nd ed., Freeman, New York, 1992. Um excelente livro, com muitos exemplos, problemas e diagramas.

Notas

1. Astrônomo polonês, 1473-1543. O livro que propõe órbitas heliocêntricas (isto é, com centro no Sol) para os planetas foi publicado algumas semanas após sua morte. Copérnico adiou a publicação do livro durante vários anos, temendo que fosse considerado herético. Não se sabe se chegou a vê-lo impresso.

2. Os eventos são descritos através de medidas executadas em um sistema de coordenadas que define um referencial. A questão era a seguinte: Qual é o referencial no qual a lei da inércia é válida? Newton sabia que nenhum sistema com um movimento de rotação, como a Terra ou o Sol, seria apropriado e propôs o uso das "estrelas fixas", muito distantes, como referencial inercial.

3. A velocidade da luz é exatamente 299.792.458 m/s. Esse valor é estabelecido pela definição do metro como a distância que a luz percorre em 1/299.792.458 s.

4. Com o tempo, todo um espectro contínuo de ondas eletromagnéticas foi descoberto, desde as ondas de rádio, de frequência extremamente baixa, até os raios gama, de frequência extremamente alta. Todas essas ondas se propagam com velocidade c.

5. Albert A. Michelson (1852-1931), físico experimental americano que recebeu o Prêmio Nobel em 1907 pelo projeto e utilização de instrumentos óticos para medir com precisão a velocidade da luz e o comprimento do metro-padrão. Edward W. Morley (1838-1923), químico e físico americano e professor do Western Reserve College na época em que Michelson ensinava da Case School of Apllied Science. As duas instituições de ensino ficavam em Cleveland, Ohio, Estados Unidos, a poucas quadras de distância.

6. Albert A. Michelson e Edward W. Morley, *American Journal of Science*, **XXXIV**, nº 203 (November 1887).

7. Observe que a largura depende do pequeno ângulo entre M'_2 e M_1. Um ângulo muito pequeno resulta em franjas relativamente largas e muito espaçadas; um ângulo maior, em muitas franjas estreitas.

8. Como a fonte responsável pelas ondas, uma lâmpada de sódio, estava em repouso em relação ao interferômetro, a frequência se manteria constante.

9. T. S. Jaseja, A. Javan, J. Murray e C. H. Townes, *Physical Review*, **133**, A1221 (1964).

10. A. Brillet e J. Hall, *Physical Review Letters*, **42**, 549 (1979).

11. *Annalen der Physik*, **17**, 841 (1905). Para uma tradução para o inglês do artigo original, escrito em alemão, veja Lorentz, H.A., A. Einstein, H. Minkowski e W. Weyl, *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity* (tradução para o inglês de W. Perrett e G.B. Jeffery), Dover, New York, 1923.

12. Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928), físico teórico holandês, descobriu empiricamente a transformação de Lorentz quando investigava o fato de que as equações de Maxwell não são invariantes em relação à transformação de Galileu, embora na época não se tenha dado conta da importância da descoberta. Um especialista em teoria eletromagnética, foi um dos primeiros a sugerir que os átomos que compõem a matéria poderiam ser constituídos por partículas carregadas cujas oscilações seriam responsáveis pela emissão de luz. Lorentz usou essa hipótese para explicar o desdobramento das linhas espectroscópicas produzido por um campo magnético, um efeito descoberto por seu discípulo Pieter Zeeman, com quem dividiu o Prêmio Nobel de 1902.

13. Um metro percorrido pela luz é usado em lugar do *tempo* que a luz leva para percorrer um metro. Tomando $ct = 1$ m, temos $t = 1/3 \times 10^8 = 3{,}3 \times 10^{-9}$ s. Da mesma forma, 1 cm percorrido pela luz equivale a $10^{-2}/3 \times 10^8 = 3{,}3 \times 10^{-11}$ s, e assim por diante.

14. Este exemplo foi adaptado de um problema que aparece em H. Ohanian, *Modern Physics*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.

15. Qualquer partícula com massa.

16. O uso da Equação 1-31 resulta em valores imaginários de Δs para intervalos do tipo espacial, o que, aparentemente, não faz sentido. Entretanto, a geometria do espaço-tempo não é euclidiana, e sim lorentziana. Embora o estudo da geometria lorentziana esteja fora do âmbito deste capítulo, o fato é que, nessa geometria, é possível escrever a expressão de $(\Delta s)^2$ para intervalos do tipo espacial na forma da Equação 1-33.

17. São conhecidas apenas duas entidades desse tipo: os fótons (entre eles os da luz visível), que serão discutidos no Capítulo 3, e os grávitons, que são as partículas portadoras da força gravitacional.

18. Edwin P. Hubble, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15, 168 (1929).

19. Walter Kündig, *Physical Review*, **129**, 2371 (1963).

20. C. G. Darwin, *Nature*, **180**, 976 (1957).

21. S. P. Boughn, *American Journal of Physics*, **57**, 791 (1989).

22. E. F. Taylor e J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*, 2nd ed. (New York: W. H. Freeman and Co., 1992).

23. Em três dimensões, do ponto de vista do observador em *S*, 50% da luz está concentrada em 0,06 esferorradianos do ângulo sólido total de 4π esferorradianos que envolve a fonte em movimento.

24. T. Alväger e M. N. Kreisler, "Quest for Faster-Than-Light Particles", *Physical Review*, **171**, 1357 (1968).

25. Paul Ehrenfest (1880-1933), físico austríaco e professor da Universidade de Leiden (Holanda), amigo e correspondente de Einstein, a respeito de quem Einstein escreveu, logo após sua morte: "[Ele foi] o melhor professor em nossa profissão que conheci".

26. Este experimento está descrito em J. C. Hafele e R. E. Keating, *Science*, **177**, 166 (1972). Embora não seja tão preciso quanto os experimentos mencionados na Seção 1-4, os resultados estão de acordo com as previsões da relatividade.

27. R. Shaw, *American Journal of Physics*, **30**, 72 (1962).

Problemas

NÍVEL I

Seção 1-1 Provas Experimentais da Relatividade

1-1. No episódio 5 de Guerra nas Estrelas, as espaçonaves do Império lançam sondas não tripuladas cuja missão é descobrir a base da Aliança Rebelde. Suponha que uma espaçonave que está se movendo a uma velocidade de $2{,}3 \times 10^8$ m/s em direção a Hoth (onde fica a base rebelde) lance uma sonda na direção de Hoth com uma velocidade de $2{,}1 \times 10^8$ m/s em relação à espaçonave. Se a transformação de Galileu fosse válida para altas velocidades, (*a*) qual seria a velocidade da sonda em relação a Hoth? (*b*) Se as sentinelas dos rebeldes estivessem observando a espaçonave do Império através de um telescópio, veriam a sonda antes que ela pousasse em Hoth?

1-2. Em uma série de medidas da velocidade da luz, Michelson usou uma distância L de 27,4 km. (*a*) Qual o tempo necessário para a luz fazer a viagem de ida e volta, percorrendo uma distância $2L$? (*b*) Qual é o valor da correção clássica, em segundos (Equação 1-5), supondo que a velocidade da Terra é $v = 10^{-4}\,c$? (*c*) Depois de cerca de 1.600 medições, Michelson chegou a um valor de 299.796 ± 4 km/s para a velocidade da luz. Esse valor experimental é suficientemente preciso para que o termo de correção dado pela Equação 1-5 faça alguma diferença?

1-3. Um deslocamento de uma franja no experimento de Michelson-Morley seria causado por uma diferença de um comprimento de onda ou uma mudança de um período de oscilação no percurso da luz quando o interferômetro fosse girado de 90°. Que velocidade Michelson teria calculado para o movimento da Terra em relação ao éter se o experimento tivesse detectado um deslocamento de uma franja?

1-4. Nos "velhos tempos" (por volta de 1935), os pilotos usavam pequenos aviões, com motores relativamente possantes, para disputar corridas em pistas marcadas por postes. Suponha que dois desses pilotos estejam voando a 210 km/s. (Lembre-se de que isso foi há muito tempo!) Os dois aviadores completam o percurso de ida e volta de 40 km, *mas* suas pistas são perpendiculares e existe um vento constante de 32 km/h soprando paralelamente à pista do primeiro piloto. (*a*) Qual dos aviões ganha a corrida? Quantos segundos chega na frente do outro? (*b*) Quais devem ser os cursos adotados pelos dois pilotos em relação aos eixos das respectivas pistas?

1-5. Paul Ehrenfest[25] sugeriu o seguinte experimento imaginário para ilustrar a diferença entre as observações que seriam feitas caso a luz se movesse em relação a um éter estacionário e as observações que são feitas de acordo com o segundo postulado de Einstein:

> Suponha que você estivesse sentado no centro de uma grande esfera opaca com 3×10^8 m de raio cuja superfície interna fosse espelhada. Uma fonte situada no centro da esfera emite um pulso luminoso que se propaga na forma de uma onda esférica de raio crescente.

O que você veria nos primeiros 3 segundos após a emissão do pulso (*a*) se a esfera estivesse se deslocando em relação ao éter com uma velocidade constante de 30 km/s; (*b*) supondo que o segundo postulado de Einstein esteja correto?

1-6. Einstein contou que na infância havia se interessado pelo seguinte problema: se você segura um espelho com o braço estendido e observa o próprio reflexo, o que acontece quando começa a correr? Suponha, que sua velocidade é $v = 0{,}99c$. Você ainda será capaz de observar o próprio reflexo? Nesse caso, qual será o aspecto da sua imagem e por quê?

1-7. Verifique, através de cálculos matemáticos, que o resultado do experimento de Michelson-Morley estabelece um limite

superior para a velocidade da Terra em relação ao éter de aproximadamente 5 km/s.

1-8. Considere dois referenciais inerciais. Quando observadores situados nos dois referenciais medem as grandezas abaixo, quais são as medidas que *devem* fornecer os mesmos resultados numéricos? Explique o motivo em cada caso.

(*a*) A distância entre dois eventos
(*b*) O valor da massa de um próton
(*c*) A velocidade da luz
(*d*) O intervalo de tempo entre dois eventos
(*e*) A primeira lei de Newton
(*f*) A ordem dos elementos na tabela periódica
(*g*) O valor da carga do elétron

Seção 1-2 Os Postulados de Einstein

1-9. Suponha que o trem que aparece na Figura 1-14 tenha 1,0 km de comprimento do ponto de vista do observador em C' e esteja se movendo com uma velocidade de 150 km/h. Qual é o intervalo entre a chegada das duas frentes de onda em C' do ponto de vista de um observador C em S?

1-10. Suponha que A', B' e C' estejam em repouso no referencial S', que se move em relação a S com velocidade v no sentido positivo do eixo dos x. O ponto B' está exatamente a meio caminho entre A' e C', cuja distância é L'. Em $t' = 0$, um pulso luminoso é emitido em B' e se propaga em todas as direções como uma onda esférica. (*a*) As frentes de onda chegam simultaneamente em A' e C' de acordo com um observador em S'? (*b*) As frentes de onda chegam simultaneamente em A' e C' de acordo com um observador em S? (*c*) Se a resposta ao item (*a*) ou (*b*) foi negativa, qual é a diferença entre os tempos de chegada? Em que ponto a frente de onda chega primeiro?

Seção 1-3 A Transformação de Lorentz

1-11. Faça um gráfico do fator relativístico $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ em função de $\beta = v/c$. Use pelo menos 10 valores de β entre 0 e 0,995.

1-12. Dois eventos ocorrem no mesmo ponto x'_0 do referencial S' nos instantes t'_1 e t'_2. (*a*) Use as Equações 1-19 para mostrar que, no referencial S, o intervalo entre os eventos é igual a $\gamma(t'_2 - t'_1)$. Por que, neste tipo de problema, as Equações 1-18 são menos convenientes que as Equações 1-19?

1-13. Suponha que um evento ocorra no referencial inercial S no ponto de coordenadas $x = 75$ m, $y = 18$ m, $z = 4{,}0$ m e $t = 2{,}0 \times 10^{-5}$ s. O referencial inercial S' está se movendo no sentido positivo do eixo dos x com uma velocidade $v = 0{,}85c$. As origens de S e S' coincidem em $t = t' = 0$. (*a*) Quais são as coordenadas do evento em S'? (*b*) Use a transformação inversa dos resultados do item (*a*) para obter as coordenadas originais.

1-14. Mostre que o resultado negativo do experimento de Michelson-Morley pode ser explicado se o braço do interferô-metro paralelo à direção do movimento sofrer uma contração de $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

1-15. Duas espaçonaves estão em rota de colisão. (*a*) Se a velocidade das duas espaçonaves é $0{,}9c$ em relação à Terra, qual é a velocidade de uma em relação à outra? (*b*) Se a velocidade das duas espaçonaves em relação à Terra é 30.000 m/s (cerca de 100 vezes a velocidade do som), qual é a velocidade de uma em relação à outra?

1-16. Determine a transformação de Lorentz das componentes da aceleração de um corpo a partir da transformação de Lorentz das componentes da velocidade (Equações 1-23).

1-17. Considere um relógio em repouso no referencial do laboratório. (*a*) Desenhe um diagrama espaço-tempo que mostre que o relógio adianta do ponto de vista de um foguete que se move com uma velocidade $v = 0{,}8c$ em relação ao laboratório. (*b*) Um intervalo de tempo de 10 s pelo relógio do foguete corresponde a um intervalo de quantos segundos pelo relógio do laboratório?

1-18. Um raio luminoso se propaga ao longo do eixo y' com velocidade c no referencial S', que está se movendo para a direita com velocidade v em relação ao referencial S. (*a*) Determine os valores de u_x e u_y, as componentes x e y da velocidade do raio luminoso no referencial S. (*b*) Mostre que o módulo da velocidade do raio luminoso no referencial S é igual a c.

1-19. Uma partícula está se movendo com velocidade $0{,}9c$ ao longo do eixo x'' do referencial S'', que está se movendo com velocidade $0{,}9c$ no sentido positivo do eixo x' do referencial S'. O referencial S' está se movendo com velocidade $0{,}9c$ no sentido positivo do eixo x do referencial S. (*a*) Determine a velocidade da partícula em relação ao referencial S'. (*b*) Determine a velocidade da partícula em relação ao referencial S.

Seção 1-4 Dilatação dos Tempos e Contração das Distâncias

1-20. Use a expansão binomial para demonstrar os seguintes resultados, válidos para $v << c$, e aplique-os, se necessário, aos problemas a seguir.

$$(a)\quad \gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$(b)\quad \frac{1}{\gamma} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$(c)\quad \gamma - 1 \approx 1 - \frac{1}{\gamma} \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

1-21. Qual deve ser a velocidade relativa de dois observadores para que a diferença entre suas medidas de intervalos de tempo seja de 1%? (Veja o Problema 1-20.)

1-22. Uma *nova* é uma estrela cujo brilho aumenta bruscamente (veja o Capítulo 13). Suponha que os astrônomos terrestres observem simultaneamente o aparecimento de duas novas, uma na constelação de Orion e outra na constelação da Lira. As duas novas estão à mesma distância da Terra, $2{,}5 \times 10^3$ anos-luz, em direções diametralmente opostas. Observadores a bordo de um avião que viaja a 1.000 km/h ao longo da reta que liga Orion a Lira, no sentido de Orion para Lira, observam o aparecimento das mesmas novas, mas ele não é simultâneo. (*a*) Qual é o intervalo de tempo entre o aparecimento das duas novas para os ocupantes do avião? (*b*) Qual das novas aparece primeiro? (Suponha que a Terra é um referencial inercial.)

1-23. Uma régua de um metro está se movendo paralelamente a sua maior dimensão com uma velocidade $v = 0{,}6c$ em relação a um certo observador. (*a*) Determine o comprimento da régua do ponto de vista do observador. (*b*) Quanto tempo a régua leva para passar pelo observador? (*c*) Desenhe um diagrama espaço-tempo, do ponto de vista do observador, supondo que a extremidade dianteira da régua passa pelo ponto $x = 0$ no instante $t = 0$. Mostre que as respostas dos itens (*a*) e (*b*) podem ser obtidas a partir do diagrama.

1-24. O tempo de vida próprio de um méson π (píon) é $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. Se um feixe dessas partículas se move com velocidade $0{,}9c$, (*a*) qual a vida média das partículas no referencial do laboratório? (*b*) Qual a distância que as partículas percorrem, em média, antes de se desintegrarem? (*c*) Qual seria a resposta do item (*b*) se o efeito da dilatação dos tempos fosse desprezado? (*d*) Qual é o intervalo no espaço-tempo entre a criação de um píon típico e sua desintegração?

1-25. Você foi escalado para controlar o tráfego em uma região remota do espaço. Quando um turno sem novidades está prestes a terminar, uma espaçonave passa por você em alta velocidade. De acordo com o seu sensor a laser, a espaçonave tem 85 m de comprimento. O *transponder* da nave a identifica como um *NCXXB-12*, um cargueiro espacial com um comprimento próprio de 100 m. Ao transmitir seu relatório para o centro de controle, que velocidade você deve atribuir à espaçonave?

1-26. O relógio de luz da espaçonave da Figura 1-25 usa um pulso luminoso na direção do eixo *y* que é refletido por um espelho enquanto a espaçonave se move na direção do eixo *x*. Suponha que, em vez disso, o pulso luminoso se propague na direção do eixo x' entre $x' = 0$ e um espelho situado em $x' = L$. (*a*) Qual é o tempo necessário para que um pulso faça um percurso de ida e volta no referencial da espaçonave? (*b*) Qual é esse tempo no referencial do laboratório? (*c*) O resultado do item (*b*) está de acordo com o fenômeno da dilatação dos tempos? Justifique sua resposta.

1-27. Duas espaçonaves passam uma pela outra viajando em direções opostas. Para um passageiro da nave *A*, a nave *A* tem 100 m de comprimento e a nave *B*, que está se movendo com uma velocidade de $0{,}92c$ em relação a *A*, tem 36 m de comprimento. Quais são os comprimentos das duas naves de acordo com um passageiro da nave *B*?

1-28. Uma régua de um metro está em repouso no referencial S' fazendo um ângulo de 30° com o eixo x'. Se S' está se movendo com $\beta = 0{,}8$ em relação a *S*, qual o comprimento da régua em *S* e que ângulo faz com o eixo dos *x*?

1-29. Uma caixa retangular em repouso no referencial S' tem lados $a' = 2$ m, $b' = 2$ m e $c' = 4$ m e está orientada como na Figura 1-44. O referencial S' está de movendo com $\beta = 0{,}65$ em relação ao referencial *S*. (*a*) Determine o volume da caixa em S' e em *S*. (*b*) Faça um desenho da caixa do modo como é vista por um observador em *S*.

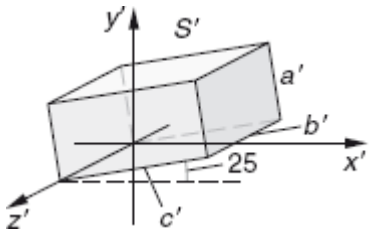


FIGURA 1-44 (Problema 1-29.)

Seção 1-5 O Efeito Doppler

1-30. Com que velocidade um observador deve se mover em direção a uma luz vermelha ($\lambda = 650$ nm) para que pareça amarela ($\lambda = 590$ nm), verde ($\lambda = 525$ nm) e azul ($\lambda = 460$ nm)?

1-31. Uma galáxia distante está se afastando da Terra com uma velocidade de $1{,}85 \times 10^7$ m/s. Calcule o desvio para o vermelho $(\lambda' - \lambda_0)/\lambda_0$ da galáxia.

1-32. A luz de uma estrela próxima apresenta um desvio para o azul de 2%, isto é, $f_{obs} = 1{,}02 f_0$. A estrela está se aproximando ou se afastando da Terra? Qual é a velocidade da estrela? (Suponha que a direção do movimento é a da reta que liga a estrela à Terra.)

1-33. As estrelas emitem uma luz vermelha com um comprimento de onda de 656,3 nm, denominada linha H_λ, produzida por átomos de hidrogênio. Calcule o comprimento de onda dessa luz para um observador terrestre, supondo que a estrela está se afastando da Terra em linha reta com uma velocidade de (*a*) $10^{-3}c$; (*b*) $10^{-2}c$; (*c*) $10^{-1}c$.

Seção 1-6 O Paradoxo dos Gêmeos e Outras Surpresas

1-34. Paulo Cesar embarca em uma espaçonave e se afasta da Terra a uma velocidade constante de 0,45*c* em direção a Betelgeuse (uma estrela gigante vermelha da constelação de Orion). Um ano depois, de acordo com os relógios terrestres, o irmão gêmeo de Paulo Cesar, Paulo Roberto, embarca em outra espaçonave e se dirige para Betelgeuse a uma velocidade constante de 0,95*c*. (*a*) Quando Paulo Roberto alcança Paulo Cesar, qual é a diferença de idade entre os dois irmãos? (*b*) Qual dos dois está mais velho?

1-35. Você aponta uma lanterna laser para a Lua, produzindo um ponto luminoso na superfície lunar. Qual a velocidade angular mínima com a qual deve mover a lanterna para que o ponto luminoso percorra a superfície da Lua com uma velocidade $v > c$? Por que não é possível transmitir informações de uma base lunar para outra usando esse ponto luminoso?

1-36. Um relógio é instalado a bordo de um satélite que gira em torno da Terra com um período de 108 minutos. (*a*) Qual é a diferença entre a hora indicada por este relógio e a hora indicada por um relógio terrestre após 1 ano? (*b*) Quanto tempo terá passado na Terra quando a diferença entre os dois relógios for de 1 segundo? (Use as equações da relatividade restrita e ignore os efeitos da relatividade geral.)

1-37. Einstein usou os trens em muitos experimentos imaginários porque eram o meio de transporte mais veloz de sua época. Suponha que um trem está viajando à noite em um trecho retilíneo com uma velocidade de 0,65*c*. A luz dos faróis produz um cone com 60° de abertura, do ponto de vista do maquinista. Se o trem se aproxima de um observador parado junto aos trilhos (a distância entre os trilhos é 1,5 m), a que distância está o trem quando o observador deixa de ver a luz dos faróis?

NÍVEL II

1-38. Em 1971, quatro relógios atômicos portáteis foram colocados a bordo de aviões comerciais a jato, dois em voos para leste e dois em voos para oeste, com o objetivo de testar as previsões da relatividade.[26] (*a*) Se o avião que voou para oeste mantivesse uma velocidade média de 1.500 km/h em relação à superfície, quanto tempo teria que voar para que os relógios a bordo perdessem 1 s em relação ao relógio-padrão do U.S. Naval Observatory? (*b*) No experimento, os aviões deram uma volta completa em torno da Terra e a diferença observada entre os relógios foi 273 ns. Qual foi a velocidade média dos aviões?

1-39. O "arrasto do éter" foi uma das possibilidades aventadas para explicar o resultado negativo do experimento de Michelson-Morley (veja a Leitura Suplementar). O fenômeno da aberração estelar refuta esta hipótese. Suponha que a Terra se mova em relação ao éter com velocidade *v* e que um raio luminoso (proveniente, por exemplo, de uma estrela) se aproxime da Terra fazendo um ângulo θ com *v*. (*a*) Mostre que o ângulo de aproximação no referencial da Terra, θ", é dado por:

$$\tan \theta' = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + v/c}$$

(*b*) θ" é o ângulo da aberração estelar. Se θ = 90°, qual é a diferença entre θ'e 90°?

1-40. Uma régua de comprimento próprio L_p passa por você a uma velocidade *v*. Você estende a mão e segura a extremidade traseira da régua, fazendo esse ponto parar instantaneamente no seu referencial. Supondo que essa informação, de que a extremidade traseira da régua parou, propaga-se ao longo da régua à velocidade da luz (na verdade, ela se propaga à velocidade do som), (*a*) mostre que, para qualquer velocidade $v > 0$, a régua assume um comprimento maior que o comprimento próprio L_p antes que a extremidade dianteira pare e a régua volte a ter o comprimento próprio. (*b*) Definindo um "coeficiente de alongamento" Δ como a diferença entre o comprimento máximo e o comprimento próprio dividida pelo comprimento próprio, desenhe um gráfico de Δ em função de *v*/*c* para os seguintes valores de *v*/*c*: 0; 0,10; 0,25; 0,40; 0,50; 0,65; 0,80; 0,85; 0,90; 0,95; 0,98. (*c*) Qual é o comprimento máximo da régua quando $v \rightarrow c$?

1-41. Um amigo da sua idade viaja para Alfa do Centauro, a 4 anos-luz de distância, e volta imediatamente. Ele afirma que a viagem durou apenas 6 anos. (*a*) Com que velocidade seu amigo viajou? (*b*) Qual é a diferença de idade entre vocês dois quando voltam a se encontrar? (*c*) Desenhe um diagrama espaço-tempo para confirmar as respostas dos itens (*a*) e (*b*).

1-42. Um relógio é colocado a bordo de um satélite que dá uma volta em torno da Terra a cada 90 minutos. Qual é a diferença entre o relógio de bordo e um relógio terrestre após 1 ano? (Ignore todos os efeitos que não sejam os da relatividade restrita.)

1-43. No referencial S, o evento B ocorre 2 μs depois do evento A e a uma distância $\Delta x = 1{,}5$ km deste evento. (*a*) Qual deve ser a velocidade de um observador no sentido positivo do eixo x para que os dois eventos ocorram simultaneamente? (*b*) É possível que o evento B preceda o evento A para algum observador? (*c*) Desenhe um diagrama espaço-tempo que ilustre as respostas aos itens (*a*) e (*b*). (*d*) Determine o valor do intervalo no espaço-tempo e a distância própria entre os eventos.

1-44. Um feixe de mésons γ^+ (píons) viaja em um tubo de um acelerador de partículas a uma velocidade $\beta = 0{,}92$ em relação ao laboratório. (*a*) Determine o valor de γ para esses píons. (*b*) O tempo de vida próprio dos píons é $2{,}6 \times 10^{-8}$ s. Qual é o tempo de vida no referencial no laboratório? (*c*) Se o feixe contém inicialmente 50.000 píons, quantas partículas restam 50 m adiante? (*d*) Qual é a resposta do item (*c*) se a dilatação dos tempos for ignorada?

1-45. H.A. Lorentz sugeriu, 15 anos antes que o artigo de Einstein sobre a relatividade restrita fosse publicado em 1905, que o resultado nulo do experimento de Michelson-Morley podia ser explicado por uma contração do braço do interferômetro, na direção paralela ao movimento relativo entre a Terra e o éter, que reduzisse o comprimento desse braço para $L = L_p(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Lorentz considerou este efeito, incorretamente, como uma deformação real da matéria. De quantos diâmetros atômicos a substância de que era feito o braço do interferômetro teria que encolher para que a ausência do deslocamento esperado de 0,4 largura de franja pudesse ser explicada? (Suponha que o diâmetro atômico é da ordem de 10^{-10} m.)

1-46. Os observadores estacionários em relação a um certo referencial S observam uma explosão em $x_1 = 480$ m. Uma segunda explosão acontece 5 λs mais tarde em $x_2 = 1.200$ m. No referencial S', que está se movendo com velocidade v no sentido positivo do eixo x, as explosões ocorrem no mesmo local. (*a*) Desenhe um diagrama espaço-tempo que ilustre a situação. (*b*) Determine a velocidade v a partir do diagrama. (*c*) Calibre o eixo ct' e determine o intervalo de tempo em λs entre as duas explosões do ponto de vista de um observador em S'. (*d*) Verifique os resultados através de cálculos matemáticos.

1-47. Duas espaçonaves com 100 m de comprimento quando medidas em repouso viajam uma em direção à outra com uma velocidade de $0{,}85c$ em relação à Terra. (*a*) Qual é o comprimento das espaçonaves para um observador terrestre? (*b*) Qual é a velocidade de uma das espaçonaves do ponto de vista de um observador situado na outra? (*c*) Qual é o comprimento de uma das espaçonaves do ponto de vista de um observador situado na outra? (*d*) No instante $t = 0$, no referencial da Terra, as extremidades dianteiras das espaçonaves passam uma pela outra. Em que instante as extremidades traseiras passam uma pela outra? (*e*) Desenhe um diagrama espaço-tempo no referencial de uma das espaçonaves mostrando a passagem da outra.

1-48. Para $v << c$, o desvio Doppler é dado aproximadamente por $\Delta f/f_0 = \pm\beta$, tanto na teoria clássica como na relativística. Um transmissor-receptor de radar envia um pulso em direção a uma espaçonave e recebe o sinal refletido com um desvio positivo $\Delta f/f_0 = 8 \times 10^{-7}$. Qual é a velocidade da aeronave? (Suponha que a aeronave está se movendo na direção do transmissor.)

1-49. O resultado negativo do experimento de Michelson-Morley poderia ser explicado se a velocidade da luz dependesse do movimento da fonte em relação ao observador. Considere um sistema estelar binário eclipsante, isto é, um par de estrelas em órbita em torno do centro de massa comum no qual o plano da órbita passa pela Terra, como é praticamente o caso do sistema Algol (veja a Leitura Suplementar). Suponha que as estrelas do sistema descrevem órbitas circulares com um período de 115 dias e que a velocidade orbital de uma das estrelas é 32 km/s (a velocidade orbital da Terra). Se a hipótese proposta fosse verdadeira, os astrônomos veriam simultaneamente duas imagens da estrela em oposição, ou seja, em lados opostos da órbita. Qual seria a distância mínima L entre a Terra e o sistema binário para que esse fenômeno ocorresse?

1-50. Os referenciais S e S' estão se movendo com os eixos x e x' paralelos. Seus relógios são ajustados para $t = t' = 0$ no momento em que as origens dos dois referenciais coincidem. No referencial S, o evento 1 ocorre em $x_1 = 1$ ano-luz e $t_1 = 1$ ano e o evento 2 ocorre em $x_2 = 2$ anos-luz e $t_2 = 0{,}5$ ano. Os eventos ocorrem simultaneamente no referencial S'. (*a*) Determine o módulo e a direção da velocidade de S' em relação a S. (*b*) Em que instante os eventos ocorrem no referencial S'? (*c*) Calcule o intervalo no espaço-tempo, Δs, entre os eventos. (*d*) O intervalo é do tipo espacial, temporal ou luminoso? (e) Qual é a distância própria L_p entre os eventos?

1-51. Repita os itens (*a*) e (*b*) do Problema 1-50 usando um diagrama espaço-tempo.

1-52. Um observador no referencial S, situado na origem, observa dois pulsos de luz colorida cuja distância espacial é $\Delta x = 2.400$ m. Um pulso azul ocorre primeiro, seguido por um pulso vermelho 5 λs mais tarde. Um observador em S', que está se movendo no sentido positivo do eixo dos x com uma velocidade v em relação a S, também observa que os pulsos ocorrem com um intervalo de 5 μs e uma separação de 2.400 m, mas o pulso vermelho é observado primeiro. Determine o módulo e a direção de v.

1-53. Um próton vindo do espaço chega a um laboratório com uma velocidade de $0{,}85c$ e fazendo um ângulo de 50° com o semieixo positivo dos x (no plano xy do laboratório). Determine o módulo e a direção do próton do ponto de vista de um referencial S' que esteja se movendo com uma velocidade $\beta = 0{,}72$.

NÍVEL III

1-54. Uma régua de um metro de comprimento em S está se movendo com velocidade constante v_y no sentido positivo do eixo y, com a maior dimensão paralela ao eixo x. Use um diagrama espaço-tempo em S para mostrar que a régua parece fazer um

ângulo θ' com o eixo x' de um referencial S' que está se movendo com velocidade $\beta = 0{,}65$ no sentido positivo do eixo x. Determine o valor do ângulo θ'.

1-55. A equação da frente de onda esférica de um pulso luminoso que parte da origem no instante $t = 0$ é $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$. Use a transformação de Lorentz para mostrar que a frente de onda do pulso em qualquer referencial S' que esteja se movendo com velocidade constante em relação a S também é esférica. [Sugestão: Mostre que a equação de onda em S' é $x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0$.]

1-56. Este problema é inspirado em um interessante paradoxo proposto por R. Shaw.[27] Uma placa muito fina de metal, com um furo circular de 1 m de diâmetro e centro no eixo y, é mantida paralela ao plano xz e se move no sentido positivo do eixo y com uma velocidade constante v_y (Figura 1-45). Uma régua de um metro de comprimento, com a maior dimensão paralela ao eixo x, se move no sentido positivo do eixo x com $\beta = v/c$. A placa chega ao plano $y = 0$ no mesmo instante em que o centro da régua chega à origem de S. Como o comprimento da régua é menor do que o comprimento de repouso do ponto de vista dos observadores em S, ela consegue passar pelo furo de 1 m sem nenhum problema. Um paradoxo parece surgir quando nos lembramos de que, para o observador em S', o referencial da régua, o diâmetro do furo é menor que o diâmetro de repouso e, portanto, menor que o comprimento da régua, caso em que a régua não poderia passar pelo furo. Resolva o paradoxo. A régua consegue passar pelo furo?

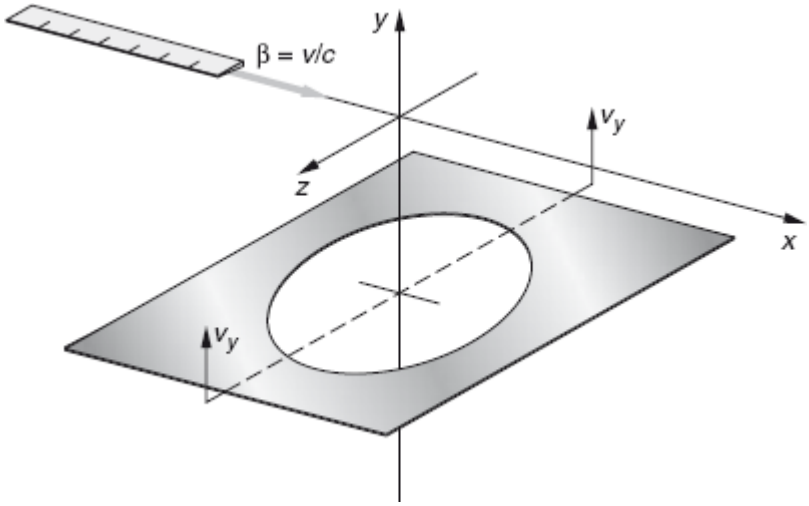


FIGURA 1-45 (Problema 1-56.)

1-57. Dois eventos em S são separados por uma distância $D = x_2 - x_1$ e um intervalo de tempo $T = t_2 - t_1$. (*a*) Use a transformação de Lorentz para mostrar que no referencial S', que está se movendo com velocidade v em relação a S, o intervalo de tempo é dado por $t'_2 - t'_1 = \gamma(T - vD/c^2)$. (*b*) Mostre que os eventos podem ser simultâneos no referencial S' apenas se $D > cT$. (*c*) Se um dos eventos é a *causa* do outro, a distância D deve ser menor que cT, já que D/c é o menor tempo que um sinal pode levar para ir de x_1 a x_2 no referencial S. Mostre que, para $D < cT$, $t'_2 > t'_1$ em qualquer referencial. (*d*) Suponha que seja possível enviar um sinal com velocidade $c' > c$, de modo que, no referencial S, a causa preceda o efeito por um intervalo de tempo $T = D/c'$. Mostre que, nesse caso, existe um referencial com velocidade $v < c$ em relação a S no qual o efeito precede a causa.

1-58. Dois observadores resolvem testar o efeito de dilatação dos tempos. Estão equipados com relógios iguais, e um deles, em repouso no referencial S', está se movendo com velocidade $v = 0{,}6c$ em relação ao outro, que está em repouso no referencial S. Os dois relógios são ligados no momento em que as origens dos dois sistemas coincidem. Os observadores combinaram enviar um sinal quando os relógios indicarem 60 min e um segundo sinal quando receberem o sinal do companheiro. (*a*) Em que instante o observador em S recebe o sinal do observador em S'? (*b*) Em que instante o observador em S recebe o segundo sinal? (*c*) Faça uma tabela mostrando os instantes em que o observador em S envia o primeiro sinal, recebe o primeiro sinal e recebe o segundo sinal. Como essa tabela se compara com uma tabela idêntica preparada pelo observador em S'?

1-59. Um disco horizontal está girando com velocidade angular λ. Existe um relógio no centro do disco e outro a uma distância r do centro. Em um referencial inercial em relação ao qual o centro do disco está em repouso, o relógio fora do centro está se movendo com velocidade $u = r\omega$. Mostre que, de acordo com o fenômeno da dilatação dos tempos da relatividade restrita, a relação entre o intervalo de tempo medido pelo relógio em repouso, Δt_0, e o intervalo de tempo medido pelo relógio em movimento, Δt, é dada por:

$$\frac{\Delta t_r - \Delta t_0}{\Delta t_0} \approx \frac{r^2\omega^2}{2c^2} \quad \text{se} \quad r\omega \ll c$$

1-60. Dois foguetes A e B deixam uma estação espacial com vetores velocidade v_A e v_B em relação ao referencial da estação, S, mutuamente perpendiculares. (*a*) Determine a velocidade de A em relação a B, v_{BA}. (*b*) Determine a velocidade de B em relação a A, v_{AB}. (*c*) Explique por que v_{AB} e v_{BA} não apontam em direções opostas.

1-61. Suponha que um sistema S, constituído por uma rede cúbica de réguas e relógios sincronizados como a que aparece na Figura 1-13, esteja se movendo em alta velocidade no sentido positivo do eixo x. Como as réguas paralelas ao eixo x sofrem uma contração, o cubo assume a forma de um paralelepípedo, com o lado paralelo a x mais curto que os outros dois, quando é *medido* por um observador em S'. Lembrando, porém, que o cérebro constrói as imagens a partir das ondas luminosas que atingem o olho simultaneamente, e não a partir das ondas que deixam a fonte simultaneamente, faça um desenho do *aspecto* que o cubo teria nesse caso. Procure representar os ângulos e distâncias envolvidos com a maior precisão possível. (Suponha que o cubo em movimento está a uma distância, do olho, maior que 10 m).

1-62. A Figura 1-11*b* da Leitura Suplementar a respeito do experimento de Michelson-Morley mostra um sistema binário eclipsante. Suponha que o período do movimento é T e que o sistema binário se encontra a uma distância L da Terra, na qual L é suficientemente grande para que os pontos A e B da Figura 1-11*b* estejam em pontos diametralmente opostos da órbita. Considere o movimento de uma das estrelas e (*a*) mostre que a estrela pareceria levar um tempo $T/2 + 2Lv/(c^2 - v^2)$ para se deslocar de A até B e um tempo $T/2 - 2Lv/(c^2 - v^2)$ para se deslocar de B até A, supondo que a adição clássica das velocidades pudesse ser aplicada à luz, ou seja, que a teoria balística da luz estivesse correta. (*b*) Para qual período orbital a estrela pareceria estar simultaneamente nos pontos A e B?

1-63. Mostre que, se uma partícula se move em um referencial S com velocidade escalar u em uma trajetória retilínea que faz um ângulo θ com o eixo x, o ângulo θ' da trajetória da partícula com o eixo x' de um referencial S' que se move com velocidade escalar v paralelamente ao eixo x é dado por

$$\tan \theta' = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\gamma (\cos \theta - v/u)}$$

1-64. Como os jatos emitidos por algumas galáxias (veja a Figura 1-41), alguns objetos astronômicos distantes parecem se mover com uma velocidade maior que a da luz. Suponha que a galáxia distante AB15, que está se movendo com uma velocidade v que faz um ângulo θ com a direção da Terra, emite dois clarões luminosos separados por um intervalo de tempo Δt no referencial da galáxia. (*a*) Mostre que o intervalo de tempo no referencial da Terra, Δt_{Terra}, é dado por $\Delta t_{\text{Terra}} = \Delta t(1 - \beta \cos \theta)$. (*b*) Mostre que a velocidade aparente da galáxia, medida por observadores terrestres, é $v_{\text{ap}} = \dfrac{\Delta x_{\text{Terra}}}{\Delta t_{\text{Terra}}} = \dfrac{\beta \operatorname{sen} \theta}{1 - \beta \cos \theta}$. (*c*) Supondo que $\beta = 0{,}75$, calcule o valor de θ para o qual $v_{\text{ap}} = c$.

***Aqui está implícita a suposição de que as equações que regem a propagação da luz são invariantes em relação à transformação de Galileu, o que, como já foi dito, não é verdade. (N.T.)**

CAPÍTULO 2

Relatividade II

2-1 Momento Relativístico
2-2 Energia Relativística
2-3 Conversões Massa/Energia e Energia de Ligação
2-4 Massa Invariante
2-5 Relatividade Geral

Na seção de abertura do Capítulo 1, discutimos a observação clássica de que, se a segunda lei de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ é válida em um referencial, também é válida em qualquer outro referencial que esteja se movendo com velocidade constante em relação ao primeiro, isto é, em qualquer referencial inercial. Como vimos na Seção 1-1, a transformação de Galileu (Equação 1-2) leva à mesma aceleração $a'_x = a_x$ nos dois referenciais; forças como as produzidas por molas distendidas também são as mesmas nos dois referenciais. Entretanto, de acordo com a transformação de Lorentz, as acelerações não são iguais em dois desses referenciais. Se uma partícula tem uma aceleração a_x e uma velocidade u_x no referencial S, a aceleração da partícula em S', obtida calculando o valor de du'_x/dt', na qual u'_x é dado pela Equação 1-22, é

$$a'_x = \frac{a_x}{\gamma^3(1 - vu_x/c^2)^3} \qquad \textbf{2-1}$$

Assim, para que a segunda lei de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ seja válida no segundo referencial, o valor de $\mathbf{F}/m$ também não pode ser o mesmo nos dois referenciais e, portanto, a força $\mathbf{F}$ não é invariante em relação à transformação de Lorentz.

Na verdade, é razoável esperar que força $\mathbf{F}$ *não se mantenha constante* para altas velocidades, já que, se a força se mantivesse constante, de acordo com a equação $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, a aceleração seria constante e, portanto, a velocidade de uma partícula poderia aumentar sem limite. Entretanto, se a velocidade de uma partícula fosse maior do que c em algum referencial S, não poderíamos passar de S para o referencial de repouso da partícula, já que γ se torna imaginário para $v > c$. É possível demonstrar, a partir da transformação de velocidades, que se a velocidade de uma partícula é menor que c em um referencial S, é menor que c em qualquer referencial que esteja se movendo em relação a S com velocidade $v < c$. Este resultado nos leva a supor que as partículas jamais atinjam velocidades maiores do que c. Assim, esperamos que a segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, não seja invariante em relação à transformação de Lorentz. Nesse caso, precisamos de uma nova lei de movimento, mas uma lei que seja equivalente à versão clássica de Newton para $\beta (= v/c) \rightarrow 0$, já que, quando $\beta << 1$, a lei $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ está de acordo com as observações experimentais.

Neste capítulo, vamos discutir as mudanças introduzidas na dinâmica clássica pela teoria da relatividade, com atenção especial para as três grandezas que serviram de base para a mecânica clássica: massa, momento e energia. Vamos ver que entre essas mudanças, tão radicais quanto as que encontramos no Capítulo 1, estão uma transformação de Lorentz para o momento e a energia e uma nova grandeza invariante para fazer companhia ao intervalo no espaço-tempo Δs. No final do capítulo, examinaremos brevemente os referenciais não inerciais ou acelerados de que trata a teoria da relatividade geral, a teoria da gravitação de Einstein que serve de base para os estudos contemporâneos da origem e evolução do universo.

2-1 Momento Relativístico

Entre os princípios mais importantes da física clássica estão as leis de conservação do momento e de conservação da energia total. Como vamos ver no Capítulo 12, essas leis fundamentais estão ligadas a certas simetrias que existem nas leis da física. Assim, por exemplo, a conservação da energia total na física clássica é uma consequência da simetria, ou invariância, das leis da física com relação a translações no tempo. Isso faz com que as leis de Newton se apliquem hoje em dia exatamente do mesmo modo como se aplicavam na época em que foram formuladas. A conservação do momento resulta da invariância das leis da física em relação a translações no espaço. Na verdade, o primeiro postulado de Lorentz e a transformação de Lorentz resultante (Equações 1-18 e 1-19) asseguram que esta última invariância seja mantida em todos os referenciais inerciais.

A simplicidade e universalidade dessas leis de conservação nos levam a buscar equações para a mecânica relativística, análogas à Equação 1-1 e outras, que sejam compatíveis com a conservação do momento e da energia e ao mesmo tempo invariantes em relação à transformação de Lorentz. É fácil provar que o momento da mecânica clássica não é conservado na mecânica relativística. Para mostrar que isso é verdade, vamos examinar uma colisão isolada entre dois corpos em um exemplo no qual evitamos a questão de como transformar forças supondo que a resultante das forças externas seja nula. Na mecânica clássica, o momento total $\mathbf{p} = \sum m_i \mathbf{u}_i$ é conservado. Vamos ver que na mecânica relativística a conservação da grandeza $\sum m_i \mathbf{u}_i$ é uma aproximação válida apenas em baixas velocidades.

Considere um observador no referencial S com uma bola A e outro em S' com uma bola B. As bolas têm massa m e são iguais quando medidas em repouso. Os dois observadores arremessam as bolas ao longo dos respectivos eixos y com velocidades u_0 (medidas nos respectivos referenciais), uma em direção à outra.[1] Supondo que as bolas sejam perfeitamente elásticas, cada observador observa que sua bola adquire uma velocidade $-u_0$ após a colisão. Para que o momento total seja conservado, é preciso que a componente y seja nula, já que o momento de cada bola troca de sinal após a colisão, mas o valor absoluto permanece o mesmo.* Entretanto, ao usarmos a transformação relativística das velocidades, constatamos que a grandeza mu_y não tem o mesmo valor para as duas bolas, seja do ponto de vista do observador em S, seja do ponto de vista do observador em S'.

Considere a colisão do ponto de vista do observador em S (Figura 2-1*a*). Neste referencial, a bola A está se movendo ao longo do eixo y com velocidade $u_{yA} = u_0$. A velocidade da bola B tem uma componente x dada por $u_{xB} = v$ e uma componente y dada por

$$u_{yB} = u'_{yB}/\gamma = -u_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad \textbf{2-2}$$

Para chegar à Equação 2-2, usamos as equações de transformação das velocidades (Equação 1-22) e o fato de que $u'_{yB} = -u_0$, $u'_{xB} = 0$. Vemos que a componente y da velocidade da bola B é menor em valor absoluto que a componente y da bola A. A presença do fator $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ é uma consequência da dilatação dos tempos. O tempo que a bola B leva para percorrer uma certa distância ao longo do eixo y em S é maior que o tempo medido em S' para a mesma distância. Assim, em S, a componente y total do momento clássico não é nula. Como as componentes y das velocidades mudam apenas de sinal em uma colisão elástica, o momento definido pela equação $\mathbf{p} = \sum m\mathbf{u}$ não é conservado em S. A análise do problema do ponto de vista de S' leva à mesma conclusão (Figura 2-1*b*), já que os papéis de A e B são simplesmente intercambiados.[2] No limite clássico $v << c$, naturalmente, o momento é conservado, já que neste limite $\gamma \approx 1$ e $u_{yB} \approx u_0$.

O motivo para definirmos o momento como $\sum m\mathbf{u}$ na mecânica clássica é que esta grandeza é conservada quando não existem forças externas, como em nosso exemplo. Vemos agora que esta grandeza é conservada apenas na aproximação $v << c$. É possível, porém, definir um *momento relativístico* $\mathbf{p}$ de uma partícula que apresente as seguintes propriedades:

1. $\mathbf{p}$ é conservado nas colisões.
2. $\mathbf{p}$ tende a $m\mathbf{u}$ quando u/c tende a zero.

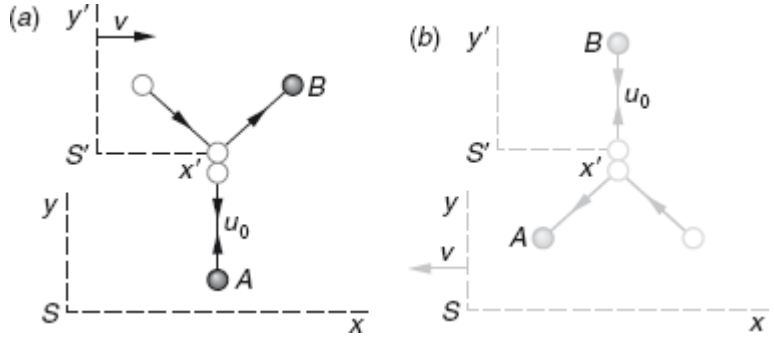


FIGURA 2-1 (*a*) Colisão elástica de duas bolas iguais, do ponto de vista do observador S. Se a componente vertical da velocidade B for

u_0 para o observador S', será u_0/γ para o observador S. (*b*) A mesma colisão, do ponto de vista do observador S'. Para este observador, a componente vertical da bola A é u_0/γ.

Vamos aplicar a primeira dessas condições à colisão de duas bolas que acabamos de discutir, observando dois pontos importantes. Em primeiro lugar, para cada um dos dois observadores da Figura 2-1, a velocidade das bolas (em valor absoluto) não é alterada pela colisão elástica: tanto antes como depois da colisão, é u_0 para a bola lançada pelo observador e $u = (u^2_y + v^2)^{1/2}$ para a outra bola. Em segundo lugar, a falta de conservação de momento que descrevemos não pode se dever às velocidades, porque usamos a transformação de Lorentz para calcular as componentes *y*. Nesse caso, deve ter algo a ver com a massa! Vamos escrever a lei de conservação da componente *y* do momento *do ponto de vista do observador em S*, chamando a massa da bola arremessada pelo observador S de $m(u_0)$ e a massa da bola arremessada pelo observador S' de $m(u)$:

$$m(u_0)u_0 + m(u)u_{yB} = -m(u_0)u_0 - m(u)u_{yB} \qquad \textbf{2-3}$$

(antes da colisão) (depois da colisão)

A Equação 2-3 pode ser colocada na forma

$$\frac{m(u)}{m(u_0)} = -\frac{u_0}{u_{yB}} \qquad \textbf{2-4}$$

De acordo com a Equação 2-2, se $u_0 << v$, temos também $u_{yB} << v$ e, portanto, $u \approx v$.

Vamos agora considerar o caso limite em que $u_0 \rightarrow 0$, isto é, em que as duas bolas estão em repouso no respectivo referencial "local" e a colisão é "de raspão", com a bola B passando pela bola A com velocidade v. Nesse caso, levando em conta as Equações 2-2 e 2-4 e supondo que a Equação 2-3 é respeitada, isto é, que o momento é conservado, temos:

$$\frac{m(u = v)}{m(u_0 = 0)} = \frac{u_0}{u_0\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ou

$$m(u) = \frac{m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \textbf{2-5}$$

No projeto e operação dos grandes aceleradores de partículas, como o LHC do CERN, os engenheiros e cientistas usam rotineiramente as expressões relativísticas do momento e da energia.

De acordo com a Equação 2-5, o observador em *S mede* a massa da bola *B*, que se move em relação a ele com velocidade *u*, como igual a $1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ vezes a massa de repouso da bola, ou seja, a massa da bola *B* no referencial em que esta bola se encontra em repouso. Observe que a massa medida por um observador em relação ao qual a bola está em movimento é sempre maior do que a massa medida por um observador em relação ao qual a bola está em repouso.

Vemos, portanto, que a lei de conservação do momento continua a ser válida na teoria da relatividade, contanto que o momento **p** de um corpo de massa *m* que esteja se movendo com velocidade **u** em relação a um referencial inercial *S* seja dado por

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \textbf{2-6}$$

em que **u** é o vetor velocidade da partícula. Tomamos, portanto, a Equação 2-6 como a definição do momento relativístico. É evidente que o momento definido desta forma apresenta a segunda propriedade, já que o denominador tende a 1 quando u/c tende a zero. De acordo com esta definição, os momentos das duas bolas A e B da Figura 2-1 do ponto de vista de um observador em S são dados por

$$p_{yA} = \frac{mu_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \qquad p_{yB} = \frac{mu_{yB}}{\sqrt{1 - (u_{xB}^2 + u_{yB}^2)/c^2}}$$

sendo $u_{yB} = u_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ e $u_{xB} = v$. Também é fácil mostrar que $p_{yB} = -p_{yA}$. Por causa da semelhança entre o fator $1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ e a constante Δ da transformação de Lorentz, a Equação 2-6 às vezes é escrita na forma

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u} \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \textbf{2-7}$$

O uso do símbolo γ para representar duas grandezas conceitualmente diferentes pode causar alguma confusão; a notação, porém, já está consagrada e simplifica muitas das equações relativísticas. Usaremos também esta notação, a não ser quando estivermos estudando transformações entre referenciais. Nesse caso, para evitar confusão, escreveremos por extenso o fator $1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$ e reservaremos o símbolo γ para o fator $1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, no qual v é a velocidade relativa dos referenciais. A Figura 2-2 mostra um gráfico do módulo de **p** em função de u/c. A grandeza $m(u)$ da Equação 2-5 é às vezes chamada de *massa relativística*; entretanto, evitaremos usar esse termo ou qualquer símbolo para a massa relativística; neste livro, *m sempre* indica a massa medida no referencial em que o corpo se encontra em repouso. Ao fazermos isto, estamos adotando o ponto de vista de Einstein. Em uma carta escrita a um colega em 1948, ele afirma:[3]

> Não é aconselhável introduzir o conceito de uma massa $M = m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ para a qual não se pode oferecer nenhuma definição clara. É melhor não introduzir nenhuma massa além da "massa de repouso" m. Em vez de introduzir M, é melhor mencionar as expressões para o momento e energia de um corpo em movimento.

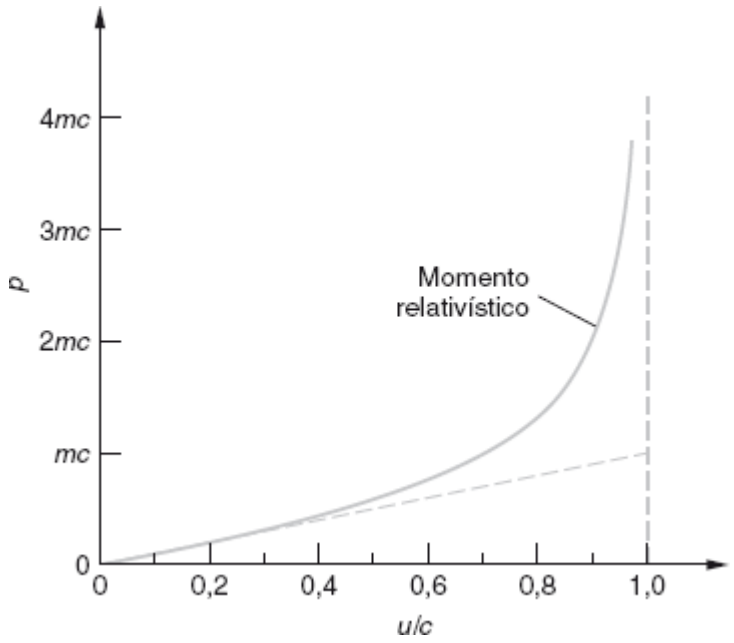


FIGURA 2-2 Momento relativístico, dado pela Equação 2-6, em função de u/c, em que u é a velocidade do objeto em relação a um observador. O módulo do momento, p, é expresso em unidades de mc. A reta tracejada mostra a variação do momento clássico com u/c.

EXEMPLO 2-1 **Valores Medidos da Massa de um Corpo em Movimento** Para que valor de u/c a massa experimental de um corpo, γm, excede a massa de repouso de uma dada fração f?

SOLUÇÃO

De acordo com a Equação 2-5, temos:

$$f = \frac{\gamma m - m}{m} = \gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1$$

Explicitando u/c,

$$1 - u^2/c^2 = \frac{1}{(f+1)^2} \rightarrow u^2/c^2 = 1 - \frac{1}{(f+1)^2}$$

ou

$$u/c = \frac{\sqrt{f(f+2)}}{f+1}$$

Esta última relação permite obter o valor de u/c para qualquer valor de f, incluindo os que aparecem na tabela a seguir. Observe que o

valor de u necessário para que o aumento de massa corresponda a um certo valor de f é independente de m. Em outras palavras, o valor de f é o mesmo para uma locomotiva e um próton que estejam se movendo com a mesma velocidade.

f	u/c	Exemplo
10^{-12}	$1{,}4 \times 10^{-6}$	Caça supersônico
5×10^{-9}	0,0001	Velocidade orbital da Terra
0,0001	0,014	Elétron de 50 eV
0,01 (1%)	0,14	Quasar 3C273
1,0 (100%)	0,87	Quasar 0Q172
10	0,996	Múons cósmicos
100	0,99995	Alguns prótons cósmicos

EXEMPLO 2-2 **Momento de um Foguete** Uma sonda interplanetária de massa $m = 50.000$ kg foi lançada em direção a Plutão com uma velocidade $u = 0{,}8c$. Qual é o momento da nave no referencial da base de lançamento? Se a velocidade da sonda é reduzida para $0{,}4c$ ao se aproximar de Plutão, qual é o novo valor do momento?

SOLUÇÃO

1. Supondo que a sonda esteja viajando em linha reta rumo a Plutão, o momento nessa direção é dado pela Equação 2-6:

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{(50.000\,\text{kg})\,(0{,}8c)}{\sqrt{1 - (0{,}8c)^2/c^2}}$$

$$= 6{,}7 \times 10^4 c \cdot \text{kg} = 2{,}0 \times 10^{13}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

2. Quando a velocidade da sonda é reduzida, o momento também diminui (Figura 2-2). O novo valor pode ser calculado a partir da seguinte relação:

$$\frac{p_{0,4c}}{p_{0,8c}} = \frac{m(0{,}4c)/\sqrt{1 - (0{,}4)^2}}{m(0{,}8c)/\sqrt{1 - (0{,}8)^2}}$$

$$= \frac{1\sqrt{1 - (0{,}8)^2}}{2\sqrt{1 - (0{,}4)^2}}$$

$$= 0{,}33$$

3. O novo momento, $p_{0,4c}$, é dado por

$$p_{0,4c} = 0{,}33 p_{0,8c}$$

$$= (0{,}33)\,(6{,}7 \times 10^4 c \cdot \text{kg})$$

$$= 2{,}2 \times 10^4 c \cdot \text{kg}$$

$$= 6{,}6 \times 10^{12}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Observação: *Observe na Figura 2-2 que, de acordo com a mecânica clássica, o valor de $p_{0,8c}$ seria $50.000 \times 0{,}8c = 1{,}2 \times 10^{13}$ kg m/s, ou seja, 60% do valor correto. Note também que, quando a velocidade da sonda diminui para metade do valor inicial, o momento é reduzido para um terço do valor inicial.*

Exercício

1. Em nossa discussão da colisão inelástica de duas bolas *A* e *B*, supusemos uma colisão "de raspão" no caso limite. Imagine, em vez disso, que o caso limite seja uma colisão "frontal", com as duas bolas se movendo na direção do eixo *x*. Se a velocidade do referencial *S* (ou seja, da bola *B*) é pequena, $v = 0{,}1c$, digamos, que aspecto terá o diagrama espaço-tempo da colisão?

2-2 Energia Relativística

Como foi observado na seção anterior, o caráter fundamental do princípio de conservação da energia total nos leva a procurar uma definição de energia total na teoria da relatividade que preserve a invariância dessa lei de conservação nas transformações entre sistemas inerciais. Como no caso da definição de momento relativístico, Equação 2-6, vamos exigir que a *energia relativística total E* apresente duas propriedades:



Vista aérea da Continuous Electron Beam Accelerator Facility (CEBAF) do Jefferson Laboratory, no estado americano da Virgínia. A linha tracejada mostra a localização do acelerador subterrâneo, onde os elétrons são acelerados até adquirirem uma energia de 6 GeV e uma velocidade de mais de 99,99% da velocidade da luz. [*Thomas Jefferson National Accelerator Facility/U.S. Department of Energy*.]

1. A energia total *E* de qualquer sistema isolado é conservada.
2. *E* tende ao valor clássico quando u/c tende a zero.

Nossa estratégia consistirá em procurar uma expressão para *E* que apresente a segunda propriedade e verificar se essa expressão apresenta também a primeira. Vimos que a grandeza $m\mathbf{u}$ (o momento clássico) não é conservada em colisões relativísticas, devendo ser substituída pela expressão $\gamma m\mathbf{u}$, na qual $\gamma = 1/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$. Também sabemos que a segunda lei de Newton, na forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, não pode estar relativisticamente correta, já que, entre outras coisas, leva à conservação de $m\mathbf{u}$. Para encontrar a forma relativisticamente correta da segunda lei, é preciso escrevê-la na forma $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Esta equação é relativisticamente correta, *contanto que* seja usada a expressão relativística para o momento $\mathbf{p}$. Podemos, portanto, definir a força na teoria da relatividade através da relação

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\mathbf{u})}{dt} \qquad \textbf{2-8}$$

Observe que, como na mecânica clássica, podemos definir a energia cinética E_k como o trabalho realizado por uma força para acelerar uma partícula desde o repouso até uma certa velocidade *u*. Considerando o movimento em apenas uma dimensão,

podemos escrever:

$$E_k = \int_{u=0}^{u} F\,dx = \int_0^u \frac{d(\gamma m u)}{dt}\,dx = \int_0^u u\,d(\gamma m u)$$

já que $u = dx/dt$. O cálculo da integral que aparece nesta última equação não é difícil mas requer algumas manipulações matemáticas. Deixamos a cargo do leitor (Problema 2-2) mostrar que

$$d(\gamma m u) = m\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} du$$

Substituindo esta relação no integrando da equação de E_k, obtemos:

$$E_k = \int_0^u u\,d(\gamma m u) = \int_0^u m\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-3/2} u\,du$$
$$= mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1\right)$$

ou

$$E_k = \gamma mc^2 - mc^2 \qquad \textbf{2-9}$$

A Equação 2-9 é a equação de definição da *energia cinética relativística*. Observe que E_k não é dada por $mu^2/2$ (a expressão clássica) nem, como se poderia supor à primeira vista, por $\gamma mu^2/2$. A Figura 2-3 deixa isso evidente. Por outro lado, a Equação 2-9 tende ao valor clássico $mu^2/2$ para $u << c$ e apresenta, portanto, a segunda propriedade. Podemos provar esta afirmação calculando a expansão binomial de γ. O resultado é o seguinte:

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots$$

Assim, para $u/c << 1$, temos:

$$E_k = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots - 1\right) \approx \frac{1}{2}mu^2$$

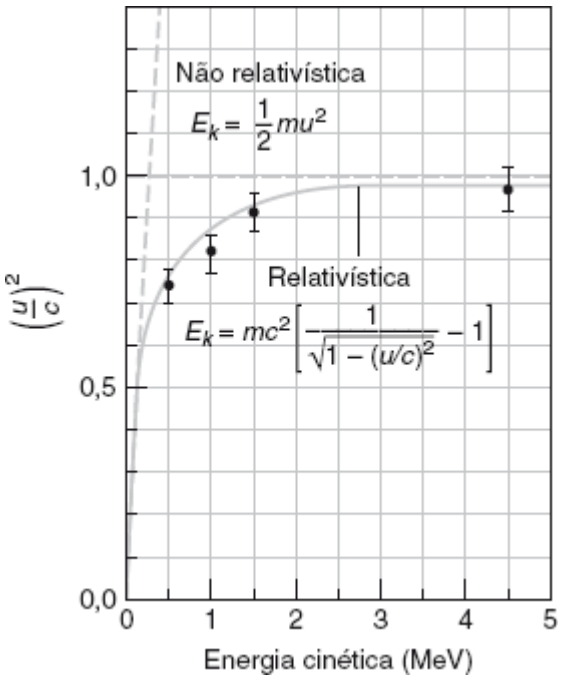


FIGURA 2-3 Comprovação experimental da validade da Equação 2-9, usada para calcular a energia cinética relativística. Elétrons foram

acelerados por intensos campos elétricos até atingirem energias da ordem de MeV e suas velocidades determinadas medindo o tempo que levavam para percorrer uma distância de 8,4 m. Observe que, para $u << c$, as equações relativística e clássica levam aos mesmos resultados. [W. Bertozzi, *American Journal of Physics*, **32**, 551 (1964).]

A expressão da energia cinética relativística, Equação 2-9, contém dois termos. O primeiro, γmc^2, depende da velocidade u da partícula (já que γ varia com u), enquanto o outro termo, mc^2, é independente da velocidade. A grandeza mc^2 é a *energia de repouso* da partícula, ou seja, a energia associada à massa de repouso m. A energia relativística total E é definida como a soma da energia cinética com a energia de repouso:

$$E = E_k + mc^2 = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \textbf{2-10}$$

Assim, o trabalho realizado por uma força aumenta a energia do sistema da energia de repouso mc^2 para γmc^2 (ou aumenta a massa de m para γm).

Para uma partícula em repouso em relação a um observador, $E_k = 0$ e a Equação 2-10 se torna a que é, provavelmente, a mais famosa de todas as equações da física, $E = mc^2$. Para $u << c$, a Equação 2-10 pode ser escrita na forma

$$E \approx \frac{1}{2}mu^2 + mc^2$$

Antes do aparecimento da teoria da relatividade, imaginava-se que a massa fosse uma grandeza conservada;[4] em consequência, m teria o mesmo valor antes e depois de qualquer interação ou evento e mc^2 seria constante. Como o zero de energia é arbitrário, estamos livres para incluir uma constante aditiva; assim, nossa definição de energia relativística total se reduz à energia cinética clássica para $u << c$ e, portanto, a expressão para E apresenta também a segunda propriedade.[5]

É preciso tomar cuidado para interpretar corretamente a Equação 2-10. Esta equação é usada para definir a energia total E, que é conservada em todos os sistemas isolados. Em particular, as grandezas E_k (energia cinética) e mc^2 (energia de repouso) *não são* necessariamente conservadas em todos os sistemas isolados. Convém lembrar também que existe uma diferença entre grandezas *conservadas* e grandezas *invariantes*. As primeiras têm o mesmo valor em um determinado referencial antes e depois de uma interação; as segundas têm o mesmo valor em qualquer referencial. Assim, não estamos afirmando que o valor de E medido por observadores em diferentes referenciais inerciais é necessariamente o mesmo, e sim que o valor de E permanece constante com o tempo em um dado referencial. Para mostrar que a energia E definida pela Equação 2-10 é conservada em sistemas isolados, vamos examinar de que modo E e $\mathbf{p}$ se transformam quando mudamos de referencial.

As Transformações de Lorentz para *E* e p

Considere uma partícula de massa de repouso m que esteja se movendo com velocidade $\mathbf{u}$ em relação a um certo referencial S (Figura 2-4). O sistema S' é um segundo referencial inercial que está se movendo com velocidade v em relação a S no sentido positivo do eixo dos x. O momento e a energia nos sistemas S e S' são dados pelas seguintes equações:

Em *S*:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ p_x &= \gamma mu_x \\ p_y &= \gamma mu_y \\ p_z &= \gamma mu_z \end{aligned} \qquad \textbf{2-11}$$

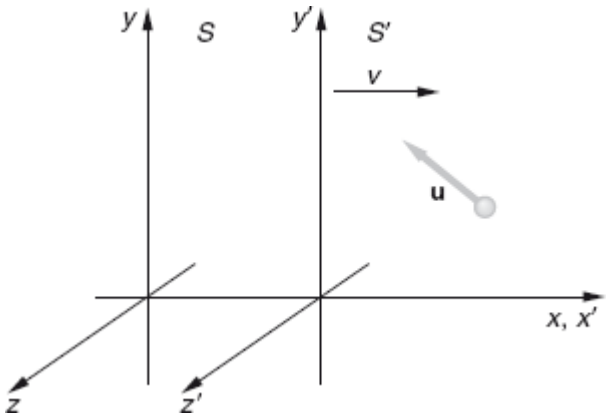


FIGURA 2-4 Uma partícula de massa m se move com velocidade **u** em um referencial S. O referencial S' se move com velocidade v em relação a S no sentido positivo do eixo dos x. A transformação de velocidades de Lorentz permite determinar a energia e as três componentes do momento em um dos referenciais em função das mesmas grandezas no outro referencial.

na qual

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

Em S':

$$\begin{aligned} E' &= \gamma' mc^2 \\ p'_x &= \gamma' mu'_x \\ p'_y &= \gamma' mu'_y \\ p'_z &= \gamma' mu'_z \end{aligned} \qquad \textbf{2-12}$$

na qual

$$\gamma' = 1/\sqrt{1 - u'^2/c^2}$$

Para determinar as transformações de Lorentz de E e **p**, precisamos expressar γ' em termos de grandezas medidas em S. (Poderíamos também expressar γ em termos de grandezas medidas em S'; o resultado seria o mesmo.) O resultado é o seguinte:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \gamma \frac{(1 - vu_x/c^2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{na qual agora}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \textbf{2-13}$$

Substituindo γ' por seu valor, dado pela Equação 2-13, na expressão para E' que aparece nas Equações 2-12, temos:

$$E' = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \gamma\left[\frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{mc^2 vu_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right]$$

O primeiro termo da soma entre colchetes é simplesmente a energia total E; o segundo, de acordo com a expressão para p_x que aparece nas Equações 2-11, é igual a vp_x. Assim, temos:

$$E' = \gamma(E - vp_x) \qquad \textbf{2-14}$$

Da mesma forma, substituindo γ' por seu valor, dado pela Equação 2-13, na expressão para p'_x que aparece nas Equações 2-12, temos:

$$p'_x = \frac{mu'_x}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \gamma\left[\frac{mu_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{mv}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right]$$

De acordo com as Equações 2-11, o primeiro termo da soma entre colchetes é igual a p_x; como $m(1 - u^2/c^2)^{-1/2} = E/c^2$, o segundo

termo é igual a vE/c . Assim, temos:

$$p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2) \qquad \textbf{2-15}$$

Usando a mesma abordagem, é possível mostrar (Problema 2-48) que

$$p'_y = p_y \quad \text{e} \quad p'_z = p_z$$

Juntas, essas relações constituem as *transformações de Lorentz para momento e energia*:

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - vE/c^2) & p'_y &= p_y \\ E' &= \gamma(E - vp_x) & p'_z &= p_z \end{aligned} \qquad \textbf{2-16}$$

A transformação inversa é

$$\begin{aligned} p_x &= \gamma(p'_x + vE'/c^2) & p_y &= p'_y \\ E &= \gamma(E' + vp'_x) & p_z &= p'_z \end{aligned} \qquad \textbf{2-17}$$

com

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Observe a notável semelhança que existe entre as Equações 2-16 e 2-17 e a transformação de Lorentz das coordenadas espaciais e temporais, Equações 1-18 e 1-19. Na teoria da relatividade, a transformação do momento $\mathbf{p}(p_x, p_y, p_z)$ tem exatamente a mesma forma que a transformação de $\mathbf{r}(x, y, z)$ e a transformação da energia E tem a mesma forma que a transformação de t. Daqui a pouco voltaremos a discutir este resultado e questões correlatas, mas primeiro vamos apresentar alguns exemplos e em seguida, como foi prometido, mostraremos que a energia definida pela Equação 2-10 é conservada na teoria da relatividade.

EXEMPLO 2-3 **Transformação da Energia e do Momento** Suponha que um micrometeorito de massa 10^{-9} kg esteja passando pela Terra com uma velocidade igual a $0{,}01c$. Quais serão a energia e o momento da partícula do ponto de vista de um observador situado em um sistema S' que esteja se movendo em relação à Terra com uma velocidade igual a $0{,}5c$ na mesma direção e sentido que o meteorito?

SOLUÇÃO

Tomando a direção do movimento do micrometeorito como eixo x e usando as aproximações apropriadas para $u << c$ nas Equações 2-10 e 2-11, temos:

$$E \approx \frac{1}{2}mu^2 + mc^2 = 10^{-9}\,\text{kg}[\,(0{,}01c)^2/2 + c^2$$

$$E \approx 1{,}00005 \times 10^{-9}c^2\,\text{J}$$

e

$$p_x = mu_x = (10^{-9}\,\text{kg})(0{,}01c) = 10^{-11}c\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Neste caso, $\gamma = 1{,}1547$ e, portanto, os valores de energia e momento medidos em S' são

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - vp_x) = (1{,}1547) \\ &\quad [1{,}00005 \times 10^{-9}c^2 - (0{,}5c)(10^{-11}c)] \\ E' &= (1{,}1547)(1{,}00005 \times 10^{-9} - 0{,}5 \times 10^{-11})c^2 \\ E' &= 1{,}14898 \times 10^{-9}c^2\,\text{J} \end{aligned}$$

e

$$p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2) = (1{,}1547)$$
$$[10^{-11}c - (0{,}5c)(1{,}00005 \times 10^{-9}c^2)/c^2]$$
$$p'_x = (1{,}1547)(10^{-11} - 5{,}00025 \times 10^{-10})c$$
$$p'_x = -5{,}66 \times 10^{-10}c\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = -56{,}6 \times 10^{-11}c\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Assim, o observador em S' mede uma energia total aproximadamente 15% maior e um momento mais de 50 vezes menor (e na direção $-x$) que um observador estacionário em relação à Terra.

EXEMPLO 2-4 **Uma Transformação Mais Difícil da Energia** Uma partícula de massa m e energia E se move em direção à origem de um sistema S com a velocidade **u** da partícula fazendo um ângulo α com o eixo dos y (Figura 2-5). Usando as transformações de Lorentz da energia e do momento, determine a energia E' da partícula do ponto de vista de um observador em um referencial S' que está se movendo em relação a S de tal forma que a partícula se move na direção do eixo y'.

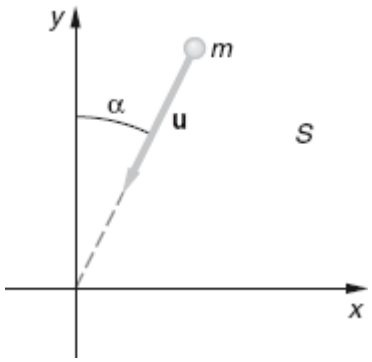


FIGURA 2-5 Sistema discutido no Exemplo 2-4.

SOLUÇÃO

Para que $u'_x = 0$, como é pedido no problema, é preciso que o sistema S' esteja se movendo na direção $-x$ com velocidade u sen α. Assim, $v = -u$ sen α. Temos também:

$$E = mc^2/\sqrt{1 - u^2/c^2} \qquad p = mu/\sqrt{1 - u^2/c^2}$$

e, portanto,

$$p_x = -(mu/\sqrt{1 - u^2/c^2})\,\text{sen}\,\alpha$$

No sistema S', a energia é dada por

$$E' = \gamma(E - vp_x)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}[E - (u\,\text{sen}\,\alpha)(-mu/\sqrt{1 - v^2/c^2})\,\text{sen}\,\alpha]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - u^2\,\text{sen}^2\,\alpha/c^2}}[E - (m/\sqrt{1 - u^2/c^2})u^2\,\text{sen}^2\,\alpha]$$

Multiplicando o segundo termo da soma entre colchetes por c^2/c^2 e colocando E em evidência, temos:

$$E' = E\sqrt{1 - (u^2/c^2)\,\text{sen}^2\,\alpha}$$

Como $u < c$ e $\text{sen}^2\,\alpha \leq 1$, vemos que $E' < E$, exceto para $\alpha = 0$, caso em que $E' = E$, o que é natural, já que, para $\alpha = 0$, não existe diferença entre S e S'. Observe também que, para $\alpha > 0$, quando $u \to c$, $E' \to E$ cos α. Como veremos adiante, este último resultado é válido para a luz.

Exercício

2. Discuta os resultados das medidas de energia e momento à luz dos resultados das medidas de intervalos de tempo e espaço por observadores em movimento em relação aos relógios e réguas.

Conservação da Energia

Como em nossa discussão da conservação do momento relativístico, vamos considerar a colisão de duas partículas iguais cuja massa de repouso é m. Desta vez, para variar um pouco, vamos supor que a colisão é totalmente inelástica; em outras palavras, as partículas permanecem juntas após a colisão. Existe um sistema S', denominado *referencial de momento zero*, no qual as partículas se aproximam uma da outra viajando ao longo do eixo x' com velocidades escalares iguais u e, portanto, com momentos de mesmo módulo e sentidos opostos (Figura 2-6*a*). Neste referencial, a colisão resulta na formação de uma partícula composta de massa M que está em repouso no referencial S'. Se S' está se movendo em relação a um segundo referencial S com velocidade $v = u$ na direção x, a partícula que se encontra à direita antes da colisão está em repouso em S e a partícula que se forma após a colisão se move para a direita com velocidade u no mesmo referencial. Esta situação está ilustrada na Figura 2-6*b*.

Usando a definição da Equação 2-10 para a energia total, temos em S':

Antes da colisão:

$$E'_{\text{antes}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \textbf{2-18}$$

Depois da colisão:

$$E'_{\text{depois}} = Mc^2 \qquad \textbf{2-19}$$

A energia será conservada em S' se $E'_{\text{antes}} = E'_{\text{depois}}$, isto é, se

$$\frac{2mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = Mc^2 \qquad \textbf{2-20}$$

Esta igualdade é assegurada pela conservação do momento (veja a Equação 2-5) e, portanto, a energia é conservada em S'. (A validade da Equação 2-20 é importante e não trivial. Vamos voltar a discuti-la no Exemplo 2-7.) Para verificar se a energia que definimos também é conservada em S, vamos transformála para o referencial S, antes e depois da colisão, usando a expressão da transformação inversa, Equação 2-17. O resultado é o seguinte:

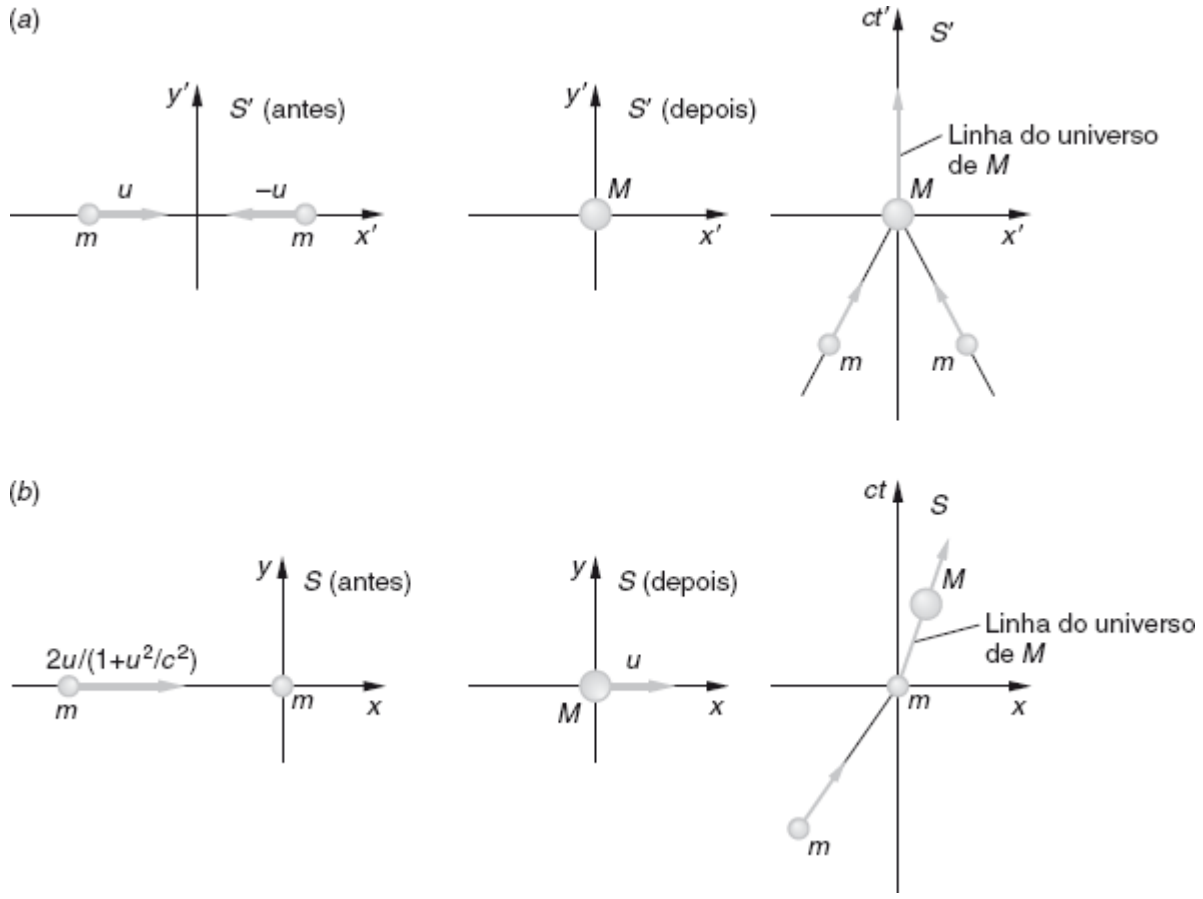


FIGURA 2-6 Colisão inelástica de duas partículas com a mesma massa de repouso m. (*a*) No referencial de momento zero S', as partículas têm velocidades de mesmo módulo e sentidos opostos e, portanto, momentos de mesmo módulo e sentidos opostos. Depois da colisão, a partícula composta de massa M está em repouso em S'. O gráfico da extremidade direita é a linha do universo da colisão no referencial S'. (*b*) Do ponto de vista do referencial S, o referencial S' está se movendo para a direita com velocidade escalar u, de modo que a partícula da direita está em repouso e a partícula da esquerda está se movendo para a direita com velocidade escalar $2u$. Depois da colisão, a partícula composta se move para a direita com velocidade escalar u. O gráfico da extremidade direita é a linha do universo da colisão no referencial S. Todos os gráficos foram desenhados com a colisão ocorrendo na origem.

Antes da colisão:

$$E_{\text{antes}} = \gamma(E'_{\text{antes}} + vp'_x)$$

$$E_{\text{antes}} = \gamma\left(\frac{2mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} + up'_x\right)$$

$$E_{\text{antes}} = \left(\frac{2mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) \quad \text{pois} \quad p'_x = 0 \qquad \textbf{2-21}$$

Depois da colisão:

$$E_{\text{depois}} = \gamma(Mc^2 + up'_x) = \gamma Mc^2 \text{ pois, novamente } p'_x = 0 \qquad \textbf{2-22}$$

A energia será conservada em S e, portanto, a lei de conservação da energia será válida em todos os referenciais inerciais se $E_{\text{antes}} = E_{\text{depois}}$, isto é, se

$$\gamma\left(\frac{2mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}\right) = \gamma Mc^2 \qquad \textbf{2-23}$$

A igualdade acima, como a Equação 2-20, é assegurada pela Equação 2-5. Assim, concluímos que a energia definida pela Equação 2-10 é compatível com uma lei relativística de conservação da energia, apresentando portanto a primeira das propriedades exigidas no início desta seção. Embora este fato tenha sido demonstrado apenas para um caso particular, já que a demonstração para o caso geral seria excessivamente trabalhosa, asseguramos ao leitor que a conclusão permanece válida em

todos os casos.

Exercício

3. Explique por que o resultado do Exemplo 2-4 não representa uma violação da lei de conservação da energia.

EXEMPLO 2-5 **Massa dos Múons Produzidos por Raios Cósmicos** No Capítulo 1, os múons produzidos pelos raios cósmicos foram usados para ilustrar a contração das distâncias e a dilatação dos tempos que ocorrem quando um corpo está se movendo com grande velocidade em relação a um observador terrestre. No caso dos múons, a velocidade é da ordem de 0,998c. Se a energia de repouso de um múon é 105,7 MeV, qual é a energia total desse múon do ponto de vista de um observador terrestre? Qual é a massa medida pelo mesmo observador?

SOLUÇÃO

Como o leitor provavelmente já sabe, o elétron-volt (eV), a quantidade de energia adquirida por um elétron ao ser submetido a uma diferença de potencial de 1 volt, é uma unidade de energia muito conveniente para os físicos. A relação entre o elétron-volt e o joule (unidade de energia do SI) é a seguinte:

$$1{,}0\,\text{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C} \times 1{,}0\,\text{V} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J} \quad \textbf{2-24}$$

Os múltiplos mais usados do eV são o keV (10^3 eV), o MeV (10^6 eV), o GeV (10^9 eV) e o TeV (10^{12} eV). Muitos experimentos de física envolvem a medição e análise da energia e/ou momento de partículas e sistemas de partículas; a Equação 2-10 permite expressar as massas das partículas em unidades de energia em lugar da unidade de massa do SI, o quilograma. Este fato e o tamanho conveniente do eV facilitam[6] muitos cálculos. Assim, por exemplo, a massa do elétron é 9,11 × 10^{-31} kg. A energia de repouso do elétron é dada por

$$E = mc^2 = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg} \cdot c^2 = 8{,}19 \times 10^{-14}\,\text{J}$$

ou

$$E = 8{,}19 \times 10^{-14}\,\text{J} \times \frac{1}{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J/eV}} = 5{,}11 \times 10^{5}\,\text{eV}$$

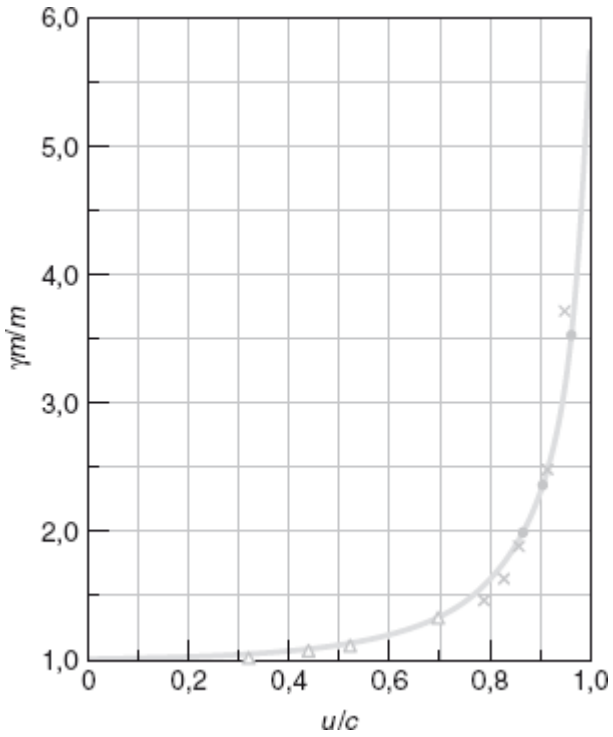


FIGURA 2-7 Algumas das muitas medidas experimentais da massa do elétron em função da velocidade u/c. A curva é uma representação gráfica da Equação 2-5. Os pontos experimentais foram obtidos por W. Kaufmann (×, 1901), A.H. Bucherer (Δ, 1908) e W. Bertozzi (•, 1964). Note que Kaufmann realizou suas observações antes que o artigo de Einstein de 1905 a respeito da relatividade restrita fosse publicado. Kaufmann usou um valor incorreto para a massa do elétron e interpretou os resultados como uma confirmação da teoria clássica. [Adaptado da Figura 3-4 do livro de R. Resnick e D. Halliday, *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2d ed. (New York: Macmillan, 1992).]

ou

$$E = 0{,}511\ \text{MeV} \quad \textbf{rest energy of the electron}$$

A massa da partícula é muitas vezes expressa da seguinte forma:

$$m = \frac{E}{c^2} = 0{,}511\ \text{MeV}/c^2 \quad \textbf{mass of the electron}$$

Aplicando o mesmo raciocínio aos múons produzidos por raios cósmicos, vemos que a energia total E é dada por

$$E = \gamma mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - (0{,}998c)^2/c^2}} \times 105{,}7\ \frac{\text{MeV}}{c^2} \times c^2$$

$$E = 1670\ \text{MeV}$$

e a massa medida (veja a Equação 2-5) é

$$\gamma m = E/c^2 = 1670\ \text{MeV}/c^2$$

A variação da massa medida com a velocidade da partícula foi comprovada em numerosos experimentos. A Figura 2-7 ilustra alguns desses resultados.

EXEMPLO 2-6 **Perda de Massa do Sol** Calcule a perda de massa do Sol por unidade de tempo, sabendo que o raio médio R da órbita da Terra é $1{,}50 \times 10^8$ km e a intensidade da radiação solar na Terra (a chamada *constante solar*) é $1{,}36 \times 10^3$ W/m^2.

SOLUÇÃO

1. A conversão de massa em energia, uma consequência da lei de conservação da energia relativística, está implícita na Equação 2-10. Para $u = 0$, a equação se reduz a

$$E = mc^2$$

2. Supondo que a radiação do Sol seja uniforme na superfície de uma esfera de raio R, a potência total irradiada pelo Sol é dada por:

$$\begin{aligned} P &= (\text{área da esfera})\,(\text{constante solar}) \\ &= (4\pi R^2)\,(1{,}36 \times 10^3\ \text{W/m}^2) \\ &= 4\pi(1{,}50 \times 10^{11}\ \text{m})^2(1{,}36 \times 10^3\ \text{W/m}^2) \\ &= 3{,}85 \times 10^{26}\ \text{J/s} \end{aligned}$$

3. Assim, a cada segundo, o Sol emite $3{,}85 \times 10^{26}$ J, que, de acordo com a Equação 2-10, resultam da conversão de uma massa m dada por:

$$\begin{aligned} m &= E/c^2 \\ &= \frac{3{,}85 \times 10^{26}\ \text{J}}{(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s})^2} \\ &= 4{,}3 \times 10^9\ \text{kg} \end{aligned}$$

Observações: *Os cálculos acima levam à conclusão de que o Sol está perdendo uma massa de 4,3 × 10^9 kg (mais de 4 milhões de toneladas) por segundo! Se esta perda de massa permanecer constante (o que deverá acontecer pelos próximos bilhões de anos) e com uma eficiência de conversão de massa em energia da ordem de 1%, a massa do Sol, que no momento é aproximadamente 2,0 × 10^{30} kg, se esgotará em "apenas" 10^{11} anos*!



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Outra Surpresa

O fato de que a segunda lei de Newton, **F** = m**a**, não é invariante em relação à transformação de Lorentz leva a várias

situações curiosas, como o chamado paradoxo da alavanca. Considere uma alavanca de massa *m* em repouso no referencial *S* (Figura 2-8). Como a alavanca está em repouso, o torque resultante τ_{res} produzido pelas forças $\mathbf{F}_x$ e $\mathbf{F}_y$ é zero, ou seja (usando os módulos dos vetores envolvidos):

$$\tau_{res} = \tau_x + \tau_y = -F_x b + F_y a = 0$$

e, portanto,

$$F_x b = F_y a$$

Para um observador situado em um referencial *S*′ que se move com β = 9,866 (γ = 2) no sentido positivo do eixo *x* em relação a *S*, a alavanca está se movendo no sentido negativo do eixo *x*′ e o torque é dado por

$$\tau'_{res} = \tau'_x + \tau'_y = -F'_x b' + F'_y a = -F_x b + (F_y/2)(a/2)$$
$$= -F_x b + -F_x b/4 = -(3/4)F_x b \neq 0$$

em que $F'x = F_x$ e $F'y = F_y/2$ (veja o Problema 2-55). Isso significa que a alavanca está girando!

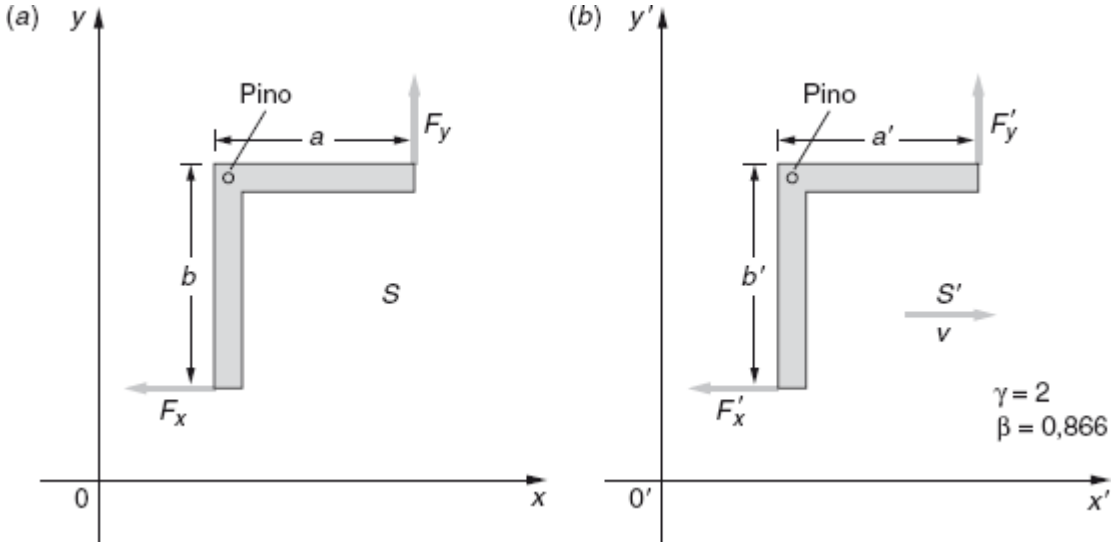


FIGURA 2-8 (*a*) Uma alavanca no plano *xy* do sistema *S* está livre para girar em torno do pino *P*, mas é mantida em repouso por duas forças, F_x e F_y. (*b*) A mesma alavanca, vista por um observador de um referencial *S*′que está se movendo com velocidade instantânea *v* no sentido positivo do eixo *x*. Para o observador em *S*′, a alavanca está se movendo no sentido negativo do eixo *x*.

A explicação para este suposto paradoxo foi encontrada pelo físico alemão Max von Laue (1879-1960). Por definição, o torque resultante é igual à taxa de variação do momento angular **L**. Do ponto de vista do observador do referencial *S*′, os trabalhos executados por unidade de tempo pelas duas forças são os seguintes:

Força *F′x*: $-F'xv: = -F_x v$
Força *F′y*: zero, pois F'_y é perpendicular ao deslocamento

A variação de massa por unidade de tempo da alavanca em movimento é dada por

$$\frac{\Delta m}{\Delta t'} = \frac{\Delta E/c^2}{\Delta t'} = \frac{1}{c^2}\frac{\Delta E}{\Delta t'} = -\frac{1}{c^2}F_x v$$

O observador em *S*′ mede uma variação do módulo do momento angular por unidade de tempo dada por

$$\tau'_{res} = \frac{\Delta L'}{\Delta t'} = bv\frac{-F_x v}{c^2} = -bF_x\frac{v^2}{c^2} = -bF_x\beta^2 = -\frac{3}{4}F_x b$$

Este resultado mostra que, em consequência do movimento de alavanca em relação a *S*′, do ponto de vista de um observador deste sistema, a resultante das forças aplicadas à alavanca executa um trabalho sobre a alavanca que faz o momento angular variar com o tempo, não havendo, portanto, um paradoxo no fato de que a alavanca está parada no referencial *S* e em movimento no referencial *S*′. (Os autores agradecem a Costas Efthimiou por trazer este paradoxo à nossa atenção.)

2-3 Conversões Massa/Energia e Energia de Ligação

A identificação do termo mc^2 com a massa de repouso não é apenas um artifício matemático; sempre que uma energia adicional ΔE é fornecida a um corpo, a massa do corpo aumenta de $\Delta E/c^2$. Este aumento de massa é particularmente importante quando comparamos a massa de um corpo que pode ser dividido em várias partes com a massa total das partes (como é o caso, por exemplo, de um átomo formado por um núcleo e vários elétrons ou de um núcleo formado por prótons e nêutrons). No caso do átomo, as variações de massa são quase sempre insignificantes (veja o Exemplo 2-8). Por outro lado, a diferença entre a massa de um *núcleo* e a soma das massas das partículas componentes (prótons e nêutrons) pode ser considerável.

Considere, por exemplo, o sistema da Figura 2-9*a*, no qual dois corpos com massa de repouso m estão se aproximando com velocidade u. Os corpos colidem com uma mola que se comprime e fica travada na posição comprimida. (A mola é apenas um artifício para visualizar o armazenamento de energia.) Na descrição da mecânica newtoniana, a energia cinética inicial $E_k = 2(mu^2/2) = mu^2$ é convertida na energia potencial da mola, U. Quando a mola é destravada, a energia potencial reaparece como energia cinética dos corpos. Na teoria da relatividade, a energia interna do sistema, $E_k = U$, aparece como um aumento da massa de repouso do sistema. Em outras palavras, a massa de repouso do sistema, M, é igual a $2m + E_k/c^2$. (Vamos demonstrar esta relação no próximo exemplo.) Esta variação da massa de repouso é pequena demais para ser medida no caso de massas e molas comuns, mas pode ser observada nas reações nucleares. Na fissão de um núcleo de ^{235}U, por exemplo, a energia liberada na forma de energia cinética dos produtos de fissão representa uma fração apreciável da energia de repouso do núcleo original (veja o Exemplo 11-19). Esta energia pode ser determinada medindo a diferença entre a massa do sistema original e a massa total dos fragmentos. Einstein foi o primeiro a propor este tipo de medida, antes mesmo que o núcleo atômico fosse descoberto. Em 1905, no final de um pequeno artigo[7] que se seguiu ao famoso trabalho no qual formulou a teoria da relatividade especial, escreveu, depois de determinar teoricamente a equivalência entre massa e energia:

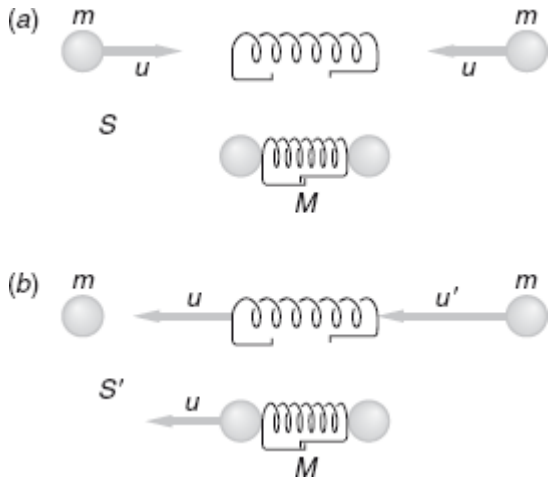


FIGURA 2-9 Dois corpos colidindo com uma mola de massa insignificante que permanece travada após a colisão. A diferença entre a massa de repouso total do sistema, M, e a soma das massas dos corpos, $2m$, é igual a E_k/c^2, em que E_k é a energia interna, que no caso é igual à energia cinética total dos corpos antes da colisão. (*a*) O evento do ponto de vista de um referencial S no qual a massa final M se encontra em repouso. (*b*) O mesmo evento do ponto de vista de um referencial S' que está se movendo para a direita com velocidade u em relação a S; um dos corpos está inicialmente em repouso neste referencial.

O funcionamento dos reatores nucleares que produzem eletricidade em mais de 30 países e movimentam navios de guerra e submarinos baseia-se na conversão relativística de matéria em energia.

Não é impossível que, no caso de corpos cujo conteúdo de energia é altamente variável (como, por exemplo, os sais de rádio), a teoria venha a ser testada com sucesso.

EXEMPLO 2-7 **Variação da Massa de Repouso do Sistema de Duas Partículas e Uma Mola da Figura 2-9** Calcule o aumento da massa de repouso de um sistema de duas partículas iguais em uma colisão totalmente inelástica.

SOLUÇÃO

Seja m a massa de repouso de uma das partículas, caso em que a massa total do sistema é $2m$ quando as partículas estão em repouso e a grande distância uma da outra; seja M a massa de repouso do sistema quando possui uma energia interna E_k. A energia cinética inicial no referencial S da Figura 2-9*a*, no qual as partículas se movem uma em direção à outra com velocidade escalar u, é dada por

$$\Delta m = \frac{E_k}{c^2} = 2m(\gamma - 1) \qquad \textbf{2-25}$$

Em uma colisão perfeitamente inelástica, a lei de conservação do momento exige que as duas partículas estejam em repouso após a colisão no referencial *S*, que é o referencial do centro de massa. A energia cinética total é, portanto, nula depois da colisão. Queremos mostrar que a conservação do momento em um referencial que esteja se movendo com velocidade constante em relação a *S* exige que a massa total do sistema sofra um acréscimo γm dado por

$$\Delta m = \frac{E_k}{c^2} = 2m(\gamma - 1) \qquad \textbf{2-26}$$

Queremos, portanto, mostrar que a massa total do sistema, *M*, é dada por

$$M = 2m + \Delta m = 2\gamma m \qquad \textbf{2-27}$$

Para simplificar os cálculos, escolhemos um segundo referencial, *S*′, que está se movendo para a direita com velocidade $v = u$ em relação ao referencial *S*; neste referencial, uma das partículas se encontra inicialmente em repouso (Figura 2-9*b*). A velocidade inicial da outra partícula neste referencial é dada por

$$u' = \frac{u - v}{1 - uv/c^2} = \frac{-2u}{1 + u^2/c^2} \qquad \textbf{2-28}$$

Depois da colisão, as partículas se movem juntas, da direita para a esquerda, com velocidade *u* (já que estão em repouso em *S*). O momento inicial no referencial *S*′ é dado por

$$p'_i = \frac{mu'}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} \quad \text{para a esquerda}$$

O momento final é

$$p'_f = \frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \quad \text{para a esquerda}$$

A partir da Equação 2-28, é possível obter, após algumas manipulações matemáticas, a seguinte relação:

$$1 - \frac{u'^2}{c^2} = 1 - \frac{4u^2/c^2}{(1 + u^2/c^2)^2} = \frac{(1 - u^2/c^2)^2}{(1 + u^2/c^2)^2}$$

Nesse caso,

$$p'_i = \frac{m[2u/(1 + u^2/c^2)]}{(1 - u^2/c^2)/(1 + u^2/c^2)} = \frac{2mu}{(1 - u^2/c^2)}$$

Para que o momento seja conservado no referencial *S*′, é preciso que $p'_f = p'_i$, ou seja, que

$$\frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{2mu}{1 - u^2/c^2}$$

Explicitando *M*, temos:

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 2\gamma m$$

que é a Equação 2-27. Assim, o valor medido de *M* é $2\gamma m$.

Se a mola da Figura 2-9*b* for destravada, as duas partículas se afastarão com momentos iguais, transformando novamente a massa de repouso Δm em energia cinética. A demonstração é semelhante à do Exemplo 2-7.

Massa e Energia de Ligação

Quando um sistema de partículas é mantido coeso por forças atrativas, é necessário fornecer energia ao sistema para separar as partículas. Essa energia, E_l, é denominada *energia de ligação* do sistema. Um resultado importante da teoria da relatividade restrita, que será ilustrado a seguir por meio de um exemplo, é o seguinte:

> A massa de um sistema estável é igual à soma das massas das partículas que o compõem menos E_l/c^2, na qual E_l é a energia de ligação.

Na física atômica e nuclear, as massas e energias são normalmente expressas em unidades de massa atômica (u) e em elétrons-volts (eV), respectivamente, e não em quilogramas e joules, as unidades do SI. A unidade de massa atômica é definida por meio das relações

$$1\ \text{u} = 1{,}66054 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 931{,}494\ \text{MeV}/c^2 \qquad \textbf{2-29}$$

(A relação entre elétrons-volts e joules aparece na Equação 2-24.) A Tabela 2-1 mostra as energias de repouso de alguns núcleos leves e partículas elementares; comparando as somas das massas das partículas componentes com as massas dos núcleos que aparecem na tabela, é fácil constatar que a massa de um núcleo não é igual à soma das massas das partículas que o compõem.

Tabela 2-1 Energias de repouso de alguns núcleos leves e partículas elementares

Partícula	Símbolo	Energia de repouso (MeV)
Fóton	γ	0
Neutrino (antineutrino)	$\nu(\bar{\nu})$	$<1 \times 10^{-6}$
Elétron (pósitron)	e ou e^- (e^+)	0,5110
Múon	μ^- μ^+	105,7
Píon	π^- (π^0) π^+	139,6 (135) 139,6
Próton	p	938,272
Nêutron	n	939,565
Dêuteron	^{2}H ou d	1875,613
Hélion	^{3}He ou h	2808,391
Alfa	^{4}He ou α	3727,379

Energia de Ligação do Dêuteron

O exemplo mais simples de energia de ligação nuclear é o do dêuteron, ^{2}H, formado por um nêutron e um próton, cuja energia de repouso é 1.875,63 MeV. A soma das energias de repouso do próton e do nêutron é 938,28 + 939,57 = 1.877,85 MeV. Como este valor é maior do que a energia de repouso do dêuteron, o dêuteron não pode se decompor *espontaneamente* em um próton e um nêutron sem violar a lei de conservação da energia. A energia de ligação do dêuteron é 1.877,85 − 1.875,63 = 2,22 MeV. Para decompor o dêuteron em um próton e um nêutron, é preciso fornecer ao sistema pelo menos 2,22 MeV de energia. Isso pode ser feito bombardeando o dêuteron com outras partículas ou com ondas eletromagnéticas. Quando um dêuteron é formado a partir de um nêutron e um próton, uma quantidade igual de energia (2,22 MeV) é liberada.

EXEMPLO 2-8 **Energia de Ligação do Átomo de Hidrogênio** As energias de ligação dos elétrons de um átomo são aproximadamente um milhão de vezes menores do que as energias de ligação das partículas que compõem o núcleo; em consequência, as diferenças de massa também são muito menores. A energia de ligação do átomo de hidrogênio (energia necessária para remover o elétron do átomo) é 13,6 eV. Qual é a perda de massa quando um elétron e um próton se unem para formar um átomo de hidrogênio?

SOLUÇÃO

Usando a Equação 2-29 para expressar a energia de ligação em unidades de massa atômica, obtemos:

$$\frac{13{,}6\ \text{eV}}{931{,}5\ \text{MeV/u}} = 1{,}46 \times 10^{-8}\ \text{u}$$

Esta perda de massa é tão pequena que pode ser desprezada na maioria dos cálculos.

2-4 Massa Invariante

Como vimos no Capítulo 1, de acordo com os postulados da teoria da relatividade de Einstein, as coordenadas espaciais e temporais são mutuamente dependentes na transformação de Lorentz que relaciona medidas realizadas em diferentes referenciais. Isso significa que no "mundo" relativístico quadridimensional que chamamos de espaço-tempo, o tempo t passa a ser uma quarta coordenada, em pé de igualdade com as coordenadas espaciais x, y e z. Observamos de passagem que a geometria do espaço-tempo não era a geometria euclidiana do mundo tridimensional a que estamos habituados, mas uma geometria lorentziana quadridimensional. A diferença se torna evidente quando comparamos a distância r entre dois pontos do espaço com o intervalo entre dois eventos no espaço-tempo. O primeiro, naturalmente, é um vetor **r** cujo módulo é dado por $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. O vetor **r** é invariante em relação a uma transformação de Galileu e todas as grandezas que se transformam como **r** também são vetores. O segundo, como vimos na Seção 1-4, é um *quadrivetor* Δs, cujo módulo é dado pela expressão

$$(\Delta s)^2 = (c\,\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \qquad \textbf{2-30}$$

O intervalo Δs é o análogo quadridimensional de **r** e é por essa razão que é chamado de *quadrivetor*. Assim como as componentes do vetor **r** são x, y e z, as componentes do quadrivetor Δs são Δx, Δy, Δz e $c\Delta t$. Vimos também que Δs é invariante em relação a uma transformação de Lorentz; todas as grandezas que se transformam como Δs, ou seja, que são invariantes em relação a uma transformação de Lorentz, também são quadrivetores. O intervalo Δs tem um significado físico importante: no caso de intervalos do tipo temporal, $\Delta s/c = \tau$, o intervalo de tempo próprio; no caso de intervalos do tipo espacial, $\Delta s = L_p$, o comprimento próprio. Os intervalos próprios podem ser calculados a partir de medidas realizadas em *qualquer* referencial inercial.[8]

A energia e o momento relativístico são componentes de outro quadrivetor. Nas seções precedentes vimos que o momento e a energia, definidos pelas Equações 2-6 e 2-10, respectivamente, não apenas são conservados na relatividade, mas também satisfazem à transformação de Lorentz, Equações 2-16 e 2-17, com as componentes do momento $\mathbf{p}(p_x, p_y$ e $p_z)$ se transformando como as componentes do vetor $\mathbf{r}(x, y$ e $z)$ e a energia E se transformando como o tempo t. A esta altura, o leitor talvez esteja se perguntando: A energia e o momento relativístico são as componentes de que quadrivetor? Qual é o significado físico deste quadrivetor? As respostas a essas perguntas são fáceis de descobrir, mas envolvem mais uma surpresa relativística. Elevando ao quadrado as Equações 2-6 e 2-10, verificamos que

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad \textbf{2-31}$$

Reagrupando os termos, obtemos:

$$(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2 \qquad \textbf{2-32}$$

Comparando a Equação 2-32 com a Equação 2-30 e lembrando que E e **p** obedecem à transformação de Lorentz, chegamos à conclusão de que *o módulo invariante do quadrivetor energia/momento é igual à energia de repouso da massa m*! Assim, observadores situados em diferentes referenciais inerciais medem o mesmo valor para a energia de repouso de um sistema isolado e, como c é constante, o mesmo valor para a massa de repouso. Observe que a energia de repouso é igual à energia total apenas no referencial de repouso da massa m, isto é, no referencial para o qual $\mathbf{p} = 0$. Embora tenhamos escrito a Equação 2-31 para uma única partícula, poderíamos ter escrito as equações para o momento e a energia em termos do momento total e da energia total de um conjunto de partículas com velocidades arbitrárias; para isso, bastaria escrever as Equações 2-6 e 2-10 para cada partícula e somar as equações membro a membro. Assim, a transformação de Lorentz para o momento e a energia, Equações 2-16 e 2-17, é válida para qualquer sistema de partículas, e o mesmo acontece com a invariância da energia de

repouso, expressa pela Equação 2-32.

Podemos expressar este fato de maneira mais formal dizendo que o estado *cinemático* do sistema é descrito pelo quadrivetor intervalo cujo módulo ao quadrado é dado por

$$(\Delta s)^2 = (c\,\Delta t)^2 - [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2]$$

e o estado *dinâmico* é descrito pelo quadrivetor energia-momento cujo módulo ao quadrado é dado por

$$(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

O exemplo a seguir ilustra a aplicação desses conceitos.

EXEMPLO 2-9 **Massa de Repouso de um Corpo em Movimento** Um certo corpo está se movendo em alta velocidade no referencial do laboratório. Os valores da energia total e das componentes do momento do corpo são medidos pelos técnicos. Os resultados (em unidades do SI) são os seguintes: $E = 4{,}5 \times 10^{17}$ J, $p_x = 3{,}8 \times 10^8$ kg·m/s, $p_y = 3{,}0 \times 10^8$ kg·m/s, $p_z = 3{,}0 \times 10^8$ kg·m/s. Qual é a massa de repouso do corpo?

SOLUÇÃO A

De acordo com a Equação 2-32, temos:

$$\begin{aligned}(mc^2)^2 &= (4{,}5 \times 10^{17})^2 - [(3{,}8 \times 10^8 c)^2 + (3{,}0 \times 10^8 c)^2 + \\ &\quad + (3{,}0 \times 10^8 c)^2] \\ &= (4{,}5 \times 10^{17})^2 - [1{,}4 \times 10^{17} + 9{,}0 \times 10^{16} + \\ &\quad + 9{,}0 \times 10^{16}]c^2 \\ &= 2{,}0 \times 10^{35} - 2{,}9 \times 10^{34} \\ &= 1{,}74 \times 10^{35} \\ m &= (1{,}74 \times 10^{35})^{1/2}/c^2 = 4{,}6\ \text{kg}\end{aligned}$$

SOLUÇÃO B

Outra forma de resolver o problema, que pode ser mais conveniente por não envolver o uso de grandes expoentes, consiste em dividir primeiro a Equação 2-32 por c^4:

$$m^2 = \left(\frac{E}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{p}{c}\right)^2 \qquad \textbf{2-33}$$

Observe que isso equivale a expressar todos os termos da Equação 2-32 em unidades de (massa)^2, ou seja, em kg^2, se E e p estiverem expressos em unidades do SI:

$$\begin{aligned}m^2 &= \left(\frac{4{,}5 \times 10^{17}}{c^2}\right)^2 - \left[\left(\frac{3{,}8 \times 10^8}{c}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3{,}0 \times 10^8}{c}\right)^2 + \left(\frac{3{,}0 \times 10^8}{c}\right)^2\right] \\ &= (5{,}0)^2 - [(1{,}25)^2 + (1{,}0)^2 + (1{,}0)^2] \\ &= 25 - 3{,}56 \\ m &= (21{,}4)^{1/2} = 4{,}6\ \text{kg}\end{aligned}$$

No Exemplo 2-9, pudemos determinar a energia e a massa de repouso de um corpo em movimento a partir de medidas executadas no referencial do laboratório, ou seja, as medidas não tiveram que ser executadas no referencial de repouso do objeto. Esta possibilidade é de grande interesse para os físicos de partículas elementares, para os físicos nucleares e para os astrofísicos, que muitas vezes têm que trabalhar com corpos que estão se movendo com velocidades próximas da luz. No caso de partículas ou corpos cuja massa de repouso é conhecida, podemos usar o módulo invariante do quadrivetor energia/momento para determinar os valores de outras variáveis dinâmicas, como ilustra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 2-10 **Velocidade de um Elétron** A energia total de um elétron produzido em uma certa reação nuclear é 2,40 MeV. Determine o momento e a velocidade do elétron no referencial do laboratório. (A massa de repouso do elétron é $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg e a energia de repouso é 0,511 MeV.)

SOLUÇÃO

O módulo do momento é dado pela Equação 2-31:

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(2{,}40\ \text{MeV})^2 - (0{,}511\ \text{MeV})^2} \\ &= 2{,}34\ \text{MeV} \\ p &= 2{,}34\ \text{MeV}/c \end{aligned}$$

na qual usamos mais uma vez o eV como unidade de energia. A unidade de momento resultante, MeV/c, pode ser convertida para unidades do SI convertendo MeV em joules e dividindo o resultado por c:

$$1\ \text{MeV}/c = \frac{1{,}602 \times 10^{-13}\ \text{J}}{2{,}998 \times 10^{8}\ \text{m/s}} = 5{,}34 \times 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Assim, em unidades do SI, o módulo do momento do elétron é

$$\begin{aligned} p &= 2{,}34\ \text{MeV}/c \times \frac{5{,}34 \times 10^{-22}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{1\ \text{MeV}/c} \\ p &= 1{,}25 \times 10^{-21}\ \text{kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

Para calcular a velocidade da partícula, basta observar que, de acordo com a Equação 2-32 ou as Equações 2-6 e 2-10,

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{2{,}34\ \text{MeV}}{2{,}40\ \text{MeV}} = 0{,}975 \qquad \textbf{2-34}$$

e, portanto,

$$u = 0{,}975c$$

É extremamente importante que o leitor compreenda que a energia de repouso invariante da Equação 2-32 é a energia do *sistema*, cujo valor *não* é necessariamente igual à soma das energias de repouso das partículas que compõem o sistema. Os exemplos numéricos da energia de ligação de átomos e núcleos, já apresentados, ilustram este fato mostrando que a massa dos átomos e núcleos é menor do que a soma das massas das partículas componentes; a diferença, Δmc^2, é igual à energia de ligação. Nesses exemplos, estávamos estudando sistemas de partículas sujeitas a algum tipo de interação, mas a diferença existe, mesmo que as partículas envolvidas não estejam interagindo. Para mostrar que isso é verdade, vamos definir com maior precisão *qual é* a massa invariante.

Considere duas partículas iguais e independentes, de massa de repouso $m = 4$ kg, que estão se aproximando uma da outra ao longo do eixo x do referencial S com um momento p_x cujo valor absoluto é 3 $c$kg (Figura 2-10*a*). De acordo com a Equação 2-33, a energia de cada partícula é dada por

$$E = c^2\sqrt{m^2 + (p/c)^2} = c^2\sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5c^2\ \text{kg}$$

A energia total do sistema é $5c^2$ kg + $5c^2$ kg = 10 c^2 kg, já que a energia é um escalar. O momento total do sistema é 3c kg − 3c kg = 0, já que o momento é um vetor e os momentos das duas partículas têm o mesmo módulo e sentidos opostos. A massa de repouso do sistema é, portanto,

$$m = \sqrt{(E/c^2)^2 - (p/c)^2} = \sqrt{(10)^2 - 0^2} = 10\ \text{kg}$$

Assim, a massa do sistema, 10 kg, é *maior* que a soma das massas das duas partículas, 8 kg. (No caso de sistemas ligados, como os átomos e os núcleos, por outro lado, a massa do sistema é *menor* que a soma das massas das componentes.) A diferença não pode ser considerada uma energia de ligação, já que as partículas são independentes. Além disso, a "diferença de massa" de 2 kg não está dividida entre as partículas. Na verdade, não pode ser associada a um determinado local, pois constitui uma

propriedade do sistema como um todo. Tudo que podemos afirmar é que a massa *do sistema* é 10 kg.

Embora a invariância do quadrivetor energia/momento assegure que a massa do sistema continuará a ser 10 kg se as medidas forem realizadas em qualquer outro referencial inercial, vamos atender à vontade dos céticos e calcular a energia no referencial S' da Figura 2.10*c*, apenas para ter certeza. Este cálculo será realizado no exemplo a seguir.

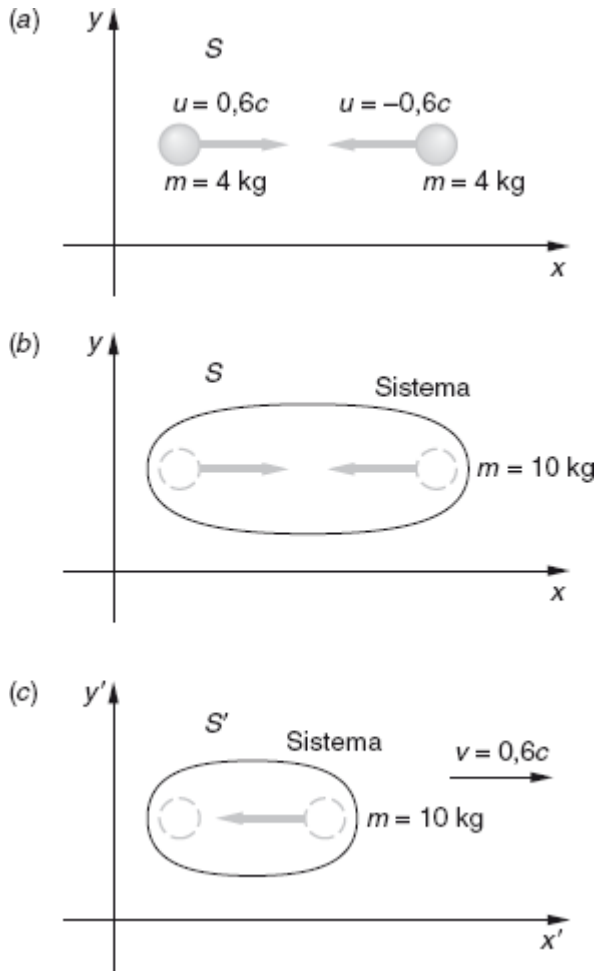


FIGURA 2-10 (*a*) Duas partículas iguais cuja massa de repouso é 4 kg se aproximam com momentos de mesmo módulo e sentidos opostos. A massa de repouso do sistema constituído pelas duas partículas não é 4 kg + 4 kg = 8 kg porque a massa de repouso do sistema deve incluir a massa equivalente ao movimento interno das partículas que o compõem. O valor correto, 10 kg (*b*), será medido por um observador situado em *S*, para o qual o sistema se encontra em repouso, ou por um observador situado em qualquer outro referencial inercial. (*c*) No referencial S', que está se movendo com uma velocidade $v = 0{,}6c$ em relação a *S*, o valor medido também é $m = 10$ kg (veja o Exemplo 2-11).

EXEMPLO 2-11 **Transformação de Lorentz da Massa do Sistema** Dado o sistema da Figura 2-10, mostre que para um observador em S', que está se movendo em relação a *S* com $\beta = 0{,}6$, a massa do sistema também é 10 kg.

SOLUÇÃO

1. A massa *m* medida em S' é dada pela Equação 2-33, que no caso assume a seguinte forma:

$$m = [(E'/c^2)^2 - (p'_x/c)^2]^{1/2}$$

2. A energia E' é dada pela Equação 2-16:

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - vp_x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (0.6)^2}}(10c^2 - 0{,}6c \times 0) \\ &= (1{,}25)(10c^2) \\ &= 12{,}5c^2 \cdot \text{kg} \end{aligned}$$

3. O momento p'_x também é dado pela Equação 2-16:

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma(p_x - vE/c^2) \\ &= (1{,}25)[0 - (0{,}6c)(10c^2)/c^2] \\ &= -7{,}5c \cdot \text{kg} \end{aligned}$$

4. Substituindo E' e p'_x por seus valores na Equação 2-33, obtemos:

$$\begin{aligned} m &= [(12{,}5c^2/c^2)^2 - (-7{,}5c/c)^2]^{1/2} \\ &= [(12{,}5)^2 - (-7{,}5)^2]^{1/2} \\ &= 10\,\text{kg} \end{aligned}$$

Observações: *Este resultado está de acordo com o valor medido em S. A velocidade de S' escolhida neste exemplo, $v = 0{,}6c$, é conveniente porque uma das partículas que integram o sistema está em repouso em S'; entretanto, o resultado seria o mesmo para qualquer outra velocidade.*

Vemos, portanto, que a energia de repouso de qualquer sistema isolado é invariante, seja o sistema em questão um único átomo ou a totalidade do universo. Com base nos exemplos examinados até o momento, sabemos também que a energia de repouso do sistema pode ser maior, igual ou menor que a soma das energias de repouso das partículas que o compõem, dependendo das velocidades relativas e das interações dessas partículas.

Exercícios

4. Dois vagões carregados, com uma massa $m = 50$ toneladas cada um, sofrem uma colisão frontal quando estão se movendo com velocidade u, e permanecem unidos após a colisão. Determine a massa do sistema antes e depois da colisão. Qual é a influência do módulo de u?

5. Em 1787, o Conde Rumford (1753-1814) tentou sem sucesso medir o aumento de peso de um barril com água quando a temperatura da água foi aumentada de 29 ºF para 61 ºF. Explique por que, de acordo com a teoria da relatividade, esse aumento deve ocorrer, e descreva um experimento que permita, em princípio, observar a mudança. Como a teoria da relatividade só foi proposta mais de cem anos depois, o que levou Rumford a realizar esse tipo de experimento?

Partículas sem Massa

Como no caso do quadrado do intervalo no espaço-tempo $(\Delta s)^2$ na Equação 1-33, a expressão $(mc^2)^2$ da Equação 2-32 pode formalmente assumir valores positivos, negativos ou nulos. Até o momento, supusemos implicitamente que o valor da expressão era positivo; os casos em que a expressão assume valores negativos serão discutidos no Capítulo 12. Vamos investigar agora as consequências da terceira possibilidade, a de que $(mc^2)^2 = 0$ e, portanto, $m = 0$. Observe, antes de mais nada, que a ideia de um corpo com massa de repouso nula não faz sentido na física clássica, já que as expressões clássicas para a energia cinética e o momento, $E_k = mu^2/2$ e $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$, respectivamente, se anulam para $m = 0$. Classicamente, portanto, um "corpo" com massa nula não pode ser distinguido do vazio absoluto, pois não possui nem energia nem momento. No caso da mecânica relativística, porém, fazendo $m = 0$ na Equação 2-32, obtemos a relação

$$E = pc \quad (\text{para } m = 0) \qquad \textbf{2-35}$$

que, combinada com a Equação 2-34, resulta em $u = c$. Em outras palavras, *todo corpo cuja massa é nula se move com a velocidade da luz*. Reciprocamente, uma partícula cuja velocidade é c tem necessariamente massa nula e sua energia é dada por $E = pc$.

Precisamos ser cautelosos, porém, porque a Equação 2-32 foi obtida a partir das definições relativísticas de E e $\mathbf{p}$,

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \qquad \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Quando $u \to c$, $1/(1 - u^2/c^2)^{1/2} \to \infty$; como, ao mesmo tempo, $m \to 0$, o produto γm tende a 0/0, um valor indeterminado que pode permanecer finito enquanto calculamos a razão $E/|\mathbf{p}|$ que conduz à relação $E = pc$. Na prática, a existência de partículas com $m = 0$ é amplamente comprovada pelas observações experimentais.

As teorias atuais sugerem a existência de três dessas partículas. A mais conhecida é o *fóton*, partícula associada à radiação eletromagnética (como a luz, por exemplo). Classicamente, a radiação eletromagnética é descrita, através das equações de Maxwell, como um fenômeno ondulatório, com a energia e o momento distribuídos continuamente ao longo do espaço percorrido pela onda. Foi descoberto por volta de 1900 que essa visão clássica deve ser revista em certas circunstâncias nas quais a energia e o momento da radiação se comportam como se estivessem concentrados em pequenos "pacotes" que receberam o nome de fótons. Naturalmente, os fótons se movem com a velocidade da luz, o que, como vimos, significa que sua massa deve ser nula. Como o leitor deve se lembrar, o intervalo no espaço-tempo Δs para a luz também é nulo. Na verdade, o segundo postulado de Einstein impede que exista uma transformação de Lorentz para o referencial de repouso da luz, já que a luz se move com velocidade c em relação a todos os referenciais inerciais; assim, o termo *massa de repouso* não faz sentido no caso da luz.

EXEMPLO 2-12 **Energia de Repouso de um Sistema de Fótons** Vimos há pouco que a energia de repouso de um sistema de partículas não é necessariamente igual à soma das energias de repouso das partículas. Isso também se aplica ao caso da luz! Suponha que dois fótons, um com uma energia de 5 MeV e outro com uma energia de 2 MeV, estejam se aproximando ao longo do eixo x. Qual é a energia de repouso do sistema?

SOLUÇÃO

De acordo com a Equação 2-35, o fóton de 5 MeV tem um momento $p_x = 5$ MeV/c e o fóton de 2 MeV tem um momento $p_x = -2$ MeV/c. Assim, a energia do sistema é $E = 5$ MeV + 2 MeV = 7 MeV e o momento é $p = 5$ MeV/c − 2 MeV/c = 3 MeV/c. De acordo com a Equação 2-32, a energia de repouso do sistema é, portanto,

$$mc^2 = \sqrt{(7\,\text{MeV})^2 - (3\,\text{MeV})^2} = 6{,}3\,\text{MeV!!}$$

Uma segunda partícula cuja energia de repouso é nula é o *glúon*. Esta partícula é a portadora da interação forte entre os *quarks*, que são os "tijolos" de uma classe de partículas conhecidas como hádrons, entre as quais estão os prótons e os nêutrons. Os quarks e glúons serão discutidos no Capítulo 12. Finalmente, existem fortes razões teóricas para supor que a gravidade é transmitida por uma partícula de energia de repouso nula chamada *gráviton*, que desempenha para o campo gravitacional o mesmo papel que o fóton desempenha para o campo eletromagnético. Os instrumentos atuais não são suficientemente sensíveis para detectar diretamente os grávitons, mas a observação de ondas gravitacionais é objeto de vários experimentos em curso (veja a Seção 2-5).

Até o início deste século, acreditava-se que uma quarta partícula, o *neutrino*, também possuía energia de repouso nula. Entretanto, dados colhidos pelos detectores de neutrinos Super-Kamiokande, no Japão, e SNO, no Canadá, entre outros, mostraram que a energia de repouso dos neutrinos não é nula. Voltaremos a falar dos neutrinos nos Capítulos 11 e 12.

Criação e Aniquilação de Partículas

A equivalência relativística entre massa e energia leva à possibilidade de um fenômeno para o qual não existe analogia clássica: Contanto que o momento e a energia sejam conservados no processo,[9] partículas elementares com massa de repouso diferente de zero podem se combinar com as *antipartículas* correspondentes em um processo, denominado *aniquilação*, que as transforma em pura energia. Assim, por exemplo, um elétron e sua antipartícula, conhecida como *pósitron*,[10] podem se aniquilar mutuamente, produzindo dois ou três fótons. A versão do processo em que são produzidos dois fótons é mostrada esquematicamente na Figura 2-11. Os pósitrons são gerados pelos raios cósmicos nas camadas superiores da atmosfera e também estão presentes entre os produtos da desintegração de alguns núcleos radioativos. Sua existência foi prevista por P. A. M. Dirac em 1928, quando o cientista investigava a invariância do quadrivetor energia/momento.



FIGURA 2-11 (*a*) Um pósitron e um elétron giram em torno do centro de massa do sistema, representado por um ponto. (*b*) Depois de um curto intervalo, que é da ordem de 10^{-10} s para o caso mostrado na figura, as duas partículas se aniquilam mutuamente, produzindo dois fótons. O par elétron-pósitron, que lembra um átomo de hidrogênio em miniatura, é chamado de *positrônio*.

Supondo que as velocidades do elétron e do pósitron são muito menores que a velocidade da luz (o que não é indispensável para que o processo de aniquilação ocorra, mas facilita os cálculos), a energia total de cada partícula é $E \approx mc^2 = 0{,}511$ MeV e,

portanto, a energia total do sistema da Figura 2-11*a* antes da aniquilação é $2mc$ = 1,022 MeV. Como mostra a figura, os momentos das duas partículas têm o mesmo módulo e sentidos opostos, de modo que o momento total do sistema é zero. Sendo assim, de acordo com a lei de conservação do momento, o momento total dos dois fótons resultantes também deve ser nulo e, portanto, os fótons são emitidos com momentos iguais em módulo e em sentidos opostos. Como para os fótons $E = pc$, os dois fótons também têm energias iguais. Assim, de acordo com a lei de conservação da energia, a energia de cada fóton é 0,511 MeV. (Fótons com uma energia maior do que algumas centenas de keV são comumente chamados de *raios gama*.) Observe no Exemplo 2-12 que o módulo do quadrivetor energia/momento (energia de repouso) de um sistema não é nulo, mesmo que a massa de repouso de todas as partículas que compõem o sistema seja nula. No caso que estamos discutindo, essa energia é igual à energia de repouso do sistema inicial. O caso em que a aniquilação produz três fótons pode ser analisado de forma semelhante, embora os cálculos sejam um pouco mais trabalhosos.

A esta altura, o leitor não deve ficar surpreso ao ser informado de que o processo inverso, a criação de massa a partir de energia, também é possível. A energia usada para gerar novas partículas pode ser a energia cinética de partículas já existentes ou a energia "pura" de um fóton. Nos dois casos, naturalmente, as leis de conservação de energia e momento (e outras leis de conservação envolvidas) devem ser respeitadas. Como vamos discutir com detalhes no Capítulo 12, isso significa que certos tipos de partículas (como elétrons, prótons e nêutrons) só podem ser produzidos na forma de pares partícula-antipartícula. Assim, por exemplo, a energia contida em um fóton não pode ser usada para criar um elétron isolado; o elétron deve ser acompanhado necessariamente por um pósitron.

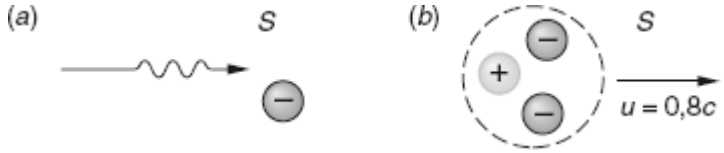
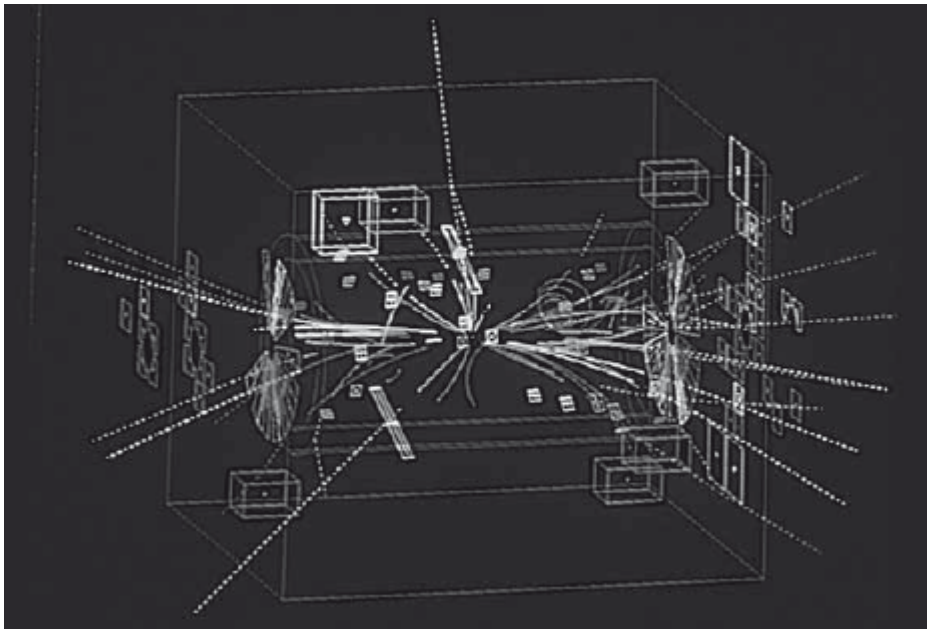


FIGURA 2-12 (*a*) Um fóton de energia E e momento $p = E/c$ encontra um elétron em repouso. O fóton produz um par elétron-pósitron (*b*) e as três partículas passam a se mover juntas com velocidade $u = 0{,}8c$.

Para termos uma ideia melhor do processo de criação de partículas, vamos considerar um caso especial, o da geração de um par elétron-pósitron a partir da energia de um fóton. Suponha que um fóton encontre um elétron que está inicialmente em repouso no referencial S, como na Figura 2-12*a*.[11] Na maioria das vezes, o fóton é simplesmente desviado da trajetória original, mas, ocasionalmente, o evento resulta na criação de um par elétron-pósitron. A presença do elétron é importante, já que um fóton isolado não pode se transformar em um par elétron-pósitron sem que a lei de conservação do momento seja violada (veja o Problema 2-47). É preciso que exista outra partícula nas proximidades, não para fornecer a energia necessária ao processo de criação, mas para absorver parte do momento do fóton. No exemplo que estamos examinando, supusemos que a partícula que interage com o fóton é um elétron, mas o processo também pode ocorrer com outros tipos de partículas (veja o Exemplo 2-13).

Ao se aproximar do elétron, o fóton desaparece e é substituído por um par elétron-pósitron. O processo ocorre com extrema rapidez, já que o fóton, que está se movendo à velocidade da luz, percorre uma distância equivalente ao diâmetro de um átomo em cerca de 10^{-19} s. Suponha que os detalhes da interação que produziu o par sejam tais que as três partículas resultantes se movam para a direita na Figura 2-12*b* com a mesma velocidade u, isto é, que estejam todas em repouso no referencial S', que está se movendo para a direita com velocidade u em relação a S.[12] Qual deve ser a energia E_γ do fóton para que este par elétron-pósitron seja criado? Para responder à pergunta, vamos aplicar as leis de conservação de energia e de momento:



Decaimento de uma partícula *Z* em um par elétron-pósitron, registrado pelo detector UA1 do CERN. Esta é a imagem, em computador, da primeira partícula *Z* observada experimentalmente, em 30 de abril de 1983. O elétron e o pósitron deixam a região central do detector movendo-se em direções opostas com uma velocidade quase igual à da luz. [*CERN*]

Antes da criação do par	**Depois da criação do par**
$E_i = E_\gamma + mc^2$	$E_f = E_i = E_\gamma + mc^2$
$p_i = \frac{E_\gamma}{c}$	$p_f = p_i = \frac{E_\gamma}{c}$

na qual mc^2 é a energia de repouso do elétron. No sistema final, ou seja, após a criação do par, a energia de repouso total deve ser igual a $3mc^2$, já que, como as três partículas estão em repouso no referencial S', a energia de repouso total neste referencial (e, portanto, em qualquer referencial) é igual à soma das energias de repouso das partículas individuais (o elétron original e o par elétron-pósitron). Assim, após a criação do par, devemos ter em S':

$$(3mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2$$

$$9(mc^2)^2 = (E_\gamma + mc^2)^2 - \left(\frac{E_\gamma c}{c}\right)^2$$

$$9(mc^2)^2 = E_\gamma^2 + 2E_\gamma mc^2 + (mc^2)^2 - E_\gamma^2$$

Os dois termos $E^2{}_\gamma$ se cancelam; dividindo os termos restantes por mc^2, obtemos:

$$E_\gamma = 4mc^2$$

Assim, no caso que estamos analisando, o fóton inicial precisa ter uma energia igual à energia de repouso de 4 elétrons para que seja criado um par de partículas com uma energia equivalente à energia de repouso de 2 elétrons. Por que é necessária essa energia "adicional"? Porque as três partículas do sistema final dividem entre si o momento E_γ/c do fóton inicial e, para isso, precisam ter uma energia cinética E_k dada por

$$E_k = E - 3mc^2 = (E_\gamma + mc^2) - 3mc^2$$
$$= 4mc^2 + mc^2 - 3mc^2 = 2mc^2$$

Em outras palavras, o fóton inicial deve fornecer os $2mc^2$ necessários para criar um par elétron-pósitron e os $2mc^2$ de energia cinética de que os dois elétrons e o pósitron necessitam para que o momento seja conservado. Para determinar a velocidade u com a qual as três partículas se movem no referencial S, basta usar a relação $u/c = pc/E$ (Equação 2-34):

$$u/c = \frac{\left(\frac{E_\gamma}{c} \times c\right)}{(E_\gamma + mc^2)} = \frac{4mc^2}{5mc^2} = 0{,}8$$

Quando a partícula inicial tem uma massa maior que a do elétron, a parcela da energia do fóton necessária para fornecer energia cinética às partículas do sistema final é reduzida e pode se tornar insignificante, como ilustra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 2-13 **Energia Mínima para a Produção de Pares** Qual é a energia mínima que um fóton deve ter para criar um par elétron-pósitron?

SOLUÇÃO

A energia inicial do fóton, E_γ, deve ser

$$E_\gamma = mc^2 + E_{k-} + mc^2 + E_{k+} + E_{kM}$$

em que mc^2 é a energia de repouso do elétron, E_{k-} e E_{k+} são as energias cinéticas do elétron e do pósitron, respectivamente, e E_{kM} é a energia cinética da partícula inicial de massa M. Como estamos interessados em determinar a energia mínima, vamos considerar o caso limite no qual o par é criado em repouso em S, isto é, vamos supor que $E_{k-} = E_{k+} = 0$ e, portanto, $p_- = p_+ = 0$. Nesse caso, de acordo com a lei de conservação do momento, devemos ter

$$p_{\text{inicial}} = E_\gamma/c = p_{\text{final}} = \frac{Mu}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

em que u é a velocidade final da partícula de massa M. Supondo que a massa M da partícula é muito maior que a massa do elétron, a velocidade final da partícula é muito menor que a velocidade da luz e a energia cinética $E_{kM} \approx Mu^2/2$ da partícula pode ser desprezada em comparação com a energia de repouso do par elétron-pósitron. Nesse caso, a energia mínima do fóton inicial é $2mc^2$, ou seja, a energia necessária para criar as massas de repouso do elétron e do pósitron.

Algumas Equações e Aproximações Úteis

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad \textbf{2-31}$$

Caso Relativístico Extremo O triângulo retângulo da Figura 2-13 é às vezes usado para facilitar a memorização da Equação 2-31. Se a energia de uma partícula é muito maior do que a massa de repouso mc^2, o segundo termo do lado direito da Equação 2-31 pode ser desprezado, o que resulta na aproximação

$$E \approx pc \quad \text{para} \quad E \gg mc^2 \qquad \textbf{2-36}$$

Para $E > 8mc^2$, o erro cometido é menor que 1%. A Equação 2-36 é exata no caso de partículas cuja massa de repouso é nula.



14

De acordo com a Equação 2-36, o momento de uma partícula de alta energia é simplesmente a energia total dividida por c. Assim, uma unidade conveniente para o momento é MeV/c. O momento de partículas dotadas de carga elétrica é muitas vezes determinado medindo o raio de curvatura da trajetória da partícula na presença de um campo magnético. Se a carga da partícula é q e a velocidade é **u**, a força exercida sobre a partícula por um campo magnético **B** é dada por

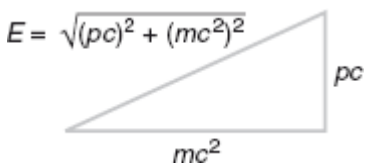


FIGURA 2-13 Triângulo usado para facilitar a memorização da relação entre energia, momento e massa de repouso na relatividade restrita. *Atenção*: Não se esqueça de que, das três grandezas, a única invariante é mc^2, a massa de repouso.

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$$

em que **F** é perpendicular ao plano formado por **u** e **B** e, portanto, perpendicular a **u**. Como a força magnética é sempre

perpendicular à velocidade, o trabalho executado sobre a partícula é nulo (o teorema do trabalho e energia permanece válido na mecânica relativística) e, portanto, a energia da partícula é constante. Segundo a Equação 2-10, se a energia E é constante, γ também é constante e, portanto,

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\mathbf{u})}{dt} = \gamma m \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

No caso particular em que $\mathbf{u} \perp \mathbf{B}$, a trajetória da partícula é uma circunferência de raio R e a aceleração centrípeta da partícula é dada por u^2/R. (Se $\mathbf{u}$ não é perpendicular a $\mathbf{B}$, a trajetória é helicoidal. Como a componente de $\mathbf{u}$ paralela a $\mathbf{B}$ não contribui para a força $\mathbf{F}$, vamos considerar apenas o movimento em duas dimensões.) Nesse caso, temos:

$$quB = m\gamma\left|\frac{du}{dt}\right| = m\gamma\left(\frac{u^2}{R}\right)$$

ou

$$BqR = m\gamma u = p \qquad \textbf{2-37}$$

A Equação 2-37 é igual à expressão clássica, exceto pela presença do fator γ. A Figura 2-14 mostra um gráfico de BqR/mu em função de u/c. É interessante reescrever a Equação 2-37 com o momento p expresso em MeV/c em vez de kg·m/s. O resultado é o seguinte:

$$p = 300\,BR\left(\frac{q}{e}\right) \qquad \textbf{2-38}$$

em que p está em MeV/c, B em tesla e R em metros.

EXEMPLO 2-14 **Elétron em um Campo Magnético** Qual é o raio aproximado da trajetória de um elétron de 30 MeV submetido a um campo magnético de 0,05 T (500 gauss)?

SOLUÇÃO

1. O raio da trajetória pode ser calculado fazendo $q = e$ na Equação 2-38:

$$R = \frac{p}{300\,B}$$

2. Nesta situação, a energia total E é muito maior que a energia de repouso mc^2:

$$E = 30\,\text{MeV} \gg mc^2 = 0{,}511\,\text{MeV}$$

3. Sendo assim, o valor de p pode ser determinado com o auxílio da Equação 2-36:

$$p \approx E/c = 30\,\text{MeV}/c$$

4. Substituindo este valor de p na Equação 2-38, obtemos:

$$R = \frac{30\,\text{MeV}/c}{(300)\,(0{,}05)}$$

$$= 2\,\text{m}$$

Observação: *Neste caso, o erro cometido usando a aproximação dada pela Equação 2-36 em lugar da solução exata, Equação 2-31, é apenas da ordem de 0,01%.*

Caso Não Relativístico Como as expressões não relativísticas para a energia, o momento e outras grandezas são bem mais simples que as expressões relativísticas, é importante, então, saber reconhecer em que circunstâncias essas expressões são suficientemente precisas. Quando $\gamma \to 1$, todas as expressões relativísticas tendem para as expressões clássicas. Na maioria dos casos, conhecemos a energia cinética ou a energia total do sistema; assim, a expressão mais conveniente para calcular o valor de γ, que pode ser obtida a partir da Equação 2-10, é a seguinte:

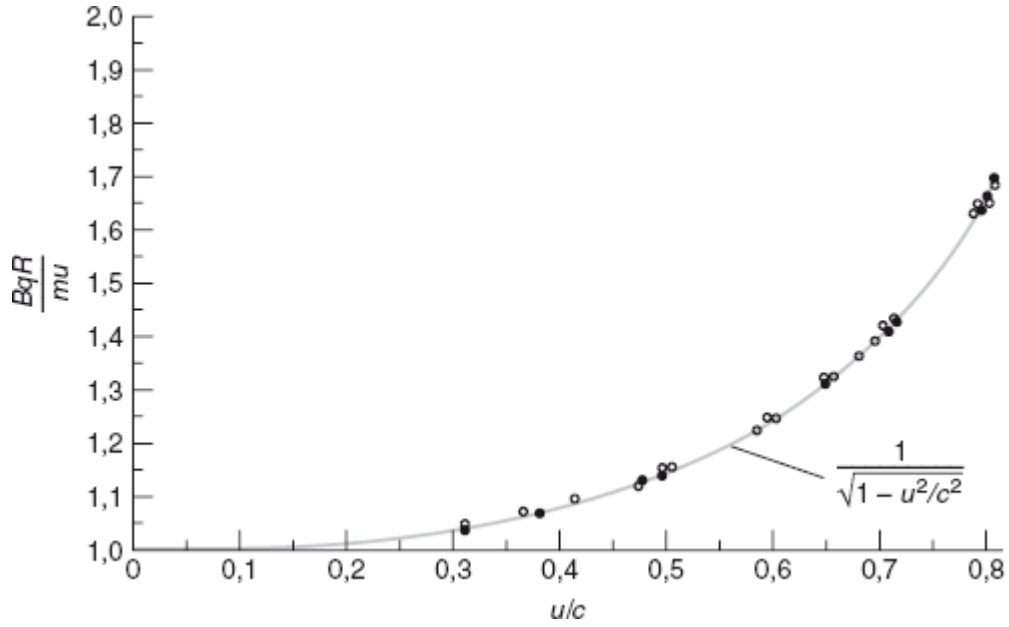


FIGURA 2-14 Gráfico de BqR/mu em função de u/c para uma partícula de carga q e massa m descrevendo uma órbita circular de raio R na presença de um campo magnético B. A concordância dos resultados experimentais com a curva prevista pela teoria da relatividade reforça a ideia de que a força é igual à taxa de variação com o tempo do momento relativístico. [Adaptado com permissão da editora de I. Kaplan, *Nuclear Physics*, 2d ed. (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.)]

$$\gamma - \frac{E}{mc^2} - 1 + \frac{E_k}{mc^2} \qquad \textbf{2-39}$$

Quando a energia cinética E_k é muito menor que a energia de repouso mc^2, $\gamma \approx 1$ e as equações não relativísticas podem ser usadas. Assim, por exemplo, a aproximação clássica $E_k \approx mu^2/2 = p^2/2m$ pode ser empregada em lugar da expressão relativística $E_k = (\gamma - 1)mc^2$. Podemos ter uma ideia da precisão dessas aproximações calculando a expansão binomial de γ, como na Seção 2-2, e examinando o maior termo que é *desprezado* na aproximação clássica. Temos:

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{u^4}{c^4} + \cdots$$

e

$$E_k = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{1}{2}mu^2 + \frac{3}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}mu^2\right)^2}{mc^2} + \cdots$$

Assim,

$$\frac{E_k - \frac{1}{2}mu^2}{E_k} \approx \frac{3}{2}\frac{E_k}{mc^2}$$

Se $E_k/mc^2 = 0{,}01$, por exemplo, o erro cometido ao usarmos a aproximação $E_k \approx mu^2/2$ é 1,5%, aproximadamente.

Quando a energia de uma partícula é muito pequena, a velocidade pode ser obtida a partir da equação clássica para a energia cinética, $E_k = mu^2/2$. Quando a energia da partícula é muito grande, a velocidade é praticamente igual à da luz e a seguinte aproximação pode ser usada (veja o Problema 2-28):

$$\frac{u}{c} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \quad \text{para} \quad \gamma \gg 1 \qquad \textbf{2-40}$$

Uma expressão exata para a velocidade de uma partícula em função da energia e momento foi obtida no Exemplo 2-10:

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} \qquad \textbf{2-41}$$

Naturalmente, esta expressão não pode ser usada simultaneamente com a aproximação $E \approx pc$.

EXEMPLO 2-15 **Partículas Diferentes com a Mesma Energia Cinética** Um elétron e um próton são submetidos a uma diferença de potencial de 10^7 V. Determine o valor de γ, do momento e da velocidade para cada partícula.

SOLUÇÃO

Como o valor absoluto da carga é o mesmo para as duas partículas, $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C, ambas adquirem uma energia cinética de 10 MeV (Equação 2-24). Este valor é muito maior que o da energia de repouso do elétron, 0,511 MeV, e muito menor que o da energia de repouso do próton, 938,3 MeV. Vamos calcular o momento e a velocidade de cada partícula usando a expressão exata; em seguida, usaremos a aproximação não relativística para calcular o momento e a velocidade do próton e a aproximação relativística extrema para calcular o momento e a velocidade do elétron.

1. Vamos começar pelo elétron. De acordo com a Equação 2-39, temos:

$$\gamma = 1 + \frac{E_k}{mc^2} = 1 + \frac{10\ \text{MeV}}{0{,}511\ \text{MeV}} = 20{,}57$$

Como a energia total é $E_k + mc^2 = 10{,}511$ MeV, temos, de acordo com a Equação 2-31:

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(10{,}511)^2 - (0{,}511)^2}$$
$$= 10{,}50\ \text{MeV}$$

O resultado exato é, portanto, $p = 10{,}50$ MeV/c. Usando a aproximação relativística extrema, válida para altas energias, obtemos $p \approx E/c = 10{,}51$ MeV, em boa concordância com o resultado exato. Usando a Equação 2-34, obtemos para a velocidade $u/c = pc/E = 10{,}50/10{,}511 = 0{,}999$. Por outro lado, usando a solução aproximada (Equação 2-40), obtemos:

$$\frac{u}{c} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{20{,}57}\right)^2 = 0{,}999$$

2. No caso do próton, a energia total é $E_k + mc^2 = 10$ MeV + 938,3 MeV = 948,3 MeV. De acordo com a Equação 2-39, $\gamma = 1 + E_k/mc^2 = 1 + 10/938{,}3 = 1{,}01$. Nesse caso, de acordo com a Equação 2-31, temos:

$$pc = \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} = \sqrt{(948{,}3)^2 - (938{,}3)^2}$$
$$p = 137{,}4\ \text{MeV}/c$$

Usando a aproximação não relativística, obtemos:

$$E_k \approx \frac{1}{2}mu^2 = \frac{(mu)^2}{2m} \approx \frac{p^2}{2m} = \frac{p^2c^2}{2mc^2}$$

ou

$$pc \approx \sqrt{2mc^2E_k} = \sqrt{(2)(938{,}3)(10)}$$
$$p = 137{,}0\ \text{MeV}/c$$

A velocidade pode ser determinada exatamente, através da Equação 2-34, ou aproximadamente, através da expressão não relativística $p = mu$. No primeiro caso, temos:

$$\frac{u}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{137{,}4}{948{,}3} = 0{,}1449$$

No segundo caso, temos:

$$\frac{u}{c} \approx \frac{pc}{mc^2} = \frac{137{,}0}{938{,}3} = 0{,}1460$$

2-5 Relatividade Geral

A generalização da teoria da relatividade para referenciais não inerciais, proposta por Einstein em 1916, ficou conhecida como *teoria da relatividade geral*. Trata-se da teoria que descreve a *interação gravitacional*, uma das quatro interações básicas da natureza. Assim, é fundamental para os estudos do Big Bang, dos buracos negros, dos quasars, do ciclo de vida das estrelas e da evolução do universo, tópicos que serão discutidos no Capítulo 13. A relatividade geral, a ideia de que *a gravidade é a geometria do nosso espaço-tempo quadridimensional*, é um das ideias mais elegantes e revolucionárias da física moderna. Trata-se de uma teoria muito mais difícil, do ponto de vista matemático, que a teoria da relatividade restrita, e existem muito menos situações nas quais pode ser testada. Mesmo assim, sua importância nas áreas da astrofísica e da cosmologia e a necessidade de levá-la em consideração no projeto de sistemas como o GPS, os relógios atômicos, as comunicações de sondas espaciais e futuros sistemas de precisão nos levaram a incluí-la nesta obra. Uma descrição completa da teoria geral, utilizando os métodos sofisticados da análise tensorial, seria impossível neste livro, de modo que nos limitaremos a discussões qualitativas ou, em alguns casos, semiquantitativas.

> Os equipamentos eletrônicos modernos exigem uma precisão tão grande que os efeitos da relatividade geral têm que ser levados em conta no projeto de sistemas como o GPS.

O que levou Einstein a formular uma teoria da relatividade geral que a relatividade restrita não foi um resultado experimental que necessitasse de explicação, mas o desejo de incluir na teoria da relatividade a descrição de *todos* os fenômenos naturais. Em 1907, Einstein percebeu que estava em condições de atingir este objetivo, com uma única e notável exceção: os fenômenos que envolviam a força da gravidade. A respeito dessa exceção, declarou:[13]

> Gostaria muito de compreender por que ela [a exceção] existe.

A explicação lhe ocorreu alguns anos mais tarde, no escritório de patentes de Berna, na Suíça, onde trabalhava. Nas palavras do próprio Einstein:[14]

> Foi então que me ocorreu a ideia mais fantástica de minha vida. Da mesma forma que o campo elétrico gerado pela indução magnética, o campo gravitacional possui uma existência apenas relativa. *Porque para um observador que está caindo do telhado de uma casa, não existe* (pelo menos em sua vizinhança imediata) *um campo gravitacional.* [Os grifos são de Einstein] . . . O observador tem, portanto, todo o direito de imaginar que se encontra "em repouso".

A partir dessa "ideia fantástica", Einstein chegou ao *princípio de equivalência*, que viria a se tornar o postulado básico da teoria da relatividade geral.

O Princípio de Equivalência

A teoria da teoria da relatividade geral se baseia no que podemos chamar de terceiro postulado de Einstein, o princípio de equivalência, que pode ser enunciado da seguinte forma:

> Um campo gravitacional homogêneo é equivalente, sob todos os aspectos, a um referencial uniformemente acelerado.

Este mesmo princípio aparece, de forma um pouco diferente, na mecânica newtoniana, graças à igualdade entre a massa gravitacional e a massa inercial. Em um campo gravitacional homogêneo, todos os corpos caem com a mesma aceleração g, independentemente da massa, já que a força gravitacional é diretamente proporcional à massa (gravitacional) e a aceleração é inversamente proporcional à massa (inercial) e, de acordo com todos os experimentos, a massa m em

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (m \text{ inicial})$$

e a massa m em

$$\mathbf{F} = \frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad (m \text{ gravitacional})$$

são exatamente iguais na mecânica clássica, embora a teoria clássica não ofereça nenhuma explicação para essa igualdade. Perto da superfície da Terra, por exemplo, $F_G = GMm/r^2 = m_{\text{grav}}g = m_{\text{inercial}}a = F_{\text{inercial}}$. Experimentos recentes mostram que a diferença entre m_{inercial} e m_{grav} é menor que 1 parte em 10^{12}.

Para compreender melhor o que significa o princípio de equivalência, imagine uma cápsula isolada no espaço, longe de qualquer concentração de matéria, submetida a uma aceleração constante e uniforme **a** (Figura 2-15*a*). Se um astronauta larga

um objeto no interior da cápsula, o objeto "cai" com uma aceleração $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$. Se o astronauta sobe em uma balança de mola, a balança indica um "peso" igual a $m\mathbf{a}$. Nenhum experimento mecânico realizado no *interior* da cápsula é capaz de revelar se a cápsula está sendo acelerada na ausência de um campo gravitacional ou se encontra-se em repouso (ou está se movendo com velocidade constante) na presença de um campo gravitacional $\mathbf{g} = -\mathbf{a}$, como na Figura 2-15*b*. Como a força centrípeta e a força de Coriolis, a força gravitacional é uma pseudoforça ou força aparente,[15] ou seja, uma força que pode ser anulada por uma mudança do sistema de coordenadas.

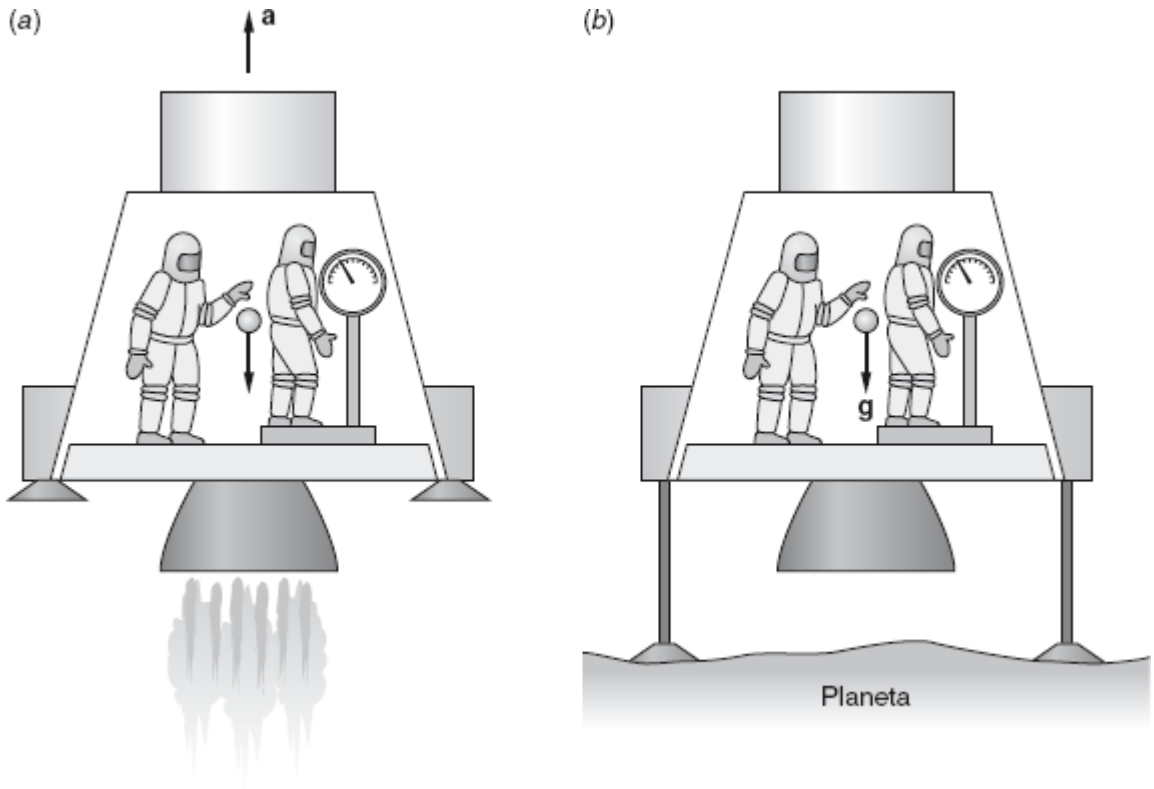


FIGURA 2-15 Os resultados de experimentos realizados em um referencial uniformemente acelerado (*a*) não podem ser distinguidos dos resultados de experimentos realizados na presença de um campo gravitacional (*b*) se a aceleração **a** e o campo gravitacional **g** são iguais em módulo e têm sentidos opostos.

Einstein postulou que o princípio de equivalência é válido, não só para os experimentos mecânicos, mas para *todos* os experimentos da física. Em outras palavras, Einstein supôs que não é possível determinar, através de experimentos, se um corpo está descrevendo um movimento uniformemente acelerado ou se encontra-se na presença de um campo gravitacional. Uma consequência direta do princípio de equivalência é o fato de que a igualdade $m_{\text{inercial}} = m_{\text{grav}}$ deixa de ser uma simples coincidência para ser inevitável. O princípio de equivalência estende o primeiro postulado de Einstein, o princípio da relatividade, a *todos* os referenciais, tanto os inerciais como os não inerciais (isto é, acelerados). Isso significa que é impossível determinar a aceleração absoluta de um referencial. A aceleração, como a velocidade, é uma grandeza relativa.

Exercício

6. No seu 76º (e último) aniversário, Einstein recebeu de presente um brinquedo que se propunha a demonstrar o princípio de equivalência (Figura 2-16). O objetivo é colocar a bola no recipiente usando um método que funcione sempre da primeira vez (em vez de sacudir o brinquedo ao acaso). O que o leitor faria? (*Nota*: Quando Einstein recebeu o presente, mostrou-se muito satisfeito e encontrou imediatamente a solução.)

Revisão do Intervalo Invariante

Na relatividade geral, o intervalo invariante Δs, definido na Equação 1-30, tem um papel mais básico que na relatividade especial, o que também acontece com o tempo próprio τ e o comprimento próprio L_p. Depois de escrever a Equação 1-30 na forma diferencial,

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad \textbf{2-42}$$

considere um próton dos raios cósmicos que passa pelo referencial inercial S de um laboratório com velocidade v. Em S', o

referencial de repouso do próton, $dx' = dy' = dz' = 0$ e $dt' = d\tau$, o tempo próprio; assim, $ds^2 = c^2 d\tau^2$. Como $dx = vdt$ e $dy = dz = 0$, a Equação 2-42 se reduz a

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = (c^2 - v^2) dt^2$$

ou

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} d\tau = \gamma d\tau$$

que é a versão diferencial da Equação 1-26, usada para calcular a dilatação dos tempos na relatividade restrita. A contração das distâncias e as equações da transformação de Lorentz também podem ser obtidas a partir do intervalo invariante.

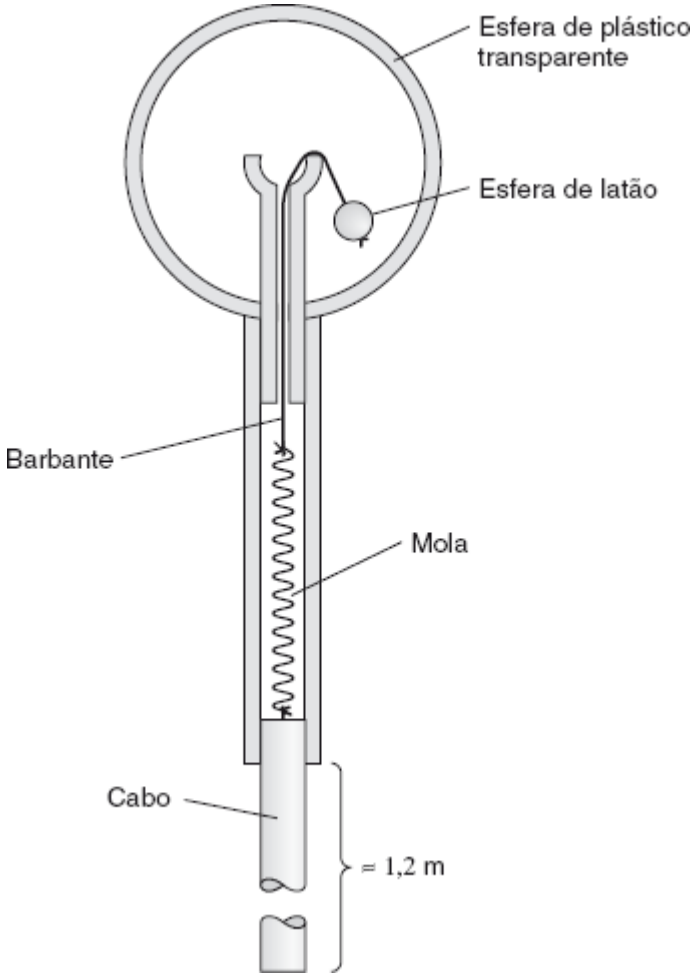


FIGURA 2-16 Brinquedo para demonstrar o princípio de equivalência, oferecido a Einstein por E. M. Rogers. O objetivo é colocar a bola no recipiente usando um método que funcione sempre da primeira vez. A mola não é suficientemente forte para puxar a bola e permanece parcialmente distendida, mesmo quando a bola está no recipiente. A esfera transparente, com 10 cm de diâmetro, não pode ser aberta. [*Fonte*: A.P. French, *Albert Einstein*: *A Centenary Volume*, Harvard University Press (Cambridge, MA,1979).]

Considere agora um CD ou DVD em movimento de rotação. A análise desse tipo mais familiar de sistema não inercial, no qual, em vez da gravidade, está presente outra força aparente, a força centrípeta, ajudará o leitor a compreender o movimento de partículas relativísticas em um campo gravitacional. Para analisar o sistema, é conveniente usar coordenadas cilíndricas em vez de coordenadas cartesianas (veja a Figura 2-17). Nesse caso, em um referencial inercial S, a Equação 2-42 se torna

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2) \qquad \textbf{2-43}$$

Se o disco está girando com velocidade angular constante ω em torno do eixo z do referencial S, um ponto fixo do disco tem coordenadas (r, φ, z) no referencial S e coordenadas (r', φ', z') em um referencial S' solidário com o disco, em que $r' = r$, $z' = z$ e $\varphi' = \varphi - \omega t$. Portanto, $dr' = dr$, $dz' = dz$ e $d\varphi' = d\varphi - \omega dt$. Substituindo na Equação 2-43, o intervalo invariante se torna (veja o Problema 2-32)

$$ds^2 = (c^2 - r^2\omega^2)dt^2 - (dr^2 + r^2 d\varphi'^2 + 2r^2\omega d\varphi' dt + dz^2) \quad \textbf{2-44}$$

O intervalo de tempo entre dois eventos que ocorrem em um ponto (r', φ', z') do disco, medido por um relógio situado no mesmo ponto, é, naturalmente, o intervalo de tempo próprio $d\tau$. Como, para esse tipo de evento, $dr' = d\varphi' = dz' = 0$, a Equação 2-44 se reduz a

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = (c^2 - r^2\omega^2)dt^2$$

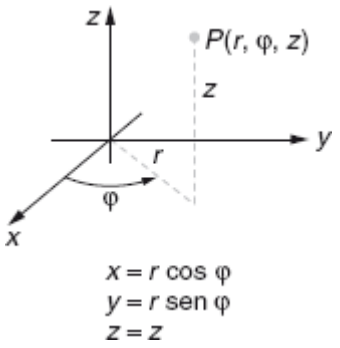


FIGURA 2-17 Relações geométricas entre coordenadas cilíndricas e cartesianas (retangulares).

o que nos dá

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} d\tau$$

Como $r\omega = v$ no referencial inercial S, esta relação é, mais uma vez, a equação de dilatação dos tempos; neste caso, porém, v (a velocidade tangencial) aumenta quando r aumenta, o que também acontece com a direção dos tempos.

Se montarmos uma rede de réguas no referencial S' com um relógio em cada interseção, como fizemos no sistema inercial ilustrado na Figura 1-13, os relógios de S' podem ser sincronizados da forma descrita na Seção 1-2. Entretanto, o termo misto $d\varphi' dt$ da Equação 2-44 constitui um problema, já que envolve uma variável espacial e uma variável temporal. Para resolver o problema, considere dois relógios com os mesmos valores de r' (= r) e de φ e diferentes valores de z' (= z). Como as velocidades tangenciais v dos dois relógios são iguais em S, os relógios podem ser sincronizados tanto para observadores em S como para observadores em S'. Da mesma forma, relógios com os mesmos valores de φ' e z' e valores ligeiramente diferentes de r' podem ser sincronizados para observadores nos dois referenciais. Considere agora dois relógios com os mesmos valores de r' (= r) e z' (= z) e diferentes valores de φ', como na Figura 2-18*a*. Os relógios em A' e B' estão sincronizados, já que pulsos luminosos emitidos simultaneamente nesses dois pontos atingem simultaneamente o ponto C', equidistante de A' e B'. Do ponto de vista do referencial inercial S, por outro lado, os dois relógios têm velocidades tangenciais diferentes. Podemos compreender melhor o que isso significa imaginando que os dois relógios estão separados por uma distância muito pequena (infinitesimal), como a Figura 2-18*b*, com o ponto C', mais uma vez, equidistante de A' e B'. Assim como o exemplo do trem proposto por Einstein e ilustrado na Figura 1-15, o relógio em A' está adiantado em relação ao relógio em B' e um observador do referencial S conclui que relógios em pontos com diferentes valores de φ' *não estão* sincronizados. Assim, dois relógios sincronizados em S' não estão sincronizados em S se tiverem valores diferentes de φ.

Graças aos resultados obtidos nas Seções 1-3 e 1-4, sabemos como calcular a diferença entre os tempos medidos pelos dois relógios. De acordo com a Equação 1-18, a diferença para o observador em S é $\gamma vx/c^2$, em que, no caso que estamos discutindo, $v = r\omega$ e a distância entre os relógios é $\gamma r d\varphi'$. Isso nos dá

$$\frac{\gamma v x}{c^2} \Rightarrow \frac{\gamma^2 r^2 \omega d\varphi'}{c^2} = \frac{1}{1 - r^2\omega^2/c^2} \frac{r^2\omega d\varphi'}{c^2} = \frac{r^2\omega d\varphi'}{c^2 - r^2\omega^2}$$

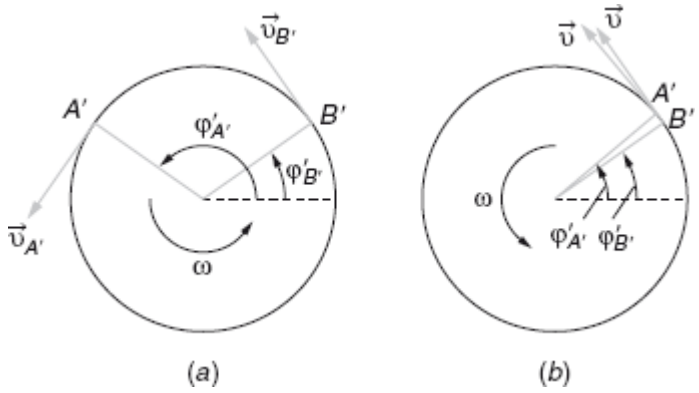


FIGURA 2-18 (*a*) Olhando no sentido negativo do eixo *z*, os relógios *A′* e *B′* estão em repouso no referencial *S′*, com diferentes valores de φ′. (*b*) Os relógios *A′* e *B′* estão separados por um ângulo infinitesimal. Nos dois casos, o ponto *C′* (que não aparece na figura) é equidistante de *A′* e *B′* e tem o mesmo valor de *r*.

Como o valor dado por esta última equação é a diferença entre o intervalo de tempo *dt′* medido pelos relógios sincronizados em *S′* e o intervalo de tempo *dt* medido por um observador no referencial inercial *S*, temos:

$$dt' = dt - \frac{r^2\omega d\varphi'}{c^2 - r^2\omega^2} \qquad \textbf{2-45}$$

Substituindo *dt*, dado pela Equação 2-45, na Equação 2-44, obtemos (veja o Problema 2-36):

$$ds^2 = (c^2 - r^2\omega^2)dt'^2 - \left(dr^2 + \frac{c^2r^2d\varphi'^2}{c^2 - r^2\omega^2} + dz^2\right) \qquad \textbf{2-46}$$

Depois dessa substituição, o intervalo, como na Equação 1-30, é a soma de uma parcela temporal com uma parcela espacial; não existem termos mistos. (Lembre-se de que, na demonstração acima, $r' = r$, $dr' = dr$, $z' = z$ e $dz' = dz$.)

A Equação 2-46 expressa o intervalo invariante em um referencial não inercial particular, um sistema que gira com velocidade angular constante ω em relação a um referencial inercial. No caso de um relógio em repouso no referencial *S′*, $ds^2 = (c^2 - r^2\omega^2)dt'^2$. Comparando os intervalos de tempo medidos neste relógio com os intervalos de tempo medidos por um relógio em repouso no referencial inercial *S*, $ds^2 = c^2d\tau^2$, temos:

$$c^2d\tau^2 = (c^2 - r^2\omega^2)dt'^2$$

$$d\tau = \sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}\,dt'$$

que descreve a dilatação dos tempos no sistema em rotação. Para determinar o que acontece com as medidas das distâncias em *S′*, considere uma régua em repouso em *S′*, situada a uma distância *r* do eixo de rotação e orientada paralelamente à velocidade tangencial *v* nesse ponto. Nesse caso, $ds^2 = -c^2r^2d\varphi'^2/(c^2 - r^2\omega^2)$, em que $rd\varphi' = L$ é o comprimento da régua. No caso de uma régua em repouso no referencial *S*, $ds^2 = -r^2d\varphi^2$, em que $rd\varphi = L_p$ é o comprimento próprio da régua. Assim, temos:

$$-r^2d\varphi^2 = -c^2r^2d\varphi'^2/(c^2 - r^2\omega^2)$$

$$rd\varphi = L_p = \frac{rd\varphi'}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}}$$

que descreve a contração das distâncias no sistema em rotação.

Algumas Previsões da Relatividade Geral

No seu primeiro artigo a respeito da relatividade geral, publicado em 1916, Einstein conseguiu explicar quantitativamente uma conhecida discrepância entre os valores experimental e teórico (calculado classicamente) do avanço do periélio da órbita de Mercúrio, que é de 43 segundos de arco por século. Foi o primeiro sucesso da nova teoria. Uma segunda previsão, o encurvamento da trajetória da luz em um campo gravitacional, parecia mais difícil de testar, por se tratar de um efeito muito pequeno. Entretanto, a previsão foi comprovada menos de cinco anos depois, quando Arthur Eddington mediu a deflexão sofrida pela luz de duas estrelas ao passar nas proximidades do Sol durante um eclipse total. A teoria também previa que a luz se propaga mais devagar e os relógios se atrasam na presença de um campo gravitacional, efeitos de considerável importância

para a determinação das distâncias astronômicas e da velocidade de expansão do universo. O efeito da gravidade sobre os relógios, conhecido como desvio gravitacional para o vermelho, foi comprovado por Pound e colaboradores em 1960, usando o campo gravitacional da Terra e uma técnica de medição de frequência extremamente sensível, baseada no efeito Mössbauer (veja o Capítulo 11). A redução da velocidade da luz foi observada em 1971 por Shapiro e colaboradores, usando sinais de radar refletidos em vários planetas. Dois desses testes experimentais da teoria da relatividade geral, o encurvamento da trajetória da luz e o desvio gravitacional para o vermelho, são discutidos nas Seções Exploratórias a seguir. O periélio da órbita de Mercúrio e o retardo da luz são discutidos em Leituras Suplementares disponíveis no site da LTC Editora para este livro na Internet. Muitas outras previsões da relatividade geral estão sendo investigadas atualmente. Duas delas, os buracos negros e as ondas gravitacionais, são discutidas brevemente nos parágrafos finais deste capítulo.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA

Deflexão da Luz em um Campo Gravitacional

Este efeito relativístico dá origem a lentes gravitacionais cósmicas que concentram a luz de galáxias extremamente distantes, aumentando consideravelmente a sensibilidade dos telescópios terrestres ou em órbita.

Com o advento da relatividade restrita, vários aspectos da lei da gravitação newtoniana, $F_G = GMm/r^2$, se tornaram questionáveis. De acordo com o conceito relativístico de equivalência entre massa e energia, por exemplo, as partículas com massa de repouso nula deveriam exibir propriedades como peso e inércia que, de acordo com a teoria clássica, seriam atributo exclusivo das partículas com massa. Segundo o princípio de equivalência, a própria luz estaria sujeita à influência de forças gravitacionais. Na verdade, a deflexão sofrida por um raio luminoso ao passar nas proximidades de um intenso campo gravitacional foi uma das primeiras previsões da teoria da relatividade geral a ser testada experimentalmente.

Para compreender por que a deflexão da luz é uma consequência natural do princípio de equivalência, considere a Figura 2-19, que mostra um raio luminoso atravessando um elevador acelerado. Os desenhos mostram posições sucessivas do elevador após intervalos de tempo iguais. Como a velocidade do elevador está aumentando, a distância que o elevador percorre a cada intervalo aumenta com o tempo. A trajetória do raio luminoso, do ponto de vista de um observador situado no interior do elevador, é, portanto, uma parábola. Segundo o princípio de correspondência, é impossível distinguir um elevador acelerado de um elevador que esteja se movendo com velocidade constante em um campo gravitacional constante. A única conclusão possível é que, da mesma forma que os objetos com massa, os raios de luz são acelerados por um campo gravitacional. Nas proximidades da Terra, por exemplo, a luz sofre uma aceleração de 9,8 m/s^2. O fenômeno é difícil de observar por causa da enorme velocidade da luz. Em uma distância de 3.000 km, que a luz leva 0,01 s para percorrer, o desvio sofrido por um raio luminoso é de apenas 0,5 mm. Einstein observou que a deflexão de um raio luminoso em um campo gravitacional poderia ser observada se a luz produzida por uma estrela distante passasse nas proximidades do Sol.[16] Para determinar o ângulo de deflexão, escrevemos o intervalo no espaço-tempo (Equação 2-42) em coordenadas polares:

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\,d\varphi^2) \qquad \textbf{2-47}$$

Como a deflexão da luz acontece em um plano, a Equação 2-47 se torna

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dr^2 + r^2d\theta^2) \qquad \textbf{2-48}$$

Einstein mostrou que a Equação 2-48 é modificada na presença de uma massa M (esférica, sem rotação), tornando-se

$$ds^2 = \gamma(r)^2c^2dt^2 - dr^2/\gamma(r)^2 - r^2d\theta^2 \qquad \textbf{2-49}$$

em que $\gamma(r) = (1 - 2GM/c^2r)^{1/2}$, G é a constante gravitacional universal e r é a distância entre o raio luminoso e o centro da massa M. O fator $\gamma(r)$ é análogo ao γ da relatividade restrita e pode ser considerado uma correção associada à *dilatação gravitacional dos tempos* (o primeiro termo do lado direito da Equação 2-49) e à *contração gravitacional das distâncias* (o segundo termo).

Esta situação está representada na Figura 2-20, que mostra a luz de uma estrela distante passando nas proximidades do Sol. A deflexão gravitacional da luz (de massa $\gamma m = E/c^2$) pode ser interpretada como um fenômeno de difração. A velocidade da luz é reduzida para $\gamma(r)c$ nas proximidades da massa M, já que $\gamma(r) < 1$ (veja a Equação 2-49); isso faz com que as frentes de onda (e, portanto, a trajetória da luz) se desviem em direção a M. Trata-se de um fenômeno análogo à deflexão da luz das estrelas em direção à superfície da Terra em consequência da variação da densidade (e, portanto, do índice de refração) da atmosfera. Integrando a Equação 2-49 ao longo da trajetória do raio luminoso (lembre-se de que $ds = 0$ no caso da luz), é possível mostrar que o ângulo de deflexão é dado por[17]

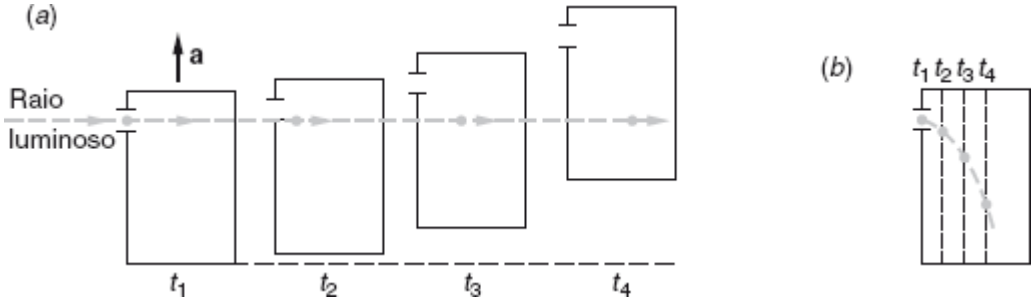


FIGURA 2-19 (*a*) Raio luminoso atravessando um elevador uniformemente acelerado. Os desenhos mostram posições sucessivas do elevador após intervalos de tempo iguais t_1, t_2, t_3 e t_4. (*b*) No referencial do elevador, a luz descreve uma trajetória parabólica, como a de uma bola lançada horizontalmente. Tanto em (*a*) como em (*b*), os deslocamentos verticais foram grandemente exagerados.

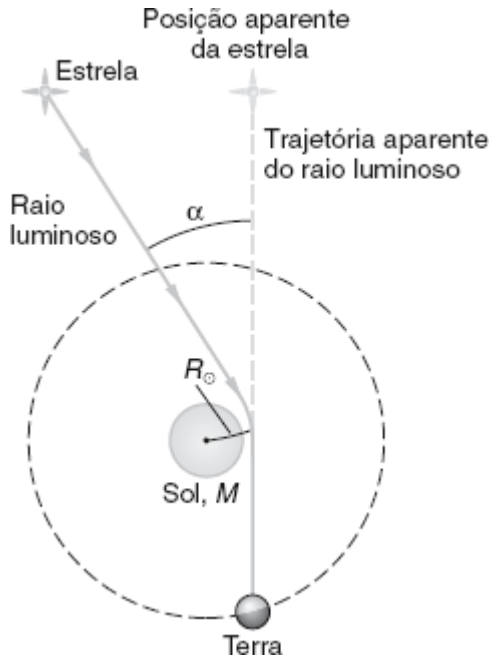


FIGURA 2-20 Deflexão (grandemente exagerada) da luz proveniente de uma estrela devido à atração gravitacional do Sol.

$$\alpha = 4GM/c^2R \qquad \textbf{2-50}$$

em que R é a distância de máxima aproximação entre o raio luminoso e o centro de M. Para um raio tangente à superfície do Sol, $R = R_\odot = 6{,}96 \times 10^8$ m (o raio do Sol) e $M = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg (a massa do Sol). Substituindo esses valores na Equação 2-44, obtemos $\alpha = 1{,}75$ segundo de arco.[18]

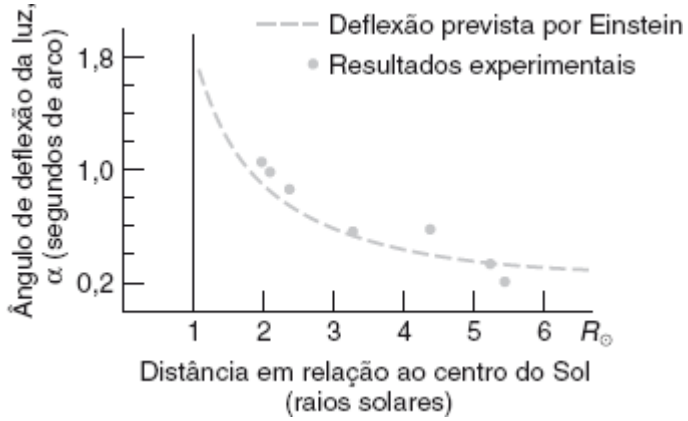


FIGURA 2-21 Segundo a teoria da relatividade geral, o ângulo de deflexão α varia com a distância de máxima aproximação $R_\odot$ de acordo com a Equação 2-50. A figura mostra uma comparação entre a previsão teórica (linha tracejada) e os dados experimentais para 7 das 13 estrelas investigadas pelas expedições de Eddington. A concordância é evidente.

Em circunstâncias normais, o brilho do Sol impede que os astrônomos observem as estrelas próximas; assim, as previsões de Einstein só podiam ser testadas durante um eclipse total. O valor de α foi calculado pelo cientista em 1915; em 1919, Eddington[19] organizou expedições a dois locais que ficavam sobre a linha de totalidade de um eclipse solar. As duas expedições conseguiram medir o valor de Δ para várias estrelas e comprovar a previsão teórica de que o ângulo de deflexão varia inversamente com R . Os

valores experimentais de Δ para raios tangentes à superfície do Sol foram os seguintes:

Em Sobral (América do Sul): α = 1,98 ± 0,12 segundo de arco
Na Ilha do Príncipe (África): α = 1,61 ± 0,30 segundo de arco

A diferença entre a média dos dois valores acima e o valor previsto por Einstein é menor que 2%. A Figura 2-19 mostra uma comparação entre a variação experimental de α com $R_\odot$ e a variação teórica (Equação 2-50). (Einstein ficou sabendo que os astrônomos tinham conseguido realizar as observações através de um telegrama enviado por H. A. Lorentz.) Desde então, muitas medidas de α foram realizadas durante eclipses totais do Sol. Com a invenção dos radiotelescópios, que não são ofuscados pela luz solar e, portanto, não dependem de um eclipse total, tornou-se possível realizar um número ainda maior de testes. De acordo com os dados mais recentes, a diferença entre as deflexões observadas e as previstas pela teoria da relatividade geral é menor que 0,1%.

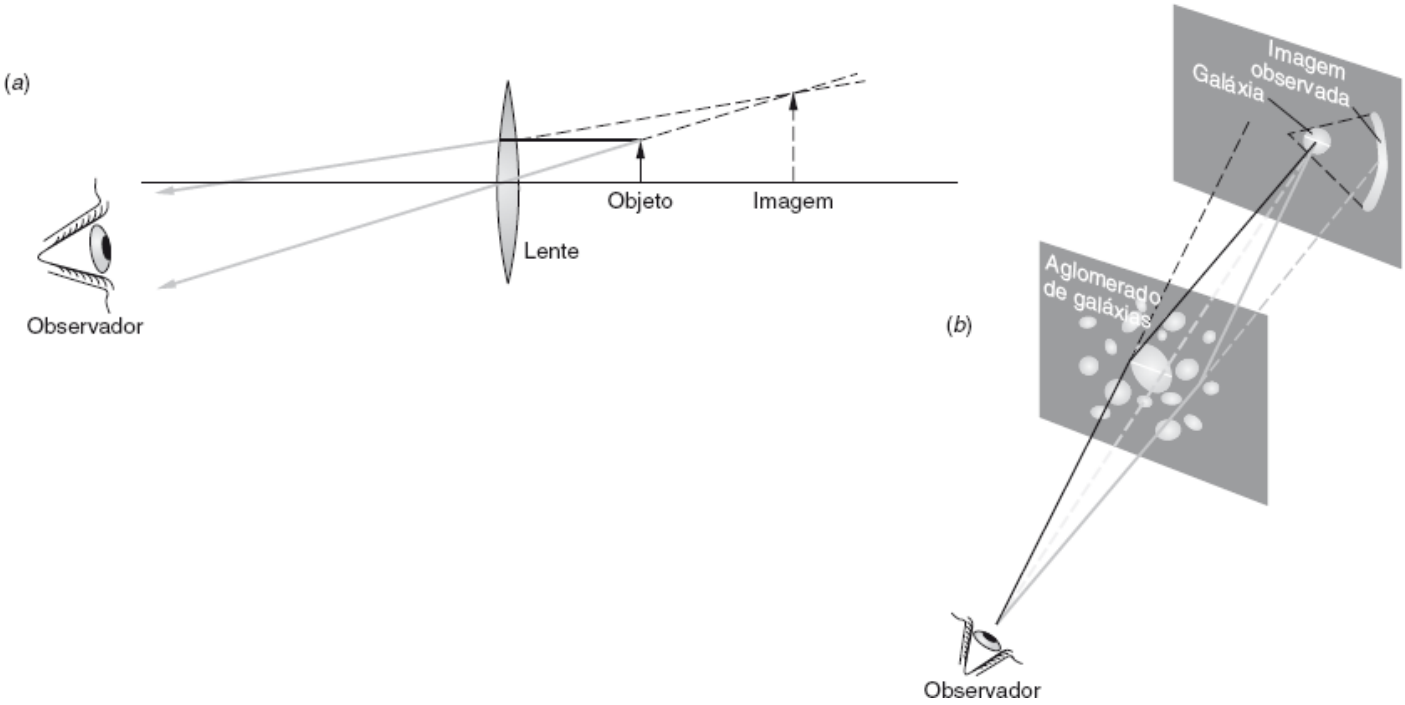
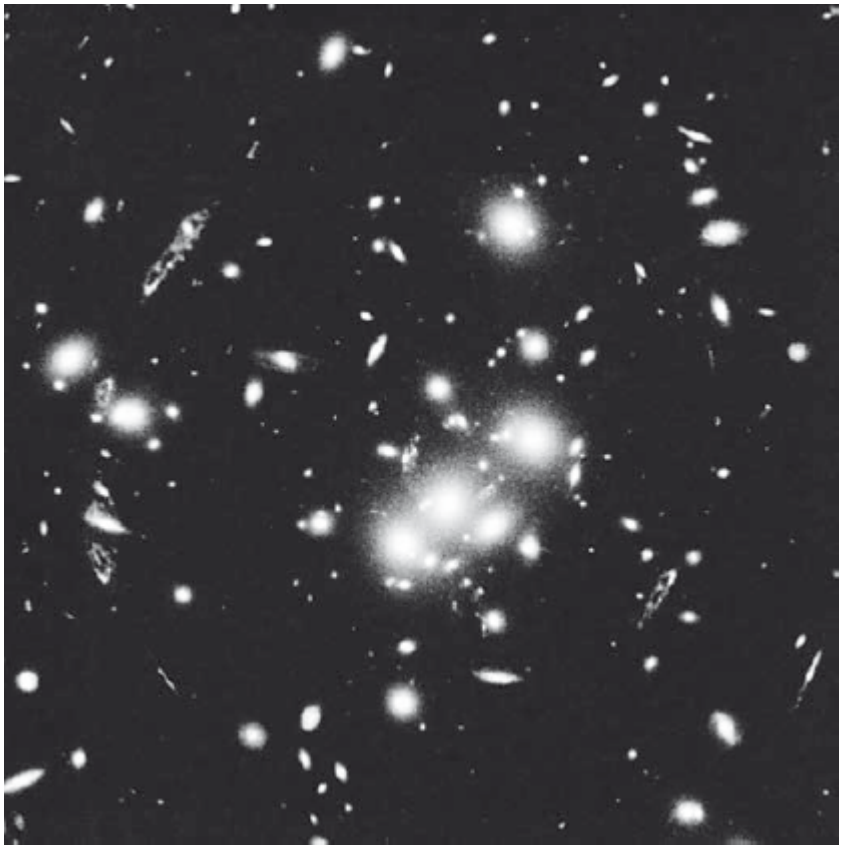


FIGURA 2-22 (*a*) Uma lente comum desvia a luz, fazendo com que muitos raios convirjam para o olho do observador. A origem aparente desses raios é a imagem formada pela lente. Note que a imagem não é do mesmo tamanho que o objeto (no caso, sofre uma ampliação) e que, embora não seja mostrado na figura, dependendo do tipo de lente, a forma da imagem pode ser diferente da forma do objeto. (*b*) Uma lente gravitacional tem o mesmo efeito que uma lente comum sobre a luz de galáxias distantes observada na Terra.

A deflexão gravitacional da luz está sendo usada pelos astrônomos modernos, através do fenômeno das *lentes gravitacionais*, para estudar as galáxias e outras grandes concentrações de matéria. Ao passar por uma galáxia ou aglomerado de galáxias, a luz proveniente de estrelas e galáxias mais distantes é refratada, da mesma forma como a luz proveniente de um objeto é refratada por uma lente comum. Como no caso das lentes comuns, o resultado é a formação de uma imagem, que pode ser uma réplica aumentada e/ou distorcida do objeto original. A formação de uma imagem por uma lente comum aparece, de forma esquemática, na Figura 2-22*a*, enquanto a Figura 2-22*b* ilustra o fenômeno análogo para uma lente gravitacional. A fotografia que acompanha a ilustração mostra as imagens de várias galáxias distantes, transformadas em arcos pelo efeito gravitacional do aglomerado central de galáxias. A primeira observação comprovada de imagens produzidas por lentes gravitacionais foi realizada em 1979 por D. Walsh e colaboradores, que fotografaram uma imagem dupla do quasar QSO 0957. Desde então, os astrônomos descobriram muitas imagens do mesmo tipo. O estudo das imagens formadas por lentes gravitacionais constitui hoje em dia um campo fértil de pesquisas (veja o Capítulo 13).



As imagens de galáxias distantes são transformadas em arcos pelo grande aglomerado de galáxias Abell 2218, cujo enorme campo gravitacional, agindo como uma lente, amplia, reforça e distorce as imagens. Abell 2218 está a cerca de 2 bilhões de anos-luz de distância da Terra. Os arcos nesta fotografia, tirada pelo Telescópio Espacial Hubble em janeiro de 2010, são imagens de galáxias situadas entre 10 e 20 bilhões de anos-luz de distância da Terra. [*NASA*, *A. Fruchter*; *ERO Team*.]

SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Desvio Gravitacional para o Vermelho

Uma segunda previsão da relatividade geral diz respeito à velocidade dos relógios e à frequência da luz em um campo gravitacional. Como exemplo concreto para ilustrar o desvio gravitacional para o vermelho associado ao princípio de equivalência, considere duas fontes luminosas iguais, A e A', e dois detectores iguais, B e B', situados em espaçonaves iguais, S e S' (Figura 2-23). A espaçonave S da Figura 2-23*a* está em repouso no campo gravitacional de um planeta; a aceleração local da gravidade é $\mathbf{g}$. Não existe nenhuma massa nas proximidades da espaçonave S' da Figura 2-23*b*. No instante $t = 0$, S' recebe uma aceleração constante $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$; ao mesmo tempo, um átomo da fonte A' emite um pulso luminoso de frequência f_0. Durante o intervalo de tempo t ($= h/c$) que a luz leva para percorrer a distância entre A' e B', B' atinge uma velocidade $v = at = gh/c$; em consequência, a frequência f medida pelo detector B' sofre um *desvio para o vermelho* que, para $v << c$, é dado por $(f_0 - f)/f_0 \approx \beta$ (veja a Seção 1-5). Assim,

$$(f_0 - f)/f_0 = \Delta f/f \approx \beta = v/c = gh/c^2 \qquad \textbf{2-51}$$

Observe que o lado direito da Equação 2-51 é igual ao potencial gravitacional (ou seja, a energia potencial gravitacional por unidade de massa) $\Delta\phi = gh$ entre A e B, dividido por c^2. De acordo com o princípio de equivalência, a frequência medida pelo detector B também deve ser igual a f, embora S esteja em repouso e, portanto, o desvio não possa ser atribuído ao efeito Doppler! Como o átomo que produziu o pulso luminoso em A pode ser considerado um relógio, e como nenhum "ciclo" de oscilação é perdido no percurso da luz de A até B, o observador em B deve concluir que o relógio em A está atrasado em relação a um relógio igual (ou um átomo igual) situado em B. Como a fonte A se encontra em um potencial gravitacional menor, o observador chega à conclusão de que *quanto menor o potencial gravitacional*, *menor a velocidade de um relógio*. Este desvio da velocidade dos relógios no sentido de frequências mais baixas (e maiores comprimentos de onda), causado por campos gravitacionais, é conhecido como *desvio gravitacional para o vermelho*.

No caso geral de uma massa M esférica e sem rotação, a variação de potencial gravitacional entre um ponto situado a uma distância R do centro e um ponto situado no infinito é dada por

$$\Delta\phi = \int_R^\infty \frac{GM}{r^2} dr = GM(-1/r)\Big|_R^\infty = \frac{GM}{R} \qquad \textbf{2-52}$$

e o desvio de frequência é dado por

$$\Delta f/f_0 = (f_0 - f)/f_0 = GM/c^2R$$

ou

$$f/f_0 = 1 - GM/c^2R \quad \text{(desvio gravitacional para o vermelho)} \qquad \textbf{2-53}$$

Se o raio luminoso está se propagando no sentido oposto, isto é, de um potencial gravitacional maior para um potencial gravitacional menor, os limites de integração da Equação 2-52 devem ser invertidos e a Equação 2-53 se torna

$$f/f_0 = 1 + GM/c^2R \quad \text{(desvio gravitacional para o azul)} \qquad \textbf{2-54}$$

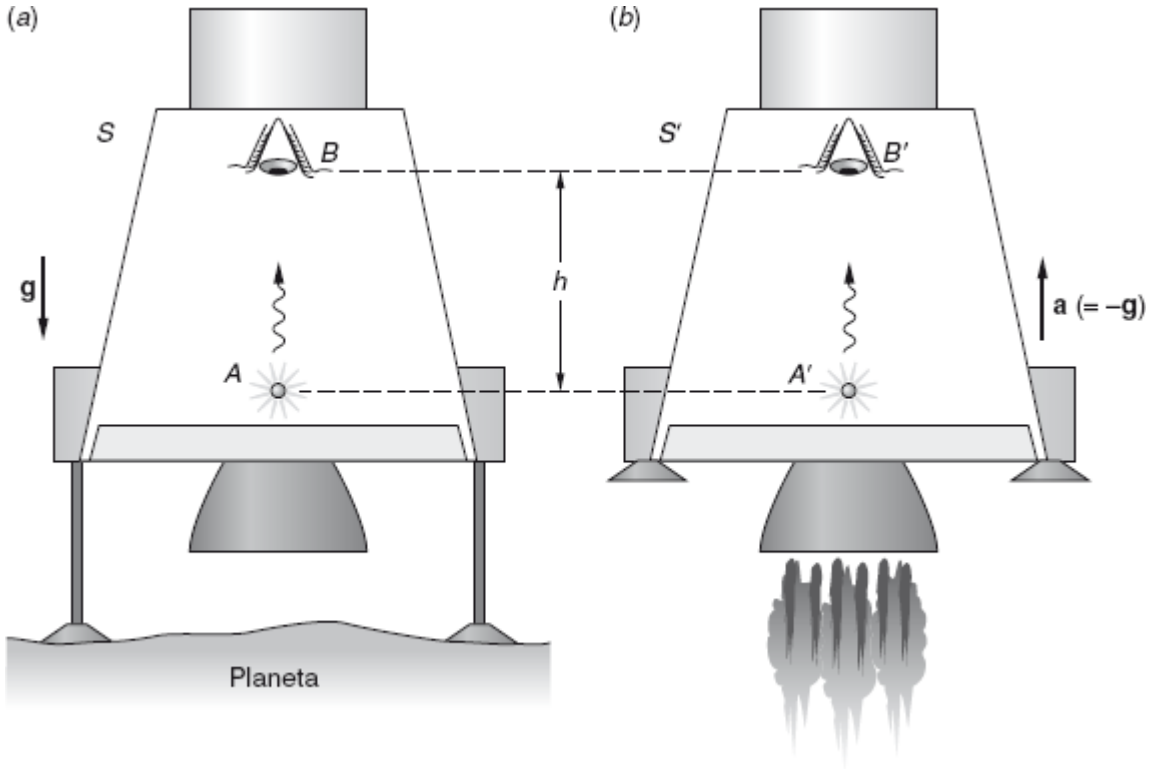


FIGURA 2-23 (*a*) O sistema *S* está em repouso no campo gravitacional de um planeta. (*b*) A espaçonave *S*′, longe de qualquer massa, recebe uma aceleração $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$.

Os efeitos da gravitação sobre a frequência da luz das estrelas são muito difíceis de detectar porque um raio luminoso está sujeito a várias mudanças durante o percurso. Assim, por exemplo, a luz pode sofrer um desvio gravitacional para o vermelho ao deixar a estrela e um desvio gravitacional para o azul ao se aproximar da Terra. Além disso, o desvio de frequência pode ter causas não gravitacionais, como o efeito Doppler. O desvio para o azul causado pelo campo gravitacional da Terra é tão pequeno que não pode ser medido com os equipamentos atuais; por outro lado, o desvio para o vermelho produzido pelo efeito Doppler associado à expansão geral do universo é normalmente muito maior que os efeitos gravitacionais e, juntamente com o alargamento térmico das linhas espectrais causado pelas atmosferas estelares, leva a grandes imprecisões nas medidas. Assim, é notável que a previsão relativística da Equação 2-54 tenha sido testada com sucesso no campo gravitacional relativamente pequeno da Terra. R.V. Pound e colaboradores,[20] primeiro em 1960 e depois em 1964, com maior precisão, mediram o desvio de frequência dos raios gama de 14,4 keV emitidos por átomos de ^{57}Fe enquanto caíam de uma distância *h* de apenas 22,5 m. A diferença entre os resultados que obtiveram usando o efeito Mössbauer, uma técnica extremamente precisa para medir desvios de frequência descoberta em 1958, e o resultado previsto pela teoria da relatividade geral, $\Delta f/f_0 = gh/c^2 = 2{,}45 \times 10^{-15}$, foi menor que 1%. Os resultados expressos pelas Equações 2-53 e 2-54 foram submetidos a vários testes experimentais usando relógios atômicos transportados a bordo de aeronaves (veja a Seção 1-4). Em 1980, R. F. C. Vessot e colaboradores empregaram um transmissor de micro-ondas extremamente preciso transportado a uma distância de 10.000 km da Terra por uma sonda espacial. Esses experimentos confirmaram as previsões relativísticas, o último com uma precisão de uma parte em 14.000. Mais recentemente, em 2010, J. C.-W. Chou e colaboradores, do National Institute of Science and Technology (NIST), usaram relógios óticos de precisão para medir uma pequena diferença na frequência de uma transição do íon

de ^{27}Al para dois relógios cuja diferença de altitude era de apenas 33 cm.

Exercício

7. A frequência f da Equação 2-53 se anula para um certo valor de M/R. Qual é o valor correspondente de R para uma estrela com a massa do Sol? Discuta o significado físico deste resultado.



Leitura Suplementar

O fato de que a teoria da gravitação de Newton não era capaz de explicar a velocidade de rotação do eixo maior da órbita de Mercúrio em torno do Sol era um grande problema para os cientistas, pois parecia mostrar que a teoria não estava totalmente correta. O primeiro artigo de Einstein sobre relatividade geral, *O Periélio da Órbita de Mercúrio*, explicou os valores observados, preparando o terreno para que a relatividade geral suplantasse a velha teoria newtoniana. Uma descrição completa da explicação relativística está disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet. Veja também as Equações 2-55 a 2-57, a Figura 2-24 e a Tabela 2-2.



Leitura Suplementar

De acordo com a teoria da relatividade geral, as partículas com massa de repouso nula, os fótons, também estão sujeitas à interação gravitacional, o que não acontecia na teoria de Newton. Uma das consequências deste fato é o *Retardo da Luz em um Campo Gravitacional*. A previsão do fenômeno e sua observação são discutidas qualitativamente no site da LTC Editora para este livro na Internet. Veja também a Equação 2-58 e as Figuras 2-25 e 2-26.

Buracos Negros A existência dos buracos negros foi prevista por Oppenheimer e Snyder em 1939.[24] De acordo com a teoria da relatividade geral, se a densidade de um corpo é suficientemente elevada, a atração gravitacional se torna tão forte que nada pode escapar, nem mesmo a luz e outras formas de radiação eletromagnética; é como se o próprio espaço estivesse encolhendo mais depressa do que a luz consegue se propagar. Uma propriedade notável de um corpo desse tipo é que nada do que acontece no interior pode ser comunicado ao resto do universo. Isso ocorre quando o potencial gravitacional na superfície da massa M se torna tão grande que o desvio gravitacional para o vermelho faz com que a frequência da radiação emitida pela superfície se anule. De acordo com a Equação 2-53, a frequência é nula quando o raio de um objeto esférico de massa M tem o valor crítico $R_G = GM/c^2$. Este resultado é uma consequência do princípio de equivalência, mas a Equação 2-53 é uma aproximação válida apenas para $v << c$. Um cálculo mais preciso do valor crítico de R, denominado *raio de Schwartzschild*, leva a um valor duas vezes maior:

$$R_G = \frac{2MG}{c^2} \qquad \textbf{2-59}$$

Para que um corpo com uma massa igual à do Sol seja um buraco negro, o raio não pode ser maior que aproximadamente 3 km. Vários possíveis buracos negros foram apontados pelos cientistas nos últimos anos, um deles no centro da Via Láctea. (Veja o Capítulo 13.)

Um fato histórico interessante é que a Equação 2-59 foi proposta pelo físico francês do século XIX, Pierre Laplace, muitos anos antes que os cientistas começassem a falar de relatividade geral e de buracos negros, com base na velocidade de escape v_e de um corpo a partir da superfície de um planeta de raio r e massa M. Usando apenas a mecânica newtoniana e igualando a energia cinética do corpo ao potencial gravitacional na superfície do planeta, é fácil mostrar que a velocidade de escape é dada por

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Fazendo $v_e = c$, obtemos a Equação 2-59. Laplace chegou ao resultado correto depois de cometer dois erros triviais, que, por acaso, se cancelavam!



FIGURA 2-27 Os cientistas acreditam que sistemas binários constituídos por estrelas de nêutrons ou buracos negros prestes a se fundir podem emitir ondas gravitacionais suficientemente intensas para serem detectadas na Terra. A amplitude das ondas diminui com a distância porque as ondas se distribuem por uma região maior do espaço e porque as ondas mais afastadas da fonte foram emitidas em uma ocasião em que a emissão era mais fraca. [*Cortesia de Patrick Brady*.]

Ondas Gravitacionais A formulação da relatividade geral proposta por Einstein em 1916 previa explicitamente a existência de ondas gravitacionais. De acordo com Einstein, do mesmo modo como cargas elétricas aceleradas produzem campos eletromagnéticos oscilantes, ou seja, ondas eletromagnéticas, massas aceleradas devem criar campos gravitacionais oscilantes, ou seja, *ondas gravitacionais*, que se propagam com a velocidade da luz. As ondas gravitacionais são distorções do espaço-tempo que se propagam no espaço. A Figura 2-27 mostra, de forma esquemática, as ondas gravitacionais emitidas por um sistema constituído por dois buracos negros prestes a se fundir.

Até o momento, existem apenas provas indiretas da existência de ondas gravitacionais. Em 1974, R.A. Hulse e J.H. Taylor[25] descobriram o primeiro pulsar binário, ou seja, um par de estrelas de nêutrons em órbita mútua, uma das quais estava emitindo pulsos de radiação eletromagnética. Medidas extremamente precisas mostraram que a redução gradual do período orbital dessas estrelas estava de acordo com a previsão da relatividade geral para a perda de energia devido à emissão de ondas gravitacionais.

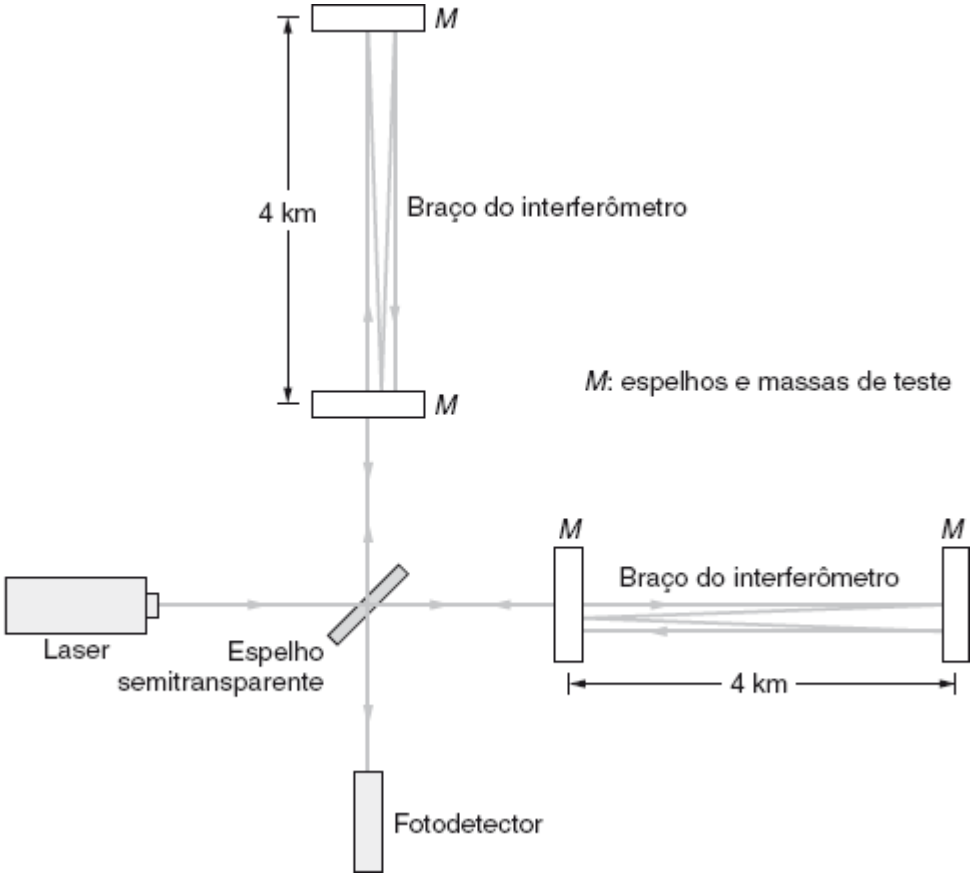
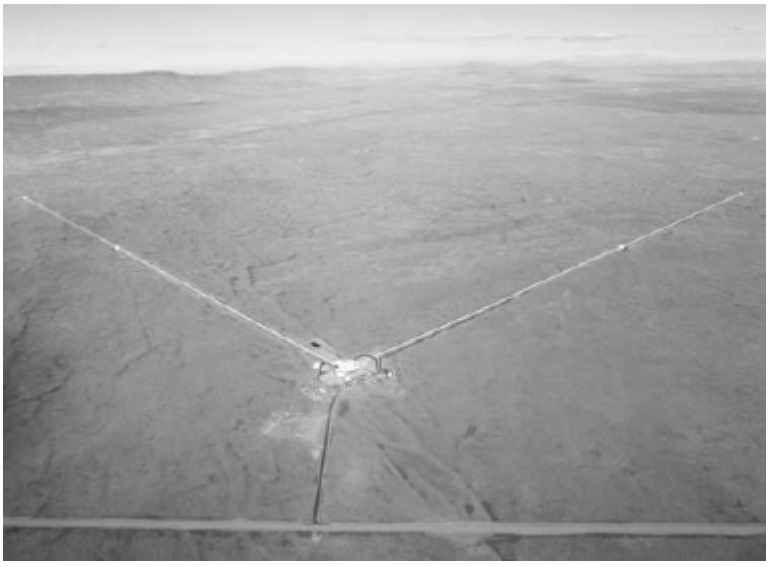


FIGURA 2-28 Os detectores LIGO são interferômetros de Michelson de braços iguais. Os espelhos, de 25 cm de diâmetro e 10 cm de espessura e isolados dos movimentos da Terra, são também as massas de teste do detector de ondas gravitacionais. A chegada de uma onda gravitacional faria o comprimento dos braços variar de uma distância equivalente a um milésimo do diâmetro de um próton, produzindo um sinal luminoso no fotodetector.

No momento estão sendo feitas tentativas em várias partes do mundo para detectar *diretamente* as ondas gravitacionais que

chegam à Terra. Um dos instrumentos mais promissores é o LIGO (*L*aser *I*nterferometer *G*ravitational-Wave *O*bservatory, ou seja, Observatório de Ondas Gravitacionais com um Interferômetro Laser), um par de interferômetros de Michelson, um situado no Livingston Observatory, no estado americano de Louisiana, e outro no Hanford Observatory, no estado de Washington, a 3.002 km de distância, trabalhando em conjunto. A Figura 2-28 mostra um dos interferômetros LIGO. Cada braço tem 4 km de comprimento. Os dois raios luminosos são refletidos repetidamente nas cavidades, fazendo 75 percursos de ida e volta em cada braço antes de se recombinarem no fotodetector, o que aumenta o tamanho efetivo dos braços para cerca de 400 km. (O Observatório de Hanford também dispõe de um instrumento menor, mas igualmente sensível.) A chegada de uma onda gravitacional faria o comprimento de um braço aumentar de uma distância equivalente a um milésimo do diâmetro de um próton e o comprimento do outro braço diminuir do mesmo valor minúsculo! Essa pequena diferença de comprimento seria suficiente para mudar a diferença de fase entre os dois raios luminosos e produzir um sinal no detector. Para que um sinal seja interpretado como uma onda gravitacional, será preciso que os dois interferômetros registrem o evento com um intervalo de 10 ms, já que este é o tempo que uma onda gravitacional, propagando-se à velocidade da luz, levaria para transpor a distância que separa os dois laboratórios. Terminada a fase de ajustes, que levou dois anos, o LIGO entrou em operação em meados de 2002. Em 2008, o LIGO havia completado cinco ciclos de coleta de dados, sendo que o quinto (S5) envolveu operações em conjunto com o GEO 600, um interferômetro nas proximidades de Hannover, na Alemanha, e o interferômetro Virgo, instalado em Cascina, na Itália. Embora esses instrumentos sejam, de longe, os equipamentos científicos mais sensíveis jamais construídos, até agora nenhuma onda gravitacional foi detectada.[26] Depois do sexto ciclo (S6), iniciado em julho de 2009 e encerrado em outubro de 2010, os interferômetros do LIGO foram desligados para o início da construção do Advanced LIGO. Os novos instrumentos aumentarão de 10 vezes a sensibilidade do instrumento e de 1000 vezes o seu alcance, como mostra a Figura 2-29. O Advanced LIGO deverá entrar em operação em 2014.



Vista aérea do interferômetro LIGO, projetado para detectar ondas gravitacionais, situado perto de Hanford, no estado americano de Washington. Os dois braços têm 4 km de comprimento. [*CalTech/LIGO*]

Esta aplicação do interferômetro de Michelson talvez permita a detecção direta das ondas gravitacionais.

Ainda temos muito a aprender quanto às previsões e consequências da teoria da relatividade geral, não apenas no que diz respeito a fenômenos como buracos negros e ondas gravitacionais, mas também, por exemplo, acerca da gravidade e do espaço-tempo nos primórdios do universo, quando todas as forças eram unificadas e a densidade de matéria e energia era extremamente elevada. Essas e outras questões fascinantes serão discutidas mais de perto nos capítulos que tratam da física das partículas elementares (Capítulo 12) e de astrofísica e cosmologia (Capítulo 13), campos unidos pela teoria da relatividade geral, talvez a maior das realizações científicas de Einstein.

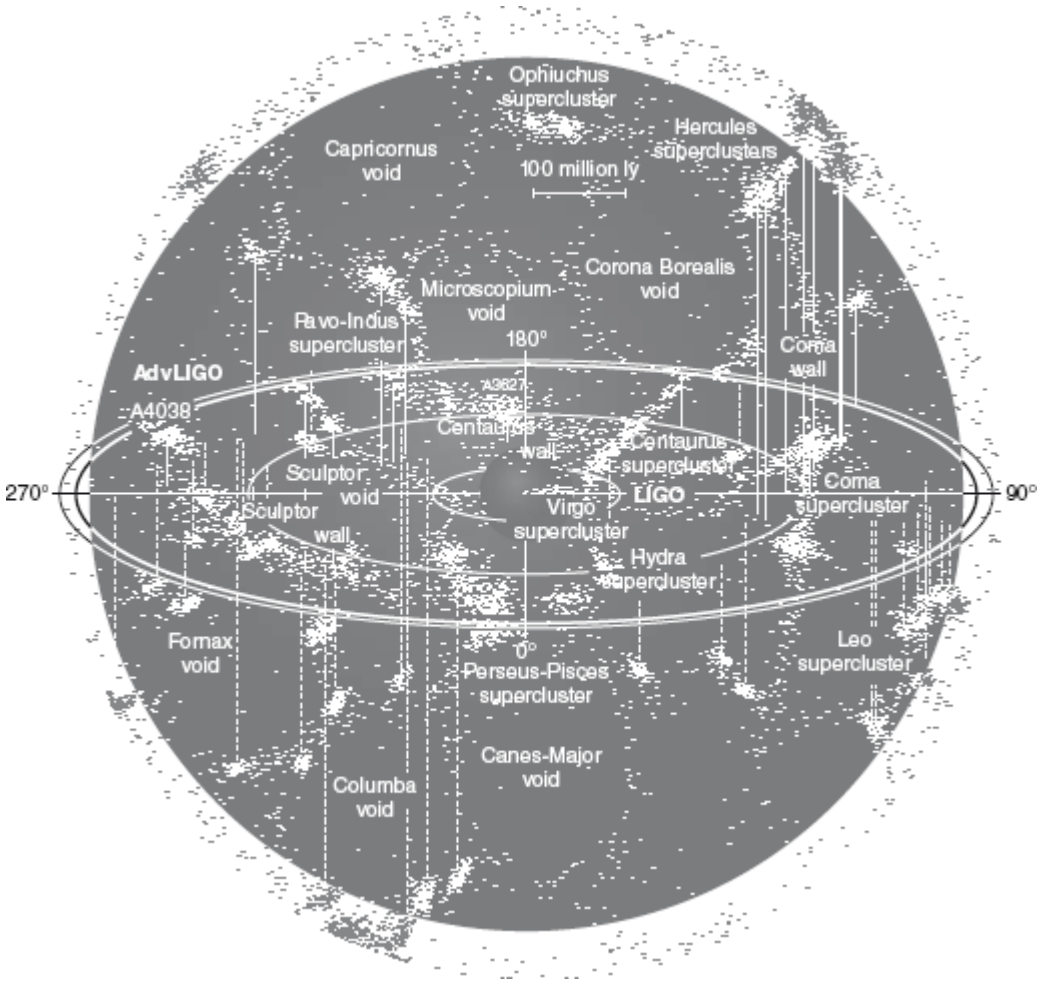


FIGURA 2-29 Comparação dos alcances do LIGO e do Advanced LIGO. Cada ponto na figura representa uma galáxia. [*LIGO/Cal Tech*]

Exercício

8. Quais foram os dois erros que Laplace cometeu para chegar à Equação 2-59?

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Momento relativístico	$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u}$ **2-7** O momento relativístico é conservado e é $\approx m\mathbf{u}$ para $v << c$. $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ na Equação 2-7, na qual u é a velocidade da partícula em S.
2. Energia relativística Energia total	$E = \gamma mc^2$ **2-10** A energia relativística total é conservada.
Energia cinética	$E_k = \gamma mc^2 - mc^2$ **2-9** mc^2 é a energia de repouso. $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ nas Equações 2-9 e 2-10.
3. Transformações de Lorentz para E e $\mathbf{p}$	

	$$p'_x = \gamma(p_x - vE/c^2) \quad p'_y = p_y$$ $$E' = \gamma(E - vp_x) \quad p'_z = p_z$$ **2-16** em que v é a velocidade relativa dos referenciais e $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$
4. Conversões Massa-Energia	Quando uma energia ΔE é adicionada a (removida de) um corpo, a massa de repouso do corpo aumenta (diminui) de $\Delta m = \Delta E/c^2$.
5. Massa invariante	$$(mc^2) = E^2 - (pc)^2$$ **2-32** A energia e o momento de qualquer sistema podem ser combinados para formar um quadrivetor cujo módulo é a energia de repouso da massa m.
6. Força e relatividade	A força $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ não é invariante na relatividade. A força relativística é definida através da equação $$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma m\mathbf{u})}{dt}$$ **2-8**
7. Relatividade geral Princípio de equivalência	Um campo gravitacional uniforme é equivalente a um referencial uniformemente acelerado.
Intervalo invariante	$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$ **2-42**

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Alder, R., M. Bazin e M. Schiffer, *Introduction to General Relativity*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Bohm, D., *The Special Theory of Relativity*, W.A. Benjamin, New York, 1965.

French, A.P., *Albert Einstein*: *A Centenary Volume*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 1979. Uma excelente coletânea de artigos a respeito da vida e trabalho de Einstein.

Kogut, J. B., *Introduction to Relativity*, Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, 2001. Nossa discussão do intervalo invariante se baseou em parte na Seção 7.2 deste excelente livro.

Lorentz, H. A., A. Einstein, H. Minkowski, e W. Weyl, *The Principle of Relativity*: *A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity* (tradução para o inglês de W. Perrett e G.B. Jeffery), Dover, New York, 1923. Dois dos artigos de Einstein reproduzidos no livro tratam de assuntos abordados neste capítulo: "On the Electrodynamics of Moving Bodies" [*Annalen der Physik*, **17** (1905)] e "Does the Inertia of a Body Depend upon Its Energy Content?" [*Annalen der Physik*, **17** (1905)].

Ohnian, H.C., *Special Relativity: A Modern Introduction*, Physics Curriculum & Instruction, 2001.

Pais, A., *Subtle Is the Lord . . .* , Oxford University Press, Oxford, 1982.

Resnick, R., *Introduction to Relativity*, Wiley, New York, 1968.

Rosser, W.G.V., *The Theory of Relativity*, Butterworth, London, 1964.

Taylor, E.F. e J.A. Wheeler, *Spacetime Physics*, 2d ed., Freeman, New York, 1992. Um bom livro com muitos exemplos, problemas e diagramas.

Notas

1. Este *Gedankenexperiment* (experimento imaginário) foi inspirado por uma ideia de G. N. Lewis e R. C. Tolman, *Philosophical Magazine*, **18**, 510 (1909).

2. O leitor pode verificar que isto é verdade fazendo girar a Figura 2-1*a* de 180 no plano do papel; a figura se torna idêntica à Figura 2-1*b*.

3. C. G. Adler, *American Journal of Physics*, **55**, 739 (1987).

4. A ideia surgiu no século XIX, a partir de estudos das reações químicas. Dentro dos limites de precisão das medidas da época, a soma das massas dos reagentes era sempre igual à soma das massas dos produtos. A lei de conservação da energia teve uma origem semelhante, com base nos experimentos de James Joule (1818-1889) interpretados por Hermann von Helmholtz (1821-1894). Esta não é uma forma incomum de formular leis de conservação; até hoje, elas ainda surgem desta forma.

5. Naturalmente, a aproximação da Equação 2-10 usada nesta discussão não pode ser obtida a partir das equações de Newton, já que não existe nenhuma grandeza correspondente à energia de repouso mc^2 na mecânica clássica.

6. "Facilitam" no sentido de que não precisamos fazer algumas conversões de unidades nem usar grandes potências de 10. Por outro lado, devemos ter sempre em mente o fato de que o eV *não é* uma unidade do SI. Se o resultado final de um cálculo tiver que ser expresso em unidades do SI, não se esqueça de converter os eV em joules!

7. A. Einstein, *Annalen der Physik*, **17** (1905).

8. Estritamente falando, a componente temporal do quadrivetor deveria ser $ic\Delta t$, em que $i = \sqrt{-1}$. É a presença do fator i que faz com que a componente temporal e as componentes espaciais tenham sinais opostos na Equação 2-30 e a energia e o momento tenham sinais opostos na Equação 2-32. Sua inclusão se deve a Hermann Minkowski (1864-1909), um matemático russo-alemão que formulou uma interpretação geométrica da relatividade e foi um dos professores de Einstein em Zurique. Neste livro, o fator i é ignorado porque não afeta nossas discussões.

9. Outras leis de conservação da física também devem ser respeitadas, como, por exemplo, as leis de conservação da carga elétrica e do momento angular.

10. O pósitron é uma partícula com a mesma massa que o elétron e carga positiva. O pósitron e outras antipartículas são discutidos nos Capítulos 11 e 12.

11. Como os elétrons são considerados partículas pontuais, isto é, sem extensão espacial, não é fácil definir o que significa "encontrar" um elétron. A ideia é que o fóton se aproxima do elétron, isto é, atravessa uma região na qual o campo elétrico produzido pelo elétron é muito intenso.

12. Um sistema deste tipo é conhecido como *polielétron*. É análogo a uma molécula de hidrogênio ionizada, da mesma forma como o *positrônio* é análogo a um átomo de hidrogênio. (Veja a legenda da Figura 2-12.)

13. Einstein fez este comentário em uma conferência proferida em Kyoto no final de 1922. Veja Pais (1982).

14. Trecho de um artigo não publicado que hoje pertence ao acervo da Pierpont Morgan Library, em Nova York. Veja Pais (1982).

15. As forças aparentes são forças inerciais, isto é, proporcionais à massa, e podem ser anuladas por uma mudança do sistema de coordenadas. As forças reais, como a força elástica e a força eletrostática, não dependem da massa.

16. Em 1913, Einstein perguntou ao astrônomo George Hale (em honra de quem o telescópio de 5 m do observatório de monte Palomar foi batizado) se os astrônomos seriam capazes de medir uma deflexão tão pequena. A resposta foi negativa, mas quando Einstein refez os cálculos, dois anos mais tarde, obteve uma deflexão duas vezes maior, o que tornou a observação mais viável.

17. A integração não é trivial. Veja, por exemplo, R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, *Introduction to General Relativity* (McGraw-Hill, New York, 1965).

18. O valor previsto, tanto pela mecânica newtoniana como pela teoria da relatividade restrita, é duas vezes menor. Para chegar a esta conclusão, basta aplicar a Equação 4-3 à deflexão gravitacional de um fóton de massa $h\nu/c^2$ pela massa do Sol, com um parâmetro de impacto b igual a $R_\odot$, o raio do Sol.

19. Uma cópia do trabalho de Einstein (que morava em Berlim) foi retirada secretamente da Alemanha e entregue a Eddington, na Inglaterra, para que o astrônomo pudesse iniciar o projeto. Na ocasião, a Alemanha e a Inglaterra estavam em guerra e Arthur S. Eddington era diretor do renomado Observatório de Cambridge. As autoridades inglesas aprovaram as expedições para evitar o dissabor de serem forçadas a prender um cientista famoso como Eddington, que se recusara a combater por questões de consciência.

20. Veja, por exemplo, R. V. Pound e G. A. Rebka, Jr., *Physical Review Letters*, **4**, 337 (1960).

21. Em relação às estrelas fixas.

22. A. Einstein, "The Foundation of the General Theory of Relativity", *Annalen der Physik*, **49**, 769 (1916).

23. I. I. Shapiro et al., *Physical Review Letters*, **26**, 1132 (1971).

24. Na verdade, a primeira pessoa, de que se tem notícia, a aventar a possibilidade da existência de estrelas com uma massa suficientemente grande para impedir o escape da luz (ou seja, "estrelas escuras") foi John Mitchell, um pároco inglês, em 1783.

O termo *buraco negro* foi usado pela primeira vez por John Wheeler, em 1968.

25. R.A. Hulse e J. H. Taylor, *Astrophysical Journal*, **195**, L51 (1975).

26. Além dos detectores de ondas gravitacionais mencionados no texto, existe também o TAMA 300, no Japão, e o AURIGA, na Itália. A NASA e a European Space Agency estão projetando um detector de ondas gravitacionais em órbita, o LISA, cujos braços terão 5 milhões de quilômetros de comprimento. Os três satélites que compõem o LISA devem ser lançados por volta de 2020.

Problemas

NÍVEL I
Seção 2-1 Momento Relativístico e Seção 2-2 Energia Relativística

2-1. Mostre que $p_{yA} = -p_{yB}$, onde p_{yA} e p_{yB} são os momentos relativísticos das bolas da Figura 2-1, dados por

$$p_{yA} = \frac{mu_0}{\sqrt{1 - u_0^2/c^2}} \qquad p_{yB} = \frac{mu_{yB}}{\sqrt{1 - (u_{xB}^2 + u_{yB}^2)/c^2}}$$

$$u_{yB} = -u_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad u_{xB} = v$$

2-2. Mostre que $d(\gamma mu) = m(1 - u^2/c^2)^{-3/2}\, du$.

2-3. Um elétron (energia de repouso mc^2 = 0,511 MeV) está se movendo com velocidade $u = 0{,}6c$ em relação ao laboratório. Determine (*a*) o valor de γ; (*b*) o valor de *p* em MeV/*c*; (*c*) o valor de *E*; (*d*) o valor de E_k.

2-4. Qual é a energia necessária para acelerar uma partícula de massa *m* desde o repouso até uma velocidade igual a (*a*) 0,5*c*; (*b*) 0,9*c*; (*c*) 0,99*c*? Expresse as respostas como múltiplos da energia de repouso.

2-5. Duas massas de 1 kg são separadas por uma mola de massa desprezível. A distância entre as massas é reduzida, comprimindo a mola. Se o trabalho necessário para comprimir a mola é 10 J, determine a variação da massa do sistema em quilogramas. A massa aumenta ou diminui?

2-6. Para que valor de *u*/*c* a massa medida de uma partícula excede a massa de repouso (*a*) em 10%; (*b*) por um fator de 5 vezes; (*c*) por um fator de 20 vezes?

2-7. Um próton proveniente do espaço está se movendo tão depressa que é capaz de cobrir a distância da Terra à Lua em 1,5 s. (*a*) Qual é a velocidade do próton, em unidades de *c*? (*b*) Qual é a energia cinética do próton? (*c*) Qual é a massa do próton no referencial da Terra? (*d*) Qual é o erro percentual cometido quando a energia cinética do próton é calculada usando a equação clássica? (A distância entre a Terra e a Lua é $3{,}8 \times 10^5$ km. Ignore a rotação da Terra.)

2-8. Qual é o trabalho realizado para acelerar um próton (*a*) de 0,15*c* para 0,16*c*? (*b*) de 0,85*c* para 0,86*c*? (*c*) de 0,95*c* para 0,96*c*? Observe que a variação de velocidade é a mesma nos três casos.

2-9. O Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC), em Brookhaven, realiza colisões entre átomos totalmente ionizados de ouro (Au) com uma energia de 200 GeV por núcleon. Cada núcleo de Au contém 197 núcleons. (*a*) Qual é a velocidade de um núcleo de Au no momento que antecede a colisão? (*b*) Qual é o momento do núcleo nesse instante? (*c*) Qual é o valor da energia e do momento do núcleo de Au no referencial do outro núcleo de Au envolvido na colisão?

2-10. (*a*) Determine a energia de repouso de 1 g de poeira. (*b*) Se fosse possível converter totalmente esta energia em energia elétrica e vendê-la por 10 centavos o quilowatt-hora, qual seria a quantia arrecadada? (*c*) Se uma lâmpada de 100 W fosse alimentada com esta energia, durante quanto tempo permaneceria acesa?

2-11. Um elétron (energia de repouso: 0,511 MeV) está se movendo a uma velocidade $u = 0{,}2c$. Determine a energia total, a energia cinética e o momento do elétron.

2.12. Um próton (energia de repouso: 938 MeV) tem uma energia total de 1.400 MeV. (*a*) Qual é a velocidade do próton? (*b*) Qual é o momento?

2.13. A velocidade orbital do Sol em relação ao centro da Via Láctea é aproximadamente 250 km/s. Determine a diferença percentual entre o valor relativístico e o valor newtoniano (*a*) do momento do Sol; (*b*) da energia cinética do Sol.

2.14. O elétron de um átomo de hidrogênio se move em torno do próton com uma velocidade de $2{,}2 \times 10^6$ m/s. (*a*) Qual é a diferença percentual entre os valores relativístico e newtoniano da energia cinética? (*b*) Qual é a diferença percentual entre os valores relativístico e newtoniano do momento?

2.15. Uma lâmpada de 60 W e a bateria que a alimenta são colocadas no interior de um invólucro transparente hermeticamente

fechado. (*a*) Determine a variação da massa do sistema se a lâmpada permanecer acesa continuamente durante um ano. (*b*) Resolva o item (*a*) supondo que a superfície interna do invólucro é um espelho ideal.

Seção 2-3 Conversão de Massa em Energia e a Energia de Ligação

2.16. Use o Apêndice A e a Tabela 2-1 para determinar a energia necessária para remover um próton de um átomo de ^{4}He, deixando um átomo de ^{3}He e um elétron.

2-17. Use o Apêndice A e a Tabela 2-1 para determinar a energia necessária para remover um nêutron de um átomo de ^{3}H, deixando um átomo de ^{2}H.

2-18. A energia liberada quando o sódio e o cloro se combinam para formar NaCl é 4,2 eV. (*a*) Qual é o aumento de massa (em unidades unificadas de massa) quando uma molécula de NaCl se decompõe em um átomo de Na e um átomo de Cl? (*b*) Qual é o erro percentual cometido quando essa diferença de massa é desprezada? (A massa do Na é 23 **u** e a do Cl 35,5 **u**.)

2.19. Em uma reação de fusão nuclear, dois átomos de ^{2}H se combinam para produzir um átomo de ^{4}He. (*a*) Calcule a redução da massa de repouso do sistema em unidades unificadas de massa. (*b*) Calcule a energia liberada na reação. (*c*) Quantas reações desse tipo, por segundo, são necessárias para gerar uma potência de 1 W?

2.20. Uma partícula elementar de massa M absorve totalmente um fóton, o que faz a massa da partícula aumentar para 1,01 M. (*a*) Qual era a energia do fóton que foi absorvido? (*b*) Por que essa energia era maior que $0{,}01Mc^2$?

2.21. Quando um feixe de prótons de alta energia colide com prótons em repouso no laboratório (em um recipiente com água ou hidrogênio líquido, por exemplo), píons neutros (π^0) são produzidos pela reação $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$. Determine a menor energia que devem ter os prótons do feixe para que a reação ocorra. (Veja a Tabela 2-1 e o Exemplo 2-13.)

2.22. A energia liberada pela fissão de um núcleo de ^{235}U é aproximadamente 200 MeV. Qual é a massa convertida em energia nesta fissão?

2-23. A temperatura no centro do Sol é da ordem de $1{,}5 \times 10^7$ K. Supondo que no centro do Sol exista apenas hidrogênio atômico e lembrando que a temperatura é uma medida da energia cinética média dos átomos, determine (*a*) a energia térmica de 1 kg do gás e (*b*) a massa associada a essa energia ($\overline{E_k} = 3kT/2$, em que k é a constante de Boltzmann; veja o Capítulo 3).

Seção 2-4 Massa Invariante

2-24. Calcule a força exercida sobre a palma da mão de uma pessoa pelo feixe de luz de uma lanterna de 1,0 W (*a*) se a mão da pessoa absorver toda a luz; (*b*) se a mão da pessoa refletir toda a luz. Qual teria que ser a massa de uma partícula para que exercesse a mesma força ao ser sustentada pela mão na superfície da Terra?

2-25. Um par elétron-pósitron está em repouso no referencial do laboratório. As partículas se aniquilam mutuamente, produzindo um par de fótons (raios gama) que se movem em sentidos opostos no referencial do laboratório. Mostre que a energia de repouso invariante dos raios gama é igual à do par elétron-pósitron.

2-26. Mostre que a Equação 2-31 pode ser escrita na forma $E = mc^2(1 + p^2/m^2c^2)^{1/2}$ e use uma expansão binomial para mostrar que, para $pc << mc^2$, $E \approx mc^2 + p^2/2m$.

2.27. Um elétron (energia de repouso: 0,511 MeV) tem uma energia total de 5 MeV. (*a*) Determine o momento do elétron em unidades de MeV/c. (*b*) Determine o valor de u/c para o elétron.

2-28. Faça um gráfico da energia total E de um elétron em função do momento p. (Use a Equação 2-36 para grandes valores de p e a Equação 2-40 para pequenos valores de p.)

2-29. Qual é a velocidade de uma partícula que possui um momento de 500 MeV/c e uma energia de 1.746 MeV? Qual é a massa da partícula (em MeV/c^2)?

2-30. Um elétron com uma energia total de 4,0 MeV está se movendo perpendicularmente a um campo magnético uniforme em uma trajetória circular com 4,2 cm de raio. (*a*) Qual é o módulo do campo magnético B? (*b*) Qual é o valor de γ para o elétron?

2-31. Um campo magnético de 0,5 T faz com que um próton se mova em uma trajetória circular de 2 m de raio. (*a*) Qual é o momento do próton? (*b*) Qual é a energia cinética do próton?

Seção 2-5 Relatividade Geral

2-32. Mostre que, no referencial de um disco em rotação, como um CD ou um DVD, o intervalo invariante é dado pela Equação 2-44.

2-33. Calcule o ângulo de deflexão α para a luz de uma estrela distante observada na Lua depois de passar muito perto da Terra.

2-34. Dois gêmeos trabalham na Sears Tower, um edifício de escritórios muito alto de Chicago. Um trabalha no último andar e o outro no porão. Escolha a opção correta, de acordo com a teoria da relatividade geral: (*a*) Os gêmeos envelhecem com a mesma rapidez; (*b*) o gêmeo que trabalha no último andar envelhece mais devagar; (*c*) o gêmeo que trabalha no porão envelhece

mais devagar.

2-35. O planeta Júpiter descreve 8,43 revoluções por século e sua órbita tem uma excentricidade $\varepsilon = 0{,}048$. O planeta está situado a 5,2 UA do Sol e possui uma massa 318 vezes maior que a da Terra, que é $5{,}98 \times 10^{24}$ kg. Qual é a velocidade de precessão do periélio de Júpiter, de acordo com a teoria da relatividade geral? (Ainda não se conhece o valor experimental.) (1 UA é a distância média entre a Terra e Sol, $1{,}50 \times 10^{11}$ m.)

2-36. Mostre que a substituição na Equação 2-44 de dt por seu valor, dado pela Equação 2-45, leva à Equação 2-46, que não contém o termo misto $d\varphi' dt$.

2-37. Um satélite geossíncrono, "estacionado" em órbita no plano do equador terrestre, é usado para retransmitir sinais de micro-ondas. Para que frequência o receptor do satélite deve ser sintonizado se a frequência da transmissão na Terra é exatamente 9,375 GHz? (Ignore todos os efeitos Doppler.)

2-38. Uma certa estrela está a 92 anos-luz da Terra. Entre os dois astros, a 35 anos-luz de distância da estrela, existe uma anã branca com uma massa igual a 3 vezes a massa do Sol e um raio de 104 km. A deflexão da luz da estrela mais distante pela anã branca faz com que a imagem da estrela seja vista na Terra como um par de arcos de círculo como os que aparecem na Figura 2-20*b*. Determine o ângulo 2α formado pelas retas que ligam a Terra aos dois arcos.

NÍVEL II

2-39. Um relógio é colocado a bordo de um satélite que gira em torno da Terra com um período de 90 minutos, a uma altitude de 300 km. Qual é a diferença, após um ano, entre os tempos indicados por este relógio e um relógio igual que ficou na Terra? (Leve em conta os efeitos da relatividade restrita e da relatividade geral.)

2-40. Determine a energia total E' do objeto do Exemplo 2-11 em um referencial S' no qual $p' = 0$.

2-41. No acelerador linear de Stanford, pequenos pacotes de elétrons e pósitrons são lançados um contra o outro. No referencial do laboratório, cada pacote tem 1 cm de comprimento e 10 μm de diâmetro. No momento da colisão, as partículas têm uma energia de 50 GeV e os elétrons e pósitrons estão se movendo em sentidos opostos. (*a*) Determine o comprimento e a largura de repouso dos pacotes. (*b*) Qual deveria ser, no mínimo, o comprimento próprio do acelerador para que um pacote ficasse inteiramente contido no acelerador do ponto de vista do seu próprio referencial? (Na verdade, o acelerador tem menos de 1.000 m de comprimento.) (*c*) Determine o comprimento de um pacote de pósitrons no referencial dos elétrons. (*d*) Determine o momento e a energia dos elétrons no referencial dos pósitrons.

2-42. A energia de repouso de um próton é 938 MeV. Se a energia cinética também é 938 MeV, determine (*a*) o momento; (*b*) a velocidade da partícula.

2-43. Uma espaçonave cuja massa é 10^6 kg está se movendo no espaço com velocidade constante. Para realizar uma mano-bra, ejeta, em um período muito curto de tempo, 10^3 kg de combustível com uma velocidade de $c/2$ em relação à nave. (*a*) Desprezando qualquer variação da massa do sistema, calcule a velocidade da espaçonave no referencial em que se encontrava inicialmente em repouso. (*b*) Calcule a velocidade da espaçonave usando a mecânica clássica. (*c*) Use o resultado do item (*a*) para estimar a variação da massa de repouso do sistema.

2-44. Um relógio (ou um átomo emissor de luz) situado no equador terrestre está se movendo a uma velocidade de 463 m/s em relação a um relógio situado em um dos polos. Como a Terra não é perfeitamente esférica, o relógio do equador está 21 km mais distante do centro de Terra do que o relógio do polo. Calcule o efeito de dilatação do tempo para cada relógio do ponto de vista do outro relógio. Mostre que existem dois efeitos opostos da mesma ordem de grandeza e, em consequência, a diferença entre os tempos indicados pelos dois relógios é muito pequena. (Despreze a diferença entre a aceleração da gravidade no equador e nos polos.)

2-45. O Professor Gastão, sem atentar para os aspectos econômicos e políticos do projeto, propõe a construção de um acelerador de prótons ao longo de todo o equador terrestre usando eletroímãs que produzem um campo magnético de 1,5 T para manter as partículas em uma trajetória circular. (*a*) Qual seria a energia cinética dos prótons? (*b*) Qual seria o período de rotação dos prótons?

2-46. No Egito antigo, a cheia anual do Nilo era precedida pelo aparecimento de Sirius no céu. Sirius faz parte de um sistema binário; sua companheira é uma anã branca. A análise das órbitas das duas estrelas mostra que a massa da anã branca é 2×10^{30} kg (da mesma ordem, portanto, que a massa do Sol). A comparação das linhas espectrais emitidas pela anã branca com as linhas emitidas pelos mesmos elementos na Terra indica um desvio de frequência relativo de 7×10^{-4}. Supondo que a diferença se deva exclusivamente ao desvio gravitacional para o vermelho, calcule a massa específica da anã branca. (Em comparação, a massa específica do Sol é 1.409 kg/m^3.)

2-47. Mostre que não é possível criar um par elétron-pósitron (ou qualquer outro par partícula-antipartícula) isoladamente, isto é, sem que o par interaja com outras partículas ou alguma forma de radiação. (*Sugestão*: Use as leis de conservação.)

2-48. Com os eixos dos referenciais inerciais S e S' paralelos e S' se movendo no sentido positivo dos x, é evidente que a transformação de Lorentz para y e z deve ser $y' = y$ e $z' = z$. A transformação das componentes y e z do momento, porém, não é

tão óbvia. Mostre que, como indicam as Equações 2-16 e 2-17, $p'_y = p_y$ e $p'_z = p_z$.

NÍVEL III

2-49. Duas partículas iguais com massa de repouso m estão se aproximando com velocidade u no referencial S. As partículas colidem inelasticamente com uma mola que fica travada (Figura 2-9) e em repouso no referencial S; toda a energia cinética das partículas é transformada em energia potencial. Neste problema, o leitor vai demonstrar que a conservação do momento no referencial S', no qual uma das partículas se encontra inicialmente em repouso, exige que a massa de repouso total do sistema após a colisão seja dada por $2m/(1 - u^2/c^2)^{1/2}$. (*a*) Mostre que a velocidade da partícula que não está em repouso no referencial S' é dada por

$$u' = \frac{2u}{1 + u^2/c^2}$$

e use este resultado para mostrar que

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \frac{1 - u^2/c^2}{1 + u^2/c^2}$$

(*b*) Mostre que o momento inicial no referencial S' é $p' = 2mu/(1 - u^2/c^2)$. (*c*) Depois da colisão, a partícula composta passa a se mover com velocidade u em S' (já que está em repouso em S). Expresse o momento total após a colisão em função da massa de repouso final M e mostre que a conservação do momento exige que $M = 2m/(1 - u^2/c^3)^{1/2}$. (*d*) Mostre que a energia total é conservada nos dois referenciais.

2-50. O antipróton ($\overline{p}$) tem a mesma energia de repouso que o próton; pode ser criado, por exemplo, na reação $p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$. Em um experimento, prótons em repouso no referencial do laboratório são bombardeados com prótons de energia cinética E_k, que deve ser suficiente para que uma energia cinética igual a $2mc^2$ possa ser convertida na energia de repouso de um próton e um antipróton. No referencial do laboratório, a energia cinética do próton incidente não pode ser convertida totalmente em energia de repouso por causa da conservação do momento; entretanto, no referencial de momento zero em que os dois prótons iniciais estão se movendo um em direção ao outro com velocidades iguais, toda a energia cinética pode ser convertida em energia de repouso. (*a*) Determine a velocidade u dos dois prótons para que a energia cinética total no referencial de momento zero seja igual a $2mc^2$. (*b*) Determine a velocidade u' de um dos prótons no referencial em que o outro próton se encontra em repouso. (*c*) Mostre que a energia cinética do próton incidente no referencial do laboratório é $E_k = 6mc^2$.

2-51. Em um experimento imaginário, Einstein mostrou que existe uma certa quantidade de massa associada à radiação eletromagnética. Considere uma caixa de comprimento L e massa M apoiada em uma superfície sem atrito. Na parede esquerda da caixa existe uma fonte luminosa que emite uma radiação de energia E, que é absorvida pela parede da direita. De acordo com a teoria eletromagnética clássica, a esta radiação está associado um momento cujo módulo é dado por $p = E/c$. (*a*) Determine qual deve ser a velocidade de recuo da caixa para que o momento seja conservado quando a luz é emitida. (Como $p << M$, o problema pode ser resolvido usando a mecânica clássica.) (*b*) Quando a luz é absorvida pela parede da direita, a caixa se imobiliza e, portanto, o momento total continua a ser nulo. Desprezando a velocidade da caixa em comparação com a velocidade da luz, o tempo que a luz leva para atravessar a caixa é dado por $\Delta t = L/c$. Determine a distância percorrida pela caixa no mesmo intervalo de tempo. (*c*) Mostre que para que o centro de massa do sistema permaneça no mesmo lugar é preciso que a luz possua uma massa $m = E/c^2$.

2-52. Um dos processos de decaimento espontâneo de um píon negativo é a reação $\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$. Resultados experimentais recentes mostram que a massa m da partícula $\overline{\nu}_\mu$ não é maior que 190 keV/c^2 e pode, na verdade, ser quase nula. Supondo que o píon esteja em repouso no referencial no laboratório no instante do decaimento, calcule as energias e momentos do múon e do antineutrino (*a*) se a massa do antineutrino for nula; (*b*) se a massa do antineutrino for 190 keV/c^2. A massa do píon é 139,56755 MeV/c^2 e a massa do múon é 105,65839 MeV/c^2. (O problema da massa dos neutrinos é discutido dos Capítulos 11 e 12.)

2-53. Use a Equação 2-47 para obter uma expressão para o desvio gravitacional para o vermelho em função do comprimento de onda λ. Use este resultado para determinar a mudança do comprimento de onda de uma radiação de 720,00 nm emitida por uma anã branca. Suponha que a anã branca tenha a mesma massa que o Sol ($1{,}99 \times 10^{30}$ nm) e raio 100 vezes menor que o do Sol. ($R_\odot = 6{,}96 \times 10^8$ m.)

2.54. Mostre que a componente y' da aceleração de uma partícula que está se movendo no plano xy do referencial S é dada por

$$a'_y = \frac{a_y}{\gamma^2(1 - u_x v/c^2)^2} + \frac{a_x u_y v/c^2}{\gamma^2(1 - u_x v/c^2)^3}$$

2-55. Considere um objeto de massa m em repouso no referencial S e submetido a uma força F de componentes F_x e F_y. O sistema S' está se movendo com velocidade instantânea v no sentido positivo do eixo x. Definindo a força por meio da Equação 2-8 e usando a transformação de velocidades de Lorentz, mostre que (*a*) $F'_x = F_x$ e (b) $F'_y = F_y/\gamma$. (*Sugestão*: Veja o Problema 2-54.)

2-56. Uma partícula instável de massa M decai em duas partículas iguais de massa m. Escreva expressões para as velocidades das duas partículas no referencial do laboratório (*a*) se a partícula de massa M está em repouso no laboratório e (*b*) se a partícula de massa M tem uma energia total $4mc^2$ no instante do decaimento e as partículas de massa m se movem na mesma direção que a partícula de massa M.

*Se a componente *y* do momento total não fosse nula, trocaria de sinal após a colisão e, portanto, o momento total não seria conservado. (N.T.)

CAPÍTULO 3

Quantização da Carga, Luz e Energia

3-1 Quantização da Carga Elétrica
3-2 Radiação de Corpo Negro
3-3 Efeito Fotelétrico
3-4 Raios X e o Efeito Compton

A ideia de que a matéria é composta de pequenas partículas, ou átomos, foi proposta pela primeira vez pelo filósofo grego Demócrito[1] e seu mestre Leucipo, por volta de 450 a.C. Entretanto, até o século XVII não houve tentativas sérias de confirmar esta especulação através de observações experimentais. Pierre Gassendi, na metade do século XVII, e Robert Hooke, alguns anos mais tarde, tentaram explicar os estados da matéria e as transformações entre esses estados usando um modelo segundo o qual a matéria era composta por objetos sólidos indestrutíveis, de pequenas dimensões, que estavam em movimento constante. Entretanto, foi a hipótese de Avogadro, formulada em 1811, de que todos os gases a uma dada temperatura contêm o mesmo número de moléculas por unidade de volume, que levou à interpretação correta das reações químicas e, mais tarde, por volta de 1900, à teoria cinética dos gases. Além disso, a hipótese de Avogadro permitiu explicar quantitativamente muitas propriedades da matéria e levou a uma aceitação geral (embora não unânime) da teoria molecular da matéria. Assim, ficou estabelecido que a matéria não é contínua, como parece à primeira vista, e sim *quantizada*, ou seja, formada por partículas distintas. O fato de que a matéria parece ser contínua foi atribuído ao pequeno tamanho dessas partículas.

Neste capítulo, vamos discutir o modo como os cientistas chegaram à conclusão de que três outras grandezas são quantizadas: (1) a carga elétrica; (2) a energia luminosa; (3) a energia dos sistemas mecânicos vibratórios. A quantização da carga elétrica não foi surpresa para os cientistas do início do século XX, pois era análoga à quantização da matéria, mas a quantização da energia luminosa e a quantização da energia mecânica, ambas de grande importância para a física moderna, foram ideias revolucionárias.

3-1 Quantização da Carga Elétrica

Primeiras Medições de *e* e *e*/*m*

As primeiras estimativas da ordem de grandeza das cargas elétricas associadas aos átomos foram feitas a partir da lei de Faraday. O trabalho de Michael Faraday (1791-1867), realizado no início do século XIX, se destaca até hoje por sua visão, criatividade e meticulosidade. É fascinante a história deste filho de ferreiro autodidata que, depois de trabalhar como menino de recados e aprendiz de encadernador, chegou a diretor do famoso Royal Institute of London e se tornou um dos cientistas mais prestigiosos da época. Um dos seus campos de estudos foi a condução da eletricidade em soluções fracamente condutoras. A descoberta de que a mesma quantidade de eletricidade, F, hoje denominada *faraday* e igual a aproximadamente 96.500 C, sempre decompõe 1 peso iônico-grama, ou seja, um número de Avogadro, N_A, de íons monovalentes, levou à conclusão de que todos os íons monovalentes possuem a mesma carga elétrica e, portanto,

$$F = N_A e \qquad \textbf{3-1}$$

A Equação 3-1 é denominada lei de Faraday da eletrólise. A constante F era fácil de medir, mas o valor de N_A e o valor de e não podiam ser medidos com os recursos disponíveis na época. Mesmo assim, parecia lógico que a carga elétrica, como a matéria, não fosse contínua e sim formada por partículas com uma certa carga mínima. Em 1874, G. J. Stoney[2] usou uma estimativa de N_A, obtida a partir da teoria cinética dos gases, para estimar o valor de e em 10^{-20} C usando a Equação 3-1; entretanto, a medição direta de e teve que esperar por um engenhoso experimento realizado por Millikan um terço de século mais tarde.

Enquanto isso, em 1896, Pieter Zeeman obteve as primeiras provas da existência de partículas atômicas com uma relação definida entre carga e massa observando as *linhas espectrais*, emitidas por átomos, da presença de um campo magnético. Zeeman descobriu que as linhas espectrais se desdobravam em três linhas muito próximas, de frequências ligeiramente diferentes, quando os átomos eram submetidos ao campo magnético. (Este fenômeno, hoje conhecido como *efeito Zeeman*, será discutido no Capítulo 7.) De acordo com a teoria eletromagnética clássica, essas diferenças de frequência entre as linhas espectrais estão relacionadas à razão entre carga e massa das cargas oscilantes responsáveis pelas emissões.



12

A partir da medida do desdobramento das linhas espectrais, Zeeman encontrou um valor de $1{,}6 \times 10^{11}$ C/kg para q/m, razoavelmente próximo do valor atualmente adotado, $1{,}759 \times 10^{11}$ C/kg. Além disso, estudando a polarização das linhas espectrais, Zeeman chegou à conclusão de que as partículas responsáveis pela emissão de luz possuíam carga negativa.

Descoberta do Elétron: O Experimento de J. J. Thomson

No ano seguinte ao do trabalho de Zeeman, J. J. Thomson[3] mediu o valor de q/m para os chamados raios catódicos e observou que, se a carga das partículas contidas nesses raios fosse igual à carga mínima estimada por Stoney a partir da lei de Faraday, a massa das partículas seria apenas uma pequena fração da massa do átomo de hidrogênio. Dois anos antes, J. Perrin havia recolhido raios catódicos em um eletrômetro e observado que eram compostos por partículas de carga elétrica negativa.[4] Assim, ao medir o valor de q/m das partículas responsáveis pelos raios catódicos, Thomson havia, na verdade, descoberto o *elétron*. A medição direta da razão e/m para os elétrons, realizada por J. J. Thomson em 1897, há pouco mais de um século, pode ser considerada como o início de nosso entendimento da estrutura atômica.



5, 6

Quando um campo magnético uniforme de intensidade B é aplicado perpendicularmente à direção de movimento de partículas carregadas, as partículas passam a se mover em uma trajetória circular. O raio R da trajetória pode ser calculado a partir da segunda lei de Newton, fazendo a força magnética quB igual à massa m multiplicada pela aceleração centrípeta u^2/R, em que u é a velocidade das partículas:

$$quB = \frac{mu^2}{R} \quad \text{ou} \quad R = \frac{mu}{qB} \quad \text{e} \quad \frac{q}{m} = \frac{u}{RB} \qquad \textbf{3-2}$$

A técnica usada por Thomson para controlar a direção de um feixe de elétrons usando campos elétricos e magnéticos "cruzados" foi empregada mais tarde nos tubos de raios catódicos de osciloscópios e dos antigos aparelhos de televisão.

Thomson executou dois experimentos para medir o valor de e/m usando métodos um pouco diferentes. O segundo, mais confiável, ficou conhecido como *experimento de J. J. Thomson* (Figura 3-1). Nesse experimento, o cientista ajustou os valores de um campo magnético B e um campo elétrico $\mathscr{E}$, mutuamente perpendiculares, para que os raios não sofressem uma deflexão. Isso permitiu a Thomson determinar a velocidade dos elétrons igualando a força magnética à força elétrica e usando a Equação 3-2 para calcular e/m ($\equiv q/m$):

$$quB = q\mathscr{E} \quad \text{ou} \quad u = \frac{\mathscr{E}}{B} \qquad \textbf{3-3}$$

O experimento de Thomson pode ser considerado um marco na história da ciência, pois ele conseguiu medir e/m para uma partícula subatômica usando apenas um voltímetro, um amperímetro e uma régua, obtendo o valor de $0{,}7 \times 10^{11}$ C/kg. Hoje em dia, os cientistas usam rotineiramente o equivalente moderno do experimento de Thomson para medir os momentos de partículas elementares.

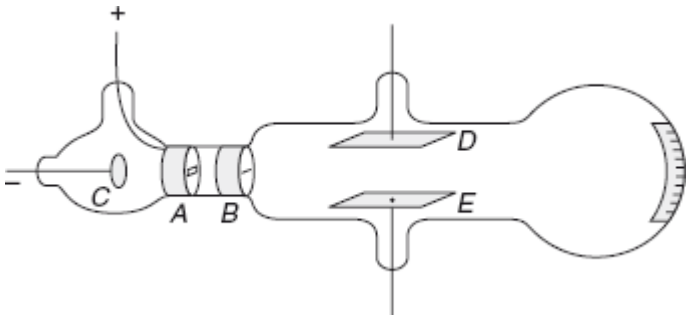
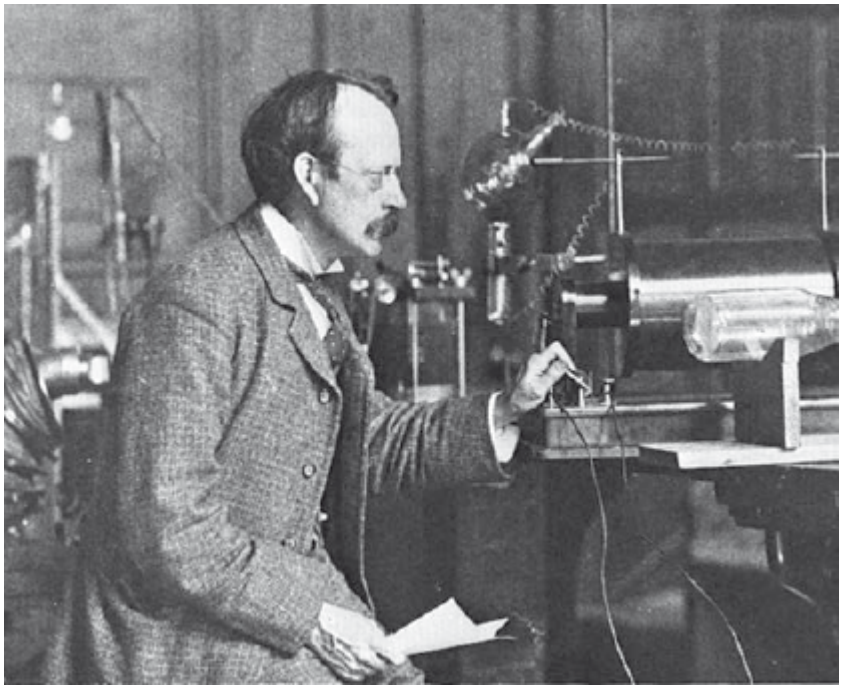


FIGURA 3-1 Tubo usado por J. J. Thomson para medir *e*/*m*. Os elétrons emitidos pelo catodo *C* passam pelos colimadores *A* e *B* e excitam um ponto do vidro na outra extremidade do tubo. O feixe eletrônico pode ser defletido por um campo elétrico aplicado entre as placas *D* e *E* ou por um campo magnético perpendicular ao campo elétrico. A partir da deflexão sofrida pelos elétrons, que pode ser medida sobre a tela em uma escala graduada, é possível determinar o valor de *e*/*m*. [*Fonte*: J. J. Thomson, "Cathode Rays", *Philosophical Magazine* (*5*), **44**, 293 (1897).]

Quando Thomson repetiu o experimento usando gases diferentes no interior do tubo e catodos feitos de diferentes metais, obteve o mesmo valor para *e*/*m* (dentro do erro experimental esperado), o que o levou a concluir que as mesmas partículas estavam presentes em todas as substâncias. A concordância dos resultados com os obtidos por Zeeman o levou à conclusão de que essas partículas (que Thomson chamava de *corpúsculos* e mais tarde Lorentz denominou *elétrons*) tinham uma unidade de carga negativa, uma massa aproximadamente 2.000 vezes menor que a do átomo mais leve e eram parte integrante de *todos* os átomos.

Exercícios

1. Uma das vantagens do método de Thomson em relação aos outros (como o de Faraday e o de Zeeman) é que se tratava de um método direto. Outra é que não envolvia nenhum tipo de média. Como é possível mostrar, analisando o experimento de Thomson, que a razão *e*/*m* é a mesma (dentro do erro experimental) para um grande número de partículas?



Sir J. J. Thomson em seu laboratório, observando a extremidade brilhante de um tubo de raios catódicos usado para medir *e*/*m*. Um tubo mais antigo pode ser visto ao fundo, do lado direito da foto. [*Cortesia do Cavendish Laboratory*.]

2. Thomson observou que os valores que obteve para a razão *e*/*m* eram aproximadamente 2.000 vezes maiores que para o íon mais leve, o de hidrogênio. O experimento permitia distinguir entre a possibilidade de que o elétron tivesse uma massa 2.000 vezes menor que o íon de hidrogênio e a de que o íon de hidrogênio tivesse uma carga 2.000 vezes maior que do elétron?

Medição da Carga Elétrica: O Experimento de Millikan

O fato de que os experimentos de Thomson forneciam sempre o mesmo valor de e/m, independentemente do material do catodo e do gás usado no tubo, era uma forte indicação de que todos os elétrons possuíam a mesma carga elétrica negativa e. Thomson iniciou uma série de experimentos para determinar o valor de e. O primeiro desses experimentos, que se revelou muito difícil de executar com alta precisão, foi realizado pelo seu aluno J. S. E. Townsend. A ideia era simples: observava-se uma nuvem pequena (mas visível) de gotas d'água de tamanhos semelhantes, cada uma com uma carga elétrica e, enquanto caíam por ação da força de gravidade. A carga total da nuvem, $Q = Ne$, era medida, bem como a massa da nuvem e o raio de uma gota isolada. Uma vez conhecido o raio das gotas, não era difícil determinar o valor de N, o número total de gotas na nuvem, e, portanto, o valor de e.

A precisão do método de Thomson era limitada por dois fatores: a incerteza quanto à velocidade de evaporação da nuvem e a hipótese de que todas as gotas continham uma e apenas uma unidade de carga elétrica. R. A. Millikan tentou eliminar o problema da evaporação usando um campo elétrico suficientemente intenso para manter a nuvem estacionária, o que lhe permitiria observar a evaporação e calcular a correção necessária. O novo experimento também se revelou muito difícil, mas, ao tentar executá-lo, Millikan fez uma descoberta de enorme importância, que lhe permitiu medir diretamente a carga do elétron! Nas palavras do próprio cientista:

> Não foi possível equilibrar a nuvem, como havia sido planejado originalmente, mas foi possível fazer algo muito melhor: manter suspensas no campo gotas carregadas por períodos que variavam de 30 a 60 segundos. Não cheguei a medir gotas que durassem mais de 45 segundos, mas em diversas ocasiões observei gotas que, em minha opinião, duraram um tempo consideravelmente maior. As gotas que consegui equilibrar com um campo elétrico sempre continham cargas múltiplas e a dificuldade para equilibrá-las foi menor do que eu havia previsto.[5]



4

A descoberta de que era possível observar gotas isoladas e de que gotas suspensas em um campo elétrico vertical às vezes se deslocavam subitamente para cima ou para baixo, obviamente por haverem adquirido uma carga elétrica positiva ou negativa, levou à possibilidade de observar a carga de um único íon. Em 1909, Millikan iniciou uma série de experimentos que não só mostraram que as cargas sempre ocorriam em múltiplos inteiros de uma unidade elementar e, mas permitiram determinar o valor de e com uma precisão de 1 parte em 1.000. Para eliminar o problema da evaporação, Millikan passou a trabalhar com gotas de óleo borrifadas no ar seco entre as placas de um capacitor (Figura 3-2). O atrito com o bico do borrifador fazia com que essas gotas já fossem criadas com uma carga elétrica; durante o tempo de observação, muitas ganhavam ou perdiam uma ou mais unidades de carga. Mudando a polaridade do campo na região entre as placas, era possível inverter o sentido do movimento de uma gota e continuar a observá-la por várias horas. Quando a carga de uma gota mudava, a velocidade com que a gota se movia na presença do campo também mudava. Supondo apenas que a velocidade terminal da gota era proporcional à força a que estava submetida (hipótese que Millikan teve o cuidado de investigar experimentalmente), foi possível determinar[6] que as cargas sempre ocorriam em múltiplos de uma unidade fundamental e, cujo valor foi estimado em $1{,}601 \times 10^{-19}$ C. O valor atualmente aceito[7] é $1{,}602176487 \times 10^{-19}$ C. Para uma descrição mais detalhada do experimento de Millikan, veja a Revisão de Conceitos Clássicos 4.

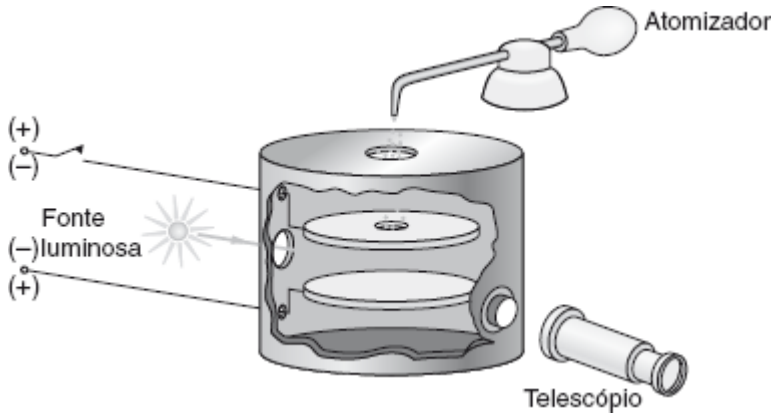


FIGURA 3-2 Sistema usado por Millikan em seus experimentos. As gotas de óleo são formadas no atomizador e adquirem uma carga elétrica antes de entrarem na câmara através de um furo localizado na placa superior. A descida de uma gota por ação da gravidade e a subida por ação do campo elétrico que existe entre as placas de um capacitor podem ser observadas com o auxílio de um telescópio. A carga elétrica da gota é calculada a partir dos tempos de subida e descida. Para modificar a carga da gota, é usada uma fonte de raios X, que não aparece na figura.

3-2 Radiação de Corpo Negro

Foi o estudo da radiação térmica emitida por corpos opacos que forneceu os primeiros indícios da natureza quântica da radiação. Quando uma radiação incide em um corpo opaco, parte é refletida e parte é absorvida. Os corpos de cor clara refletem a maior parte da radiação visível incidente, enquanto os corpos escuros absorvem a maior parte da radiação. A radiação absorvida pelo corpo aumenta a energia cinética dos átomos que o constituem, fazendo-os oscilar mais vigorosamente em torno da posição de equilíbrio. Como a temperatura de um corpo é determinada pela energia cinética média dos átomos, a absorção de radiação faz a temperatura do corpo aumentar. Acontece que os átomos contêm partículas carregadas (os elétrons) que são aceleradas pelas oscilações; assim, de acordo com a teoria eletromagnética, os átomos emitem radiação, o que reduz a energia cinética dos átomos e, portanto, diminui a temperatura. Quando a taxa de absorção é igual à taxa de emissão, a temperatura permanece constante e dizemos que o corpo se encontra em equilíbrio térmico com o ambiente. Assim, um material que é um bom absorvedor de radiação é também um bom emissor.

A radiação eletromagnética emitida nessas circunstâncias é chamada de *radiação térmica*. Em temperaturas moderadas (abaixo de 600 °C), a radiação térmica emitida pelos corpos não é visível; a maior parte da energia está concentrada em comprimentos de onda muito maiores que os da luz visível. Quando um corpo é aquecido, a quantidade de radiação térmica emitida aumenta e a energia irradiada se estende a comprimentos de onda cada vez menores. Entre 600 e 700 °C, existe energia suficiente no espectro visível para que o corpo comece a brilhar com luz própria, vermelho-escura. Em temperaturas mais elevadas, o objeto brilha com luz vermelho-clara ou mesmo branca.

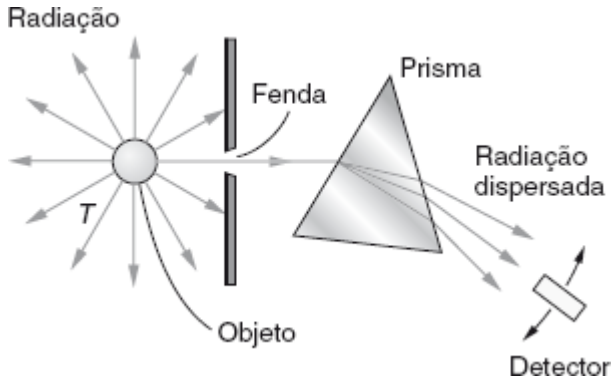


FIGURA 3-3 A radiação emitida por um corpo à temperatura *T* passa por uma fenda e é dispersada por um dispositivo que separa os raios de acordo com o comprimento de onda. O prisma que aparece na ilustração é apropriado para a parte visível do espectro. Em outras regiões do espectro eletromagnético, seria necessário usar outros dispositivos.

Um corpo que absorve *toda* a radiação incidente é chamado de *corpo negro ideal.* Em 1879, Josef Stefan descobriu uma relação empírica entre a potência por unidade de área irradiada por um corpo negro e a temperatura:

$$R = \sigma T^4 \qquad \textbf{3-4}$$

em que R é a potência irradiada por unidade de área, T é a temperatura absoluta e $\sigma = 5{,}6704 \times 10^{-8}$ W/m^{2}K^4 é uma constante denominada constante de Stefan. Cinco anos mais tarde, Ludwig Boltzmann chegou ao mesmo resultado a partir das leis da termodinâmica clássica e, por isso, a Equação 3-4 é hoje conhecida como lei de Stefan-Boltzmann. Observe que, de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann, a potência por unidade de área irradiada por um corpo negro é função apenas da temperatura e, portanto, não depende de outras características do corpo, como a cor ou o material de que é feito. Observe, também, que R representa a *rapidez* com a qual o corpo emite energia. Assim, por exemplo, se multiplicarmos por dois a temperatura absoluta do corpo, este emitirá uma quantidade de energia $2^4 = 16$ vezes maior no mesmo período de tempo. Um aumento de temperatura de apenas 57 °C faz com que um corpo à temperatura ambiente (300 K) passe a irradiar duas vezes mais energia por unidade de tempo. Assim, a lei de Stefan-Boltzmann tem uma importância enorme para o estabelecimento do equilíbrio térmico.

Os objetos que não são corpos negros irradiam energia por unidade de área com uma rapidez menor que um corpo negro à mesma temperatura; o valor exato depende de outros fatores além da temperatura, como a cor e a composição da superfície. O efeito global de todos esses fatores é representado por um parâmetro denominado *emissividade* (representado pelo símbolo ϵ), que multiplica o lado direito da Equação 3-4. O valor de ϵ, que não depende da temperatura, é sempre menor que a unidade.

As observações revelam que, da mesma forma que a potência total irradiada R, a *distribuição espectral* da radiação emitida por um corpo negro depende *apenas* da temperatura absoluta T. A Figura 3-3 mostra, de forma esquemática, um dispositivo experimental usado para determinar a distribuição espectral. Seja $R(\lambda)d\lambda$ a potência emitida por unidade de área com comprimentos de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$. A Figura 3-4 mostra os valores experimentais da distribuição espectral $R(\lambda)$ em função de λ para vários valores de T entre 1.000 K e 6.000 K.

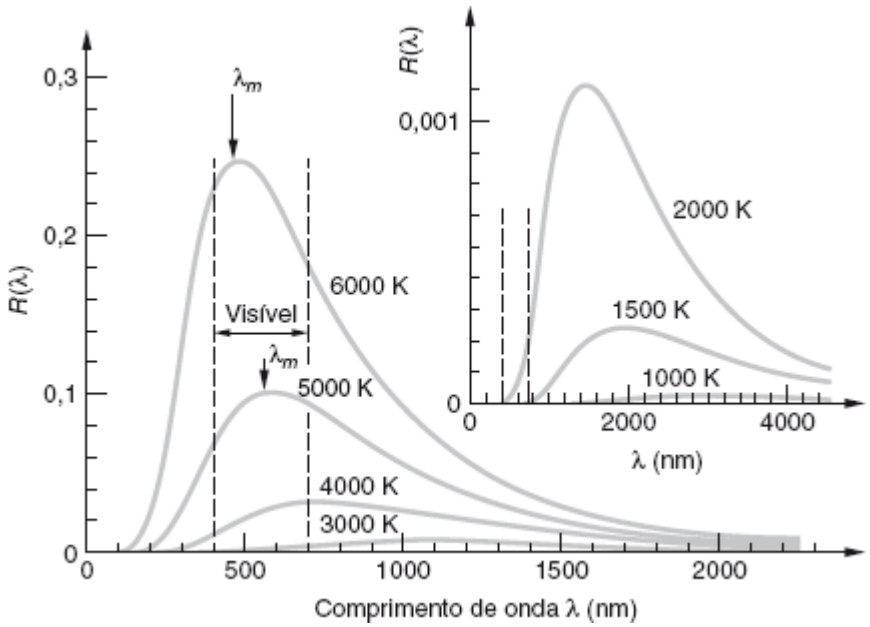


FIGURA 3-4 Função distribuição espectral $R(\lambda)$ para várias temperaturas. O eixo vertical está em unidades arbitrárias, apenas para fins de comparação. Observe a faixa do espectro visível, indicada por retas tracejadas. A radiação emitida pelo Sol se parece muito com a de um corpo negro a 5.800 K. O comprimento de onda λ_m está indicado para as curvas de 5.000 K e 6.000 K.

As curvas de $R(\lambda)$ em função de λ da Figura 3-4 apresentam várias propriedades interessantes. Uma é que o comprimento de onda para o qual a radiação é máxima varia inversamente com a temperatura:

$$\lambda_m \propto \frac{1}{T}$$

ou

$$\lambda_m T = \text{constante} = 2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \qquad \textbf{3-5}$$

Este resultado, conhecido como lei de deslocamento de Wien, foi obtido pela primeira vez por Wien em 1893. Os Exemplos 3-1 e 3-2 ilustram a aplicação da lei de deslocamento de Wien a situações reais.

EXEMPLO 3-1 Qual É o Tamanho de uma Estrela? A medida do comprimento de onda para o qual a radiação $R(\lambda)$ de uma estrela é máxima indica que a temperatura da superfície da estrela é 3.000 K. Se a potência irradiada pela estrela é 100 vezes maior que a potência $P_\odot$ irradiada pelo Sol, qual é o tamanho da estrela? (O símbolo $\odot$ é usado para representar o Sol.) A temperatura da superfície do Sol é 5.800 K.

SOLUÇÃO

Supondo que o Sol e a estrela se comportam como corpos negros (os astrônomos quase sempre fazem esta suposição, com base, entre outras coisas, no fato de que o espectro solar é muito semelhante ao de um corpo negro), as temperaturas da superfície dos dois astros, calculadas com o auxílio da Equação 3-5, são 5.800 K e 3.000 K, respectivamente. As medidas também indicam que $P_{\text{estrela}} = 100P_\odot$. Assim, de acordo com a Equação 3-4, temos:

$$R_{\text{estrela}} = \frac{P_{\text{estrela}}}{(\text{área})_{\text{estrela}}} = \frac{100\,P_\odot}{4\pi r^2_{\text{estrela}}} = \sigma T^4_{\text{estrela}}$$

e

$$R_\odot = \frac{P_\odot}{(\text{área})_\odot} = \frac{P_\odot}{4\pi r^2_\odot} = \sigma T^4_\odot$$

Assim,

$$r_{\text{estrela}}^2 = 100\, r_\odot^2 \left(\frac{T_\odot}{T_{\text{estrela}}}\right)^4$$

$$r_{\text{estrela}} = 10\, r_\odot \left(\frac{T_\odot}{T_{\text{estrela}}}\right)^2 = 10\left(\frac{5800}{3000}\right)^2 r_\odot$$

$$r_{\text{estrela}} = 37{,}4\, r_\odot$$

Como $r_\odot = 6{,}96 \times 10^8$ m, a estrela tem um raio de aproximadamente $2{,}6 \times 10^{10}$ m, ou seja, metade do raio da órbita de Mercúrio. Isso significa que a estrela é uma gigante vermelha (veja o Capítulo 13).

A Equação de Rayleigh-Jeans

O cálculo da distribuição espectral $R(\lambda)$ de um corpo negro envolve a determinação da densidade de energia das ondas eletromagnéticas no interior de uma cavidade. Embora substâncias como o veludo negro e o negro de fumo se comportem aproximadamente como um corpo negro, a melhor realização prática de um corpo negro ideal é uma cavidade ligada ao exterior por uma pequena abertura (como um buraco de fechadura na porta de um armário sem janelas; veja a Figura 3-5). A probabilidade de que um raio que entra na cavidade torne a sair pelo furo antes de ser absorvido pelas paredes é extremamente pequena. A potência irradiada para fora da cavidade é proporcional à densidade total de energia U (energia da radiação por unidade de volume) no interior da cavidade. É possível demonstrar que a constante de proporcionalidade é igual a $c/4$, em que c é a velocidade da luz.[8] Assim, temos:

$$R = \frac{1}{4}cU \qquad \textbf{3-6}$$

Da mesma forma, a distribuição espectral da potência emitida pela cavidade é proporcional à distribuição espectral da densidade de energia no interior da cavidade. Se $u(\lambda)d\lambda$ é a fração da energia por unidade de volume no interior da cavidade na faixa de comprimentos de onda entre λ e $\lambda + d\lambda$, temos a seguinte relação entre $R(\lambda)$ e $u(\lambda)$:

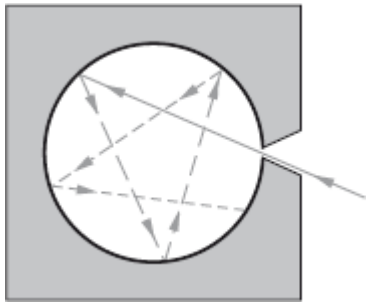


FIGURA 3-5 Uma cavidade ligada ao exterior por um pequeno furo é uma boa aproximação de um corpo negro. É muito pouco provável que a radiação que penetra pelo furo consiga escapar em vez de ser absorvida pelas paredes da cavidade.

$$R(\lambda) = \frac{1}{4}cu(\lambda) \qquad \textbf{3-7}$$



16

A função $u(\lambda)$ pode ser calculada classicamente sem muita dificuldade. Para isso, basta determinar o número de modos de oscilação do campo eletromagnético no interior da cavidade cujos comprimentos de onda estão no intervalo de λ a $\lambda + d\lambda$ e multiplicar o resultado pela energia média por modo. O resultado é que o número de modos de oscilação por unidade de volume, $n(\lambda)$, não depende da forma da cavidade e é dado por

$$n(\lambda) = 8\pi\lambda^{-4} \qquad \textbf{3-8}$$

De acordo com a teoria clássica, a energia média por modo de oscilação é igual a kT, a mesma que para o oscilador harmônico unidimensional, em que k é a constante de Boltzmann. De acordo com a teoria clássica, portanto, a distribuição espectral da densidade de energia é dada por

$$u(\lambda) = kTn(\lambda) = 8\pi kT\lambda^{-4} \qquad \textbf{3-9}$$

A relação expressa pela Equação 3-9, demonstrada pela primeira vez por Lord Rayleigh,[9] é conhecida como *lei de Rayleigh-Jeans* e está representada graficamente na Figura 3-6.

Para grandes comprimentos de onda, a lei de Rayleigh-Jeans está de acordo com os resultados experimentais; para pequenos

comprimentos de onda, porém, a lei prevê que $u(\lambda)$ deveria aumentar sem limites, tendendo para infinito quando $\lambda \rightarrow 0$, enquanto os resultados experimentais mostram (Figura 3-4) que a função distribuição da densidade de energia tende a zero quando $\lambda \rightarrow 0$. A enorme discrepância entre os resultados da teoria clássica e as observações experimentais para pequenos comprimentos de onda foi denominada *catástrofe do ultravioleta*. O uso do termo catástrofe não é um exagero; de acordo com a Equação 3-9,

$$\int_0^\infty u(\lambda)\, d\lambda \rightarrow \infty \qquad \textbf{3-10}$$

ou seja, a densidade de energia de qualquer corpo negro deveria ser infinita, o que, obviamente, não está de acordo com a realidade.

A Lei de Planck

Em 1900, o físico alemão Max Planck[10] anunciou que, depois de adotar algumas hipóteses um pouco estranhas, havia conseguido obter uma função $u(\lambda)$ que estava de acordo com os resultados experimentais. O cientista encontrara primeiro uma função empírica que reproduzia os dados experimentais e em seguida descobrira uma forma de modificar os cálculos clássicos de modo a obter a função empírica. Podemos entender o tipo de modificação que era necessário se observarmos que, para qualquer cavidade, quanto menor o comprimento de onda, maior o número de ondas estacionárias (modos). Assim, quando $\lambda \rightarrow 0$, o número de modos de oscilação tende a infinito, como mostra a Equação 3-8. Para que a função distribuição de densidade de energia $u(\lambda)$ tenda a zero, é preciso que a energia média por modo dependa do comprimento de onda λ e tenda a 0 quando $\lambda \rightarrow 0$ em vez de ser igual a kT para todos os comprimentos de onda, como reza a teoria clássica.

Neste ponto, convém observar que os cientistas que estudavam a catástrofe do ultravioleta (e eram muitos, além de Planck) não tinham meios de saber *a priori* se o problema estava no número de modos $n(\lambda)$, na energia por modo, ou em ambos. Do ponto de vista clássico, os dois cálculos estavam corretos. Muitas tentativas foram feitas para modificar um dos dois fatores de modo a resolver o problema. No final, verificou-se que a culpa era da energia por modo.

Classicamente, as ondas eletromagnéticas no interior da cavidade são produzidas por cargas elétricas nas paredes, que vibram como osciladores harmônicos simples. O leitor deve se lembrar de que a radiação emitida por um oscilador harmônico tem a mesma frequência que o próprio oscilador. A energia média de um oscilador harmônico simples unidimensional pode ser calculada a partir da função distribuição de energia, que, por sua vez, pode ser obtida a partir da função de distribuição de Maxwell-Boltzmann. A função distribuição de energia tem a seguinte forma (veja o Capítulo 8):

$$f(E) = Ae^{-E/kT} \qquad \textbf{3-11}$$

em que A é uma constante e $f(E)$ é a fração dos osciladores com energia compreendida entre E e $E + dE$. A energia média $\overline{E}$, como qualquer média ponderada, é dada por

$$\overline{E} = \int_0^\infty Ef(E)\,dE = \int_0^\infty EAe^{-E/kT}\,dE \qquad \textbf{3-12}$$

Calculando o valor da integral da Equação 3-12, obtemos $\overline{E} = kT$, o resultado clássico usado por Rayleigh e outros.

Planck descobriu que podia obter a função empírica que usara para calcular a energia média $\overline{E}$ supondo que a energia das cargas oscilantes, e, portanto, da radiação emitida, era uma variável discreta, ou seja, uma variável capaz de assumir apenas os valores 0, ϵ, 2ϵ, . . . , $n\epsilon$, em que n é um número inteiro. Além disso, era necessário supor que ε era proporcional à frequência dos osciladores e, portanto, à frequência da radiação. Assim, Planck supôs que a energia era dada por

$$E_n = n\epsilon = nhf \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{3-13}$$

em que h é uma constante, hoje conhecida como *constante de Planck*. Nesse caso, a função de distribuição de Maxwell-Boltzmann (Equação 3-11) se torna

$$f_n = Ae^{-E_n/kT} = Ae^{-n\epsilon/kT} \qquad \textbf{3-14}$$

na qual a constante A é determinada pela condição de normalização segundo a qual a soma de todas as frações f_n deve ser igual à unidade:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = A\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon/kT} = 1 \qquad \textbf{3-15}$$

A energia média de um oscilador é dada por um somatório análogo à integral que aparece na Equação 3-12:

$$\overline{E} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n f_n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n A e^{-E_n/kT} \qquad \textbf{3-16}$$

Calculando os somatórios das Equações 3-15 e 3-16 (veja o Problema 3-60), obtemos:

$$\overline{E} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} = \frac{hc/\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \qquad \textbf{3-17}$$

Multiplicando este resultado pelo número de osciladores por unidade de volume no intervalo entre λ e $\lambda + d\lambda$ (Equação 3-8), obtemos a função distribuição da densidade de energia no interior da cavidade:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} \qquad \textbf{3-18}$$

A Equação 3-18, denominada *lei de Planck*, está representada graficamente na Figura 3-6. Como se pode ver, a concordância com os resultados experimentais é excelente.

Para valores muito grandes de λ, podemos substituir a exponencial da Equação 3-18 pelos dois primeiros termos da expansão $e^x = 1 + x + \ldots$, em que $x = hc/\lambda kT$. Nesse caso, temos:

$$e^{hc/\lambda kT} - 1 \approx \frac{hc}{\lambda kT}$$

e

$$u(\lambda) \to 8\pi\lambda^{-4}kT$$

que é a fórmula de Rayleigh-Jeans. Para pequenos valores de λ, podemos desprezar o 1 no denominador da Equação 3-18, o que nos dá

$$u(\lambda) \to 8\pi hc\lambda^{-5}e^{-hc/\lambda kT} \to 0$$

quando $\lambda \to 0$. A lei de Planck também permite calcular o valor da constante que aparece na lei de deslocamento de Wien (veja o Problema 3-23).

O valor de h, a constante de Planck, pode ser determinado ajustando a função dada pela Equação 3-18 aos resultados experimentais ou realizando uma medida direta (veja a Seção 3-3), o que é melhor, porém mais difícil. O valor atualmente aceito é

$$h = 6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} = 4{,}136 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s} \qquad \textbf{3-19}$$

Planck tentou, sem sucesso, reconciliar sua lei com os princípios da física clássica. A importância do fenômeno de quantização, expresso pela Equação 3-13, não escapou inteiramente a Planck e outros cientistas da época, mas só foi realmente apreciada a partir de 1905. Foi nesse ano que Einstein usou as mesmas ideias para explicar o efeito fotelétrico e sugeriu que, em vez de ser apenas uma propriedade misteriosa dos osciladores nas paredes das cavidades e da radiação dos corpos negros, a quantização era uma característica fundamental da energia luminosa.

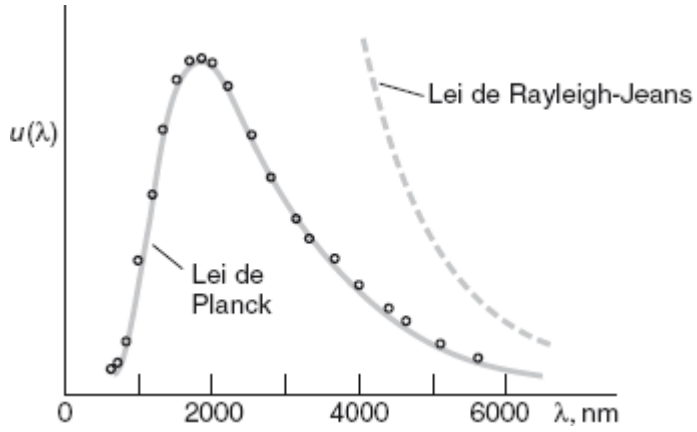


FIGURA 3-6 Comparação da lei de Planck e da lei de Rayleigh-Jeans com os resultados experimentais obtidos por W. W. Coblentz, por volta de 1915, para um buraco negro a uma temperatura T = 1.600 K. A escala do eixo vertical é linear. [Adaptado de F.K. Richtmyer,

E.H. Kennard e J.N. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, 6th ed., McGraw-Hill Book Company, New York, 1969, com permissão.]

EXEMPLO 3.2 **Máximo do Espectro Solar** A temperatura na superfície do Sol é aproximadamente 5.800 K e as medidas da distribuição espectral da luz solar mostram que o astro se comporta como um corpo negro, a não ser para comprimentos de onda muito pequenos. Supondo que o Sol seja um corpo negro ideal, qual é o comprimento de onda para o qual a intensidade da radiação emitida é máxima?

O espectro eletromagnético emitido por lâmpadas incandescentes obedece aproximadamente às leis da radiação de corpo negro; a fração de luz visível emitida depende da temperatura do filamento. Um instrumento de medida que se baseia nas propriedades do corpo negro é o pirômetro ótico, um dispositivo usado para medir a temperatura de fornos e corpos incandescentes, como o aço fundido nas usinas siderúrgicas.

SOLUÇÃO

1. No caso de um corpo negro ideal, o comprimento de onda correspondente à intensidade máxima é dado pela Equação 3-5:

$$\lambda_m T = \text{constante} = 2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}$$

2. Explicitando λ_m e substituindo T pelo seu valor, obtemos:

$$\lambda_m = (2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K})/T = \frac{2{,}898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{5800\ \text{K}}$$

$$= \frac{2{,}898 \times 10^{6}\ \text{nm} \cdot \text{K}}{5800\ \text{K}} = 499{,}7\ \text{nm}$$

em que $1\ \text{nm} = 10^{-9}\ \text{m}$.

em que 1 nm = 10^{-9} m.

Observação: *Este comprimento de onda está quase no centro do espectro visível.*

EXEMPLO 3-3 **Energia Média de um Oscilador** De acordo com a teoria de Planck, qual é a energia média $\overline{E}$ de um oscilador cuja energia clássica é kT?

SOLUÇÃO

Fazendo $\epsilon = hf = kT$ na Equação 3-17, temos:

$$\overline{E} = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} = \frac{kT}{e^{1} - 1} = 0{,}582\,kT$$

Observação: *Lembre-se de que, de acordo com a teoria clássica,* $\overline{E} = kT$ *para qualquer frequência.*

EXEMPLO 3-4 **A Lei de Stefan-Boltzmann Como Consequência da Lei de Planck** Use a lei de Planck para mostrar que a densidade total de energia de um corpo negro é proporcional da T^4, o que está de acordo com a lei de Stefan-Boltzmann.

SOLUÇÃO

A densidade total de energia pode ser calculada integrando a função distribuição da densidade de energia (Equação 3-18) para todos os comprimentos de onda:

$$U = \int_0^\infty u(\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$

Para calcular a integral, definimos uma variável adimensional $x = hc/\lambda kT$. Nesse caso, $dx = -(hc/\lambda^2 kT)\,d\lambda$. Explicitando $d\lambda$, obtemos: $d\lambda = -\lambda^2(kT/hc)\,dx$ e, portanto,

$$U = -\int_0^\infty \frac{8\pi hc\lambda^{-3}}{e^x - 1}\left(\frac{kT}{hc}\right)dx = 8\pi hc\left(\frac{kT}{hc}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx$$

Como a integral é adimensional, isso mostra que U é proporcional a T^4. É possível demonstrar que o valor da integral imprópria é $\pi^4/15$. Nesse caso, $U = (8\pi^5 k^4/15h^3c^3)T^4$. Este resultado pode ser combinado com as Equações 3-4 e 3-6 para expressar σ, a constante de Stefan, em função de π, k, h e c (veja o Problema 3-13).

Um exemplo importante de aplicação da lei de Planck foi seu uso para estudar a radiação de micro-ondas proveniente do espaço sideral. Os modelos cosmológicos atuais sugerem que o universo começou com uma gigantesca explosão, o chamado Big Bang. Um dos efeitos previstos dessa explosão era encher o universo de uma radiação cuja distribuição espectral corresponderia à de um corpo negro ideal. A temperatura inicial do universo era extremamente elevada; com o passar do tempo, porém, o universo esfriou até atingir a temperatura que possui hoje em dia, T_{atual}. Assim, deveria existir no universo uma radiação de fundo com uma distribuição espectral correspondente à de um corpo negro à temperatura T_{atual}.

Em 1965, Arno Penzias e Robert Wilson descobriram que uma radiação com 7,35 cm de comprimento (ou seja, na faixa das micro-ondas) estava chegando à Terra com a mesma intensidade de todas as direções do espaço. Logo se especulou que essa radiação podia ser um resíduo do Big Bang; foram então realizadas medidas em outros comprimentos de onda para levantar uma curva experimental da densidade de energia $u(\lambda)$ em função de λ. Os dados mais recentes do satélite Cosmic Background Explorer (COBE), mostrados na Figura 3-7, e do Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), são compatíveis com a radiação emitida por um corpo negro com uma temperatura de 2,725 ± 0,001 K. A excelente concordância dos resultados experimentais com a lei de Planck é considerada uma forte evidência de que o universo realmente se originou de uma grande explosão (veja o Capítulo 13).

3-3 Efeito Fotelétrico

É uma das grandes ironias da história da ciência que no famoso experimento, realizado em 1887, em que Hertz[11] produziu e detectou ondas eletromagnéticas, confirmando assim a teoria ondulatória da luz de Maxwell, tenha sido observado também, pela primeira vez, o efeito fotelétrico, que levou diretamente à descrição da luz em termos de partículas. Hertz, que estava usando um circuito sintonizado com um centelhador para gerar as ondas e um circuito semelhante para detectá-las, observou acidentalmente que, quando a luz proveniente do centelhador do transmissor deixava de incidir no centelhador do receptor, era necessário reduzir a distância entre os eletrodos do segundo centelhador para continuar recebendo os sinais. A luz facilitava, portanto, a produção de centelhas. Nas palavras do próprio cientista:

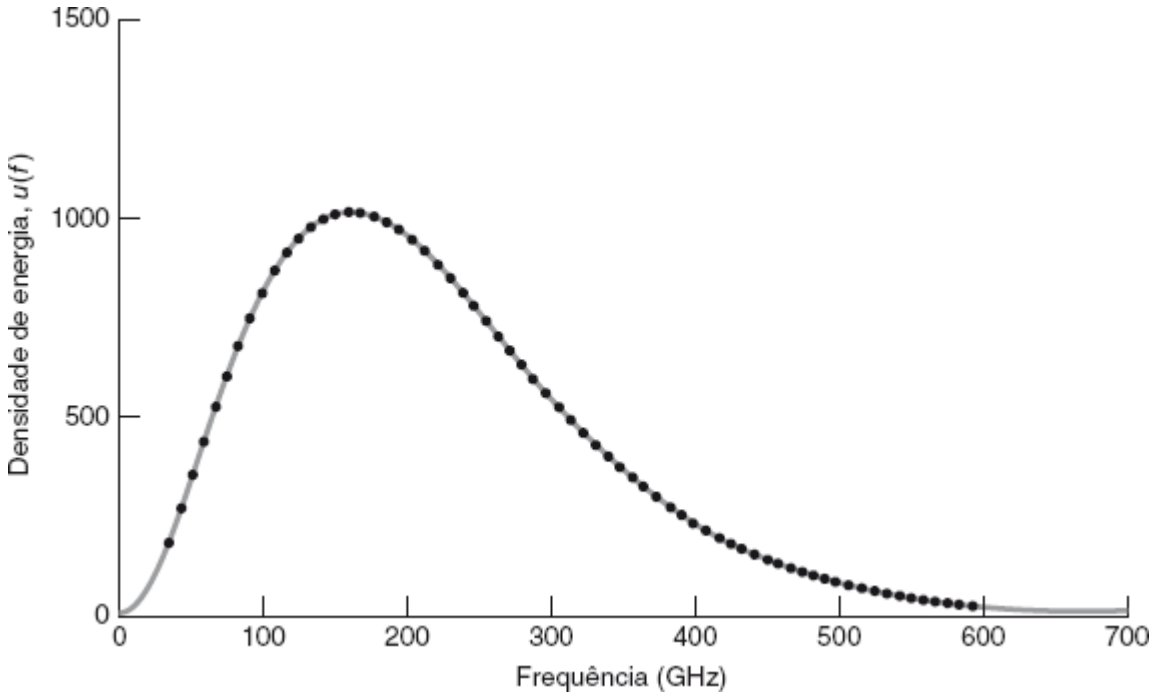
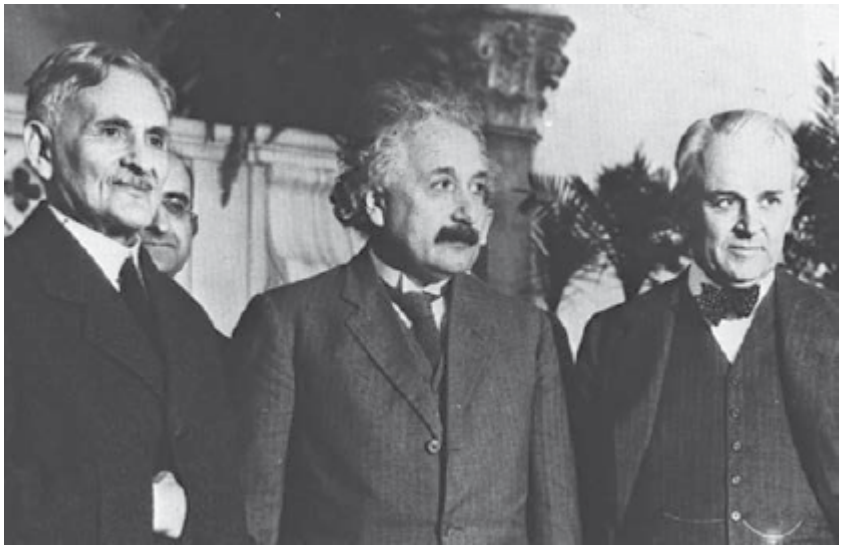


FIGURA 3-7 Variação com a frequência da densidade de energia da radiação cósmica de fundo. A curva contínua representa a lei de Planck para $T = 2{,}725$ K. Os pontos são dados experimentais colhidos pelo satélite COBE.

Em uma série de experimentos para estudar os efeitos da ressonância entre oscilações elétricas muito rápidas, que

executei e publiquei recentemente, duas centelhas elétricas eram produzidas pela mesma descarga de uma bobina de indução e, portanto, ocorriam simultaneamente. Uma dessas centelhas, a centelha *A*, era a centelha de descarga da bobina de indução e servia para excitar a oscilação primária. Ocasionalmente, coloquei o centelhador *B* no interior de uma caixa escura para poder observar melhor as centelhas; ao fazer isso, observei que o tamanho das centelhas era visivelmente menor quando o centelhador *B* estava dentro da caixa.[12]

A descoberta inesperada do efeito fotelétrico incomodou Hertz porque interferia em sua pesquisa principal, mas o cientista reconheceu imediatamente que se tratava de um fenômeno muito importante e interrompeu todos os outros trabalhos durante seis meses para estudá-lo mais de perto. Seus resultados, publicados naquele mesmo ano, foram complementados por outros pesquisadores. Descobriu-se que partículas negativas eram emitidas quando uma superfície limpa era exposta à luz. Em 1900, P. Lenard submeteu essas partículas a um campo magnético e descobriu que apresentavam uma razão carga-massa da mesma ordem que a observada nos raios catódicos estudados por Thomson; em outras palavras, as partículas emitidas eram elétrons.



Albert A. Michelson, Albert Einstein e Robert A. Millikan em um encontro em Pasadena, Califórnia, em 1931. [*AP/Wide World Photos*.]

A Figura 3-8 mostra um diagrama esquemático do equipamento usado por Lenard. Quando a luz *L* incide em uma superfície metálica (catodo *C*), elétrons são emitidos. Se alguns dos elétrons que chegam ao anodo *A* passam por um pequeno furo, é produzida uma corrente elétrica no circuito do eletrômetro externo ligado a α. O número de elétrons que chegam ao anodo pode ser aumentado ou diminuído tornando o anodo positivo ou negativo em relação ao catodo. Chamando de V a diferença de potencial entre o catodo e o anodo, a Figura 3-9*a* mostra a corrente em função de V para dois valores de intensidade da luz incidente no catodo. Quando V é positiva, os elétrons são atraídos para o anodo. Para um valor suficientemente grande de V, todos os elétrons emitidos chegam ao anodo e a corrente atinge o valor máximo. Lenard observou que a corrente máxima era proporcional à intensidade da luz, um resultado esperado, já que o número de elétrons emitidos deveria ser proporcional à energia por unidade de tempo incidente no catodo. Entretanto, ao contrário do que previa a teoria clássica, não foi observada uma intensidade mínima abaixo da qual a corrente fosse nula. Uma luz muito fraca não deveria fornecer aos elétrons a energia necessária para escapar da superfície do metal. Quando V é negativa, os elétrons são repelidos pelo anodo; assim, apenas os elétrons com uma energia cinética inicial $mv^2/2$ maior que $e|V|$ conseguem chegar ao anodo. Como se pode ver na Figura 3-9*a*, para $V < -V_0$, a corrente é nula. O potencial V_0 é denominado *potencial de corte* e está relacionado à energia cinética máxima dos elétrons emitidos por meio da equação

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = eV_0 \qquad \textbf{3-20}$$

Os resultados experimentais, ilustrados na Figura 3-9*a*, mostram que V_0 não depende da intensidade da luz incidente, o que deixou os cientistas surpresos. Aparentemente, o aumento da energia por unidade de tempo incidente no catodo não resultava em um aumento da energia cinética máxima dos elétrons emitidos, o que estava em total desacordo com a teoria clássica. Em 1905, Einstein ofereceu uma explicação para esta observação em um artigo que foi publicado no mesmo volume dos *Annalen der Physik* que seus trabalhos a respeito da relatividade restrita e do movimento browniano.

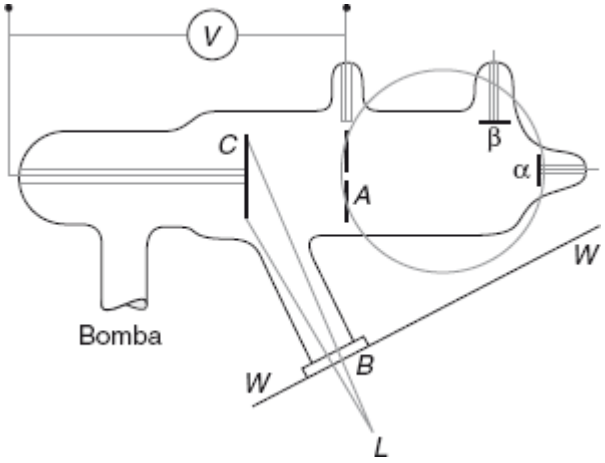


FIGURA 3-8 Diagrama esquemático do equipamento usado por P. Lenard para observar o efeito fotelétrico e provar que as partículas emitidas são elétrons. A luz proveniente da fonte *L* incide no catodo *C*. As partículas emitidas pelo catodo que passam pelo furo do anodo *A* são indicadas por um eletrômetro ligado a α. Um campo magnético, representado na figura por um círculo, podia defletir as partículas para um segundo eletrômetro ligado a β, o que permitia determinar o sinal da carga das partículas e a razão *e*/*m*. [*Fonte*: P. Lenard, *Annalen der Physik*, **2**, 359 (1900).]

Entre as muitas aplicações do efeito fotelétrico está o fotomultiplicador, um dispositivo que torna possível medir com grande precisão a energia da luz absorvida por uma superfície fotossensível. Os observatórios de neutrinos SNO, Kamiokande e Ice Cube (veja o Capítulo 12) utilizam milhares de fotomultiplicadores. Outras centenas foram instaladas em vários experimentos para detectar neutrinos de alta energia no fundo dos oceanos.

Segundo Einstein, *a quantização da energia usada por Planck no problema do corpo negro era, na verdade, uma característica universal da luz.* Em vez de estar distribuída uniformemente no espaço no qual se propaga, a luz é constituída por quanta discretos, de energia *hf*. Quando um desses quanta, denominados *fótons*, chega à superfície do catodo, toda a sua energia é transferida para um elétron. Se ϕ é a energia necessária para remover um elétron da superfície (ϕ recebe o nome de *função trabalho* e varia de metal para metal), a energia cinética máxima dos elétrons emitidos pelo catodo é dada por $hf - \phi$ em virtude da lei de conservação da energia; veja a Figura 3-9*c*. (Alguns elétrons têm uma energia menor do que este valor por causa da energia gasta para atravessar o metal.) Sendo assim, o potencial de corte V_0 é dado por

$$eV_0 = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\text{máx}} = hf - \phi \qquad \textbf{3-21}$$

A Equação 3-21 é chamada de equação do efeito fotelétrico. Como observou Einstein,

Se a fórmula a que chegamos estiver correta, V_0, quando representada em coordenadas cartesianas em função da frequência da luz incidente, deverá ser uma linha reta cuja inclinação não depende da natureza da substância emissora.[13]

De acordo com a Equação 3-21, a inclinação da reta que representa o potencial de corte V_0 em função da frequência *f* é igual a *h*/*e*. Na época em que Einstein fez esta previsão, não havia nenhuma comprovação experimental de que a constante de Planck estivesse relacionada ao efeito fotelétrico. Também não havia provas de que o potencial de corte fosse função da frequência. Experimentos realizados por Millikan em 1914 e 1916 mostraram que a Equação 3-21 estava correta e o valor de *h* calculado a partir desses experimentos concordou com o valor obtido por Planck. A Figura 3-10 mostra um dos gráficos de Millikan.

A frequência mínima para que o efeito fotelétrico seja observado, denominada f_t nos gráficos da Figura 3-9*b* e da Figura 3-10, e o comprimento de onda máximo correspondente, λ_t, podem ser obtidos a partir da função trabalho fazendo $V_0 = 0$ na Equação 3-21:

$$\phi = hf_t = \frac{hc}{\lambda_t} \qquad \textbf{3-22}$$

Os fótons de frequência menor que f_t (e, portanto, de comprimento de onda maior que λ_t) não têm energia suficiente para ejetar elétrons do metal. Para a maioria dos metais, a função trabalho é da ordem de alguns elétrons-volts. A Tabela 3-1 mostra as funções trabalho de alguns elementos.

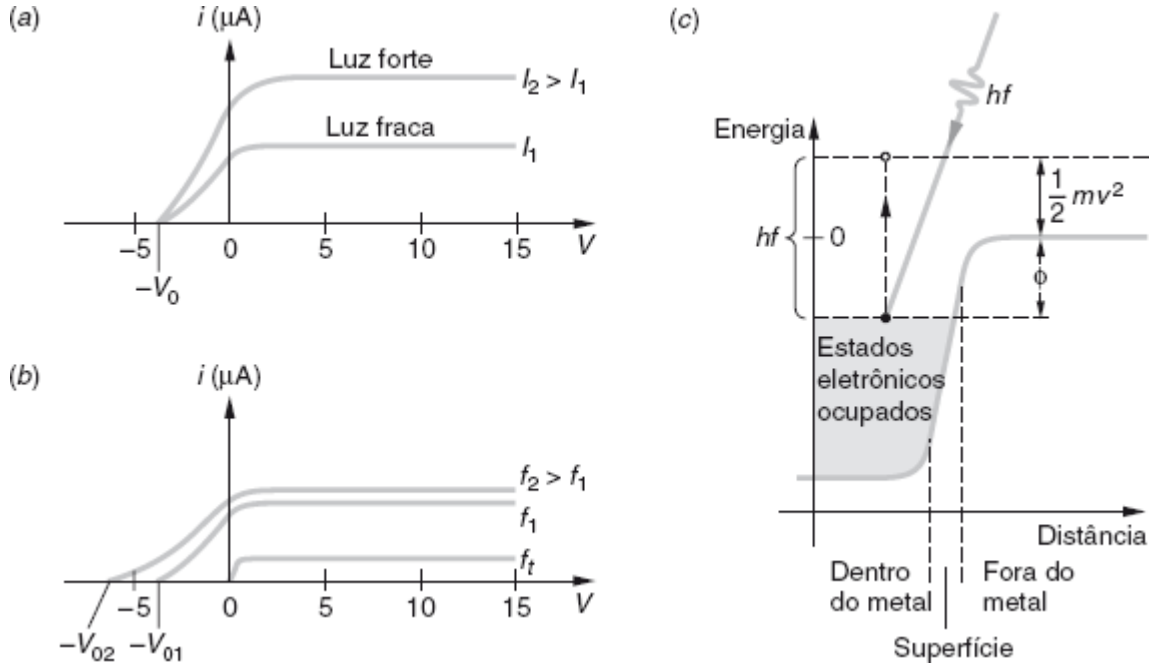


FIGURA 3-9 (*a*) Fotocorrente i em função da tensão do anodo V para uma luz de frequência f e duas intensidades I_1 e I_2, com $I_2 > I_1$. A tensão de corte V_0 é a mesma nos dois casos. (*b*) Para I constante e duas frequências f_1 e f_2, com $f_2 > f_1$, a interpretação de Einstein do efeito fotelétrico sugere que o valor absoluto da tensão de corte deve ser maior para f_2, o que é confirmado pelos resultados experimentais, e que deve haver uma frequência de corte f_t abaixo da qual não são emitidos elétrons, o que também está de acordo com as observações. (*c*) Energia potencial dos elétrons nas proximidades da superfície de um metal. Um elétron do metal com a maior energia possível absorve um fóton de energia hf. De acordo com a lei de conservação da energia, a energia cinética do elétron após deixar o metal deve ser $hf - \phi$.

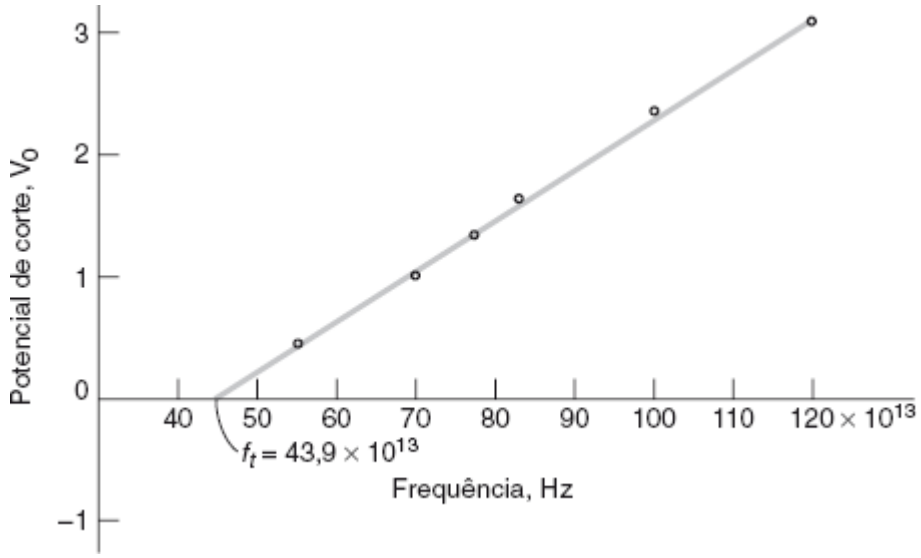


FIGURA 3-10 Dados obtidos por Millikan para o potencial de corte em função da frequência. Os dados estão sobre uma reta cuja inclinação é h/e, como tinha sido previsto por Einstein dez anos antes que o experimento fosse realizado. O ponto em que a reta intercepta o eixo vertical corresponde a um potencial elétrico $-\phi/e$. [*Fonte*: R.A. Millikan, *Physical Review*, 7, 362 (1915).]

Tabela 3-1 Funções trabalho de alguns elementos

Elemento	Função trabalho (eV)
Na	2,28
Cs	1,95
Cd	4,07

Al	4,08
Ag	4,73
Pt	6,35
Mg	3,68
Ni	5,01
Se	5,11
Pb	4,14

EXEMPLO 3-5 **Efeito Fotelétrico no Potássio** O comprimento de onda de corte do potássio é 558 nm. Qual é a função trabalho do potássio? Qual é o potencial de corte para uma luz incidente de 400 nm?

SOLUÇÃO

1. As duas questões podem ser respondidas com o auxílio da Equação 3-21:

$$eV_0 = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)_{\max} = hf - \phi$$

$$V_0 = \frac{hf}{e} - \frac{\phi}{e}$$

2. O comprimento de onda de corte é aquele para o qual os elétrons excitados têm exatamente a energia necessária para vencer a barreira de potencial. Assim, $(mv^2/2)_{\max} = 0$, $V_0 = 0$ e

$$\frac{\phi}{e} = \frac{hf_t}{e} = \frac{hc}{e\lambda_t}$$

$$= \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{558\ \text{nm}} = 2{,}22\ \text{eV}$$

3. Para uma luz incidente de 400 nm, a tensão V_0 é dada pela Equação 3-21:

$$V_0 = \frac{hf}{e} - \frac{\phi}{e} = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{\phi}{e}$$

$$= \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{400\ \text{nm}} - 2{,}22\ \text{eV}$$

$$= 3{,}10\ \text{eV} - 2{,}22\ \text{eV} = 0{,}88\ \text{V}$$

Outra propriedade importante do efeito fotelétrico que está em desacordo com a física clássica mas pode ser facilmente explicada pela hipótese dos fótons é a ausência de um intervalo de tempo mensurável entre o momento em que a fonte luminosa é ligada e o momento em que os elétrons emitidos pelo catodo começam a aparecer. Classicamente, a energia luminosa se distribui de forma homogênea ao longo da superfície do catodo; o tempo necessário para que uma região do tamanho de um átomo adquira energia suficiente para emitir um elétron pode ser calculado a partir da intensidade (potência por unidade de área) da radiação incidente. Na verdade, é possível ajustar a intensidade da luz incidente de tal forma que este tempo teórico seja da ordem de minutos ou mesmo horas. Entretanto, em todos os experimentos, os elétrons começam a ser emitidos no momento em que a fonte é ligada. De acordo com a hipótese dos fótons, a explicação desta observação é que, embora o número de fótons que incidem no metal por unidade de tempo seja pequeno quando a intensidade da luz é pequena, *cada* fóton tem energia suficiente para ejetar um elétron e existe uma probabilidade finita de que pelo menos alguns fótons sejam absorvidos

imediatamente. Por outro lado, a teoria clássica fornece o valor correto para o número *médio* de fótons absorvidos por unidade de tempo.

EXEMPLO 3-6 **O Tempo de Retardo Segundo a Teoria Clássica** Uma luz com uma intensidade de 10^{-2} W/m^2 e um comprimento de onda de 400 nm incide em um catodo de potássio. Determine o tempo de retardo para a emissão de elétrons, de acordo com a teoria clássica.

SOLUÇÃO

De acordo com o Exemplo 3-5, a função trabalho do potássio é 2,22 eV. Tomando $r = 10^{-10}$ m como o raio típico de um átomo, a energia total que incide no átomo até o instante t é dada por

$$\begin{aligned} E &= (10^{-2}\,\mathrm{W/m^2})(\pi r^2)t = (10^{-2}\,\mathrm{W/m^2})(\pi 10^{-20}\,\mathrm{m^2})t \\ &= (3{,}14 \times 10^{-22}\,\mathrm{J/s})t \end{aligned}$$

Fazendo essa energia igual a 2,22 eV, obtemos:

$$\begin{aligned} (3{,}14 \times 10^{-22}\,\mathrm{J/s})t &= (2{,}22\,\mathrm{eV})(1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}) \\ t &= \frac{(2{,}22\,\mathrm{eV})(1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV})}{(3{,}14 \times 10^{-22}\,\mathrm{J/s})} \\ &= 1{,}13 \times 10^{3}\,\mathrm{s} = 18{,}8\,\mathrm{min} \end{aligned}$$

Assim, segundo a teoria clássica, nenhum átomo deveria emitir um elétron nos primeiros 18,8 minutos após a lâmpada ser ligada. Por outro lado, de acordo com o modelo dos fótons, cada fóton possui energia suficiente para ejetar um elétron. Por causa da baixa intensidade da fonte luminosa, o número de fótons incidentes no catodo por unidade de tempo é pequeno, de modo que a probabilidade de que um determinado átomo absorva um fóton e emita um elétron em um dado intervalo de tempo é pequena. Entretanto, existem tantos átomos no catodo que alguns emitem elétrons logo que a fonte é ligada.

EXEMPLO 3-7 **Número de Fótons Incidentes** Quantos fótons incidem no catodo por segundo e por metro quadrado no Exemplo 3-6?

SOLUÇÃO

A energia por fóton é

$$\begin{aligned} E = hf = hc/\lambda &= (1240\,\mathrm{eV \cdot nm})/(400\,\mathrm{nm}) \\ &= (3{,}10\,\mathrm{eV})(1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}) = 4{,}96 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Como a intensidade da luz incidente é 10^{-2} W/m^2 = 10^{-2} J/s · m^2, o número de fótons por segundo e por metro quadrado é

$$\begin{aligned} N &= \frac{10^{-2}\,\mathrm{J/s \cdot m^2}}{4{,}96 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/fóton}} \\ &= 2{,}02 \times 10^{16}\,\mathrm{fótons/s \cdot m^2} \end{aligned}$$

Esse número de fótons pode parecer muito grande, mas, na realidade, é pequeno em comparação com o número de átomos que existem na superfície do catodo. O número de fótons por segundo por átomo da superfície é dado por n = [2,02 × 10^{16} fótons/s · m^2]/[π × $(10^{-10})^2$ átomos/m^2] = 6,3 × 10^{-4} fótons/s · átomo, ou seja, menos de 1 fóton por segundo para cada 1000 átomos.

EXEMPLO 3-8 **Sensibilidade do Olho Humano** Uma fonte pontual isotrópica de 100 W irradia luz com um comprimento de onda de 555 nm (verde amarelado). Este é o comprimento de onda para o qual o olho humano é mais sensível; um olho adaptado a um baixo nível de iluminação é capaz de detectar 10 fótons por segundo de uma radiação com este comprimento de onda. Supondo que a pupila do olho adaptado a um baixo nível de iluminação tem um diâmetro de 7 mm, a que distância da fonte o olho é capaz de captar a luz? (A resposta o deixará surpreso!)

SOLUÇÃO

1. A energia de um fóton de 555 nm é

$$E_{\text{fóton}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3{,}00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{555 \times 10^{-9}\,\text{m}}$$
$$= 3{,}58 \times 10^{-19}\,\text{J/fóton}$$

2. A fonte de 100 W emite

$$100\,\text{J/s} \times \frac{1\ \text{fóton}}{3{,}58 \times 10^{-19}\,\text{J}} = 2{,}79 \times 10^{20}\ \text{fótons/s}$$

3. Como 10 fótons/s devem passar pela pupila para que a luz seja detectada, o fluxo mínimo, em fótons por segundo e por metro quadrado de área da pupila, é dado por

$$\text{fluxo mínimo} = 10\,\frac{\text{fótons}}{\text{s}} \times \frac{1}{\pi R_{\text{pupila}}^2}$$
$$= \frac{10}{\pi(3{,}5 \times 10^{-3})^2}\,\frac{\text{fótons}}{\text{s}\cdot\text{m}^2}$$
$$= 2{,}60 \times 10^{5}\,\frac{\text{fótons}}{\text{s}\cdot\text{m}^2}$$

4. Como a fonte é isotrópica, este fluxo é atingido a uma distância da fonte dada por

$$4\pi r^2 = 2{,}79 \times 10^{20}\,\frac{\text{fótons}}{\text{s}} \times \frac{1\ \text{s}\cdot\text{m}^2}{2{,}60 \times 10^{5}\ \text{fótons}}$$
$$r^2 = \frac{2{,}79 \times 10^{20}}{4\pi(2{,}60 \times 10^{5})}\,\text{m}^2$$
$$r = 9{,}24 \times 10^{6}\,\text{m} = 9{,}24 \times 10^{3}\,\text{km}$$

Exercícios

3. De que forma o modelo dos fótons explica o fato de que a corrente associada ao efeito fotelétrico é proporcional à intensidade da luz incidente?

4. Quais são as propriedades do efeito fotelétrico que podem ser explicadas pela física clássica? Quais são as propriedades que não podem ser explicadas?

5. É realmente possível enxergar uma fonte à distância calculada no Exemplo 3-8?

A fotemissão de elétrons se tornou um método importante para investigar a estrutura dos cristais e moléculas e foi responsável pela descoberta de processos que eram totalmente desconhecidos na época de Hertz. O uso de fontes de raios X (veja a Seção 3-4) e detectores de precisão permitiu determinar as configurações exatas dos elétrons de valência nos compostos químicos, o que levou a uma melhor compreensão das ligações químicas e das diferenças entre as propriedades dos átomos na superfície e no interior dos sólidos. Os microscópios baseados no efeito fotelétrico que hoje estão sendo desenvolvidos poderão revelar o estado químico de cada elemento em uma amostra, uma informação extremamente importante para a biologia molecular e a microeletrônica. De certa forma, tudo isso é consequência de um fenômeno que, para Hertz, representava um mero incômodo. . . pelo menos a princípio.

3-4 Raios X e o Efeito Compton

Novas provas de que o modelo dos fótons estava correto foram colhidas por Arthur H. Compton, que mediu o espalhamento de raios X por elétrons livres e, analisando os resultados, dirimiu as últimas dúvidas em relação à relatividade restrita (veja o Capítulo 1). Antes de analisar com detalhes os resultados de Compton, vamos discutir rapidamente alguns experimentos anteriores usando raios X, já que permitem compreender melhor os processos de produção e espalhamento dos raios X e as

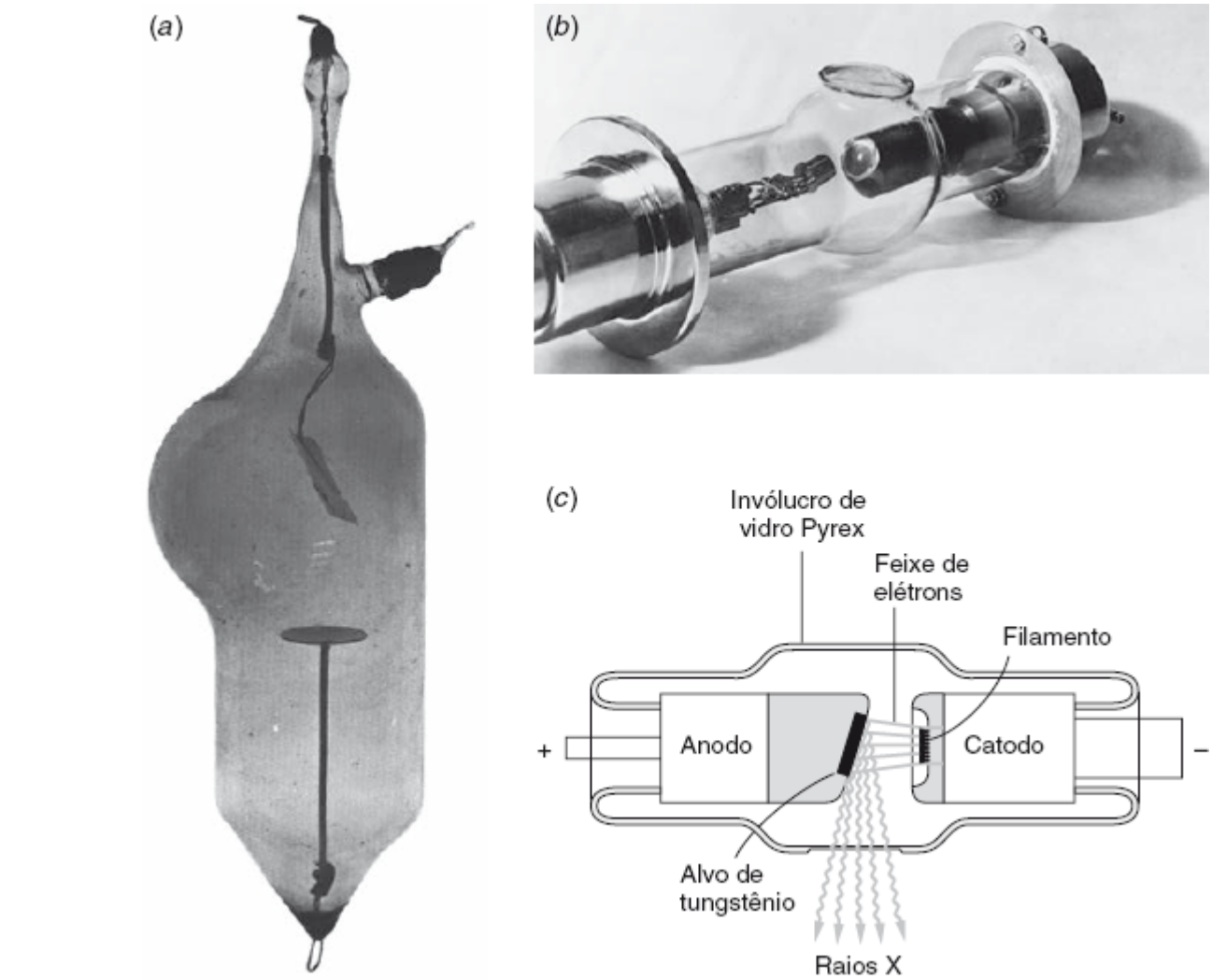
imagens de objetos astronômicos obtidas por observatórios em órbita (veja o Capítulo 13).

Raios X

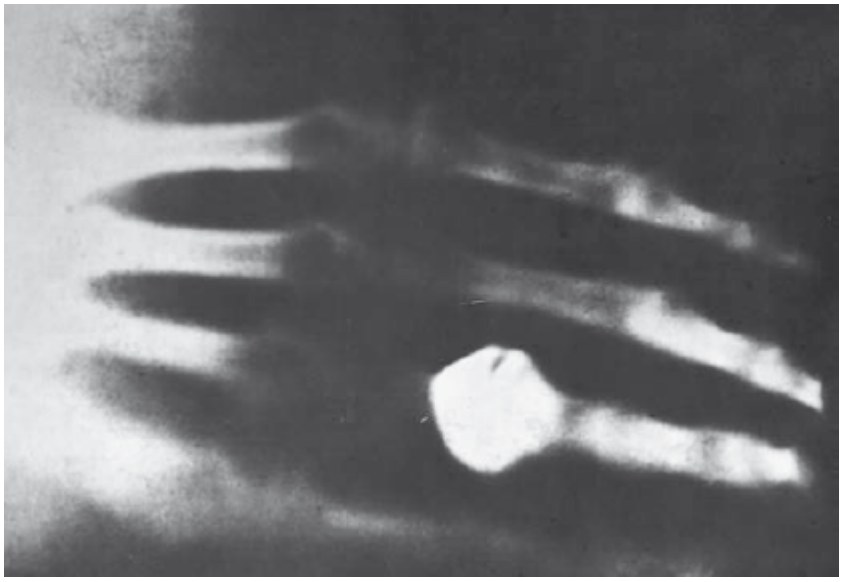
O físico alemão Wilhelm C. Roentgen descobriu os raios X em 1895, quando trabalhava com um tubo de raios catódicos. Tendo acontecido cinco anos antes da explicação de Planck para o espectro de emissão de um corpo negro, a descoberta de Roentgen foi o primeiro resultado significativo da física quântica. O cientista observou que os "raios" produzidos no ponto em que os raios catódicos (elétrons) atingiam o tubo de vidro, ou um alvo instalado no interior do tubo, podiam atravessar objetos opacos e excitar uma tela fluorescente ou um filme fotográfico. Roentgen investigou exaustivamente o fenômeno e descobriu que todos os materiais, em maior ou menor grau, eram transparentes a esses raios e que a transparência era inversamente proporcional à densidade do material. Essa observação fez com que os raios X começassem a ser usados na medicina alguns meses após a publicação do primeiro artigo de Roentgen.[14]

Roentgen observou que os raios recém-descobertos não eram afetados pela presença de um campo magnético, e não conseguiu observar os fenômenos de refração e interferência normalmente associados a ondas; por essa razão, batizou-os com o nome enigmático de raios X. Como a teoria eletromagnética clássica prevê que toda carga elétrica produz ondas eletromagnéticas ao ser acelerada ou freada, era natural supor que os raios X fossem ondas eletromagnéticas produzidas pelos elétrons ao se chocarem com os átomos do alvo. Esse tipo de radiação é chamado de *bremsstrahlung*, uma palavra que, em alemão, significa "radiação de frenagem". O pequeno alargamento sofrido por um feixe de raios X ao passar por uma fenda com alguns milésimos de milímetro de largura indicava que o comprimento de onda desses raios era da ordem de 10^{-10} m = 0,1 nm. Em 1912, Max von Laue sugeriu que, como os comprimentos de onda dos raios X eram da mesma ordem que o espaçamento dos átomos em um cristal, os átomos de um cristal poderiam se comportar como uma rede de difração tridimensional para os raios X. Os experimentos (veja a Figura 3-11) logo confirmaram que os raios X são uma forma de radiação eletromagnética com comprimentos de onda entre 0,01 e 0,10 nm e que os átomos dos cristais formam uma estrutura regular.

Em 1912, W. L. Bragg propôs um método simples e conveniente para analisar a difração dos raios X pelos cristais.[15] O cientista investigou a interferência dos raios X difratados por várias famílias de planos paralelos de átomos, hoje conhecidos como *planos de Bragg*. A Figura 3-12 mostra duas famílias de planos de Bragg em um cristal de NaCl, que possui uma estrutura denominada *cúbica de faces centradas*. Considere a Figura 3-13. As ondas difratadas por dois átomos sucessivos situados no mesmo plano estão em fase e, portanto, interferem construtivamente, independentemente do comprimento de onda, se o ângulo de difração for igual ao ângulo de incidência. (Esta condição é a mesma que para reflexão.) As ondas difratadas com o mesmo ângulo por átomos situados em planos diferentes estarão em fase (interferência construtiva) se a diferença entre os dois percursos for igual a um número inteiro de comprimentos de onda. De acordo com a Figura 3-13, esta condição é satisfeita se



(*a*) Um dos primeiros tubos de raios X. [*Cortesia do Cavendish Laboratory*.] (*b*) Com o passar do tempo, os tubos de raios X se tornaram mais compactos. Este tipo de tubo foi muito popular em meados do século XX. [*Cortesia do Schenectady Museum, Hall of Electrical History*, Schenectady, NY.]. (*c*) Diagrama esquemático de um tubo moderno de raios X. Os tubos modernos funcionam com tensões, correntes e intensidades de raios X muito maiores, mas os elementos básicos permanecem os mesmos.



Radiografia da mão da Sra. Roentgen, tirada por Roentgen algumas semanas depois que os raios X foram descobertos.

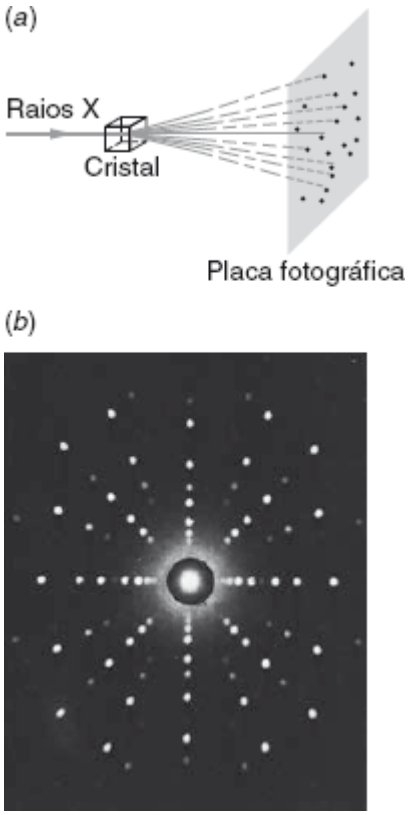


FIGURA 3-11 (*a*) Diagrama esquemático do experimento de Laue. O cristal se comporta como uma rede de difração tridimensional, difratando os raios X e produzindo uma série de pontos, denominada *figura de Laue*, em um filme fotográfico ou em um CCD sensível a raios X. (*b*) Figura de Laue de um cristal de boreto de nióbio, produzida usando uma tensão de 20 keV e um alvo de molibdênio. [*Fonte*: *General Electric Company*.]

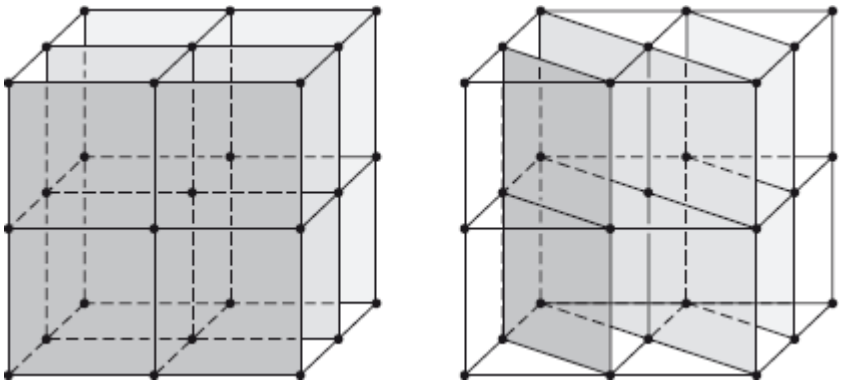


FIGURA 3-12 Duas famílias de planos paralelos em um cristal de NaCl.

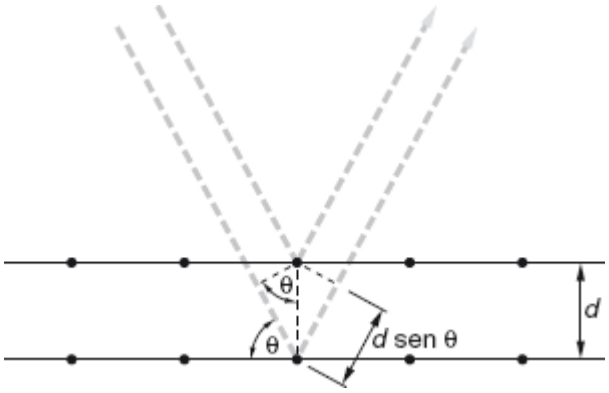


FIGURA 3-13 Difração de Bragg para dois planos paralelos. A diferença de percurso entre as ondas difratadas pelos dois átomos indicados na figura é igual a $2d$ sen θ. As ondas estarão em fase se a condição de Bragg, $2d$ sen $\theta = m\lambda$, for satisfeita.

$$2d \operatorname{sen} \theta = m\lambda \qquad \text{em que} \qquad m = \text{inteiro} \qquad \textbf{3-23}$$

A Equação 3-23 é conhecida como *condição de Bragg*.

A medida da intensidade dos raios X difratados em função do comprimento de onda, usando um equipamento experimental como o da Figura 3-14, apresenta alguns resultados surpreendentes do ponto de vista da física clássica. A Figura 3-15*a* mostra os espectros típicos de raios X obtidos submetendo os elétrons a duas tensões de aceleração diferentes antes de usá-los para bombardear um alvo de tungstênio. Na figura, $I(\lambda)$ é a intensidade emitida para comprimentos de onda no intervalo entre λ e $\lambda + d\lambda$. A Figura 3-15*b* mostra as linhas, de comprimento de onda muito menor, produzidas usando um alvo de molibdênio e elétrons de 35 keV. Três características desses espectros chamam imediatamente a atenção, apenas uma das quais pode ser explicada pela física clássica. (1) O espectro é constituído por uma série de linhas estreitas, conhecida como *espectro característico*, superpostas a (2) um espectro contínuo ou espectro de bremsstrahlung. O comprimento de onda das linhas do espectro característico depende da substância usada como alvo. (3) O espectro contínuo apresenta um comprimento de onda de corte λ_m que não depende da substância usada como alvo, mas é função da energia dos elétrons. Se a tensão do tubo de raios X é dada em volts, o comprimento de onda de corte pode ser calculado por meio da seguinte equação empírica:

$$\lambda_m = \frac{1{,}24 \times 10^3}{V}\,\text{nm} \qquad \textbf{3-24}$$

A Equação 3-24 é chamada de *regra de Duane-Hunt* em homenagem aos descobridores. Einstein não perdeu tempo para observar que a produção de raios X por bombardeio de elétrons era o inverso do efeito fotelétrico e, portanto, a Equação 3-21 podia ser aplicada ao fenômeno. O comprimento de onda de corte de Duane-Hunt corresponde simplesmente a um fóton com a energia máxima dos elétrons, ou seja, um fóton que é emitido quando o elétron perde toda a energia cinética em uma só colisão. Como a energia cinética dos elétrons em um tubo de raios X é 20.000 eV ou mais, a função trabalho ϕ (que vale menos de 10 eV) pode ser desprezada. Nesse caso, a Equação 3-21 se torna $eV \approx hf = hc/\lambda_m$ ou $\lambda_m = hc/eV = 1{,}240 \times 10^{-6}$ m/V $= 1{,}24 \times 10^3$ nm/V. Assim, a regra de Duane-Hunt pode ser explicada pela hipótese de Planck de que a luz é feita de quanta. (Note que λ_m pode ser usado para determinar experimentalmente o valor de h/e.)

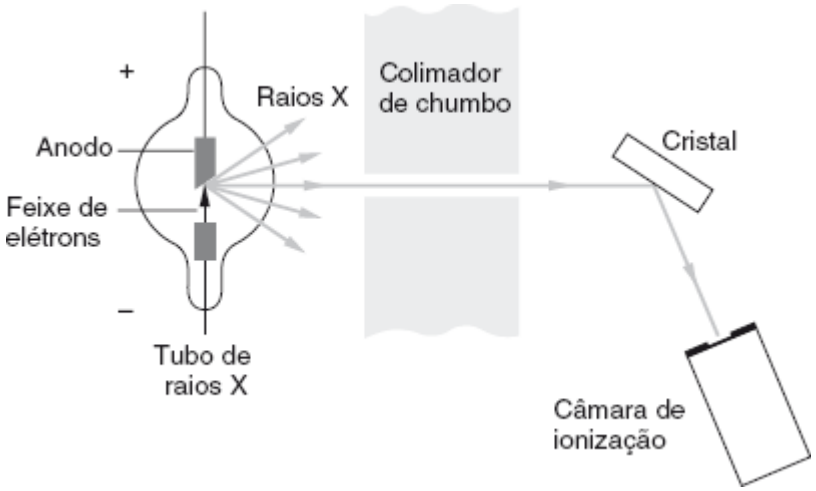


FIGURA 3-14 Diagrama esquemático do espectrômetro de Bragg. Um feixe colimado de raios X incide em um cristal e o feixe difratado vai para uma câmara de ionização, onde é detectado. O sistema é montado de tal forma que os ângulos de incidência e difração variam simultaneamente, mantendo-se sempre iguais. Medindo a intensidade do feixe difratado em função do ângulo de incidência e usando a condição de Bragg, $2d \text{ sen } \theta = m\lambda$, é possível determinar a distância interplanar d para várias famílias de planos, contanto que o comprimento de onda λ da radiação incidente seja conhecido.

O espectro contínuo foi interpretado como o resultado da aceleração (isto é, da "frenagem") dos elétrons pelos campos elétricos dos átomos do alvo. Esse tipo de radiação era previsto pelas equações de Maxwell; o verdadeiro problema para a física clássica estava nas linhas estreitas. Os comprimentos de onda dessas linhas dependiam do material do alvo e eram sempre os mesmos para um dado material, mas as linhas estreitas nunca apareciam para valores de V tais que λ_m fosse maior do que o comprimento de onda da linha em questão. Esta peculiaridade do espectro característico pode ser vista claramente na Figura 3-15*a*, em que o grupo de linhas da esquerda, rotulado como "série K", desaparece totalmente quando V é reduzido de 80 kV para 40 kV, o que tem o efeito de aumentar o valor de λ_m. A origem das linhas estreitas era um mistério que só foi esclarecido com a descoberta do átomo nuclear. Voltaremos ao assunto no Capítulo 4.

As aplicações dos raios X na medicina e odontologia (diagnóstico e tratamento de doenças) e na indústria (inspeção de peças e soldas) são bem conhecidas, mas eles também são usados para determinar a estrutura de cristais, localizar buracos negros no universo e investigar a conformação de proteínas.

O Efeito Compton

Tinha sido observado que os raios X difratados eram mais "macios" que os raios X do feixe incidente, isto é, tinham menor poder de penetração. Compton[16] observou que, se o processo de espalhamento fosse considerado uma "colisão" entre um fóton de energia hf_1 (e momento hf_1/c) e um elétron, o elétron absorveria parte da energia inicial e, portanto, a energia hf_2 do fóton difratado seria menor do que a do fóton incidente. Nesse caso, a frequência f_2 e o momento hf_2/c do fóton difratado também seriam menores do que a frequência f_1 e o momento hf_1/c do fóton incidente. [O fato de que a uma radiação eletromagnética de energia E está associado um momento E/c é compatível com a teoria clássica e tinha sido demonstrado experimentalmente por Nichols e Hull em 1903. Esta relação também é compatível com a expressão relativística $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ se a massa de repouso da partícula for nula.] Compton aplicou as leis de conservação do momento e da energia, na forma relativística (veja o Capítulo 2), à colisão de um fóton com um elétron, o que lhe permitiu calcular a diferença entre os comprimentos de onda do fóton incidente e do fóton difratado, $\lambda_2 - \lambda_1$, em função do ângulo de espalhamento θ. O resultado, cuja demonstração aparece em uma Leitura Suplementar, é a chamada *equação de Compton*:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \qquad \textbf{3-25}$$

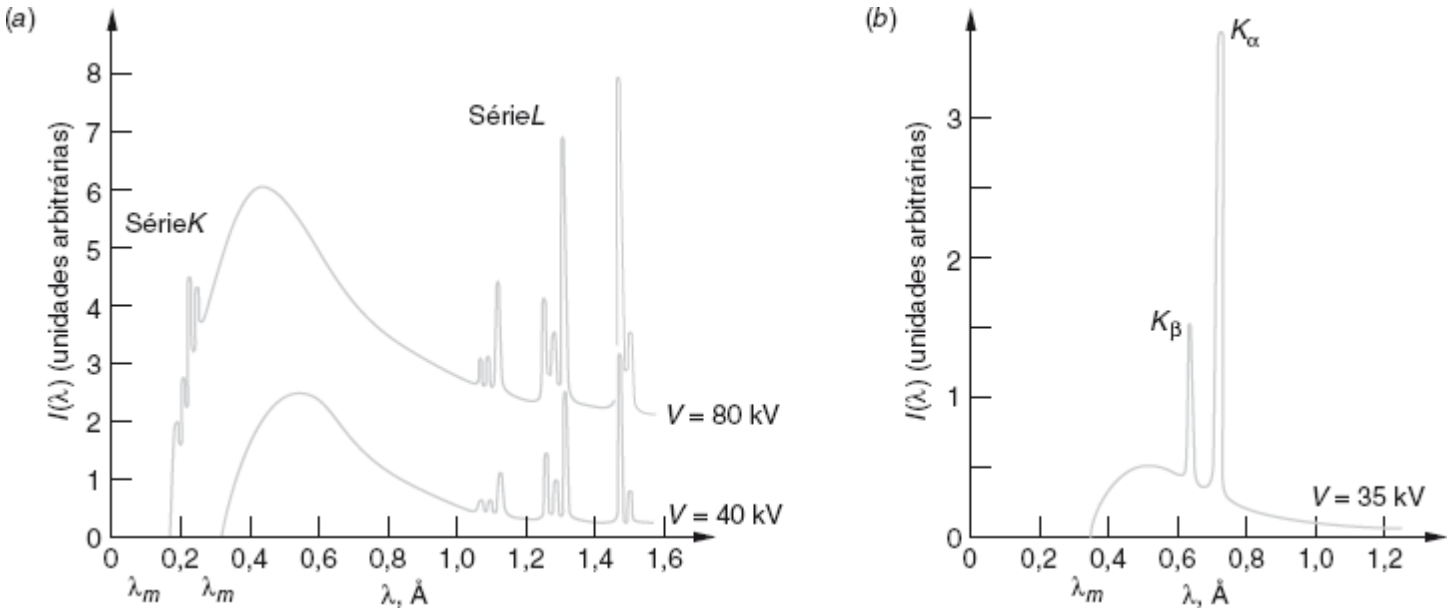


FIGURA 3-15 Espectros de raios X do tungstênio (*a*), para duas tensões de aceleração, e do molibdênio (*b*). Os nomes das séries de linhas (*K* e *L*) são explicados no Capítulo 4. As linhas da série *L* do Mo (que não aparecem na figura) ocorrem para $\lambda \approx 0{,}5$ nm (5 Å). O comprimento de onda de corte λ_m não depende do material e é dado por $\lambda_m = hc/eV$, na qual V é a tensão do tubo de raios X. Os comprimentos de onda das linhas de difração são característicos de cada material.

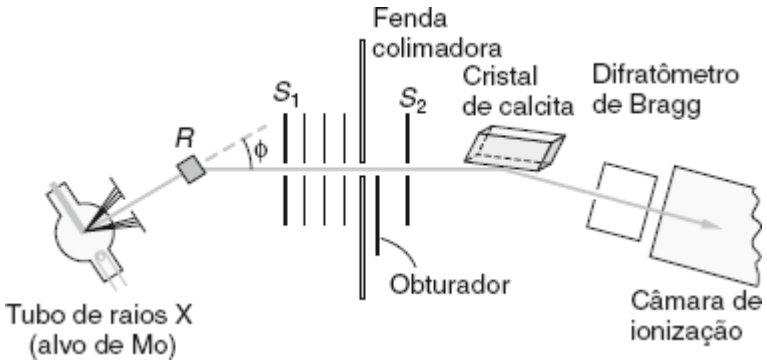


FIGURA 3-16 Diagrama esquemático do equipamento usado por Compton. Os raios X produzidos por um tubo com um alvo de molibdênio são espalhados por um bloco de grafita *R*, colimados pelas fendas S_1 e S_2 e analisados em um difratômetro de Bragg constituído por um cristal de calcita e uma câmara de ionização. Neste diagrama, o ângulo de espalhamento é 30°. Embora todo o espectro de raios X do molibdênio estivesse sendo espalhado pela grafita, o espectrômetro foi usado para investigar apenas a região em torno da linha K_α do molibdênio.

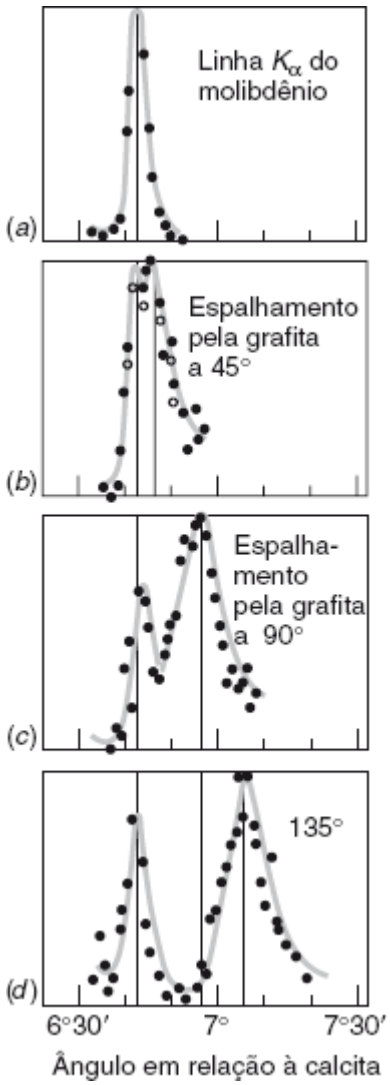


FIGURA 3-17 Gráficos da intensidade em função do comprimento de onda para vários ângulos de espalhamento de Compton em grafita. Em todos os gráficos, o pico da esquerda está associado a fótons difratados por elétrons fortemente ligados ao núcleo, cuja massa efetiva é igual à massa total do átomo. A diferença entre os comprimentos de onda dos dois picos é dada pela Equação 3-25. O eixo horizontal está rotulado como "ângulo em relação à calcita" porque foi calibrado por Compton em termos do ângulo de difração dos raios X em um cristal de calcita (veja a Figura 3-16).

De acordo com a Equação 3-25, a diferença de comprimentos de onda não depende do comprimento de onda do fóton incidente. A grandeza h/mc tem dimensão de comprimento e é denominada *comprimento de onda Compton do elétron.* Seu valor é

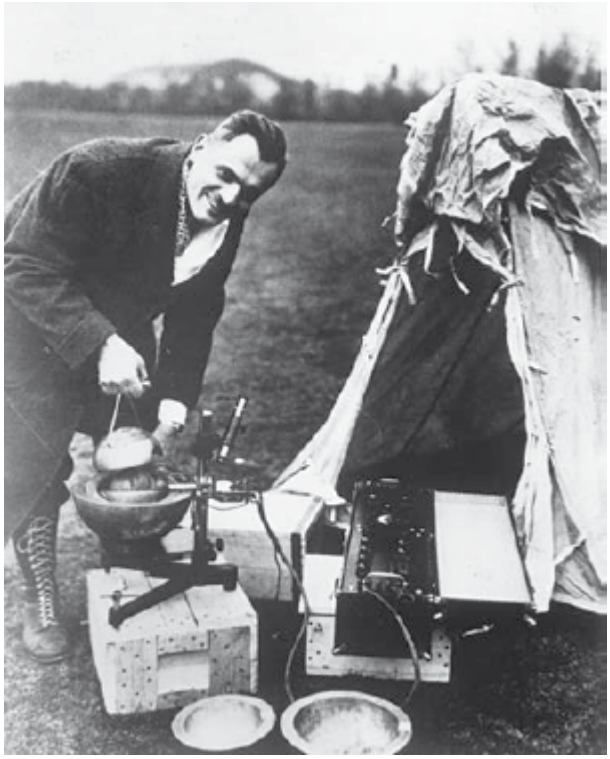
$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{1{,}24 \times 10^3\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{5{,}11 \times 10^5\ \text{eV}} = 0{,}00243\ \text{nm}$$

Como $\lambda_2 - \lambda_1$ é muito pequeno, a diferença entre os comprimentos de onda dos dois fótons é difícil de observar, a menos que λ_1 também seja pequeno, caso em que a variação relativa, $(\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1$, pode se tornar apreciável. É por isso que o efeito Compton normalmente é estudado apenas no caso dos raios X e dos raios gama.

Compton verificou seus resultados experimentalmente usando como fótons incidentes os fótons associados à linha do espectro característico de raios X do molibdênio com um comprimento de onda de 0,0711 nm e como alvo os elétrons de um bloco de grafita. O comprimento de onda dos fótons espalhados foi medido com o auxílio de um cristal de calcita e uma câmara de ionização. O arranjo experimental aparece na Figura 3-16; a Figura 3-17 mostra os resultados obtidos. Para cada ângulo de espalhamento, o primeiro pico corresponde ao espalhamento dos elétrons mais internos no átomo de carbono, que não introduz nenhuma mudança no comprimento de onda; como esses elétrons estão fortemente ligados ao núcleo atômico, o átomo inteiro participa da interação. Nesse caso, a massa m da Equação 3-25 passa a ser a massa do átomo, que é cerca de 10^4 vezes maior que a massa do elétron, e a diferença entre os comprimentos de onda do fóton incidente e do fóton espalhado se torna insignificante. A variação da diferença entre os comprimentos de onda dos dois picos com o ângulo de espalhamento θ é exatamente a prevista pela Equação 3-25.

Como vimos nesta seção e nas duas seções anteriores, em certas situações a interação da radiação eletromagnética com a matéria deve ser descrita por meio de eventos isolados. Depois de discutirem a natureza da luz durante muitos séculos, os

cientistas chegaram à conclusão de que, na verdade, são necessárias duas teorias para a luz: uma teoria corpuscular (ou quântica), para descrever a interação da radiação eletromagnética com a matéria, e uma teoria ondulatória, para descrever fenômenos não localizados como interferência e difração. Voltaremos a falar deste chamado dualismo onda-partícula no Capítulo 5.



Arthur Compton. Depois de descobrir o efeito Compton, o cientista viajou pelo mundo em busca de uma explicação para os raios cósmicos. Suas observações mostraram que a intensidade dos raios cósmicos variava com a latitude, o que foi atribuído à influência do campo magnético terrestre e considerado como prova de que os raios cósmicos eram constituídos por partículas com carga elétrica. [*Cortesia do American Institute of Physics, Niels Bohr Library*.]



Leitura Suplementar

A *demonstração da equação de Compton*, aplicando as leis de conservação da energia e do momento à colisão relativística de um fóton com um elétron, está disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 3-26 e 3-27 e a Figura 3-18.

Exercícios

6. Por que é extremamente difícil observar o efeito Compton usando luz visível?

7. Por que o efeito Compton não prejudica a transmissão de sinais sem fio de rádio e televisão? Quantos espalhamentos de Compton o sinal de uma emissora de FM teria que sofrer para que o comprimento de onda variasse de 0,01%?

EXEMPLO 3-9 **Efeito Compton** Em um certo experimento de espalhamento de Compton, observa-se que o comprimento de onda λ_1 da radiação incidente sofre um deslocamento de 1,5% para um ângulo de espalhamento $\theta = 120°$. (*a*) Qual é o valor de λ_1? (*b*) Qual é o comprimento de onda λ_2 do fóton espalhado para um ângulo de espalhamento de 75°?

SOLUÇÃO

(a) De acordo com a Equação 3-25,

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \Delta\lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$$
$$= 0{,}00243\,(1 - \cos 120°)$$

Como o comprimento de onda λ_1 sofre um deslocamento de 1,5%, temos:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} = 0{,}015$$

Combinando as duas equações acima, obtemos:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta\lambda}{0{,}015} = \frac{0{,}00243\,(1 - \cos 120)}{0{,}015}$$
$$= 0{,}243 \text{ nm}$$

(b) De acordo com a Equação 3-25,

$$\lambda_2 = \lambda_1 + 0{,}00243\,(1 - \cos\theta)$$

Fazendo $\lambda_1 = 0{,}243$ nm e $\theta = 75^\circ$, obtemos:

$$\lambda_2 = 0{,}243 + 0{,}00243\,(1 - \cos 75)$$
$$= 0{,}243 + 0{,}002$$
$$= 0{,}245 \text{ nm}$$

Comentário Final

Neste capítulo e na Seção 2-4 do capítulo anterior, apresentamos e discutimos as três principais formas de interação dos fótons com a matéria: (1) o efeito fotelétrico, (2) o efeito Compton e (3) a criação de partículas. No restante deste livro, ao prosseguirmos a nossa discussão da física moderna, teremos muitas oportunidades de aplicar o que aprendemos aqui para facilitar o entendimento de uma grande variedade de fenômenos, do comportamento dos átomos aos "fornos" que existem no interior das estrelas.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. O experimento de J. J. Thomson	As medições realizadas por Thomson nos raios catódicos mostraram que uma partícula (o elétron), com uma razão e/m cerca de 2000 vezes maior que a do hidrogênio ionizado, está presente em todos os elementos.
2. Quantização da carga elétrica	$e = 1{,}60217653 \times 10^{-19}$ C
3. Radiação de corpo negro	
Lei de Stefan-Boltzmann	$R = \sigma T^4$ **3-4**
Lei de deslocamento de Wien	$\lambda m T = 2{,}898 \times 10^{-3}$ m . K **3-5**
Lei de radiação de Planck	$u(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$ **3-18**
Constante de Planck	$h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J · s **3-19**

4. O efeito fotelétrico	$eV_0 = hf - \phi$	**3-21**
5. O efeito Compton	$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta)$	**3-25**
6. Interação fóton-matéria	Três formas de interação são o efeito fotelétrico, o efeito Compton e a criação de partículas.	

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Millikan, R. A., *Electrons* (+ *and* −), *Protons*, *Photons*, *Neutrons*, *Mesotrons*, and *Cosmic Rays*, 2d ed., University of Chicago Press, Chicago, 1947. Este livro sobre física moderna, escrito por um dos maiores cientistas experimentais da época, contém descrições detalhadas dos experimentos de Millikan com gotas de óleo e de sua verificação da equação de Einstein para o efeito fotelétrico.

Mohr, P. J. B. N. Taylor e D. B. Newell, "The Fundamental Physical Constants", *Reviews of Modern Physics* **80**, 633-730 (April 2008).

Richtmyer, F. K., E. H. Kennard e J. N. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1969. A primeira edição deste excelente livro, escrito para estudantes de física do terceiro grau, foi publicada em 1928.

Shamos, M. H. (ed.), *Great Experiments in Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962. Este livro contém 25 artigos originais, acompanhados por comentários do editor. Os artigos que tratam especificamente dos assuntos discutidos neste capítulo são os de Faraday, Hertz, Roentgen, J. J. Thomson, Einstein (sobre o efeito fotelétrico), Millikan, Planck e Compton.

Thomson, G. P., *J. J. Thomson, Discoverer of the Electron*, Doubleday/Anchor, Garden City, NY, 1964. Um interessante ensaio a respeito de J. J. Thomson escrito pelo filho, que também é físico.

Weart, S. R. (ed.), *Selected Papers of Great American Physicists*, American Institute of Physics, New York, 1976. Livro publicado pela American Physical Society para comemorar o bicentenário da independência dos Estados Unidos.

Notas

1. Demócrito, que viveu entre aproximadamente 470 a.C. e aproximadamente 380 a.C., também afirmou que a Via Láctea era um vasto aglomerado de estrelas e que a Lua, como a Terra, possuía montanhas e vales.

2. George Johnstone Stoney (1826-1911), físico irlandês, chamou de elétron a unidade fundamental de carga elétrica. Depois que Thomson descobriu uma partícula com uma unidade de carga elétrica, o nome foi transferido, por Lorentz, da quantidade de carga para a própria partícula.

3. Joseph John Thomson (1856-1940), físico inglês, dirigiu durante mais de 30 anos o Cavendish Laboratory, o primeiro laboratório do mundo dedicado expressamente a pesquisas físicas. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1906 por seus estudos da condução de eletricidade em gases. Sete de seus assistentes também receberam o Prêmio Nobel.

4. Tinha havido muitas discussões quanto à natureza dos raios catódicos depois que Heinrich Hertz, em 1883, chegou à conclusão de que eles não eram desviados por um campo elétrico. Mais tarde, descobriu-se que o resultado negativo dos experimentos de Hertz se devia ao fato de que o gás no interior do tubo se encontrava parcialmente ionizado; os íons neutralizavam rapidamente as cargas das placas defletoras, de modo que o campo entre as placas era praticamente nulo. Reduzindo ainda mais a pressão do gás, Thomson finalmente conseguiu demonstrar, em 1897, que um campo elétrico era capaz de desviar os raios catódicos.

5. R. A. Millikan, *Philosophical Magazine* (*6*), **19**, 209 (1910). Robert Andrew Millikan (1868-1953), o primeiro Ph.D. em física pela Columbia University e um dos maiores cientistas experimentais da época, recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1923 por seus estudos da carga do elétron e do efeito fotelétrico. Foi o primeiro a usar o termo *raios cósmicos* para designar as partículas provenientes do espaço sideral.

6. R. A. Millikan, *Physical Review*, **32**, 349 (1911).

7. Mohr, P. J., B. N. Taylor e D. B. Newell, "The Fundamental Physical Constants", *Reviews of Modern Physics* **80**, 633-730 (April 2008).

8. F. K. Richtmyer, E. H. Kennard e J. N. Cooper, *Introduction to Modern Physics*, 6th ed., McGraw-Hill, New York, 1969, pp. 135-137.

9. John William Strutt Rayleigh (1842-1919), físico inglês, conhecido como Lord Rayleigh por causa do título que herdou do pai, sucedeu a Maxwell como diretor do Cavendish Laboratory e foi o antecessor direto de Thomson.

10. Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947), físico alemão, recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1918 pela descoberta dos quanta de energia e foi talvez o cientista mais famoso deste século depois de Einstein.

11. Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894), físico alemão, aluno de Helmholtz, foi o descobridor das ondas de rádio.

12. H. R. Hertz, *Annalen der Physik*, **31**, 983 (1887).

13. A. Einstein, *Annalen der Physik*, **17**, 144 (1905).

14. Traduções para o inglês deste artigo podem ser encontradas em E. C. Watson, *American Journal of Physics*, **13**, 284 (1945) e em M. H. Shamos (ed.), *Great Experiments in Physics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962. Wilhelm Conrad Roentgen (1845-1923) recebeu em 1901 o primeiro Prêmio Nobel de Física por haver descoberto os raios X.

15. William Lawrence Bragg (1890-1971), físico inglês nascido na Austrália, foi um menino prodígio. Ele e o pai, William Henry Bragg (1862-1942), dividiram o prêmio Nobel de Física de 1915 por seus estudos da difração de raios X em cristais. Em 1938, W. L. Bragg sucedeu a Rutherford como diretor do Cavendish Laboratory.

16. Arthur Holly Compton (1892-1962), físico americano, foi o primeiro a usar o nome *fóton* para o quantum de luz. Compton recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1927 pela descoberta e explicação do efeito que recebeu o seu nome.

Problemas

NÍVEL 1
Seção 3-1 Quantização da Carga Elétrica

3-1. Um feixe de partículas carregadas, que contém prótons, elétrons, dêuterons, átomos de hélio monoionizados e moléculas de H_2 monoionizadas, passa por um seletor de velocidades do qual todas as partículas emergem com uma velocidade de $2{,}5 \times 10^6$ m/s. Em seguida, o feixe é submetido a um campo magnético uniforme $B = 0{,}40$ T perpendicular à velocidade das partículas. Calcule os raios de curvatura das trajetórias dos cinco tipos de partículas.

3-2. Considere o experimento de Thomson com o campo elétrico "desligado". Se os elétrons penetram com uma velocidade $u \ll c$ em uma região de campo magnético uniforme B e comprimento ℓ, mostre que, para pequenas deflexões, o ângulo de deflexão dos elétrons é dado por $\theta \approx e\ell B/mu$.

3-3. De acordo com a Equação 3-3, um campo elétrico e um campo magnético mutuamente perpendiculares podem ser usados em um seletor de velocidades para partículas ou misturas de partículas de mesma carga elétrica. Suponha que o leitor deseje construir um seletor de velocidade que permita apenas a passagem de elétrons com uma energia cinética de $5{,}0 \times 10^4$ eV. O equipamento disponível permite produzir um campo elétrico de $2{,}0 \times 10^5$ V/m. Qual deve ser o valor do campo magnético?

3-4. Um próton proveniente do espaço sideral se aproxima verticalmente da Terra na região do equador, onde a componente horizontal do campo magnético terrestre é $3{,}5 \times 10^{-5}$ T. Se o próton está se movendo com uma velocidade de $3{,}0 \times 10^6$ m/s, qual é a razão entre a força magnética e a força gravitacional a que o próton está submetido?

3-5. Um elétron com uma energia cinética de 45 keV está se movendo em uma órbita circular perpendicularmente a um campo magnético de 0,325 T. (*a*) Calcule o raio da órbita. (*b*) Determine a frequência e o período do movimento do elétron.

3-6. Se os elétrons de um feixe têm uma energia de 2.000 eV, determine (*a*) a velocidade dos elétrons; (*b*) o tempo que os elétrons levam para percorrer uma distância de 5 cm entre as placas D e E da Figura 3-1; (*c*) a componente vertical da velocidade dos elétrons depois de passarem entre as placas, se o campo elétrico é $3{,}33 \times 10^3$ V/m.

3-7. No primeiro método usado por J. J. Thomson (veja o Problema 3-46), a capacidade térmica do coletor era aproximadamente 5×10^{-3} cal/°C e o aumento de temperatura foi de aproximadamente 2 °C. Quantos elétrons de 2.000 eV chegaram ao coletor?

3-8. No caso da gota número 16, Millikan mediu as seguintes cargas totais, entre outras, em diferentes instantes:

$$25{,}41 \times 10^{-19}\,\text{C} \qquad 17{,}47 \times 10^{-19}\,\text{C} \qquad 12{,}70 \times 10^{-19}\,\text{C}$$
$$20{,}64 \times 10^{-19}\,\text{C} \qquad 19{,}06 \times 10^{-19}\,\text{C} \qquad 14{,}29 \times 10^{-19}\,\text{C}$$

Qual é o valor da carga do elétron, e, com base nessas medidas?

3-9. Mostre que o campo elétrico necessário para fazer o tempo de subida de uma gota de óleo igual ao tempo de descida no experimento de Millikan é $\mathscr{E} = 2mg/q$.

3-10. Em uma variante do experimento de Millikan, o campo elétrico é aplicado horizontalmente, o que faz com que as gotas de óleo sejam aceleradas da direção horizontal. Em consequência, as gotas passam a cair em uma trajetória retilínea que faz um

ângulo θ com a vertical. Mostre que

$$\text{sen}\,\theta = q\mathscr{E}/bv_t'$$

em que v'_t é a velocidade terminal das gotas ao longo da trajetória.

3-11. Na ausência de campo elétrico, uma gota de óleo carregada desce 5,00 mm em 20,0 s após atingir a velocidade terminal. A massa específica do ar é 1,35 kg/m^3 e a do óleo é 750 kg/m^3. A viscosidade do ar é $1{,}80 \times 10^{-5}$ N · s/m^2. (*a*) Determine a massa e o raio da gota; (*b*) se a gota contém 2 unidades de carga elétrica e é submetida a um campo elétrico de $2{,}5 \times 10^5$ V/m, qual é a razão entre a força elétrica e a força gravitacional a que está submetida a gota?

Seção 3-2 Radiação de Corpo Negro

3-12. Determine o valor de λ_m para um corpo negro a uma temperatura de (*a*) 3 K; (*b*) 300 K; (*c*) 3.000 K.

3-13. Use o resultado do Exemplo 3-4 e as Equações 3-4 e 3-6 para expressar a constante de Stefan em função de *h*, *c* e *k*. Use os valores conhecidos dessas constantes para calcular o valor da constante de Stefan.

3-14. Mostre que a lei de Planck, Equação 3-18, expressa em termos da frequência *f*, assume a forma

$$u(f) = \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

3-15. Como foi comentado neste capítulo, a radiação cósmica de fundo apresenta a distribuição espectral de um corpo negro a uma temperatura de 2,7 K. (*a*) Qual é o comprimento de onda da radiação de fundo para o qual a intensidade é máxima? (*b*) Qual é a frequência da radiação neste ponto do espectro? (*c*) Qual é a potência total da radiação de fundo que incide em nosso planeta?

3-16. Determine a temperatura de um corpo negro se o espectro apresenta um máximo em (*a*) λ_m = 700 nm (luz visível); (*b*) λ_m = 3 cm (micro-ondas); (*c*) λ_m = 3 m (rádio FM).

3-17. Se a temperatura absoluta de um corpo negro é multiplicada por dois, por que fator é multiplicada a potência total emitida pelo corpo negro?

3-18. Calcule a energia média $\overline{E}$ por modo de oscilação (*a*) para um comprimento de onda relativamente grande, $\lambda = 10hc/kT$, e (*b*) para um comprimento de onda relativamente pequeno, $\lambda = 0{,}1hc/kT$, e compare os resultados com o valor clássico, *kT*. (O valor clássico é uma consequência do teorema da equipartição, que será discutido no Capítulo 8.)

3-19. O máximo da distribuição espectral da potência irradiada por uma certa cavidade ocorre para um comprimento de onda de 27,0 μm (na região do infravermelho). A temperatura da cavidade é aumentada até que a potência total irradiada se torne duas vezes maior. (*a*) Determine a nova temperatura da cavidade. (*b*) Determine a nova posição do máximo da distribuição espectral.

3-20. A temperatura da superfície de uma certa estrela, muito luminosa, é 20.000 K. (*a*) Supondo que a estrela se comporta como um corpo negro, para que comprimento de onda a densidade de energia $u(\lambda)$ é máxima? (*b*) Em que parte do espectro eletromagnético está este comprimento de onda?

3-21. A energia solar que atinge a parte superior da atmosfera terrestre é $1{,}36 \times 10^3$ W/m^2, a chamada *constante solar*. Supondo que a Terra se comporta como um corpo negro de temperatura uniforme, qual é a temperatura de equilíbrio da Terra?

3-22. A temperatura do filamento de uma lâmpada incandescente de 40 W é 3.300 K. Supondo que o filamento se comporta como um corpo negro, (*a*) determine a frequência f_m e o comprimento de onda λ_m no ponto máximo da distribuição espectral; (*b*) supondo que f_m seja uma boa aproximação para a frequência média dos fótons emitidos pela lâmpada, determine o número de fótons produzidos por segundo pela lâmpada; (*c*) se um observador está olhando para a lâmpada a 5 m de distância, quantos fótons penetram por segundo nos olhos do observador? (O diâmetro da pupila humana é aproximadamente 5,0 mm.)

3-23. Use a lei de Planck, Equação 3-18, para calcular o valor da constante que aparece na lei de Wien, Equação 3-5.

Seção 3-3 O Efeito Fotelétrico

3-24. Os comprimentos de onda da luz visível vão de 380 nm a 750 nm, aproximadamente. (*a*) Qual é o intervalo de energias, em elétrons-volts, dos fótons de luz visível? (*b*) A frequência de transmissão de uma rádio FM típica é da ordem de 100 MHz. Qual é a energia de um fóton com esta frequência?

3-25. Quando está em órbita, o ônibus espacial gira em torno da Terra muito acima de 99% da atmosfera, mas, mesmo assim, acumula uma carga elétrica no casco, devido, em parte, à perda de elétrons causada pelo efeito fotelétrico da luz solar. Suponha que o casco da nave seja revestido com Ni, que possui uma função trabalho relativamente elevada, ϕ = 4,87 eV, nas temperaturas encontradas no espaço. (*a*) Determine o maior comprimento de onda do espectro solar capaz de fazer com que o casco do ônibus espacial emita fotelétrons. (*b*) Qual a fração da potência total da radiação solar incidente no ônibus espacial que

pode provocar a emissão de fotelétrons?

3-26. A função trabalho do césio é 1,9 eV. (*a*) Determine a frequência mínima e o comprimento de onda máximo para que o efeito fotelétrico seja observado no césio. Calcule o valor do potencial de corte (*b*) para um comprimento de onda de 300 nm; (*c*) para um comprimento de onda de 400 nm.

3-27. (*a*) Se 5% da potência de uma lâmpada de 100 W são irradiados no espectro visível, quantos fótons visíveis são irradiados por segundo? (*b*) Se a lâmpada pode ser considerada uma fonte pontual que irradia uniformemente em todas as direções, qual é o fluxo de fótons (número de unidade de tempo e por unidade de área) a uma distância de 2 m?

3-28. A função trabalho do molibdênio é 4,22 eV. (*a*) Qual é a frequência de corte para o efeito fotelétrico no molibdênio? (*b*) Uma luz amarela com um comprimento de onda de 560 nm é capaz de fazer com que o molibdênio emita fotelétrons? Prove que sua resposta está correta.

3-29. A molécula de NaCl possui uma energia de ligação de 4,26 eV, ou seja, é preciso fornecer esta energia para separar os íons Na^+ e Cl^- e formar átomos neutros (veja o Capítulo 9). (*a*) Quais são a frequência mínima e o comprimento de onda máximo para que um fóton tenha energia suficiente para dissociar uma molécula de NaCl? (*b*) Em que parte do espectro eletromagnético está esta radiação?

3-30. Usando um equipamento semelhante ao da Figura 3-8, os dados abaixo em relação ao efeito fotelétrico foram obtidos.

λ (nm)	544	594	604	612	633
$E_{k,\max}$ (eV)	0,360	0,199	0,156	0,117	0,062

(*a*) Use um gráfico de $E_{k,max}$ em função de f para determinar o valor da constante de Planck. (*b*) Qual é a diferença percentual (para mais ou para menos) do valor calculado no item (*a*) em relação ao valor aceito atualmente? (*c*) De acordo com o gráfico do item (*a*), qual é o valor aproximado da função trabalho do metal usado no catodo do equipamento? (*d*) Qual foi provavelmente o metal usado no catodo?

3-31. Em condições ideais, o olho humano é capaz de perceber um clarão se aproximadamente 60 fótons chegarem à córnea. Qual é a energia associada a esses 60 fótons se o comprimento de onda for 550 nm?

3-32. No caso do césio, o maior comprimento de onda capaz de produzir a emissão de fotelétrons é 653 nm. (*a*) Qual é a função trabalho do césio? (*b*) Se uma amostra de césio for submetida a uma luz de 300 nm (ultravioleta), qual será a energia dos elétrons ejetados?

Seção 3-4 Raios X e o Efeito Compton

3-33. Use a equação de Compton (Equação 3-25) para calcular o valor de $\Delta\lambda$ na Figura 3-17*d*. A que variação percentual do comprimento de onda corresponde este resultado?

3-34. Os aparelhos de raios X atualmente usados pelos dentistas funcionam com uma tensão da ordem de 80 kV. Qual é o comprimento de onda mínimo dos raios X produzidos por esses aparelhos?

3-35. Determine o momento de um fóton em eV/c e em kg · m/s se o comprimento de onda for (*a*) 400 nm; (*b*) 1 Å = 0,1 nm; (*c*) 3 cm; (*d*) 2 nm.

3-36. Os raios gama produzidos por aniquilações apresentam um espalhamento de Compton considerável. Suponha que um fóton de 0,511 MeV produzido pela aniquilação de um elétron e um pósitron seja espalhado por um elétron livre e o ângulo de espalhamento seja 110°. Quais são as energias do fóton e do elétron após o espalhamento? Qual é a direção de movimento do elétron após o espalhamento em relação à direção do fóton incidente?

3-37. A tabela abaixo mostra os resultados de um experimento de espalhamento de Compton.

$\Delta\lambda$ (pm)	0,647	1,67	2,45	3,98	4,80
ϕ (graus)	45	75	90	135	170

(*a*) Usando a Equação 3-25 como guia, desenhe um gráfico que permita determinar o comprimento de onda de Compton do elétron. (*b*) Qual é a diferença percentual (para mais ou para menos) do valor obtido em relação ao valor aceito atualmente?

3-38. O comprimento de onda de fótons que sofreram espalhamento de Compton é medido para um ângulo $\theta = 90°$. Qual deve ser o comprimento de onda dos fótons incidentes para que $\Delta\lambda/\lambda = 1\%$?

3-39. Em seus primeiros experimentos, Compton usou fótons com um comprimento de onda de 0,0711 nm. (*a*) Qual é a energia desses fótons? (*b*) Para um ângulo de espalhamento de 180°, qual é o comprimento de onda do fóton espalhado? (*c*) Qual é a energia do fóton espalhado? (*d*) Qual é a energia do elétron após o espalhamento?

3-40. Calcule o valor de $\Delta\lambda$ para um fóton espalhado com um ângulo de 120° (*a*) por um próton livre; (*b*) por um elétron livre;

(*c*) por uma molécula de N_2 do ar.

3-41. De acordo com a equação de Compton (Equação 3-25), um gráfico de λ_2 em função de $(1 - \cos\theta)$ deve ser uma linha reta cuja inclinação h/mc permite a determinação experimental de h. Dado que o comprimento de onda de λ_1 da Figura 3-17 é 0,0711 nm, calcule λ_2 para os ângulos indicados na figura e plote os resultados em função de $(1 - \cos\theta)$. Qual é o valor da inclinação da reta?

3-42. (*a*) Calcule o comprimento de onda de Compton de um elétron e de um próton. (*b*) Determine a energia de um fóton cujo comprimento de onda é igual ao comprimento de onda de Compton (*a*) do elétron; (*b*) do próton.

NÍVEL II

3-43. No espalhamento de Compton de um fóton de energia E_1 por um elétron inicialmente em repouso, mostre que a energia E_2 do fóton espalhado é dada por

$$E_2 = \frac{E_1}{(E_1/mc^2)(1 - \cos\phi) + 1}$$

3-44. Quando uma luz com um comprimento de onda de 450 nm incide em uma amostra de potássio, fotelétrons com um potencial de corte de 0,52 V são emitidos. Se o comprimento de onda da luz incidente muda para 300 nm, o potencial de corte muda para 1,90 V. Usando *apenas* esses dados e os valores da velocidade da luz e da carga do elétron, calcule (*a*) a função trabalho do potássio; (*b*) o valor da constante de Planck.

3-45. Supondo que a diferença entre o valor de e/m obtido por Thomson em seu segundo experimento (Figura 3-19) e o valor aceito atualmente se deva inteiramente ao fato de Thomson ter deixado de considerar a componente horizontal do campo magnético terrestre fora da região entre as placas, calcule o valor dessa componente. (Dados de Thomson: $B = 5{,}5 \times 10^{-4}$ T, $\mathscr{E} = 1{,}5 \times 10^4$ V/m, $x_1 = 5$ cm, $y_2/x_2 = 8/110$.)

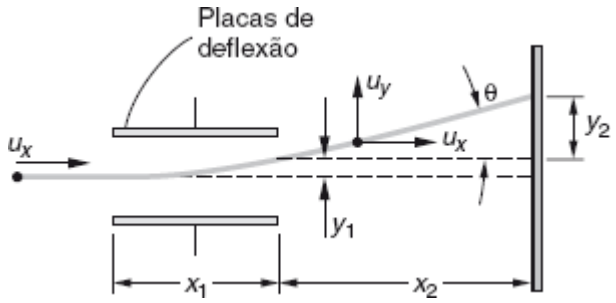


FIGURA 3-19 Deflexão do feixe de elétrons no equipamento de Thomson. As placas de deflexão são *D* e *E* da Figura 3-1. A deflexão é mostrada com o campo magnético desligado e a placa de cima positiva. O campo magnético é aplicado perpendicularmente ao plano da figura, apontando para dentro do papel.

3-46. Na primeira medição do valor de e/m, Thomson determinou a velocidade de elétrons acelerados por um potencial V colhendo esses elétrons em uma placa isolada e medindo a carga Q e a temperatura T da placa. (*a*) Mostre que é possível obter uma expressão para e/m em termos da velocidade dos elétrons e das grandezas medidas. (*b*) Mostre que a expressão obtida no item (*a*), juntamente com o resultado do Problema 3-2, permitiu a Thomson calcular o valor de e/m em termos de grandezas que podiam ser medidas diretamente.

3-47. A tabela abaixo mostra o potencial de corte em função do comprimento de onda para o efeito fotelétrico em uma amostra de sódio.

λ (nm)	200	300	400	500	600
V_0 (V)	4,20	2,06	1,05	0,41	0,03

Faça um gráfico com base nesses dados e use-o para determinar (*a*) a função trabalho; (*b*) a frequência de corte; (*c*) a razão h/e.

3-48. Prove que o efeito fotelétrico não pode ocorrer para um elétron totalmente livre, isto é, que não esteja associado a um átomo. (*Sugestão*: Considere um referencial no qual o momento total do elétron e do fóton incidente seja nulo.)

3-49. Quando um feixe monocromático de raios X incide em um certo cristal de NaCl, uma difração de Bragg de primeira ordem (isto é, com $m = 1$) é observada para $\theta = 20°$. O valor da distância interplanar é $d = 0{,}28$ nm. Determine a tensão mínima de operação do aparelho de raios X usado no experimento.

3-50. Um feixe luminoso de 100 W incide em um corpo negro com 2×10^{-3} kg de massa durante 10^4 s. O corpo negro se encontra inicialmente em repouso em uma região do espaço sem gravidade e sem atrito. (*a*) Determine a energia e o momento

absorvidos pelo corpo negro; (*b*) calcule a velocidade do corpo negro no momento em que a luz é desligada; (*c*) calcule a energia cinética do corpo negro no momento em que a luz é desligada. Por que este último valor é menor do que a energia total dos fótons absorvidos?

3-51. Mostre que a energia cinética máxima E_k que um elétron pode possuir depois de participar de um espalhamento de Compton é dada por

$$E_k = \frac{hf}{1 + mc^2/2hf} = \frac{2E_\gamma^2}{2E_\gamma + mc^2}$$

3-52. O espectrômetro de raios X instalado a bordo de um satélite determina que o comprimento de onda da radiação emitida por uma certa estrela para o qual a intensidade é máxima é λ_m = 82,8 nm. Supondo que a estrela se comporta como um corpo negro, determine (*a*) a temperatura da superfície da estrela; (*b*) a razão entre as intensidades do espectro para λ = 70 nm e $\lambda = \lambda_m$; (*c*) a razão entre as intensidades do espectro para λ = 100 nm e $\lambda = \lambda_m$.

3-53. Determine a fração da energia total irradiada pelo Sol na região visível do espectro (350 nm a 700 nm), supondo que a temperatura da superfície do Sol é 5.800 K.

3-54. A tabela abaixo mostra os dados obtidos por Millikan para o efeito fotelétrico no lítio.

Comprimento de onda (nm)	253,5	312,5	365,0	404,7	433,9
Tensão de corte V_0 (V)	2,57	1,67	1,09	0,73	0,55

(*a*) Faça um gráfico com os dados da tabela e use-o para determinar a função trabalho do lítio. (*b*) Use o gráfico do item (*a*) para determinar o valor da constante de Planck. (*c*) A função trabalho do chumbo é 4,14 eV. Dos comprimentos de onda que aparecem na tabela, quais não causariam emissão de elétrons do chumbo?

NÍVEL III

3-55. Este problema consiste em demonstrar a lei de deslocamento de Wien, Equação 3-5. (*a*) Mostre que a função distribuição da densidade de energia pode ser escrita na forma $u = C\lambda^{-5}(e^{a/\lambda} - 1)^{-1}$ em que C é uma constante e $a = hc/kT$. (*b*) Mostre que o valor de λ para o qual $du/d\lambda$ se anula satisfaz a equação $5(1 - e^{-a/\lambda}) = a/\lambda$. (*c*) Esta equação pode ser resolvida pelo método das tentativas, usando uma calculadora. Experimente fazer $a/\lambda = \alpha$ para vários valores de α até obter o valor correto de a/λ com quatro algarismos significativos. (*d*) Mostre que a solução do item (*c*) leva à relação $\lambda_m T$ = constante e calcule o valor da constante.

3-56. Este problema consiste em *estimar* o tempo de retardo (que é previsto pela teoria clássica, mas não é observado nos experimentos) associado ao efeito fotelétrico. Suponha que um material seja submetido à luz produzida por uma lâmpada de 1 W. (*a*) Supondo que a radiação emitida pela lâmpada se propaga uniformemente em todas as direções, determine a intensidade luminosa (em $eV/m^2 \cdot s$) a uma distância de 1 m da lâmpada. (*b*) Supondo que o raio de um átomo do material é 10^{-10} m, calcule a energia por unidade de tempo que incide em um átomo para esta intensidade luminosa. (*c*) Suponha que a função trabalho do material é 2 eV; quanto tempo é necessário para que um átomo na superfície do material acumule esta energia, supondo que toda a energia que incide no átomo é absorvida?

3-57. Um fóton pode ser absorvido por um sistema capaz de adquirir energia interna. Suponha que um fóton de 15 MeV é absorvido por um núcleo de carbono inicialmente em repouso. De acordo com a lei de conservação do momento, o momento do átomo de carbono após a absorção deve ser 15 MeV/*c*. (*a*) Determine a energia cinética e a energia interna do núcleo de carbono após a absorção. (*b*) O núcleo de carbono volta ao repouso e, em seguida, perde a energia interna emitindo um fóton. Calcule a energia do fóton.

3-58. A energia cinética máxima que pode ser fornecida ao elétron em um evento de espalhamento de Compton desempenha um papel importante no levantamento de espectros de raios gama usando cintilômetros. Esta energia máxima é conhecida como *borda de Compton.* Suponha que a borda de Compton medida em um certo experimento seja 520 keV. Quais eram o comprimento de onda e a energia dos raios gama incidentes?

3-59. Um elétron acelerado até uma energia de 50 keV em um tubo de raios X sofre duas colisões sucessivas antes de entrar em repouso no alvo, emitindo dois fótons de bremsstrahlung no processo. O segundo fóton emitido tem um comprimento de onda 0,095 nm maior do que o primeiro. (*a*) Quais são os comprimentos de onda dos dois fótons? (*b*) Qual é a energia do elétron após a emissão do primeiro fóton?

3-60. Demonstre a Equação 3.17 a partir das Equações 3-15 e 3-16.

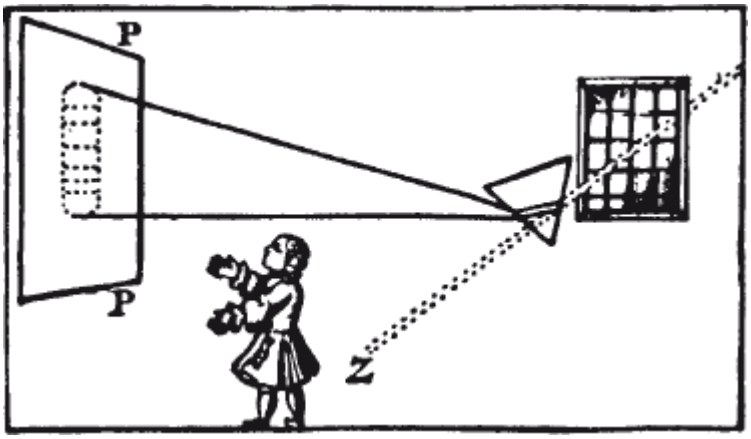
CAPÍTULO 4

O Átomo Nuclear

4-1 Espectros Atômicos
4-2 O Modelo Nuclear de Rutherford
4-3 O Modelo de Bohr para o Átomo de Hidrogênio
4-4 Espectros de Raios X
4-5 O Experimento de Franck-Hertz

Em um dos seus numerosos experimentos, Newton observou que a luz solar que entrava no laboratório através de uma pequena abertura, ao ser refratada por um prisma de vidro e projetada em uma tela, formava uma série de faixas coloridas. Newton acabava de descobrir a *dispersão*, e o arranjo que utilizou (Figura 4-1*a*) foi o precursor dos *espectroscópio*s modernos. Quando, 150 anos mais tarde, Fraunhofer[1] dispersou a luz solar usando um sistema semelhante ao que aparece na Figura 4-1*b* para testar prismas feitos de um vidro que ele próprio havia desenvolvido, descobriu que o espectro solar era interrompido por mais de 600 linhas escuras.[2] Mais tarde, outros cientistas observaram linhas *claras* no espectro da luz emitida por chamas, arcos e centelhas. A *espectroscopia* se tornou rapidamente uma importante área de pesquisa.

Os cientistas logo perceberam que os espectros de emissão dos elementos e compostos químicos podiam ser divididos em três categorias. Os *espectros contínuos*, emitidos principalmente pelos sólidos incandescentes, não apresentam linhas, nem claras nem escuras, mesmo nos espectroscópios de alta resolução. Os *espectros de bandas* são formados por grupos de linhas muito próximas umas das outras, que parecem formar bandas contínuas quando observadas em espectroscópios de baixa resolução. Espectros desse tipo são emitidos quando pequenos pedaços de substâncias sólidas são aquecidos em uma chama ou submetidos a descargas elétricas. Os *espectros de linhas*, já mencionados, são produzidos quando o material contém elementos químicos puros. Tanto os espectros de bandas como os de linhas variam de substância para substância; na verdade, o espectro de uma amostra pode ser usado para identificar os elementos e compostos presentes no material. A existência dos espectros de bandas e de linhas constituía um sério problema teórico para a física clássica, que não era capaz de explicar sua origem. A explicação dos espectros de linhas, que culminou com a previsão correta dos comprimentos de onda de algumas linhas do espectro do hidrogênio, o mais simples dos elementos, foi um dos maiores triunfos da chamada "velha" teoria quântica, fundada por Planck e Einstein, que será o tópico principal deste capítulo. A explicação completa das linhas e bandas exige uma teoria mais sofisticada, que começaremos a estudar no Capítulo 5.



A descoberta da dispersão da luz por Newton, segundo Voltaire. [*Éléments de la Philosophie de Newton,* Amsterdam, 1738.]

4-1 Espectros Atômicos

A radiação característica emitida pelos átomos dos elementos ao serem aquecidos em uma chama ou submetidos a descargas elétricas foi estudada exaustivamente no final do século XIX e início do século XX. Quando é observada através de um espectroscópio, essa radiação aparece como uma série de linhas de várias cores ou comprimentos de onda; as posições e intensidades das linhas são características de cada elemento. Os comprimentos de onda das linhas podiam ser determinados com grande precisão e os cientistas dedicaram muito tempo e esforço à tarefa de descobrir e interpretar regularidades nos espectros. Um grande passo nesse sentido foi dado em 1885 quando um professor suíço do ensino médio, Johann Balmer, descobriu que as linhas do espectro do hidrogênio nas regiões da luz visível e do ultravioleta próximo podiam ser calculadas através da fórmula empírica

$$\lambda_n = 364{,}6\frac{n^2}{n^2 - 4}\text{ nm} \qquad \textbf{4-1}$$

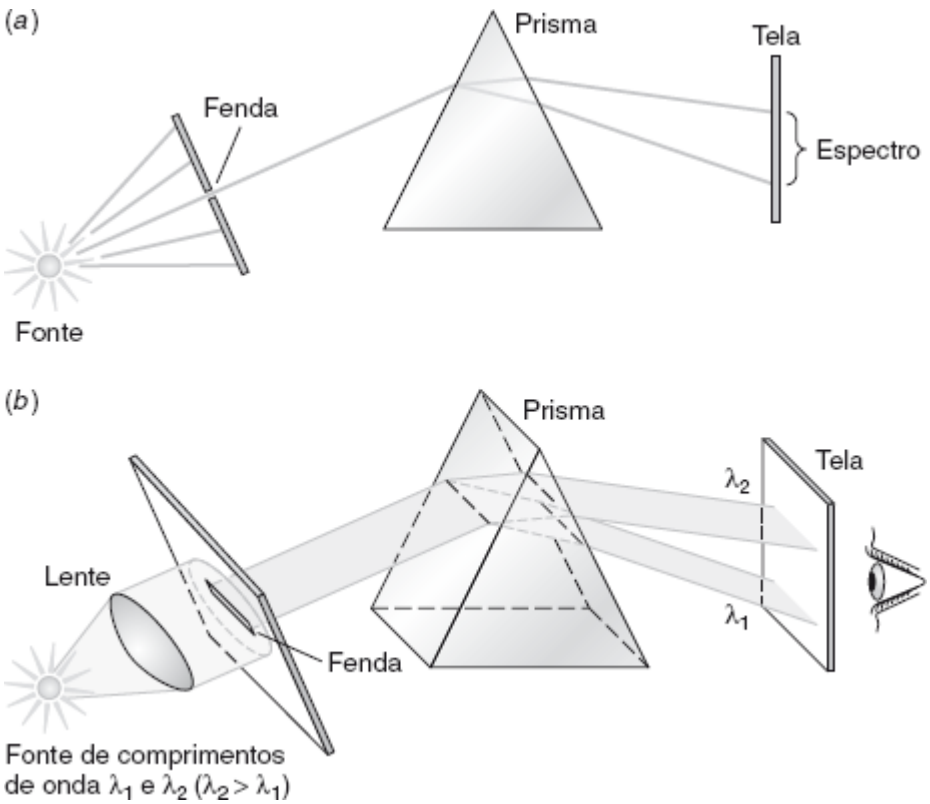


FIGURA 4-1 (*a*) A luz de uma fonte passa por um orifício ou uma fenda estreita antes de chegar ao prisma. O objetivo da fenda é fazer com que todos os raios luminosos cheguem ao prisma com o mesmo ângulo de incidência, para que haja o mínimo de superposição entre os raios de diferentes frequências que são refratados pelo prisma e projetados na tela. (*b*) A fonte emite apenas dois comprimentos de onda, λ_1 e λ_2, com $\lambda_2 > \lambda_1$. Como a fonte se encontra no ponto focal da lente, o feixe que sai da lente tem raios paralelos. A presença de fenda faz com que o feixe se transforme em uma linha fina, que é projetada em uma das faces do prisma. De acordo com a lei da refração, os raios de menor comprimento de onda sofrem um desvio maior e, portanto, duas linhas são vistas na tela, uma para cada comprimento

de onda. Um espectro deste tipo, por motivos óbvios, é conhecido como *espectro de linhas*. Nos espectroscópios modernos, os prismas são substituídos por redes de difração, que apresentam uma resolução muito maior, e a tela é substituída por detectores de radiação.

Graças ao fato de que cada elemento possui um espectro de linhas diferente, os astrônomos ficaram conhecendo a composição das estrelas, os químicos identificaram muitos compostos químicos e os artistas puderam usar lasers de várias cores em seus espetáculos.

onde n é um número inteiro que pode assumir os valores 3, 4, 5, . . . A Figura 4-2*a* mostra um conjunto de linhas do espectro do hidrogênio (hoje conhecido como *série de Balmer*) cujos comprimentos de onda são dados pela fórmula de Balmer. Assim, por exemplo, o comprimento de onda da linha H_α corresponde a $n = 3$ na Equação 4-1 (verifique!); as outras linhas correspondem a outros valores inteiros de n. Balmer acreditava que sua fórmula fosse um caso especial de uma expressão mais geral, que poderia ser usada para prever os espectros de outros elementos. Essa expressão foi descoberta independentemente por J. R. Rydberg e W. Ritz e é por isso chamada de *fórmula de Rydberg-Ritz.* De acordo com a fórmula de Rydberg-Ritz, o recíproco do comprimento de onda[3] é dado por

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \text{para} \quad n > m \qquad \textbf{4-2}$$

onde m e n são números inteiros e R, a *constante de Rydberg*, é a mesma para todas as linhas do espectro de um elemento e varia ligeiramente, de forma regular, de elemento para elemento. No caso do hidrogênio, o valor de R é $R_H = 1{,}096776 \times 10^7$ m^{-1}. No caso de elementos muito pesados, R tende para o valor limite $R_\infty = 1{,}097373 \times 10^7$ m^{-1}. Essas expressões empíricas foram usadas para prever linhas que ainda não tinham sido observadas, como as linhas do hidrogênio fora do espectro visível.

EXEMPLO 4-1 **Séries Espectrais do Hidrogênio** Em termos do número de onda, a série de Balmer do hidrogênio é dada pela Equação 4-2 com $m = 2$ e $n = 3, 4, 5, \ldots$ Assim, por exemplo, para a primeira linha da série, H_∞, $m = 2$ e $n = 3$:

$$\frac{1}{\lambda_{23}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}R = 1{,}523 \times 10^6\ \text{m}^{-1}$$

ou

$$\lambda_{23} = 656{,}5\ \text{nm}$$

Outras séries de linhas espectrais do hidrogênio foram descobertas para $m = 1$ (por Theodore Lyman) e para $m = 3$ (por Friedrich Paschen). Calcule os comprimentos de onda das primeiras linhas das séries de Lyman e Paschen.

SOLUÇÃO

No caso da série de Lyman ($m = 1$), a primeira linha corresponde a $m = 1$, $n = 2$:

$$\frac{1}{\lambda_{12}} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}R = 8{,}22 \times 10^6\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_{12} = 121{,}6\ \text{nm} \quad \text{(no ultravioleta)}$$

No caso da série de Paschen ($m = 3$), a primeira linha corresponde a $m = 3$, $n = 4$:

$$\frac{1}{\lambda_{34}} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{7}{144}R = 5{,}332 \times 10^5\ \text{m}^{-1}$$

$$\lambda_{34} = 1876\ \text{nm} \quad \text{(no infravermelho)}$$

Todas as linhas previstas pela fórmula de Rydberg-Ritz para as séries de Lyman e de Paschen são observadas experimentalmente. Note que, de acordo com a Equação 4-2, não deve existir nenhuma linha com $\lambda < \lambda_\infty = 1/R \approx 91{,}2$ nm para a série de Lyman e nenhuma linha com $\lambda < \lambda_\infty = 9/R \approx 820{,}6$ nm para a série de Paschen. É exatamente o que é observado na prática.

4-2 O Modelo Nuclear de Rutherford

No final do século XIX, os cientistas sabiam que o átomo tinha um diâmetro da ordem de 10^{-10} m (veja o Problema 4-6), era

eletricamente neutro e continha elétrons, partículas muito mais leves que o átomo como um todo (veja a Seção 3-1); o problema era encontrar um modelo que, além de satisfazer todos esses requisitos, fosse compatível com as fórmulas de Balmer e Rydberg. Inicialmente, o modelo mais promissor para o átomo parecia ser o de J. J. Thomson, que se mostrara capaz de explicar várias reações químicas. Neste modelo, os elétrons estavam embebidos em um fluido que continha a maior parte da massa do átomo e possuía cargas positivas suficientes para torná-lo eletricamente neutro (veja a Figura 4-3*a*). Thomson buscava configurações que fossem estáveis e cujos modos normais de vibração correspondessem às frequências observadas nos espectros de emissão. Um dos problemas do modelo é que as forças eletrostáticas não eram capazes de manter o sistema em equilíbrio estável; assim, as cargas atômicas tinham que estar em movimento, e esse movimento tinha que ser acelerado para que não escapassem do átomo. Ora, de acordo com a teoria eletromagnética, cargas aceleradas emitem radiação e, portanto, o átomo teria que irradiar energia continuamente, o que não era observado na prática. Mesmo deixando de lado esta dificuldade, a verdade é que Thomson não conseguiu encontrar uma configuração de cargas cujos modos normais de vibração reproduzissem as frequências dos espectros observados.

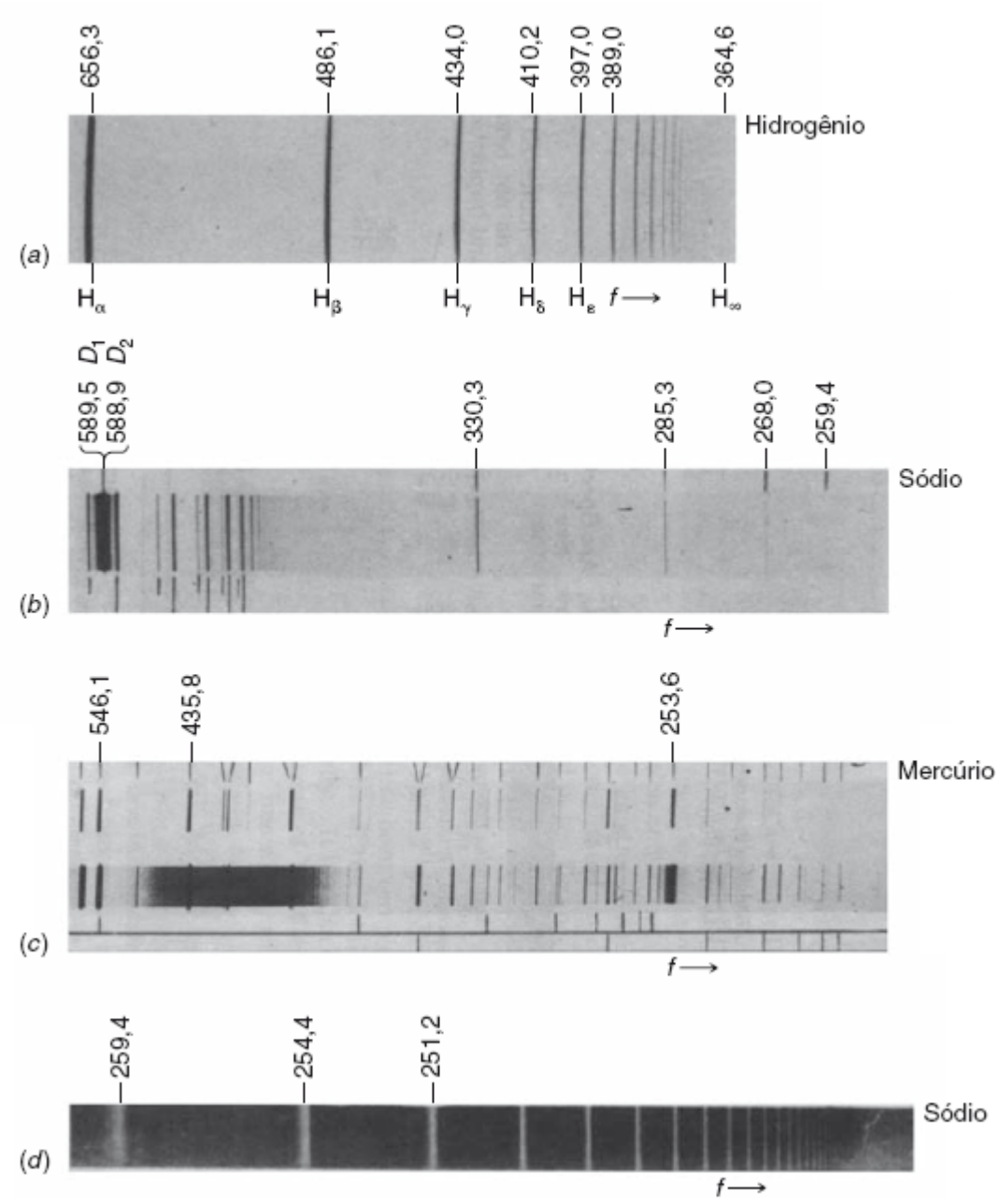


FIGURA 4-2 (*a*) Espectro de emissão do hidrogênio na faixa da luz visível e do ultravioleta próximo. As linhas parecem escuras porque o espectro foi registrado em um negativo fotográfico. Além das cinco primeiras linhas, está indicado também o ponto além do qual não são observadas mais linhas, H_∞, conhecido como *limite* da série. (*b*) Parte do espectro de emissão do sódio. As duas linhas muito próximas em 589 nm, D_1 e D_2, constituem a radiação principal das lâmpadas de vapor de sódio usadas na iluminação pública. (*c*) Parte do espectro de emissão do mercúrio. (*d*) Parte do espectro de absorção do sódio. Quando um feixe de luz branca atravessa um tubo contendo vapor de sódio, certos comprimentos de onda são absorvidos, o que provoca o aparecimento de linhas claras no negativo fotográfico. Observe que a linha em 259,4 nm aparece tanto no espectro de emissão, (*b*), como no de absorção, (*d*). Nos quatro espectros da figura, a frequência aumenta da esquerda para a direita e o comprimento de onda da direita para a esquerda.

O modelo de Thomson começou a cair em descrédito depois de uma série de experimentos realizados por Ernest Rutherford[4] e seus alunos H. W. Geiger e E. Marsden. Rutherford estava investigando a radioatividade e havia descoberto que o urânio emitia pelo menos dois tipos de partículas, que chamou de α e β. Através de um experimento semelhante ao de Thomson, ele verificou que a razão q/m para as partículas α tinha metade do valor do mesmo parâmetro para o próton. Suspeitando que as partículas α não passassem de átomos de hélio duplamente ionizados, Rutherford e seus colaboradores, em um experimento que se tornou clássico, deixaram uma amostra de uma substância radioativa (o rádio) se desintegrar, emitindo partículas α, em uma câmara previamente evacuada; em seguida, submeteram o conteúdo da câmara a uma descarga elétrica e observaram as linhas do espectro do hélio. Percebendo que as partículas α, por possuírem alta energia e massa relativamente elevada, seriam um ótimo instrumento para "sondar" o interior de outros átomos, Rutherford iniciou uma série de experimentos com esse objetivo.

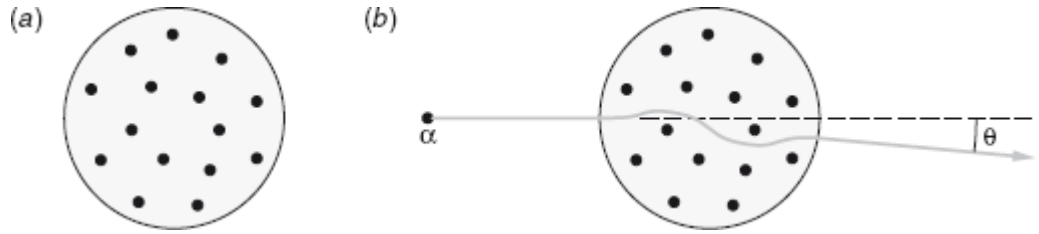
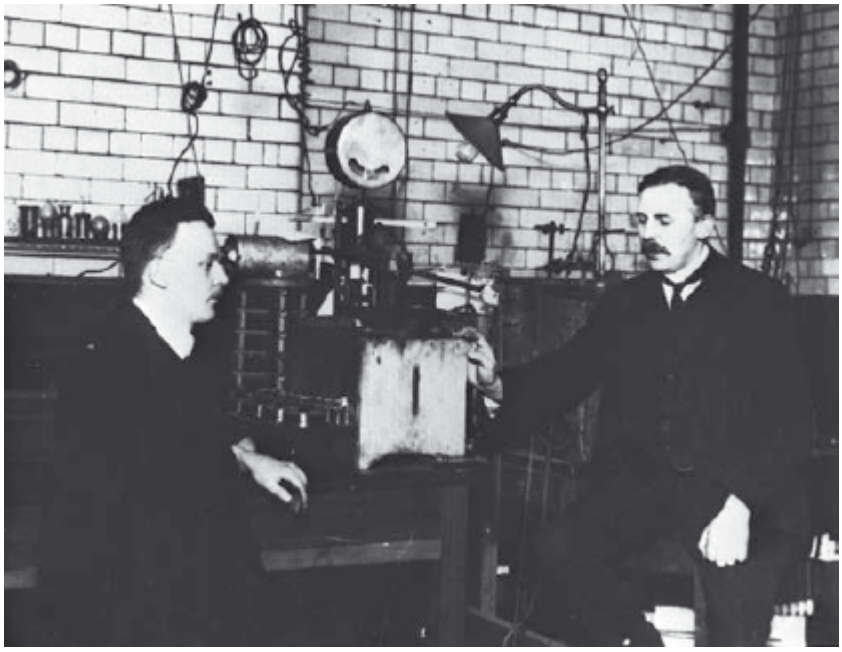


FIGURA 4-3 O modelo de Thomson para o átomo. (*a*) Uma esfera de carga positiva com elétrons embebidos; a carga total é nula. O átomo que aparece na figura seria do elemento fósforo. (*b*) O desvio sofrido por uma partícula α ao se chocar com um átomo do tipo imaginado por Thomson seria muito menor que 1°.



Hans Geiger e Ernest Rutherford no seu laboratório em Manchester. [*Cortesia da Universidade de Manchester*.]

Nos novos experimentos, um feixe fino de partículas α incidia em uma tela de sulfeto de zinco, que emitia cintilações luminosas ao ser atingida pelas partículas (Figura 4-4). A distribuição de cintilações na tela era observada quando várias folhas finas de metal eram colocadas entre a fonte e a tela. A maioria das partículas α não sofria nenhuma deflexão ou era defletida de um ângulo muito pequeno, da ordem de 1°. Inesperadamente, porém, o ângulo de deflexão para umas poucas partículas α era bem grande, chegando a mais de 90°. Se o átomo fosse uma esfera positivamente carregada, com 10^{-10} m de raio, na qual os elétrons estavam embebidos, como no modelo de Thomson, o choque de uma partícula α com um átomo poderia resultar apenas em uma pequena deflexão, mesmo que a partícula α penetrasse profundamente no átomo. Na verdade, os cálculos mostraram que o modelo de Thomson para o átomo não podia explicar as grandes deflexões observadas por Rutherford. Rutherford descreveu a situação nas seguintes palavras:

> Foi a coisa mais incrível que aconteceu em toda a minha vida. Era tão incrível como se você disparasse um projétil de 15 polegadas contra um pedaço de papel e o projétil ricocheteasse de volta.

A Teoria de Espalhamento de Rutherford e o Átomo Nuclear

Em última análise, portanto, a questão levantada pelo experimento com partículas α era como explicar as grandes deflexões

observadas por Rutherford. O problema do átomo de Thomson era que ele era muito "macio": a força máxima experimentada pela partícula α era pequena demais para produzir grandes deflexões. Por outro lado, se a carga positiva do átomo estivesse concentrada em uma pequena região, a força seria muito maior no caso de impactos quase frontais. Rutherford concluiu, portanto, que as grandes deflexões que tinham sido observadas experimentalmente só podiam resultar do encontro de uma partícula α com uma carga positiva confinada a uma região muito menor que o átomo como um todo. Supondo que este "núcleo" fosse uma carga pontual, o cientista calculou a distribuição angular esperada para as partículas α após a colisão. Os cálculos de Rutherford para a variação da probabilidade de espalhamento com o ângulo, a carga do núcleo e a energia cinética das partículas α foram amplamente confirmados em uma série de experimentos realizados em seu laboratório por Geiger e Marsden.

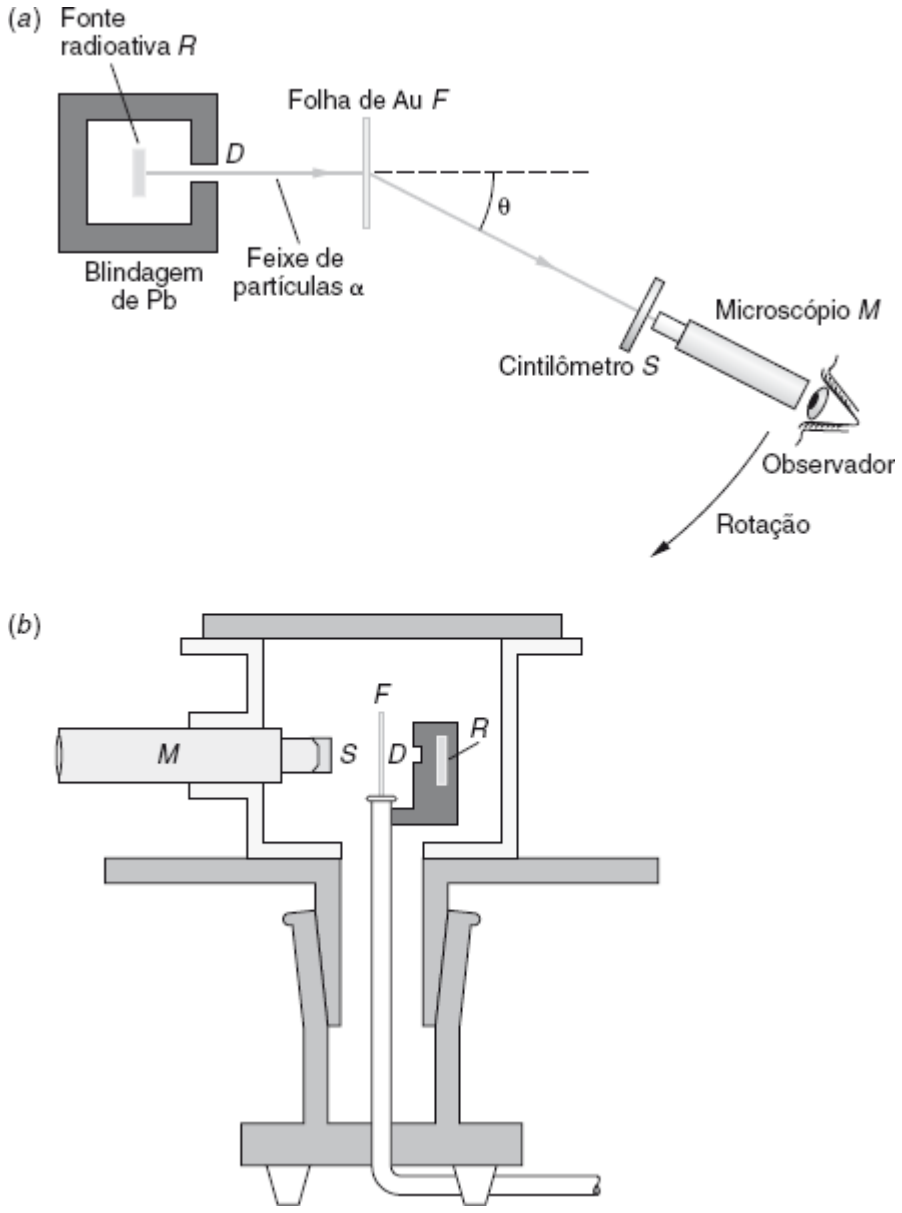


FIGURA 4-4 Diagrama esquemático do equipamento usado por Geiger e Marsden para testar o modelo atômico de Rutherford. (*a*) O feixe de partículas Δ é colimado por um pequeno furo (*D*) na blindagem que envolve a fonte radioativa (*R*), uma pastilha de ^{214}Bi (nuclídeo que, na época de Rutherford, era conhecido como RaC). O feixe de partículas α incide em uma folha de ouro (*F*) com cerca de 2.000 átomos de espessura; cada partícula sofre uma deflexão diferente. Na figura, as partículas cujo ângulo de deflexão é θ chegam a uma pequena tela (*S*) revestida com um cintilador, ou seja, uma substância que emite pequenos clarões luminosos (cintilações) quando é atingida por uma partícula. As cintilações são observadas com o auxílio de um pequeno microscópio (*M*). Era possível fazer girar o conjunto tela-microscópio em um círculo cujo centro estava no ponto de incidência do feixe na folha de ouro. A região percorrida pelo feixe de partículas α era evacuada. O experimento consistia em contar o número de cintilações em função de θ. (*b*) Desenho do equipamento que apareceu no artigo em que Geiger e Marsden apresentaram seus resultados [Geiger e Marsden, *Philosophical Review*, **25**, 507 (1913)]. As letras indicam os mesmos componentes em (*a*) e (*b*).

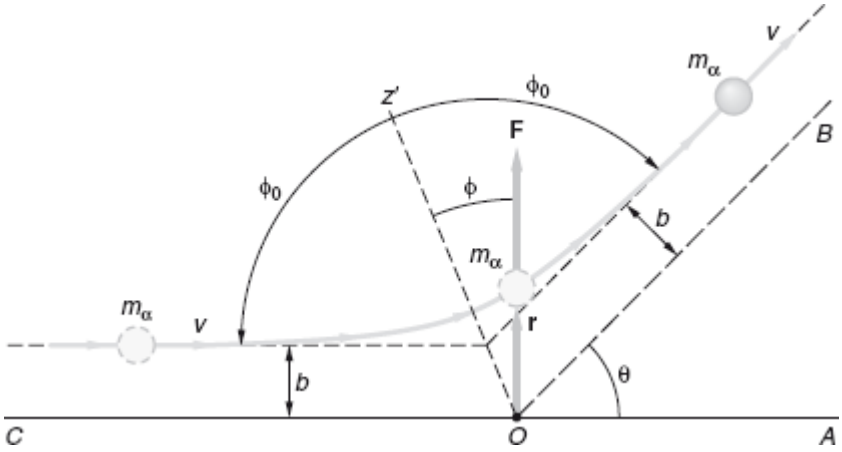


FIGURA 4-5 Espalhamento de Rutherford. O núcleo é considerado uma carga pontual Q situada na origem O. Quando está a uma distância r do núcleo, a partícula α sofre uma força de repulsão $kq_\alpha Q/r^2$. A partícula α descreve uma trajetória hiperbólica que tem como assíntota inicial uma reta paralela à reta COA e como assíntota final uma reta paralela à reta OB, que faz um ângulo θ com a reta COA. Usando as equações de mecânica clássica, é possível encontrar uma relação entre o parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ.

Não vamos reproduzir aqui os cálculos de Rutherford, mas apenas relatar suas hipóteses e conclusões. A Figura 4-5 mostra a geometria do processo de espalhamento de uma partícula α por um núcleo, representado como uma carga pontual Q situada na origem. Inicialmente, a partícula α se aproxima com velocidade v ao longo de uma linha reta situada a uma distância b da reta COA (uma reta paralela à trajetória da partícula α passando pela origem). De acordo com a lei de Coulomb, a força que age sobre a partícula α é dada por $F = kq_\infty Q/r^2$ (Figura 4-6). Depois do espalhamento, quando a partícula α se encontra novamente longe do núcleo, está se movendo com a mesma velocidade v em uma trajetória paralela à reta OB, que faz um ângulo θ com a reta COA. (Como a energia potencial é nula muito antes e muito depois do espalhamento, a velocidade final, de acordo com a lei de conservação da energia, deve ser igual à velocidade inicial.) A distância b é chamada de *parâmetro de impacto*; o ângulo θ recebe o nome de *ângulo de espalhamento*. Usando as equações de mecânica clássica, é possível mostrar que a trajetória da partícula α é uma hipérbole e que entre o parâmetro de impacto b e o ângulo de espalhamento θ existe a seguinte relação:

$$b = \frac{kq_\alpha Q}{m_\alpha v^2}\cot\frac{\theta}{2} \qquad \textbf{4-3}$$

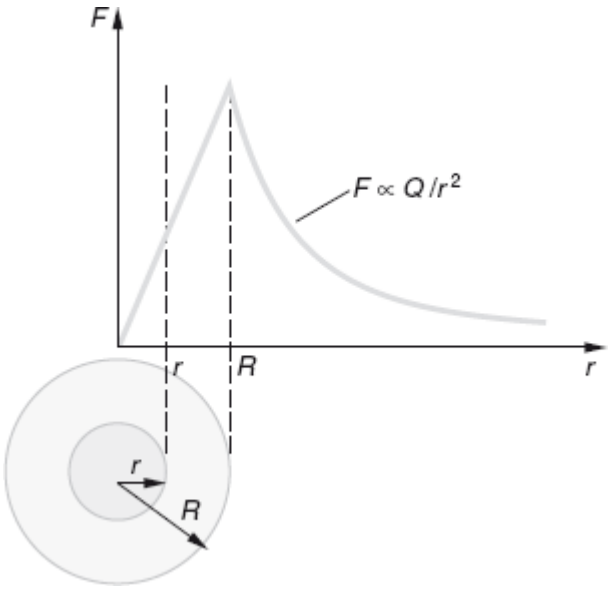


FIGURA 4-6 Força a que está submetida uma carga pontual em função da distância r em relação ao centro de uma esfera uniformemente carregada de raio R. Do lado de fora da esfera, a força é proporcional a Q/r^2; no interior da esfera, a força é proporcional a $q'/r^2 = Qr/R^3$, onde $q' = Q(r/R)^3$ é a carga no interior de uma esfera de raio r. A força é máxima em $r = R$.

A técnica de espalhamento de partículas inventada por Rutherford para "observar" o interior dos átomos tem muitas aplicações na física experimental. O espalhamento de elétrons de alta energia por prótons e nêutrons forneceu os primeiros indícios da existência dos quarks. A espectroscopia de retroespalhamento de Rutherford é muito usada em ciência dos materiais para estudar a composição e estrutura das primeiras camadas da superfície de uma amostra.

Naturalmente, não é possível escolher ou conhecer o parâmetro de impacto para uma partícula α em particular; entretanto, já que, de acordo com a Equação 4-3, θ = 0 para $b = \infty$ e θ = 180º para $b = 0$, para todas as partículas com parâmetro de impacto menor do que um certo valor de b, o ângulo de espalhamento é maior do que o valor dado pela Equação 4-3 para esse valor de b. Em outras palavras, quanto menor o parâmetro de impacto, maior o ângulo de espalhamento (Figura 4-7). Suponha que a intensidade do feixe de partículas α seja I_0 partículas por segundo por unidade de área. O número de partículas espalhadas por segundo cujo ângulo de espalhamento é maior que θ é igual ao número de partículas espalhadas por segundo cujo parâmetro de espalhamento é menor que $b(\theta)$. Este número é $\pi b^2 I_0$.

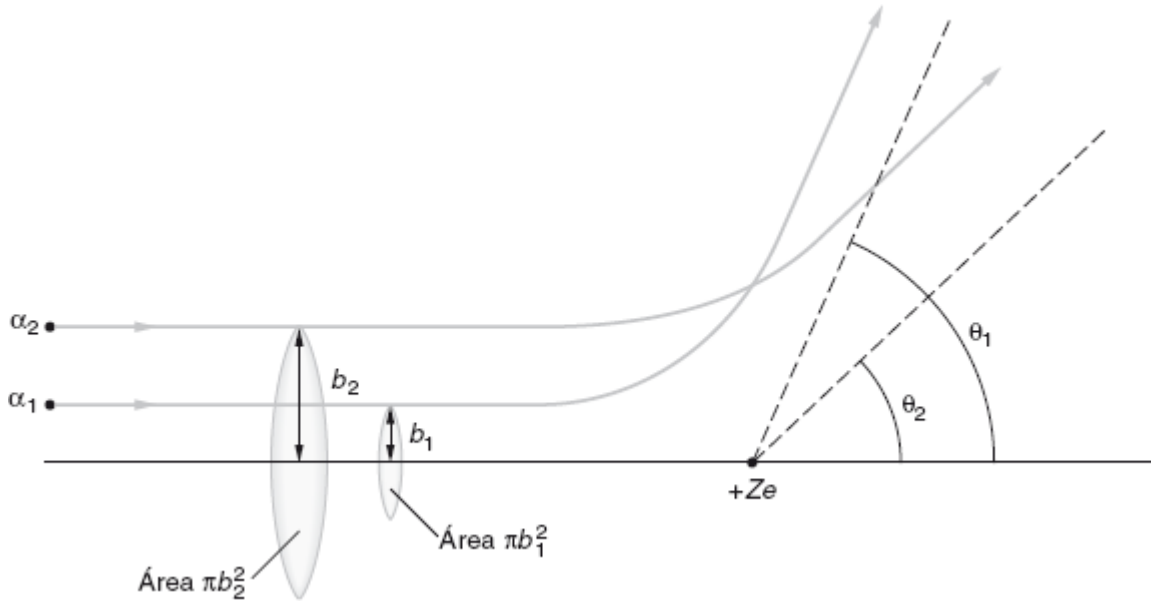


FIGURA 4-7 Duas partículas α de mesma energia cinética se aproximam de uma carga positiva $Q = +Ze$ com parâmetros de impacto b_1 e b_2, em que $b_1 < b_2$. De acordo com a Equação 4-3, o ângulo de espalhamento θ_1 é maior que θ_2. No caso geral, para todas as partículas α cujo parâmetro de impacto é menor que b, o ângulo de espalhamento é maior do que um ângulo θ dado pela Equação 4-3. A área πb^2 é denominada seção de choque de espalhamento para ângulos maiores que θ.

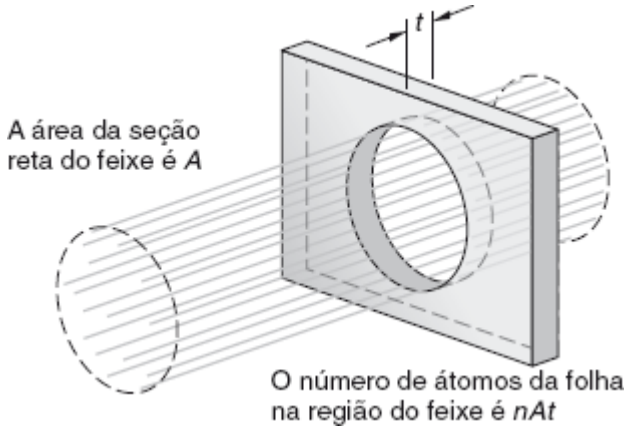


FIGURA 4-8 O número total de núcleos de átomos da folha metálica na área coberta pelo feixe é nAt, em que n é o número de átomos da folha por unidade de volume, A é a área da seção reta do feixe e t é a espessura da folha.

A grandeza πb^2, que tem dimensões de área, é chamada *seção de choque* e representada pela letra grega σ. A seção de choque é, portanto, definida como o *número de partículas espalhadas por núcleo e por unidade de tempo, dividido pela intensidade do feixe incidente*. O número total de partículas espalhadas por segundo é obtido multiplicando $\pi b^2 I_0$ pelo número de núcleos da folha de metal (estamos supondo que a folha é tão fina que a probabilidade de que um núcleo esteja na "sombra" de outro núcleo é insignificante). Chamando de n o número de núcleos por unidade de volume, temos:

$$n = \frac{\rho\,(\mathrm{g/cm^3})\,N_A\,(\text{átomos/mol})}{M\,(\mathrm{g/mol})} = \frac{\rho N_A}{M}\,\frac{\text{átomos}}{\mathrm{cm^3}} \qquad \textbf{4-4}$$

Para uma folha de espessura t, o número total de núcleos é nAt, no qual A é a área da seção reta do feixe (Figura 4-8). O número total de partículas por segundo cujo ângulo de espalhamento é maior que θ é, portanto, $\pi b^2 I_0 ntA$. Se dividirmos este valor pelo número de partículas incidentes por segundo, $I_0 A$, teremos a fração f de partículas cujo ângulo de espalhamento é maior que θ:

$$f = \pi b^2 nt \qquad \textbf{4-5}$$

EXEMPLO 4-2 **Fração Espalhada *f*** Calcule a fração de um feixe de partículas α com uma energia de 5 MeV, incidindo em uma folha de ouro ($Z = 79$) com 10^{-6} m de espessura, para a qual Geiger e Marsden esperavam ângulos de espalhamento $\theta \geq 90^{\circ}$.

SOLUÇÃO

1. A relação entre a fração *f* e o parâmetro de impacto *b*, o número de núcleos por unidade de volume *n* e a espessura da folha de metal *t* é dada pela Equação 4-5:

$$f = \pi b^2 nt$$

2. O número de partículas por unidade de volume é dado pela Equação 4-4:

$$n = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{(19{,}3\ \text{g/cm}^3)(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol})}{197\ \text{gm/mol}}$$
$$= 5{,}90 \times 10^{22}\ \text{átomos/cm}^3 = 5{,}90 \times 10^{28}\ \text{átomos/m}^3$$

3. A relação entre o ângulo de espalhamento e o parâmetro de impacto é dada pela Equação 4-3:

$$b = \frac{kq_\alpha Q}{m_\alpha v^2}\cot\frac{\theta}{2} = \frac{(2)(79)ke^2}{2K_\alpha}\cot\frac{90^{\circ}}{2}$$
$$= \frac{(2)(79)(1{,}44\ \text{eV}\cdot\text{nm})}{(2)(5 \times 10^6\ \text{eV})} = 2{,}28 \times 10^{-5}\ \text{nm}$$
$$= 2{,}28 \times 10^{-14}\ \text{m}$$

4. Substituindo os resultados anteriores na Equação 4-5, obtemos o valor de *f*:

$$f = \pi(2{,}28 \times 10^{-14}\ \text{m})^2\left(5{,}9 \times 10^{28}\ \frac{\text{átomos}}{\text{m}^3}\right)(10^{-6}\ \text{m})$$
$$= 9{,}6 \times 10^{-5} \approx 10^{-4}$$

Observação: *Na primeira série de medidas, Geiger e Marsden observaram que o ângulo de espalhamento era maior ou igual a 90º para uma partícula em cada 8.000; assim, os resultados experimentais estão em boa concordância com o modelo nuclear.*

Estimulado pela boa concordância entre o modelo atômico nuclear e as medidas experimentais da fração de partículas α cujo ângulo de espalhamento era igual ou maior que 90º, Rutherford chegou a uma expressão, baseada no modelo nuclear, para o número de partículas α, ΔN, para as quais o ângulo de espalhamento seria um ângulo θ qualquer. Esse número, que é função do número atômico *Z* dos átomos do alvo, da espessura *t* da folha de metal, da intensidade I_0 do feixe incidente, da energia cinética E_k das partículas α e da geometria do detector, é dado por

$$\Delta N = \left(\frac{I_0 A_{sc} nt}{r^2}\right)\left(\frac{kZe^2}{2E_k}\right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\frac{\theta}{2}} \qquad \textbf{4-6}$$

Dentro da margem de erro dos experimentos, que envolviam a observação visual de centenas de milhares de partículas α, Geiger e Marsden confirmaram todas as previsões da fórmula de Rutherford para uma variação de quatro ordens de grandeza no valor de ΔN. A excelente concordância dos resultados experimentais com a Equação 4-6 estabeleceu firmemente o modelo atômico nuclear como a base correta para o estudo de fenômenos atômicos e nucleares. (Veja a Figura 4-9.)



Leitura Suplementar

Rutherford chegou à Equação 4-6 a partir do modelo nuclear do átomo e do conhecido processo de espalhamento de Coulomb de partículas carregadas. O processo é descrito com detalhes em *A Previsão de Rutherford e os Resultados de Geiger e Marsden*, que está disponível no site da LTC Editora para este

livro na Internet, onde também se encontram as Equações 4-7 a 4-10 e as Figuras 4-10 a 4-12.

O Tamanho do Núcleo

O fato de as observações experimentais indicarem que a equação $F = kq_\alpha Q/r^2$ estava correta, confirmando o modelo de Rutherford, não significava que o núcleo fosse uma carga pontual. A deflexão das partículas α seria a mesma se o núcleo fosse uma esfera carregada de raio R_0, contanto que as partículas α não penetrassem na esfera (veja as Figuras 4-6 e 4-13). Para um dado ângulo de espalhamento, a distância de máxima aproximação de uma partícula α pode ser calculada a partir da geometria da colisão. Para o maior ângulo, 180°, a colisão é frontal. A distância de máxima aproximação correspondente, r_d, representa, portanto, um limite superior para o tamanho do núcleo usado como alvo. Podemos calcular a distância de máxima aproximação para uma colisão frontal observando que, de acordo com a lei de conservação da energia, a energia potencial a essa distância deve ser igual à energia cinética inicial:

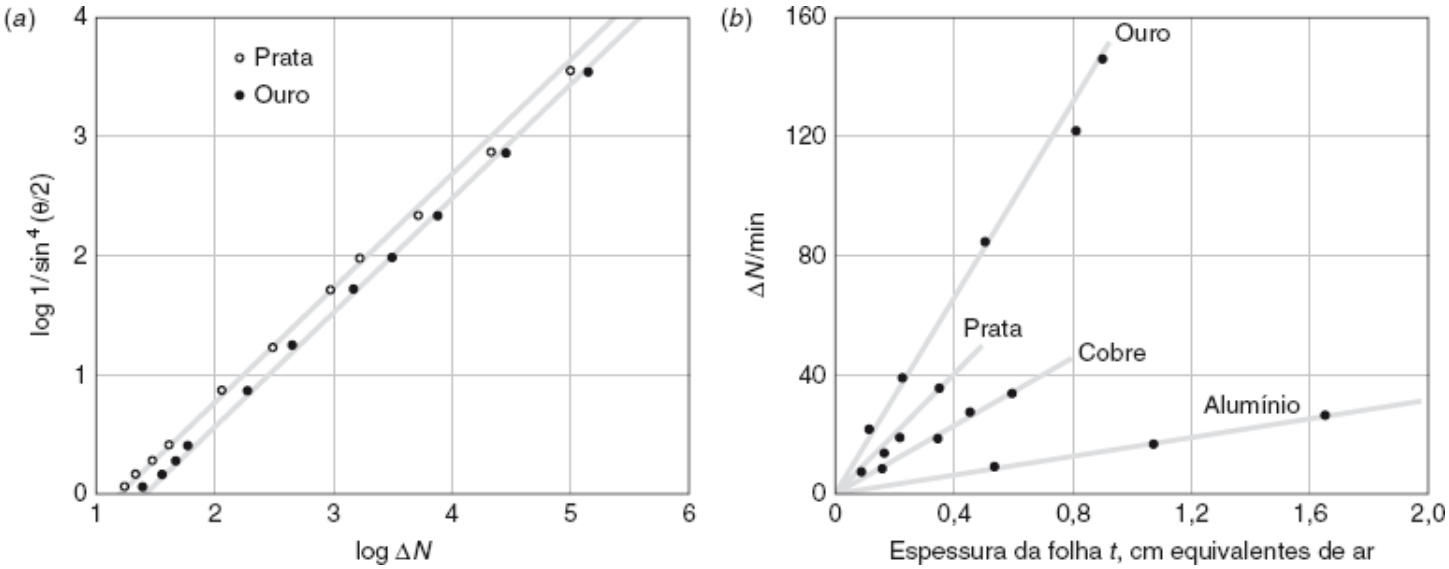


FIGURA 4-9 (*a*) Dados de Geiger e Marsden para o espalhamento de partículas α por folhas de ouro e prata. O gráfico foi traçado em escala loglog para mostrar uma variação de várias ordens de grandeza nos resultados experimentais. Observe que, na escala vertical, os maiores ângulos de espalhamento correspondem aos pontos mais próximos da origem. (*b*) Geiger e Marsden também mediram a variação de ΔN com t para folhas feitas de vários elementos e compararam os resultados com as previsões teóricas (Equação 4-6). A figura mostra os resultados para quatro elementos.

$$(V + E_k)_{r\ \text{grande}} = (V + E_k)_{r_d}$$

$$\left(0 + \frac{1}{2}m_\alpha v^2\right)_{r\ \text{grande}} = \left(\frac{kq_\alpha Q}{r_d} + 0\right)_{r_d}$$

$$\frac{1}{2}m_\alpha v^2 = \frac{kq_\alpha Q}{r_d}$$

ou

$$r_d = \frac{kq_\alpha Q}{\frac{1}{2}m_\alpha v^2} \qquad \textbf{4-11}$$

No caso de partículas α com uma energia de 7,7 MeV, a distância de máxima aproximação para uma colisão frontal é dada por

$$r_d = \frac{(2)(79)(1{,}44\ \text{eV}\cdot\text{nm})}{7{,}7 \times 10^6\ \text{eV}} = 3 \times 10^{-5}\ \text{nm} = 3 \times 10^{-14}\ \text{m}$$

A distância de máxima aproximação é um pouco maior para outros ângulos; no caso de grandes ângulos, porém, continua a ser da mesma ordem de grandeza. A excelente concordância dos resultados de Geiger e Marsden para grandes ângulos com as previsões da Equação 4-6 sugere, portanto, que o raio do núcleo de ouro não pode ser maior que aproximadamente 3×10^{-14} m.

Se partículas com maiores energias pudessem ser usadas, a distância de máxima aproximação seria menor; para algum valor da energia, as partículas α talvez começassem finalmente a penetrar no núcleo. Como, nesse caso, a força deixaria de ser dada por $F = kq_{\alpha}Q/r^2$, os resultados experimentais não estariam mais de acordo com as previsões teóricas. Rutherford não podia aumentar a energia das partículas α, mas podia reduzir a distância de máxima aproximação usando alvos com menores números atômicos.[9] No caso do alumínio, com $Z = 13$, as partículas α de maior energia de que Rutherford dispunha (de 7,7 MeV, produzidas pela desintegração do ^{214}Bi), para grandes ângulos de espalhamento, não obedeciam à Equação 4-6. Quando, porém, a energia das partículas α era reduzida fazendo-as passar por folhas de mica de diferentes espessuras, os dados voltavam a concordar com as previsões da Equação 4-6. A Figura 4-14 mostra os resultados obtidos por Rutherford. O valor de r_d (calculado com o auxílio da Equação 4-11) a partir do qual os dados começam a se desviar das previsões teóricas pode ser considerado como o raio do núcleo. A partir desses resultados, Rutherford estimou o raio do núcleo de alumínio em aproximadamente $1{,}0 \times 10^{-14}$ m. (O valor correto do raio do núcleo de Al é $3{,}6 \times 10^{-15}$ m; veja o Capítulo 11.)

Uma unidade de comprimento conveniente para descrever o tamanho dos núcleos é o fermi, ou femtômetro, que é igual a 10^{-15} m. Como vamos ver no Capítulo 11, o raio dos núcleos varia de 1 a 10 fm, de acordo com a massa atômica.

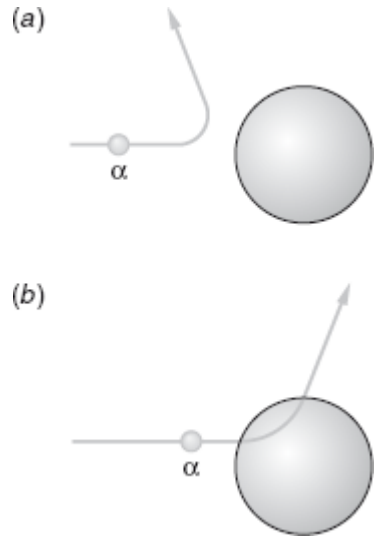


FIGURA 4-13 (*a*) se a partícula α não penetra no núcleo, este pode ser considerado uma carga pontual. (*b*) se a partícula α tem energia suficiente para penetrar no núcleo, a lei de espalhamento de Rutherford deixa de ser válida, já que parte da carga do núcleo não é "vista" pela partícula durante o espalhamento.

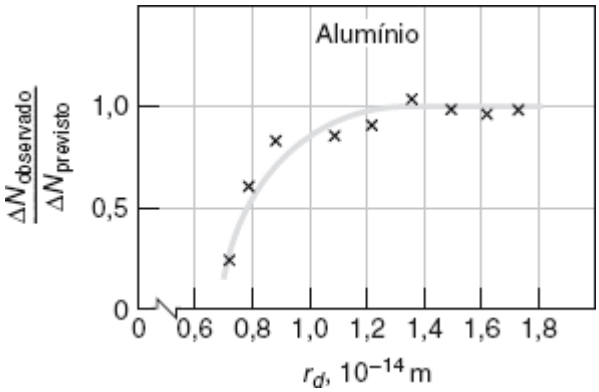


FIGURA 4-14 Resultados obtidos pelo grupo de Rutherford para o espalhamento de partículas α (para um ângulo fixo) em função de r_d, calculado a partir da energia cinética das partículas α usando a Equação 4-11.

EXEMPLO 4-3 **Espalhamento de Rutherford para um Ângulo** θ Em um experimento, partículas α são produzidas pela desintegração de ^{226}Ra e 450 partículas por minuto são registradas por um cintilômetro para um ângulo de espalhamento $\theta = 45^{\circ}$ em uma folha de prata. Se as condições experimentais forem mantidas e o detector for deslocado de modo a observar as partículas cujo ângulo de espalhamento é 90º, qual será o número de partículas observadas por minuto?

SOLUÇÃO

Podemos usar a Equação 4-6 com $\Delta N = 450$ e $\theta = 45^{\circ}$, mas não conhecemos os valores dos outros parâmetros. Englobando todas as grandezas entre parênteses em uma única constante C, temos:

$$\Delta N = 450 = C \operatorname{sen}^{-4} \frac{45^\circ}{2}$$

ou

$$C = 450 \operatorname{sen}^4 \left(\frac{45^\circ}{2} \right)$$

Quando o cintilômetro é deslocado para registrar partículas cujo ângulo de espalhamento é 90º, o valor de C permanece o mesmo e, portanto,

$$\begin{aligned} \Delta N &= C \operatorname{sen}^{-4} \left(\frac{90^\circ}{2} \right) = 450 \operatorname{sen}^4 \left(\frac{45^\circ}{2} \right) \operatorname{sen}^{-4} \left(\frac{90^\circ}{2} \right) \\ &= 38{,}6 \approx 39 \text{ partículas/min} \end{aligned}$$

EXEMPLO 4-4 **Espalhamento de Partículas α** Um feixe de partículas α com $E_k = 6{,}0$ MeV incide em uma folha de prata com 1,0 μm de espessura. A corrente do feixe é 1,0 nA. Quantas partículas α são contadas por um pequeno cintilômetro com 5 mm^2 de área, situado a 2,0 cm da folha, em um ângulo de 75º? (Para a prata, $Z = 47$, $\rho = 10{,}5$ g/cm^3 e $M = 108$.)

SOLUÇÃO

1. O número de partículas ΔN é dado pela Equação 4-6:

$$\Delta N = \left(\frac{I_0 A_{sc} n t}{r^2} \right) \left(\frac{kZe^2}{2E_k} \right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}$$

2. Como a carga das partículas α é $q_\alpha = 2e$, a intensidade do feixe é dada por

$$\begin{aligned} I_0 &= (1{,}0 \times 10^{-9} \text{ A}) (2 \times 1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C}/\alpha)^{-1} \\ &= 3{,}12 \times 10^9 \, \alpha/\text{s} \end{aligned}$$

3. A energia cinética das partículas é dada por

$$\begin{aligned} E_k &= (6{,}0 \text{ MeV}) (1{,}60 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}) \\ &= 9{,}60 \times 10^{-13} \text{ J} \end{aligned}$$

4. No caso da prata, n é dado por

$$\begin{aligned} n &= \rho N_A / M \\ &= \frac{(10{,}5 \text{ g/cm}^3) (6{,}02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})}{108 \text{ g/mol}} \\ &= 5{,}85 \times 10^{22} \text{ átomos/cm}^3 = 5{,}85 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3 \end{aligned}$$

5. Substituindo os valores acima na Equação 4-6, obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta N = {} & \frac{(3{,}12 \times 10^9 \, \alpha/\text{s}) (5 \times 10^{-6} \text{ m}^2) (5{,}85 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3) (10^{-6} \text{ m})}{(2 \times 10^{-2})^2 \operatorname{sen}^4 (75^\circ/2)} \\ & \times \left[\frac{(9 \times 10^9) (47) (1{,}60 \times 10^{-19})^2}{(2) (9{,}60 \times 10^{-13})} \right]^2 \\ = {} & 528 \, \alpha/\text{s} \end{aligned}$$

EXEMPLO 4-5 **Raio do Núcleo de Ouro** De acordo com medidas de espalhamento de elétrons de alta energia, o raio do núcleo de ouro é 6,6 fm. Que energia deveriam ter as partículas α usadas por Rutherford para chegarem à superfície do núcleo antes

de mudar de direção? Suponha um ângulo de espalhamento de 180 .

SOLUÇÃO

De acordo com a Equação 4-11, temos:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{kq_\alpha Q}{r_d} = \frac{(9 \times 10^9)(2)(79)(1{,}60 \times 10^{-19})^2}{6{,}6 \times 10^{-15}}$$
$$= 5{,}52 \times 10^{-12}\,\text{J} = 34{,}5\,\text{MeV}$$

Nenhum átomo radioativo encontrado na natureza emite partículas α com uma energia tão elevada; assim, Rutherford não poderia ter executado com o ouro um experimento semelhante ao que executou com o alumínio, ilustrado na Figura 4-14.

Exercícios

1. Por que não é possível escolher o parâmetro de impacto para uma dada partícula α?
2. Por que é necessário usar como alvos folhas muito finas de metal?
3. Por que Rutherford conseguiu estabelecer um limite máximo para o raio do átomo de Al, mas não para o raio do átomo de Au?
4. Como é possível usar os dados da Figura 4-9*a* para determinar a razão entre a carga do núcleo de prata e a carga do núcleo de ouro?
5. Como seriam afetados os resultados mostrados na Figura 4-9*b* se a folha fosse tão espessa que um número apreciável de núcleos ficasse na "sombra" de outros núcleos?

4-3 O Modelo de Bohr para o Átomo de Hidrogênio

Em 1913, o físico dinamarquês Niels H. D. Bohr[10] propôs um modelo para o átomo de hidrogênio que combinava os trabalhos de Planck, Einstein e Rutherford e que permitia prever, com notável precisão, a posição das linhas do espectro do hidrogênio. O modelo de Rutherford atribuía uma carga e uma massa ao núcleo, mas nada dizia a respeito da distribuição de carga e massa dos elétrons. Bohr, que estivera trabalhando no laboratório de Rutherford na época dos experimentos de Geiger e Marsden, formulou a hipótese de que o elétron do átomo de hidrogênio girava em torno do núcleo, atraído pela carga positiva. De acordo com a mecânica clássica, a órbita do elétron poderia ser circular ou elíptica, como as órbitas dos planetas em torno do Sol. Para simplificar os cálculos, Bohr decidiu trabalhar com órbitas circulares. Um modelo desse tipo é mecanicamente estável, já que o potencial de Coulomb $V = -kZe^2/r$ fornece a força centrípeta

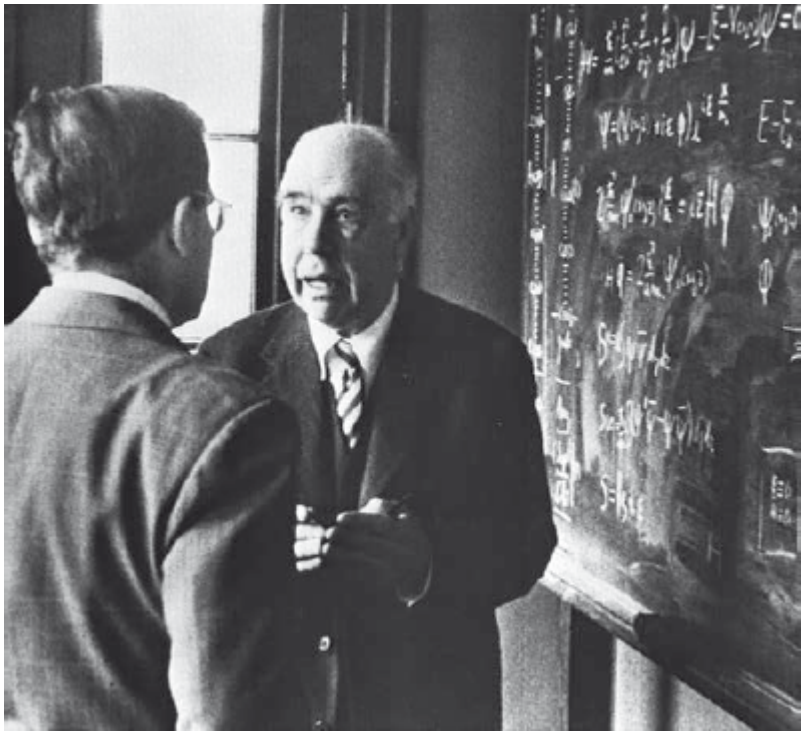
$$F = \frac{kZe^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \qquad \textbf{4-12}$$

necessária para que o elétron se mova em um círculo de raio r com velocidade v. Entretanto, o modelo é eletricamente instável, pois o elétron está permanentemente acelerado em direção ao centro da órbita. De acordo com as leis da eletrodinâmica, toda carga acelerada irradia uma onda eletromagnética cuja frequência f é igual à do movimento periódico, que, no caso, é a frequência de revolução. Assim, classicamente,

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \left(\frac{kZe^2}{rm}\right)^{1/2}\frac{1}{2\pi r} = \left(\frac{kZe^2}{4\pi^2 m}\right)^{1/2}\frac{1}{r^{3/2}} \sim \frac{1}{r^{3/2}} \qquad \textbf{4-13}$$

A energia total do elétron é a soma das energias cinética e potencial:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{kZe^2}{r}\right)$$



Niels Bohr explica um detalhe em frente ao quadro-negro (1956). [*American Institute of Physics, Niels Bohr Library, Margrethe Bohr Collection*.]

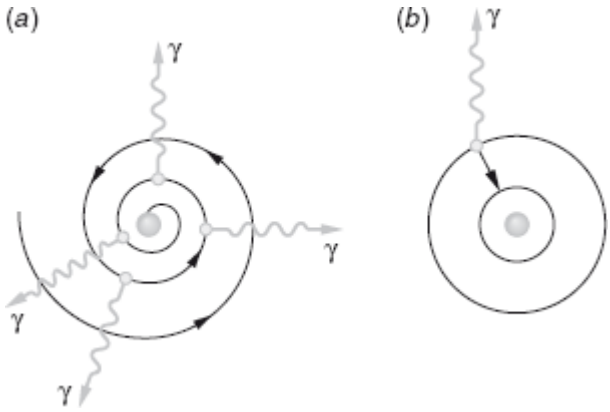


FIGURA 4-15 (*a*) No modelo clássico do átomo, o elétron descreve uma espiral em direção ao núcleo porque está constantemente irradiando energia. (*b*) No modelo de Bohr, o elétron só irradia energia quando executa uma transição para uma órbita de raio menor.

De acordo com a Equação 4-12, $mv^2/2 = kZe^2/2r$ (uma relação que é válida para o movimento circular em qualquer campo de força que varie com o quadrado da distância, como o campo gravitacional e o campo eletrostático). Assim, a energia total pode ser escrita na forma

$$E = \frac{kZe^2}{2r} - \frac{kZe^2}{r} = -\frac{kZe^2}{2r} \sim -\frac{1}{r} \qquad \textbf{4-14}$$

De acordo com a física clássica, portanto, à medida que o elétron perde energia por radiação, o raio da órbita se torna cada vez menor e a frequência da radiação emitida cada vez maior, um processo que termina apenas quando o elétron se choca com o núcleo (Figura 4-15*a*). Usando as equações da mecânica clássica e da eletrodinâmica, é possível determinar o tempo que o elétron levaria para atingir a posição do núcleo; o tempo calculado é menos de um microssegundo. Assim, à primeira vista, o modelo de Bohr prevê que o átomo irradia um espectro contínuo (já que a frequência de radiação varia continuamente enquanto o elétron se aproxima do núcleo) e tem uma vida muito curta, o que, felizmente, não ocorre na prática. O que se observa é que, a menos que sejam excitados por algum agente externo, os átomos não irradiam; ao serem excitados, em vez de irradiar um espectro contínuo, irradiam apenas em certas frequências bem definidas.

Bohr "resolveu" todos esses problemas através de dois postulados decididamente revolucionários. O primeiro foi o de que *os elétrons se movem em certas órbitas sem irradiar energia*. Bohr chamou essas órbitas de *estados estacionários*. O segundo postulado foi o de que *os átomos irradiam quando um elétron sofre uma transição de um estado estacionário para outro* (Figura 4-15*b*) *e a frequência f da radiação emitida está relacionada às energias das órbitas através da equação*

$$hf = E_i - E_f \qquad \textbf{4-15}$$

na qual h é a constante de Planck e E_i e E_f são as energias dos estados inicial e final. O segundo postulado, que equivale a aplicar a lei de conservação da energia à emissão de um fóton, está em total desacordo com a teoria clássica, segundo a qual a frequência da radiação deve ser igual à frequência de movimento da partícula carregada. A Equação 4-15 recebeu o nome de *condição de frequência* de Bohr.

Para determinar as energias dos estados estacionários, Bohr lançou mão de um terceiro postulado, hoje conhecido como *princípio de correspondência*, que teve consequências profundas:

No limite de grandes órbitas e altas energias, os resultados quânticos devem coincidir com os resultados clássicos.

De acordo com o princípio de correspondência, sejam quais forem as modificações introduzidas na física clássica para descrever o comportamento da matéria em nível submicroscópico, quando esses resultados são estendidos ao mundo macroscópico, devem estar de acordo com as leis da física clássica, que foram exaustivamente testadas em nosso dia a dia. Embora o modelo proposto por Bohr para o átomo de hidrogênio tenha sido suplantado pela teoria quântica moderna, que será discutida em capítulos posteriores, a condição de frequência (Equação 4-15) e o princípio de correspondência continuam a desempenhar um papel importante na nova teoria.

Em seu primeiro artigo,[11] escrito em 1913, Bohr observou que uma das consequências do modelo era que o momento angular do elétron do átomo de hidrogênio podia assumir apenas valores que fossem múltiplos inteiros da constante de Planck dividida por 2π, em concordância com uma sugestão feita no ano anterior por J. W. Nicholson. Em outras palavras, *o momento angular é quantizado*; *pode apenas assumir valores iguais a nh/2π*, *onde n é um número inteiro*. Em vez de reproduzir a complicada demonstração de Bohr, vamos usar a conclusão de que o momento angular é quantizado para calcular as posições das linhas do espectro do hidrogênio. As equações a seguir se aplicam não só ao hidrogênio, mas também a qualquer átomo de carga nuclear $+Ze$ com um único elétron em órbita, como o hélio monoionizado, He^+, e o lítio duplamente ionizado, Li^{2+}.

Como vimos, se a carga do núcleo é $+Ze$ e a carga do elétron é $-e$, a força centrípeta necessária para que o elétron se mova em uma órbita circular é a força de atração eletrostática dada pela Equação 4-12, $F = kZe^2/r$. Explicitando a velocidade v do elétron, obtemos:

$$v = \left(\frac{kZe^2}{mr}\right)^{1/2} \qquad \textbf{4-16}$$

De acordo com a hipótese de quantização do momento angular L,

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{4-17}$$

onde o número inteiro n é denominado *número quântico principal* e $\hbar = h/2\pi$. (Em algumas situações, é mais conveniente usar a constante $\hbar$, ou "h cortado", do que a constante de Planck h, assim como é mais conveniente usar a frequência angular $\omega = 2\pi f$ do que a frequência f.) Combinando as Equações 4-16 e 4-17, podemos determinar o raio orbital:

$$r = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar}{m}\left(\frac{rm}{kZe^2}\right)^{1/2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, obtemos:

$$r^2 = \frac{n^2\hbar^2}{m^2}\left(\frac{rm}{kZe^2}\right)$$

o que nos dá

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2} = \frac{n^2 a_0}{Z} \qquad \textbf{4-18}$$

onde

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = 0{,}529\ \text{Å} = 0{,}0529\ \text{nm} \qquad \textbf{4-19}$$

é uma constante denominada *raio de Bohr*. (O angstrom, Å, uma unidade muito usada pelos primeiros espectroscopistas, é igual a 10^{-10} m ou 10^{-1} nm.) As órbitas associadas aos estados estacionários mencionados no primeiro postulado de Bohr possuem

raios quantizados r_n, cujo valor é dado pela Equação 4-18 para $n = 1, 2, \ldots$ Observe que o raio de Bohr a_0 corresponde ao menor raio possível ($n = 1$) da órbita do elétron no átomo de hidrogênio ($Z = 1$). Como $r_n - Z^{-1}$, os raios das órbitas de Bohr em outros átomos com um elétron (para os quais $Z > 1$) são menores que as órbitas correspondentes no hidrogênio.

A energia total do elétron (Equação 4-14) pode ser obtida combinando a Equação 4-14 com a Equação 4-18:

$$E_n = -\frac{kZe^2}{2r_n} = -\frac{kZe^2}{2}\left(\frac{mkZe^2}{n^2\hbar^2}\right)$$

$$E_n = -\frac{mk^2Z^2e^4}{2\hbar^2n^2} = -E_0\frac{Z^2}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{4-20}$$

na qual $E_0 = mk^2e^4/2\hbar^2$. Assim, a energia do elétron também é quantizada, isto é, os estados estacionários correspondem a valores específicos da energia total. Isso significa que as energias E_i e E_f que aparecem na condição de frequência do segundo postulado de Bohr devem pertencer ao conjunto de energias permitidas E_n e a Equação 4-15 se torna

$$hf = E_{n_i} - E_{n_f} = -E_0\frac{Z^2}{n_i^2} - \left(-E_0\frac{Z^2}{n_f^2}\right)$$

ou

$$f = \frac{E_0Z^2}{h}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad \textbf{4-21}$$

que pode ser escrita na forma da equação de Rydberg-Ritz (Equação 4-2) fazendo $f = c/\lambda$ e dividindo ambos os membros da equação por c:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0Z^2}{hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \qquad \textbf{4-22}$$

onde

$$R = \frac{E_0}{hc} = \frac{mk^2e^4}{4\pi c\hbar^3} \qquad \textbf{4-23}$$

é o valor teórico obtido por Bohr para a constante de Rydberg.

Usando os valores de m, k, e, c e $\hbar$ conhecidos em 1913, Bohr calculou o valor de R e constatou que o resultado estava de acordo (dentro dos limites de erro das constantes) com o valor experimental obtido pelos espectroscopistas, $1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Em seu artigo, Bohr comentou que a Equação 4-23 talvez pudesse ser usada para obter valores mais precisos das constantes e, m e $\hbar$, já que o valor de R podia ser medido com grande precisão. Foi o que realmente aconteceu.

De acordo com o modelo de Bohr, os valores possíveis da energia do átomo de hidrogênio são dados pela Equação 4-20, com $Z = 1$:

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2n^2} = -\frac{E_0}{n^2} \qquad \textbf{4-24}$$

onde

$$E_0 = \frac{mk^2e^4}{2\hbar^2} = 2{,}18 \times 10^{-18}\,\text{J} = 13{,}6\,\text{eV}$$

é o valor absoluto de E_n para $n = 1$. O estado no qual $E = E_1 = -E_0$ é chamado de *estado fundamental*. É conveniente plotar as energias dos estados estacionários em um gráfico como o da Figura 4-16. Este tipo de gráfico é conhecido como *diagrama de níveis de energia*. Várias séries de transições entre os estados estacionários estão indicadas neste diagrama por setas verticais.

De acordo com a condição de frequência (Equação 4-15), a frequência da radiação emitida nessas transições é igual à diferença de energia entre os níveis envolvidos dividida pela constante de Planck. A energia necessária para remover o elétron do átomo, 13,6 eV, é chamada de *energia de ionização* ou *energia de ligação* do elétron.

Para milhões de pessoas, o modelo de Bohr e Rutherford, no qual o átomo lembra um sistema solar em miniatura, com o núcleo no lugar do Sol e os elétrons no lugar dos planetas, tornou-se o símbolo da física atômica e nuclear.

Na época em que o artigo de Bohr foi publicado, eram conhecidas duas séries do espectro do hidrogênio: a série de Balmer, correspondente a $n_f = 2$, $n_i = 3, 4, 5, \ldots$ e a série de Paschen, descoberta pelo cientista do mesmo nome em 1908, que corresponde a $n_f = 3$, $n_i = 4, 5, 6, \ldots$ De acordo com a Equação 4-22, deveriam existir outras séries para outros valores de n_f. Em 1916, Lyman descobriu a série correspondente a $n_f = 1$ e em 1922 e 1924, respectivamente, F.S. Brackett e A.H. Pfund descobriram as séries correspondentes a $n_f = 4$ e $n_f = 5$. Como pode ser facilmente verificado calculando os comprimentos de onda para as diferentes séries, apenas a série de Balmer está na parte visível do espectro eletromagnético. A série de Lyman está no ultravioleta; as outras, no infravermelho.

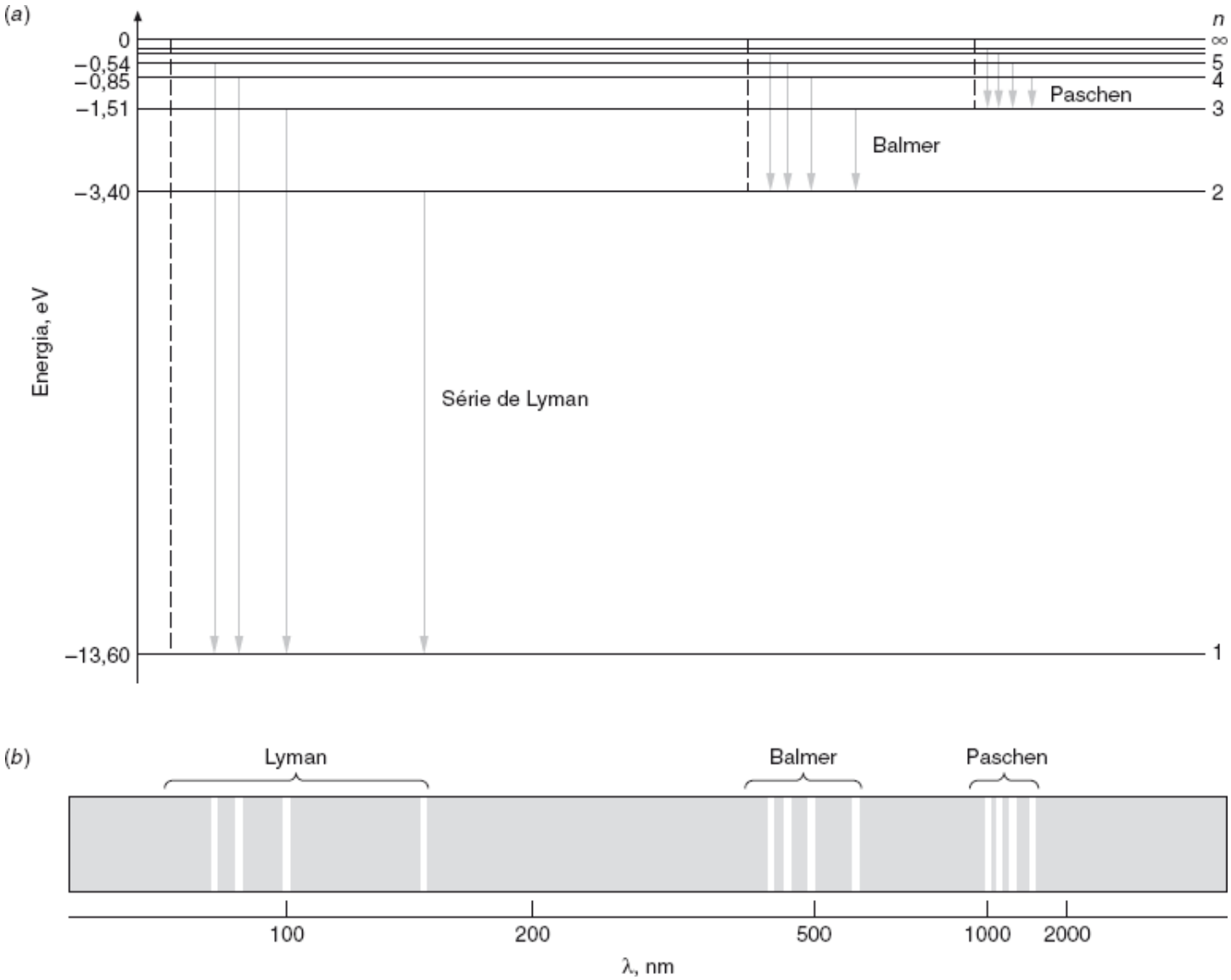


FIGURA 4-16 (*a*) Diagrama de níveis de energia do átomo de hidrogênio, mostrando os sete níveis estacionários de menor energia e as quatro primeiras transições das séries de Lyman, Balmer e Paschen. Existe um número infinito de níveis, cujas energias são dadas por $E_n = -13{,}6/n^2$ eV, em que n é um número inteiro. A linha tracejada que aparece à esquerda de cada série é o *limite da série*, que corresponde à energia que seria irradiada por um elétron em repouso a uma grande distância do núcleo ($n \rightarrow \infty$) em uma transição para o estado $n = n_f$ da série considerada. A distância horizontal entre as transições de cada série é proporcional à diferença entre os comprimentos de onda correspondentes. (*b*) Linhas espectrais correspondentes às quatro primeiras transições das três séries. Observe as regularidades dentro de cada série, particularmente o limite para pequenos comprimentos de onda e a separação cada vez menor entre linhas adjacentes à medida que o comprimento de onda se aproxima do valor limite. A escala de comprimentos de onda no diagrama não é linear.

EXEMPLO 4-6 **Comprimento de Onda da Linha H_β** Calcule o comprimento de onda da linha H_β, isto é, a segunda linha da série de Balmer, usando o modelo de Bohr. A linha H_β está associada à transição de $n_i = 4$ para $n_f = 2$.

SOLUÇÃO

1. *Método 1*: O comprimento de onda é dado pela Equação 4-22 com $Z = 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

2. Fazendo $R = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$, $n_i = 4$ e $n_f = 2$ na equação anterior, temos:

$$\frac{1}{\lambda} = (1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)$$

ou

$$\lambda = 4{,}86 \times 10^{-7} = 486\ \text{nm}$$

3. *Método 2*: O comprimento de onda também pode ser calculado a partir da Equação 4-15:

$$hf = hc/\lambda = E_i - E_f$$

ou

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{hc}(E_i - E_f)$$

4. Os valores de E_i e E_f são dados pela Equação 4-24:

$$E_i = -\left(\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n_i^2}\right) = -\left(\frac{13{,}6\ \text{eV}}{4^2}\right) = -0{,}85\ \text{eV}$$
$$E_f = -\left(\frac{13{,}6\ \text{eV}}{n_f^2}\right) = -\left(\frac{13{,}6\ \text{eV}}{2^2}\right) = -3{,}4\ \text{eV}$$

5. Substituindo esses valores na Equação 4-15, obtemos:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{[-0{,}85\ \text{eV} - (-3{,}4\ \text{eV})](1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})}{(6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3{,}00 \times 10^8\ \text{m/s})}$$
$$= 2{,}051 \times 10^6\ \text{m}^{-1}$$

ou

$$\lambda = 4{,}87 \times 10^{-7}\ \text{m} = 487\ \text{nm}$$

Observação: *A diferença entre os dois resultados se deve ao fato de que o valor da constante de Rydberg foi arredondado para três casas decimais.*

Correção da Massa Reduzida

A suposição de Bohr de que o núcleo está imóvel equivale a tomar a massa do núcleo como sendo infinita. Por essa razão, a constante de Rydberg dada pela Equação 4-23 é normalmente representada pelo símbolo R_∞, como passaremos a fazer daqui em diante. Se o núcleo tem massa M, a energia cinética do núcleo é dada por $Mv^2/2 = p^2/2M$, em que $p = Mv$ é o momento. Se o momento total do átomo é nulo, o momento do núcleo e o momento do elétron devem ter o mesmo módulo e sentidos opostos. A energia cinética total é, portanto,

$$E_k = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} = \frac{M + m}{2mM}p^2 = \frac{p^2}{2\mu}$$

onde

$$\mu = \frac{mM}{m + M} = \frac{m}{1 + m/M} \qquad \textbf{4-25}$$



29

A energia total é ligeiramente maior que a energia cinética do elétron porque μ, a chamada *massa reduzida*, é ligeiramente maior que a massa do elétron. Os resultados obtidos para um núcleo de massa infinita podem ser aplicados diretamente a um núcleo de massa M se substituirmos a massa do elétron nas equações pela massa reduzida μ, definida pela Equação 4-25. (A validade deste método é demonstrada em muitos livros avançados de mecânica.) Em termos da massa reduzida, o valor da constante de Rydberg é dado por

$$R = \frac{\mu k^2 e^4}{4\pi c\hbar^3} = \frac{mk^2 e^4}{4\pi c\hbar^3}\left(\frac{1}{1 + m/M}\right) = R_\infty\left(\frac{1}{1 + m/M}\right) \qquad \textbf{4-26}$$

A correção é de apenas uma parte em 2.000 no caso do hidrogênio e ainda menor para os outros núcleos; entretanto, a variação da constante de Rydberg de átomo para átomo corresponde exatamente à previsão teórica. Assim, por exemplo, o espectro de um átomo de hélio monoionizado apresenta as linhas previstas pelas Equações 4-22 e 4-26 com $Z = 2$ e a massa reduzida apropriada. O valor aceito atualmente da constante de Rydberg R_∞, obtido a partir de medidas espectroscópicas de alta resolução,[12] é

$$R_\infty = 1{,}0973732 \times 10^7\ \text{m}^{-1} = 1{,}0973732 \times 10^{-2}\ \text{nm}^{-1} \qquad \textbf{4-27}$$

Em 1931, aplicando a correção da massa reduzida às linhas espectrais da série de Balmer, Urey[13] descobriu uma segunda forma de hidrogênio cujos átomos possuem uma massa duas vezes maior do que os átomos comuns de hidrogênio. A forma pesada hoje é conhecida pelo nome de *deutério*. Átomos com o mesmo número atômico Z e massas diferentes são chamados de *isótopos*.

EXEMPLO 4-7 **Constantes de Rydberg do H e do He^+** Calcule as constantes de Rydberg do H e do He^+ usando a correção da massa reduzida ($m = 9{,}1094 \times 10^{-31}$ kg, $m_p = 1{,}6726 \times 10^{-27}$ kg, $m_\alpha = 6{,}6447 \times 10^{-27}$ kg).

SOLUÇÃO

Para o hidrogênio:

$$R_H = R_\infty\left(\frac{1}{1 + m/M_H}\right) = R_\infty\left(\frac{1}{1 + 9{,}1094 \times 10^{-31}/1{,}6726 \times 10^{-27}}\right) = 1{,}09677 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$$

Para o hélio: Como M na correção da massa reduzida é a massa do núcleo, neste cálculo substituímos M pela massa da partícula α:

$$R_{He} = R_\infty\left(\frac{1}{1 + m/M_H}\right) = R_\infty\left(\frac{1}{1 + 9{,}1094 \times 10^{-31}/6{,}6447 \times 10^{-27}}\right) = 1{,}09722 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$$

Assim, a diferença entre as duas constantes de Rydberg é da ordem de 0,04%.

O Princípio de Correspondência

De acordo com o princípio de correspondência, que também é válido na mecânica quântica moderna, se os níveis de energia estão muito próximos, a quantização não é importante e os cálculos clássicos e quânticos devem conduzir aos mesmos

resultados. Examinando o diagrama de níveis de energia da Figura 4-16, vemos que os níveis de energia estão mais próximos para valores elevados do número quântico *n*. Isso leva a um enunciado um pouco diferente do princípio de correspondência de Bohr: *Para grandes números quânticos* (*n*, *no caso*), *os cálculos quânticos e os cálculos clássicos devem levar aos mesmos resultados.* Para mostrar que o modelo de Bohr do átomo de hidrogênio obedece ao princípio de correspondência, vamos comparar a frequência de uma transição entre os níveis $n_i = n$ e $n_f = n - 1$, para $n >> 1$, com a frequência clássica correspondente, que é a frequência de revolução do elétron. De acordo com a Equação 4-22, temos:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{Z^2 mk^2 e^4}{4\pi\hbar^3}\left[\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{Z^2 mk^2 e^4}{4\pi\hbar^3}\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$$

Para $n >> 1$, podemos desprezar o 1 do numerador e do denominador e escrever

$$f = \frac{Z^2 mk^2 e^4}{4\pi\hbar^3}\frac{2}{n^3} = \frac{Z^2 mk^2 e^4}{2\pi\hbar^3 n^3} \qquad \textbf{4-28}$$

A frequência clássica de revolução do elétron é dada pela Equação 4-13:

$$f_{\text{rev}} = \frac{v}{2\pi r}$$

Fazendo $v = n\hbar/mr$ (Equação 4-17) e $r = n^2\hbar^2/mkZe^2$ (Equação 4-18), temos:

$$f_{\text{rev}} = \frac{(n\hbar/mr)}{2\pi r} = \frac{n\hbar}{2\pi mr^2} = \frac{n\hbar}{2\pi m(n^2\hbar^2/mkZe^2)^2}$$

$$f_{\text{rev}} = \frac{m^2k^2Z^2e^4n\hbar}{2\pi mn^4\hbar^4} = \frac{mk^2Z^2e^4}{2\pi\hbar^3n^3} \qquad \textbf{4-29}$$

que é igual à Equação 4-28.

A Constante de Estrutura Fina



13

A demonstração do princípio de correspondência no parágrafo anterior foi para $\Delta n = n_i - n_f = 1$; entretanto, já vimos (Figura 4-16) que existem transições no átomo de hidrogênio com $\Delta n \geq 1$ quando *n* é pequeno; transições do mesmo tipo devem existir também para grandes valores de *n*. Se permitirmos a existência de transições com $\Delta n = 2, 3, \ldots$ para grandes valores de *n*, as frequências das radiações emitidas, de acordo com o modelo de Bohr, deverão ser iguais a múltiplos inteiros da frequência dada pela Equação 4-28. Nesse caso, porém, as Equações 4-28 e 4-29 deixarão de concordar. Esta falha do princípio de correspondência pode ser evitada admitindo-se a existência de órbitas elípticas.[14] Um dos resultados da mecânica newtoniana, usada para estudar os movimentos dos planetas, é que, em um campo de força cuja intensidade varia com o inverso do quadrado da distância, a energia de uma partícula em órbita depende apenas do eixo maior da elipse e não da excentricidade. Todas as órbitas elípticas com o mesmo semieixo maior possuem, portanto, a mesma energia, a não ser que a intensidade do campo não seja proporcional ao inverso do quadrado da distância ou que a mecânica newtoniana não seja válida. A. Sommerfeld investigou o efeito da relatividade restrita sobre a massa do elétron no modelo de Bohr em uma tentativa de explicar a chamada *estrutura fina* das linhas espectrais do hidrogênio.[15] Como as correções relativísticas deveriam ser da ordem de v^2/c^2 (veja o Capítulo 2), era provável que a correção fosse maior para uma órbita muito excêntrica, porque *v* aumenta à medida que o elétron se aproxima do núcleo. Os cálculos de Sommerfeld são muito complicados, mas podemos estimar o efeito da correção relativística calculando *v*/*c* para a primeira órbita de Bohr do hidrogênio. Para $n = 1$, a Equação 4-17 nos fornece $mvr_1 = \hbar$. Fazendo $r_1 = a_0 = \hbar^2/mke^2$, temos:

$$v = \frac{\hbar}{mr_1} = \frac{\hbar}{m(\hbar^2/mke^2)} = \frac{ke^2}{\hbar}$$

e

$$\frac{v}{c} = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{1{,}44\ \text{eV}\cdot\text{nm}}{1977{,}3\ \text{eV}\cdot\text{nm}} \approx \frac{1}{137} = \alpha \qquad \textbf{4-30}$$

onde usamos outra combinação conveniente de constantes,

$$\hbar c = \frac{1{,}24 \times 10^3\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{2\pi} = 197{,}3\ \text{eV} \cdot \text{nm} \qquad \textbf{4-31}$$

A grandeza adimensional $ke^2/\hbar c = \alpha$ é denominada *constante de estrutura fina* porque apareceu pela primeira vez na teoria de Sommerfeld, mas, como veremos em seguida, tem um significado muito mais profundo.

Embora v^2/c^2 tenha um valor muito pequeno, um efeito desta ordem de grandeza pode ser observado. Na teoria de Sommerfeld, a estrutura fina do espectro do hidrogênio é explicada da seguinte forma: para cada órbita circular permitida de raio r_n e energia E_n, existem n órbitas elípticas possíveis, com eixos maiores iguais e diferentes excentricidades. Como a velocidade de uma partícula em uma órbita elíptica depende da excentricidade e, de acordo com a teoria da relatividade restrita, a massa e o momento variam com a velocidade, as diferentes órbitas elípticas associadas a um mesmo valor de n possuem energias ligeiramente diferentes. Assim, a energia irradiada quando o elétron muda de órbita depende, não só dos eixos principais, mas também das excentricidades das órbitas inicial e final. O desdobramento dos níveis de energia para um dado valor de n é conhecido como *desdobramento fino* e seu valor é da ordem de $v^2/c^2 = \alpha^2$, como Sommerfeld havia previsto. Entretanto, a concordância das previsões de Sommerfeld com os desdobramentos observados era meramente acidental e levou a muitas conclusões errôneas nos primórdios da teoria quântica. Embora tivesse usado expressões relativísticas para a massa e o momento, Sommerfeld calculou a energia usando uma equação clássica, o que o levou a obter uma correção relativística muito maior que a verdadeira. Como vamos ver no Capítulo 7, a estrutura fina se deve na verdade a uma propriedade do elétron, denominada *spin*, para a qual não existe equivalente na mecânica clássica.

Uma contribuição duradoura dos esforços de Sommerfeld foi a introdução, na física, da constante de estrutura fina $\alpha = ke^2/\hbar c \approx 1/137$, que permite escrever as energias quantizadas E_n do modelo de Bohr e o raio de Bohr a_0 em uma forma particularmente elegante. Quando expressas em termos de α, as Equações 4-24 e 4-19 se tornam

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2n^2}\frac{c^2}{c^2} = -\frac{mc^2}{2}\alpha^2\frac{1}{n^2} \qquad \textbf{4-32}$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2}\frac{c}{c} = \frac{\hbar}{mc}\frac{1}{\alpha} \qquad \textbf{4-33}$$

Como α é uma constante adimensional, cujos fatores são constantes universais, possui o mesmo valor para *todos* os observadores; em qualquer referencial, as energias e dimensões dos sistemas atômicos são proporcionais a α^2 e $1/\alpha$, respectivamente. Algumas implicações deste fato curioso serão examinadas em outro capítulo.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Átomos Gigantes

Átomos gigantescos, os chamados *átomos de Rydberg*, há muito reconhecidos como uma possibilidade teórica e observados pela primeira vez no espaço interestelar em 1965, hoje estão sendo produzidos e estudados em laboratório. Os átomos de Rydberg são enormes! Nesses átomos, um dos elétrons de valência ocupa um estado com um número quântico de valor muito elevado (veja a Figura 4-17). De acordo com a Equação 4-18, o raio da órbita do elétron $r_n = n^2a_0/Z$ é proporcional a n^2, em que n pode ser qualquer número inteiro positivo; assim, um átomo de hidrogênio (na verdade, de qualquer elemento) pode ter um diâmetro muito grande, da ordem de um milímetro ou mesmo de um metro! O que impede que esses átomos gigantes sejam comuns na natureza é o fato de que a diferença entre a energia do nível ocupado pelo elétron e a energia de ionização se torna extremamente pequena para grandes valores de n, já que $E_n \propto 1/n^2$. Assim, por exemplo, para $n = 1.000$, o diâmetro do átomo de hidrogênio seria $r_{1000} \approx 0{,}1$ mm, mas a energia necessária para ionizar o átomo, $\Delta E = E_\infty - E_{1000}$, seria apenas 10^{-5} eV! Como a energia média da agitação térmica à temperatura ambiente é cerca de 0,025 eV, colisões aleatórias ionizam quase imediatamente um átomo cujo elétron ocupa um nível de energia com um valor de n muito elevado.



FIGURA 4-17 Um átomo de Rydberg de lítio ($Z = 3$). Quando é excitado para um estado com um grande valor de n, o elétron da última camada ocupa um pequeno volume e descreve uma órbita quase clássica. Os outros dois elétrons não aparecem na figura.

A invenção dos lasers sintonizáveis de corante, na década de 1970, tornou possível colocar elétrons em órbitas com valores

elevados de n. Os maiores átomos de Rydberg observados até hoje têm um diâmetro de cerca de 20 μm, 10.000 vezes maior que o dos átomos comuns e equivalente ao diâmetro de um grão de areia, e podem existir por alguns milissegundos em uma câmara de vácuo. No caso do hidrogênio, isso corresponde a um número quântico n da ordem de 600. A força que mantém o elétron preso ao núcleo em uma órbita tão distante é extremamente pequena. O elétron descreve uma órbita elíptica e se move bem devagar, já que, para grandes valores de n, o período é inversamente proporcional a n^3 (veja a Equação 4-28). Essas características oferecem várias possibilidades interessantes, entre elas a análise detalhada de reações químicas que normalmente ocorrem depressa demais para serem seguidas. Ainda mais notável é a possibilidade de usar elétrons em órbitas gigantes para testar o princípio de correspondência de Bohr, ou seja, observar experimentalmente a transição da mecânica quântica para a mecânica clássica. A simulação em computador do movimento clássico da "onda" associada a um elétron de Rydberg em órbita em torno de um núcleo (veja o Capítulo 5) está ajudando a planejar experimentos para observar o princípio de correspondência.

Experimentos muito recentes levaram à descoberta de moléculas de Rydberg. Quando os elétrons de valência dos átomos de uma amostra são colocados em estados de alto valor de n com o auxílio de um laser sintonizável de alta precisão, a força de atração eletrostática entre um dos átomos e um átomo vizinho, igualmente excitado, faz com que os dois átomos se unam para formar uma molécula gigante. O grande tamanho dessas moléculas as torna ideais para o estudo das propriedades dos campos eletromagnéticos. Por outro lado, moléculas de Rydberg formadas por um átomo de Rydberg e um átomo no estado fundamental talvez venham a ser usadas para construir as portas lógicas dos futuros computadores quânticos.

Exercícios

6. Se um elétron é colocado em uma órbita de raio maior, a energia aumenta ou diminui? A energia cinética aumenta ou diminui?

7. Qual é a energia do fóton de menor comprimento de onda que pode ser emitido por um átomo de hidrogênio?

8. Como o leitor descreveria o movimento e a localização de um elétron com $E = 0$ e $n \rightarrow \infty$ na Figura 4-17?

4-4 Espectros de Raios X

Não foi fácil aplicar a teoria de Bohr a átomos mais complicados que o de hidrogênio. O modelo não permitia calcular os níveis de energia dos átomos com mais de um elétron, nem mesmo no caso do hélio, o elemento seguinte na tabela periódica. Entretanto, experimentos realizados por H. Moseley em 1913 e J. Franck e G. Hertz em 1914 confirmaram o modelo de Bohr-Rutherford do átomo como um núcleo positivo cercado por elétrons que se moviam em órbitas quantizadas. A análise dos espectros de raios X, realizada por Moseley, é apresentada nesta seção; as medidas de corrente elétrica em gases, executadas por Franck e Hertz, serão discutidas na seção seguinte.



Henry G.-J. Moseley. [*Cortesia da Universidade de Manchester*.]

Logo depois que W. H. Bragg e W. L. Bragg desenvolveram um método para estudar espectros de emissão de raios X, Moseley[16] mediu os espectros característicos de raios X de cerca de 40 diferentes elementos. (A Figura 3-15 mostra alguns espectros de raios X típicos.) O cientista observou que, ao contrário do que acontecia no caso dos espectros óticos, as posições das linhas nos espectros de raios X variavam de forma regular de elemento para elemento. Moseley concluiu que isso acontecia porque as linhas de raios X estavam associadas a transições de elétrons próximos do núcleo (veja a Figura 4-18). Como esses elétrons estão separados dos elétrons mais distantes pelos elétrons das camadas intermediárias, sua energia não depende das complexas interações dos elétrons externos, responsáveis pela complexidade dos espectros óticos. Além disso, os elétrons

internos quase não sofrem os efeitos das forças interatômicas envolvidas na formação dos sólidos.

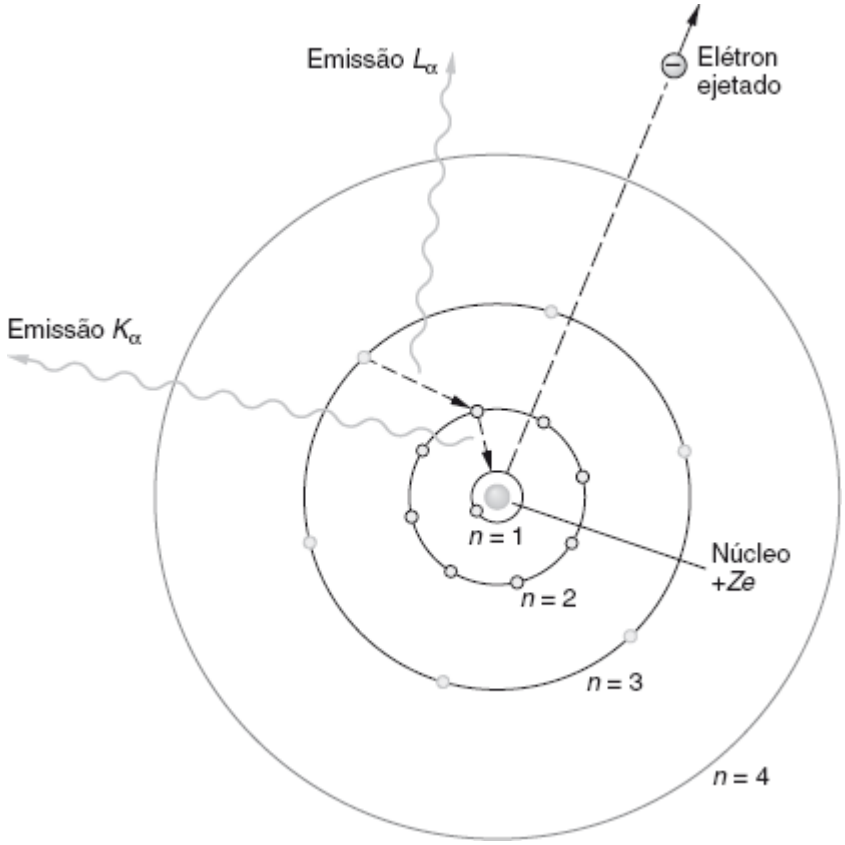


FIGURA 4-18 Desenho estilizado das órbitas circulares de Bohr para n = 1, 2, 3 e 4. Os raios das órbitas são proporcionais a n^2. Nos elementos de alto número atômico (os elementos com $Z \geq 12$ emitem raios X), os elétrons internos estão distribuídos da forma indicada na figura. Quando um elétron da órbita n = 1 é arrancado do átomo, o que pode acontecer, por exemplo, quando o átomo é atingido por um elétron acelerado em um tubo de raios X, a lacuna assim produzida é preenchida por um elétron proveniente de uma órbita de maior energia ($n \geq 2$). A diferença de energia entre as duas órbitas é liberada na forma de um fóton cujo comprimento de onda está na faixa dos raios X para $Z \geq 12$.

De acordo com a teoria de Bohr (publicada no início do mesmo ano, 1913), a energia de um elétron na primeira órbita de Bohr é proporcional ao quadrado da carga do núcleo (Equação 4-20). Nesse caso, observou Moseley, a energia e, portanto, a frequência de um fóton do espectro característico de raios X deveria variar com o quadrado do número atômico do elemento usado como alvo. Assim, Moseley plotou o número atômico Z de vários elementos em função da raiz quadrada da frequência de uma certa linha do espectro característico de raios X do elemento. Um gráfico desse tipo, hoje conhecido como *gráfico de Moseley*, aparece na Figura 4-19. Os pontos experimentais de um gráfico de Moseley podem ser usados para determinar os valores dos parâmetros A_n e b na equação empírica

$$f^{1/2} = A_n(Z - b) \qquad \textbf{4-34}$$

onde f é a frequência da linha e Z é o número atômico. Para uma família de linhas, denominada *série K*, b = 1 e o valor de A_n varia ligeiramente de linha para linha. Para a outra família que aparece na Figura 4-19, denominada *série L*,[17] b = 7,4.

As Descobertas de Moseley

Se o elétron incidente em um tubo de raios X arranca elétrons da órbita mais interna (n = 1), são emitidos fótons correspondentes às transições de elétrons de outras órbitas (n = 2, 3, ...) para preencher a lacuna deixada na órbita n = 1 (Figura 4-18). (Como as linhas associadas a estas transições são as linhas da chamada *série K*, a órbita n = 1 recebeu o nome de *camada K*.) A linha de menor frequência (e, portanto, de menor energia) corresponde à transição entre os níveis de energia mais próximos (de n = 2 para n = 1). Essa linha é denominada K_α. A linha correspondente à transição de n = 3 para n = 1 é denominada K_β. Essa linha possui maior energia, e, portanto, maior frequência, que a linha K_α. A lacuna criada na órbita n = 2 após a emissão de um fóton do tipo K_α pode ser então preenchida por um elétron de maior energia, como, por exemplo, um elétron da órbita n = 3, o que resulta na emissão de uma linha da série L e assim por diante. A existência de várias linhas na série L no gráfico de Moseley (Figura 4-19) se deve em parte ao fato de que existem pequenas diferenças nas energias dos elétrons em órbitas com um mesmo valor de n que não são previstas pelo modelo de Bohr. Foi o trabalho de Moseley que

forneceu a primeira indicação de que essas diferenças existem, mas a explicação terá que esperar nossa discussão da teoria quântica avançada (Capítulo 7).

Usando a relação de Bohr para o átomo de um elétron (Equação 4-21) com $n_f = 1$ e substituindo Z por $Z - 1$, obtemos a seguinte equação para as frequências das linhas da série K:

$$f = \frac{mk^2e^4}{4\pi\hbar^3}(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) = cR_\infty(Z-1)^2\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \textbf{4-35}$$

onde R_∞ é a constante de Rydberg. Comparando a Equação 4-35 com a Equação 4-34, vemos que o parâmetro A_n é dado por

$$A_n^2 = cR_\infty\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \qquad \textbf{4-36}$$

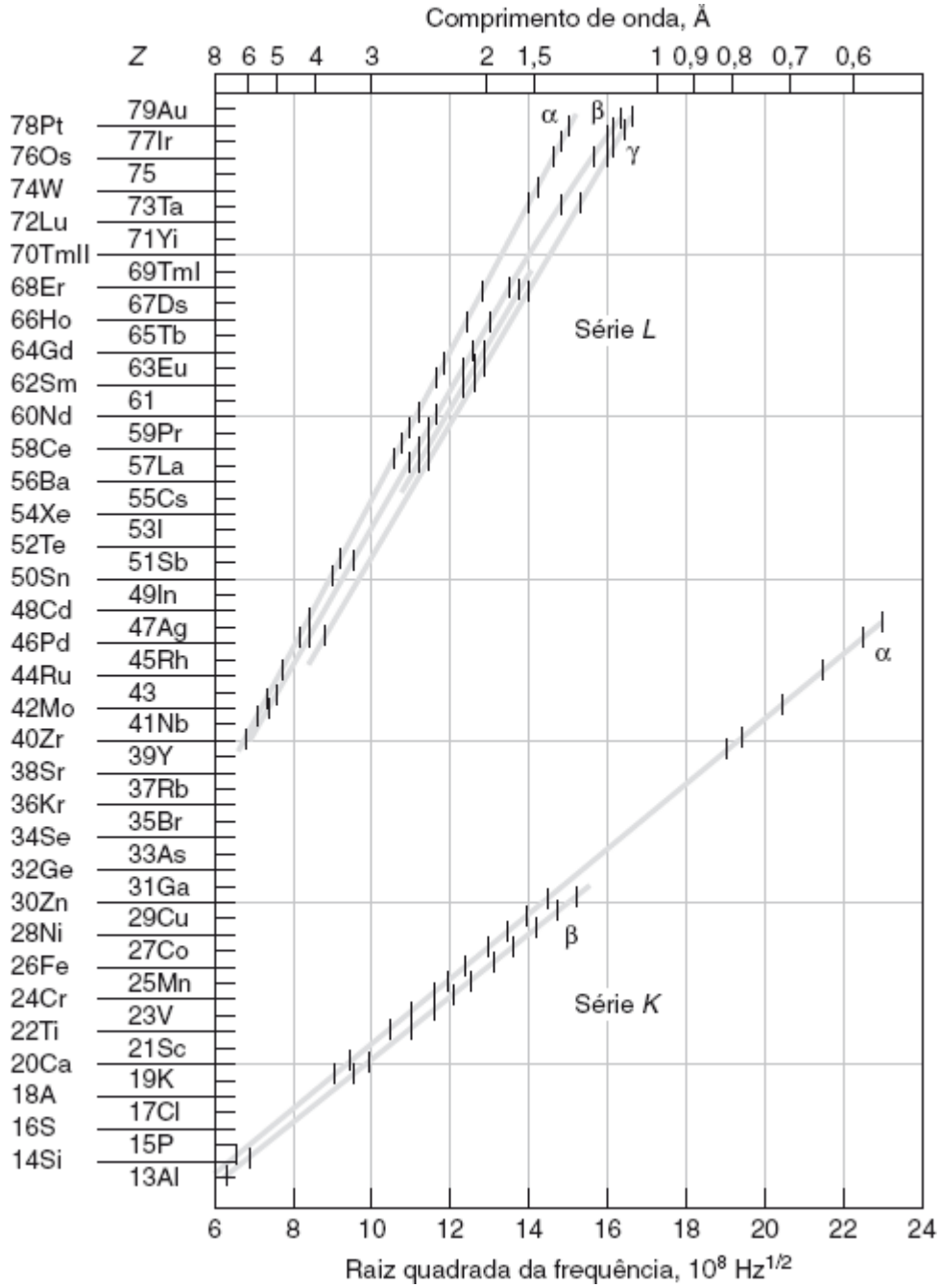


FIGURA 4-19 Gráficos de Moseley (número atômico em função da raiz quadrada de frequência dos raios X emitidos) para os elementos do alumínio ao ouro. Quando um átomo é bombardeado com elétrons de alta energia, um elétron pertencente a uma das órbitas internas pode ser arrancado, deixando uma lacuna, que logo é preenchida por um elétron proveniente de uma órbita de maior energia. Os raios X da série K são produzidos por transições para lacunas situadas na camada $n = 1$ (camada K), enquanto a série L é produzida por transições para lacunas situadas na camada $n = 2$ (camada L). [*Fonte*: H. Moseley, *Philosophical Magazine* (*6*), **27**, 713 (1914).]

O comprimento de onda das linhas da série *K* é, portanto,

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{c}{A_n^2(Z-1)^2} = \frac{1}{R_\infty(Z-1)^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} \qquad \textbf{4-37}$$

EXEMPLO 4-8 **A Linha K_α do Molibdênio** Calcule o comprimento de onda da linha K_α do molibdênio ($Z = 42$) e compare o resultado com o valor $\lambda = 0{,}0721$ nm medido por Moseley e com o espectro da Figura 3-15*b*.

SOLUÇÃO

Fazendo $n = 2$, $R_\infty = 1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$ e $Z = 42$ na Equação 4-37, obtemos:

$$\lambda = \left[(1{,}097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})(41)^2\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]^{-1} =$$

$$= 7{,}23 \times 10^{-11}\ \text{m} = 0{,}0723\ \text{nm}$$

Este valor está muito próximo do valor medido por Moseley e está de acordo com o espectro da Figura 3-15*b*.

O fato de que *f* é proporcional a $(Z-1)^2$ e não a Z^2 é explicado pela blindagem parcial da carga do núcleo pelo elétron que permanece na camada *K* quando a parte central do átomo é "vista" pelos elétrons da camada *L* ($n = 2$).[18] Usando a mesma linha de raciocínio, Moseley concluiu que, como $b = 7{,}4$ para a série *L*, essas linhas envolvem elétrons mais afastados do núcleo, que "veem" uma carga nuclear blindada por um maior número de elétrons. Supondo que a série *L* seja produzida por transições para a camada $n = 2$, as frequências para essa série são dadas por

$$f = cR_\infty\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right)(Z-7{,}4)^2 \qquad \textbf{4-38}$$

onde $n = 3, 4, 5, \ldots$

Antes do trabalho de Moseley, o número atômico era usado apenas para indicar a posição do elemento na tabela periódica de Mendeleev, em que os elementos eram dispostos em ordem de massa. Os experimentos de Geiger e Marsden mostraram que a carga nuclear era aproximadamente igual a $A/2$, enquanto experimentos de espalhamento de raios X realizados por C. G. Barkla mostraram que o número de elétrons de um átomo também era aproximadamente $A/2$. Esses resultados faziam sentido, já que o átomo como um todo devia ser eletricamente neutro. Entretanto, várias discrepâncias foram encontradas na tabela periódica com os elementos dispostos em ordem de massa. Assim, por exemplo, o 18º elemento em ordem de massa é o potássio (39,102) e o 19º é o argônio (39,948). Se a ordem das massas fosse seguida estritamente, o potássio seria colocado na coluna dos gases raros e o argônio na dos metais alcalinos, o que não combinava com as propriedades químicas desses elementos. Como foi demonstrado por Moseley, para que os pontos relativos a esses elementos ficassem sobre a reta empírica de *Z* em função de $f^{1/2}$, era preciso que $Z = 18$ para o argônio e $Z = 19$ para o potássio. Quando os elementos da tabela periódica eram dispostos na ordem dos números *Z* obtidos a partir do gráfico de Moseley, e não na ordem das massas atômicas, havia uma correspondência correta entre as posições dos elementos na tabela e suas propriedades químicas. Moseley também observou que havia lacunas na tabela periódica para $Z = 43$, 61 e 75, o que sugeria a existência de elementos ainda desconhecidos. Os três elementos foram descobertos mais tarde; o espectro de raios X de um deles, o promécio ($Z = 61$), aparece na Figura 4-20.

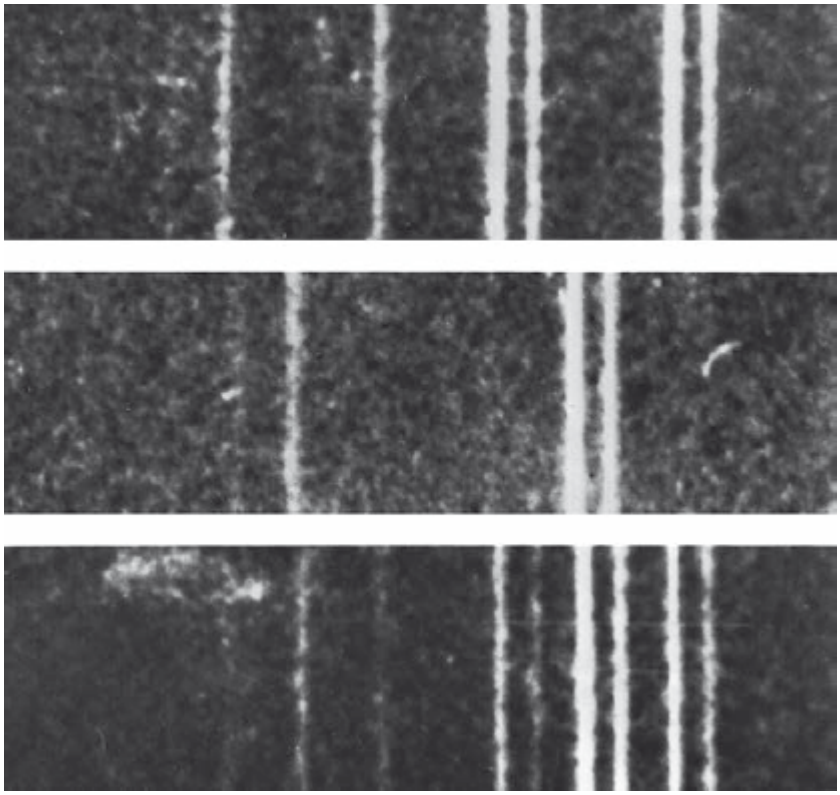


FIGURA 4-20 Espectros de raios X característicos. (*a*) Parte dos espectros do neodímio ($Z = 60$) e do samário ($Z = 62$). Os dois pares de linhas são as linhas K_α e K_β. (*b*) Parte do espectro do promécio ($Z = 61$), um elemento produzido artificialmente. Este elemento foi observado pela primeira vez em 1945, no Clinton Laboratory (hoje Oak Ridge). As linhas K_α e K_β do promécio ficam entre as do neodímio e as do samário, exatamente como Moseley havia previsto. (*c*) Parte dos espectros dos três elementos: neodímio, promécio e samário. [*Cortesia de J. A. Swartout, Oak Ridge National Laboratory*.]

Elétrons Auger

A emissão de raios X resulta necessariamente na ionização do átomo, já que o processo começa com a ejeção de um elétron de uma das camadas internas; os raios X são emitidos quando essa lacuna é preenchida por um elétron proveniente de uma camada mais externa. Em 1923, Pierre Auger descobriu que, em vez de emitir raios X, o átomo pode ejetar um terceiro elétron de uma camada mais externa através de um processo que não envolve a emissão de radiação, conhecido como *efeito Auger*. No efeito Auger, a diferença de energia $\Delta E = E_2 - E_1$ que poderia ter resultado na emissão de um raio X do tipo K_α é removida do átomo por um terceiro elétron, situado, por exemplo, na camada $n = 3$. Como $|E_3| < \Delta E$, o elétron da camada $n = 3$, ao ser ejetado, deixa o átomo com uma energia cinética característica $\Delta E - |E_3|$, que é determinada pelas energias dos estados estacionários do átomo considerado.[19] Isso significa que cada elemento tem um espectro característico de elétrons Auger (veja a Figura 4-21*a*). A observação dos elétrons Auger constitui um meio simples e preciso de detectar impurezas na superfície de amostras em microscópios eletrônicos e de investigar as mudanças dos níveis de energia associadas às ligações moleculares (veja a Figura 4-21*b*).

Exercício

9. Por que Moseley plotou Z em função de $f^{1/2}$ e não em função de f?

4-5 O Experimento de Franck-Hertz

Concluímos o capítulo com a discussão de um importante experimento que revelou claramente a quantização das energias atômicas, ajudando assim a preparar o terreno para a mecânica quântica moderna. Quando estudavam o espalhamento inelástico de elétrons, J. Franck e G. Hertz[20] fizeram uma descoberta que confirmou, através de observações *diretas*, a hipótese de Bohr de que os níveis de energia do átomo são quantizados. Executado pela primeira vez em 1914, este experimento, hoje em dia, é repetido rotineiramente nos laboratórios de física das universidades. A Figura 4-22*a* mostra, de forma esquemática, o equipamento usado. Um pequeno filamento aquece o catodo. Elétrons são ejetados do catodo aquecido e acelerados em direção a uma grade, que é mantida a um potencial positivo V_0 em relação ao catodo. Alguns elétrons passam pela grade e chegam à

placa P, que está a um potencial ligeiramente menor, $V_P = V_0 - \Delta V$. O interior do tubo contém átomos do elemento que está sendo estudado, na forma de um gás de baixa pressão (vapor de mercúrio, no experimento de Franck e Hertz). O experimento consiste em medir a corrente de placa em função de V_0. Quando V_0 é aumentado a partir de 0, a corrente aumenta até atingir um valor crítico (cerca de 4,9 V, no caso do mercúrio); para tensões maiores, a corrente começa a diminuir. Quando V_0 aumenta ainda mais, a corrente volta a aumentar.

A explicação deste comportamento é mais fácil de visualizar se imaginarmos que o tubo contém átomos de hidrogênio em vez de mercúrio (Figura 4-22*b*). Os elétrons acelerados pelo potencial V_0 que colidem com elétrons dos átomos de hidrogênio não podem transferir energia para esses elétrons, a menos que tenham adquirido uma energia cinética $eV_0 = E_2 - E_1 = 10{,}2$ eV, já que o elétron do hidrogênio, de acordo com o modelo de Bohr, não pode ocupar estados com energias intermediárias. Assim, qualquer colisão entre um elétron incidente com uma energia menor que 10,2 eV e um elétron do hidrogênio deve ser elástica: a energia cinética do elétron incidente continua a mesma após a colisão e, portanto, o elétron pode vencer o potencial ΔV e contribuir para a corrente I. Se, por outro lado, $eV_0 \geq 10{,}2$ eV, o elétron incidente pode transferir 10,2 eV para o elétron do hidrogênio, que se encontra no *estado fundamental* (camada $n = 1$), colocando-o na camada $n = 2$ (o *primeiro estado excitado*). Com isso, a energia do elétron incidente sofre uma redução de 10,2 eV; o espalhamento é, portanto, do tipo inelástico. Com energia insuficiente para vencer o pequeno potencial negativo ΔV, os elétrons incidentes deixam de contribuir para a corrente de placa I, que sofre uma redução.

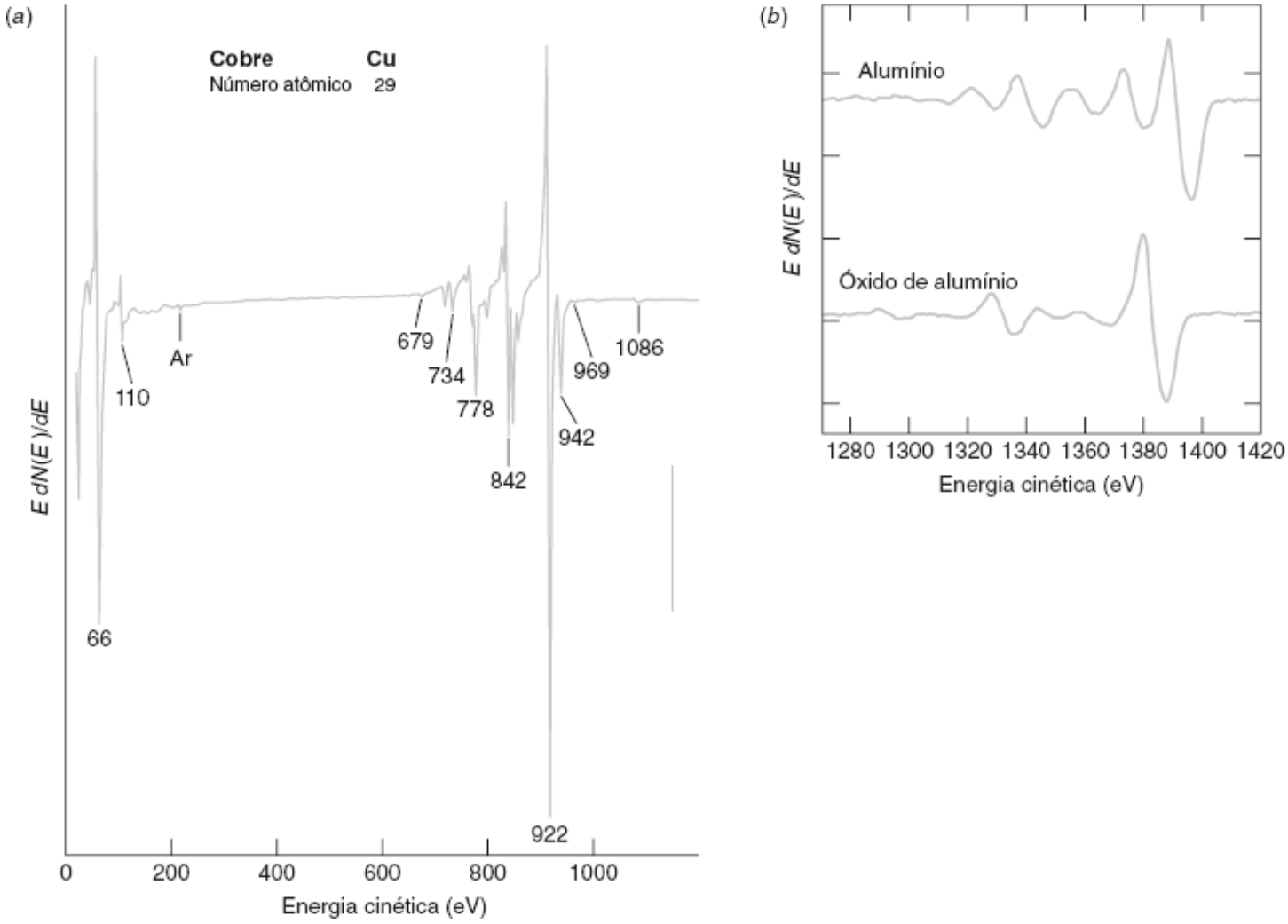


FIGURA 4-21 (*a*) Espectro Auger do Cu bombardeado com elétrons de 10 keV. A energia dos elétrons Auger pode ser determinada com mais precisão plotando a derivada ponderada $E\,dN(E)/dE$ da intensidade do fluxo de elétrons em vez da intensidade $N(E)$. (*b*) Parte do espectro dos elétrons Auger do Al em alumínio puro e em óxido de alumínio. Observe a mudança na posição dos picos causada pela interação dos elétrons do alumínio com os elétrons de oxigênio no óxido de alumínio.

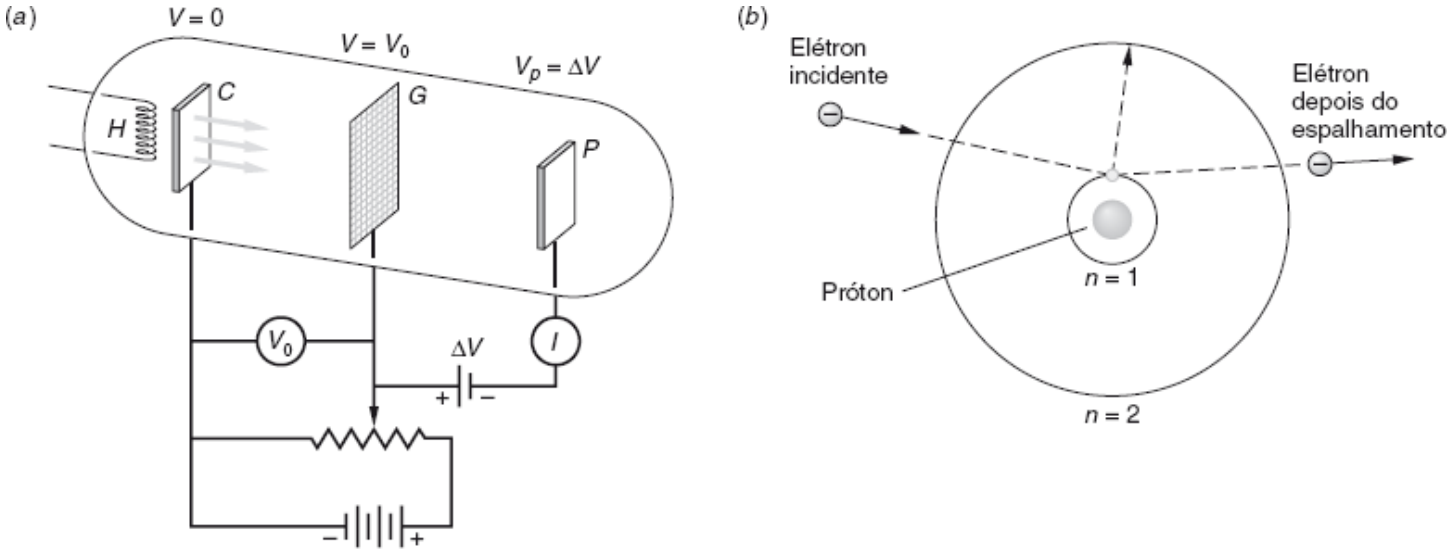


FIGURA 4-22 (*a*) Diagrama esquemático do experimento de Franck-Hertz. Elétrons ejetados do catodo aquecido *C* são atraídos pela grade positiva *G*. Os elétrons que passam pelos furos da grade chegam à placa *P* e, portanto, contribuem para a corrente *I*, se tiverem energia suficiente para vencer o pequeno potencial negativo ΔV. O tubo contém um gás do elemento a ser estudado. (*b*) Resultados possíveis para o hidrogênio. Se o elétron incidente não tem energia suficiente para transferir uma quantidade de energia $\Delta E = E_2 - E_1$ para o elétron do hidrogênio que ocupa a camada $n = 1$ (estado fundamental), o espalhamento é elástico; se o elétron tem uma energia cinética igual ou maior que ΔE, o espalhamento é inelástico e uma energia ΔE é transferida para o elétron que ocupa a camada $n = 1$, transferindo-o para a camada $n = 2$. Em geral, o elétron excitado volta rapidamente para o estado fundamental, emitindo um fóton de energia ΔE.

Quando o tubo contém vapor de mercúrio, a situação é mais complicada, já que o elemento possui 80 elétrons. Embora a teoria de Bohr não seja capaz de prever as energias individuais desses elétrons, ainda esperamos que a energia do átomo seja quantizada, com um estado fundamental, um primeiro estado excitado, e assim por diante. Assim, a explicação para a existência de um potencial crítico de 4,9 V para o Hg é que o primeiro estado excitado está 4,9 eV acima do estado de menor energia (estado fundamental). Os elétrons com uma energia menor que este valor não podem perder energia para os átomos de Hg, mas os elétrons com uma energia maior que 4,9 eV podem sofrer uma colisão inelástica e perder 4,9 eV. Quando isso acontece nas vizinhanças da grade, os elétrons não conseguem ganhar energia suficiente para superar a pequena tensão negativa ΔV e chegar à placa; assim, a corrente diminui. Se a explicação estiver correta, os átomos de Hg que forem excitados para um nível de energia 4,9 eV acima do estado fundamental voltarão a esse estado emitindo um fóton de comprimento de onda

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{eV_0} = 253 \text{ nm}$$

Existe realmente uma linha com este comprimento de onda no espectro do mercúrio. Quando o tubo é observado através de um espectroscópio, verifica-se que a linha está presente quando V_0 é maior que 4,9 V, mas não quando V_0 é menor que este valor. Quando a tensão V_0 é aumentada ainda mais, novas quedas da corrente aparecem. Essas quedas podem se dever a dois mecanismos: a promoção de elétrons do estado fundamental para outros níveis excitados do átomo de Hg (como, por exemplo, o segundo nível excitado, que está 6,7 eV acima do estado fundamental) e excitações múltiplas causadas pelo mesmo elétron (como, por exemplo, o mesmo elétron perdendo 4,9 eV mais de uma vez). Na configuração usual, apenas as excitações múltiplas para o primeiro nível excitado são observadas, de modo que as quedas de corrente ocorrem a cada 4,9 V.[21] A probabilidade de que essas excitações múltiplas e de que as excitações para outros estados fundamentais sejam observadas depende, entre outros fatores, da geometria do tubo. Assim, por exemplo, uma segunda queda da corrente para $V_0 = 2$ α 4,9 = 9,8 V é observada quando os elétrons sofrem colisões elásticas com átomos de Hg mais ou menos a meio caminho entre o catodo e a grade (veja a Figura 4-22*a*). Esses elétrons são novamente acelerados e tornam a atingir uma energia de 4,9 eV nas vizinhanças da grade. A Figura 4-23 mostra um gráfico construído a partir dos resultados de Franck e Hertz.

O experimento de Franck-Hertz foi uma importante confirmação da ideia de que as linhas discretas do espectro de emissão dos átomos estão associadas à existência de níveis de energia quantizados. É particularmente satisfatório conseguir detectar a presença desses níveis usando unicamente voltímetros e amperímetros.

Espectroscopia por Perda de Energia de Elétrons

O experimento de Franck-Hertz foi o precursor de uma técnica altamente precisa para medir os estados quantizados dos átomos, tanto em gases como em sólidos. A técnica, conhecida como *espectroscopia por perda de energia de elétrons* (EELS),* é

particularmente útil no caso dos sólidos, pois permite medir a energia de certos tipos de vibrações da rede cristalina e outros processos. O método funciona da seguinte forma: suponha que os elétrons de um feixe incidente tenham todos a mesma energia E_{inc}. Esses elétrons colidem com os átomos do material, fazendo com que sofram um processo qualquer (vibrações, rearranjos da rede cristalina, excitação de elétrons etc.) que exige uma certa energia E_l. Se o processo é causado pelo feixe incidente, parte do feixe deixa o material com uma energia $E_{inc} - E_l$. A energia dos elétrons do feixe após deixarem o material pode ser analisada com boa precisão usando, por exemplo, um espectrômetro magnético projetado para elétrons.[22] A Figura 4-24*a* mostra o arranjo típico para medir um espectro de perda de energia.

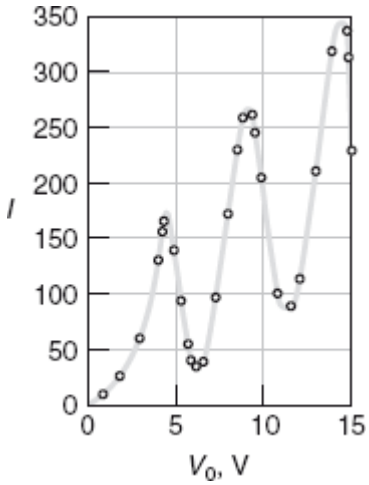


FIGURA 4-23 Corrente em função da tensão de aceleração no experimento de Franck-Hertz. A corrente diminui porque muitos elétrons perdem energia em colisões inelásticas com átomos de mercúrio e, portanto, não conseguem vencer o pequeno potencial negativo indicado na Figura 4-21*a*. O espaçamento regular dos picos da curva indica que apenas uma certa energia, 4,9 eV, pode ser transferida para os átomos de mercúrio. Esta interpretação é confirmada pela observação de fótons com uma energia de 4,9 eV emitidos pelos átomos de mercúrio quando V_0 é maior que esta energia. [*Fonte*: J. Franck e G. Hertz, *Verband Deutscher Physikalischer Gesellschaften*, **16**, 457 (1914).]

Como exemplo de aplicação, se um feixe incidente de elétrons com E_{inc} = 2 keV é refletido por um filme fino de alumínio, a medida dos elétrons espalhados com um espectrômetro magnético produz o espectro de perda de energia da Figura 4-24*b*, que mostra diretamente os níveis de energia quantizados do alvo. Neste espectro em particular, os picos se devem à excitação de vibrações harmônicas no filme, além de algumas vibrações superficiais. A técnica também é usada para medir as energias vibracionais de átomos de impurezas adsorvidas e, com energias um pouco maiores do feixe incidente, para medir as energias eletrônicas, fornecendo assim informações a respeito das energias de ligação e outras características dos átomos adsorvidos. As técnicas de espalhamento inelástico, que incluem o uso de outras partículas além de elétrons, constituem um instrumento importante para investigar os níveis de energia de sistemas nucleares, atômicos e moleculares. Teremos ocasião de mencioná-las várias vezes em outros capítulos deste livro.



Leitura Suplementar

No capítulo anterior e neste capítulo discutimos muitas observações experimentais que foram "explicadas" através de hipóteses ousadas de teoria quântica. Na Leitura Suplementar *Crítica da Teoria de Bohr e da "Velha" Mecânica Quântica*, que está disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, são discutidos alguns sucessos e fracassos dos primeiros cientistas que tentaram aplicar os princípios da mecânica quântica aos fenômenos naturais.

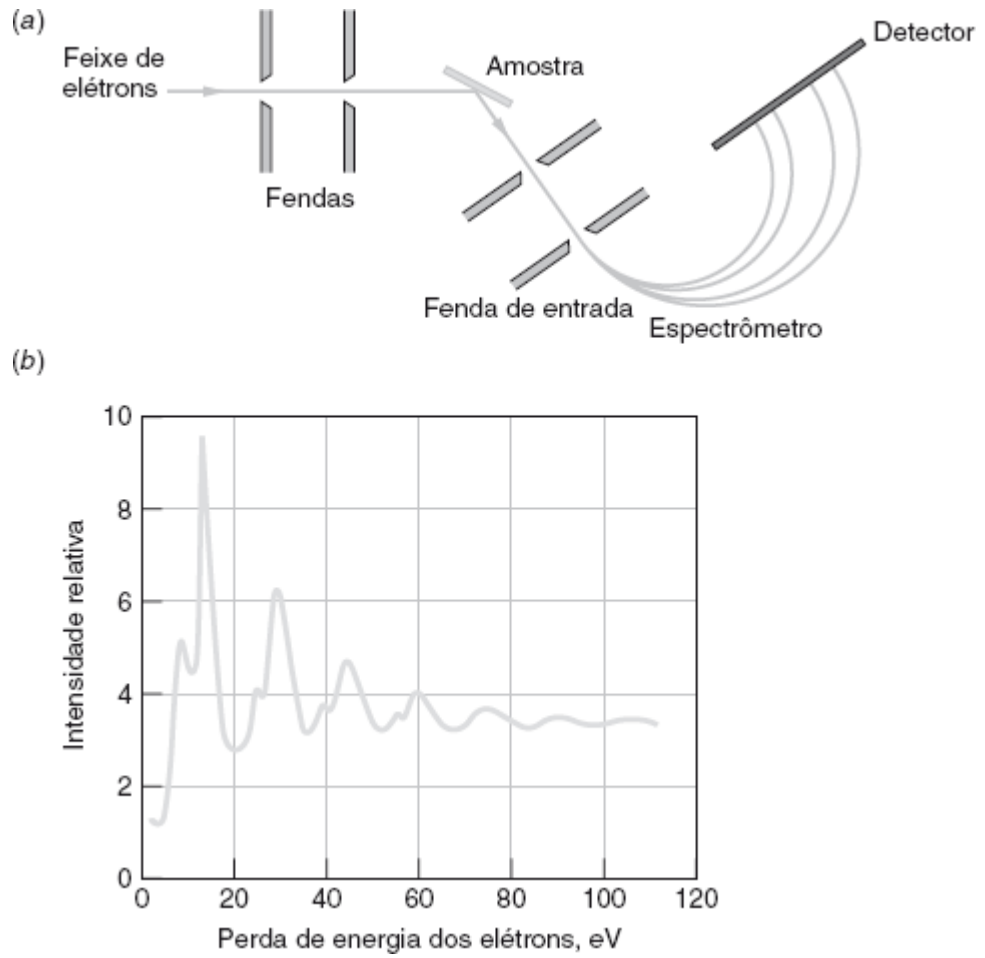


FIGURA 4-24 Medida do espectro de perda de energia. (*a*) Um feixe eletrônico bem definido incide em uma amostra. Elétrons espalhados inelasticamente com um certo ângulo atravessam a fenda de entrada do espectrômetro magnético, cujo campo magnético B é dirigido para fora do papel, e descrevem um semicírculo de raio R, cujo valor é dado pela Equação 3-2 com a energia cinética igual a $E_{inc} - E_1$: $R = [2m(E_{inc} - E_1)]^{1/2}/eB$. (*b*) Espectro de perda de energia de um filme fino de alumínio. [*Fonte*: C. J. Powell e J. B. Swan, *Physical Review*, **115**, 869 (1954).]

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Espectros atômicos	$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n > m$ **4-2** Esta equação empírica fornece os valores corretos dos comprimentos de onda das linhas espectrais. O valor de R, a constante de Rydberg, varia de elemento para elemento de forma regular.
2. Espalhamento de Rutherford Parâmetro de impacto	$b = \frac{kq_\alpha Q}{m_\alpha v^2}\cot\frac{\theta}{2}$ **4-3**
Fração espalhada f	$f = \pi b^2 nt$ **4-5** para uma folha de espessura t com n núcleos por unidade de volume

Número de partículas α observadas

$$\Delta N = \left(\frac{I_0 A_\infty nt}{r^2}\right)\left(\frac{kZe^2}{2E_k}\right)^2 \frac{1}{\text{sen}^4\frac{\theta}{2}} \qquad \textbf{4-6}$$

Tamanho do núcleo

$$r_d = \frac{kq_\alpha Q}{\frac{1}{2}m_\alpha v^2} \qquad \textbf{4-11}$$

3. O modelo de Bohr

Postulados de Bohr

1. Os elétrons ocupam apenas certas órbitas estáveis, circulares, definidas pela quantização do momento angular *L*, nas quais não irradiam energia.

Princípio de correspondência

$$L = mvr = \frac{nh}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{4-17}$$

Raio de Bohr

2. O átomo emite um fóton de frequência *f* quando um elétron sofre uma transição de uma órbita de energia E_i para uma órbita de energia E_f. A frequência *f* é dada pela seguinte relação:

Energias permitidas

$$hf = E_i - E_f \qquad \textbf{4-15}$$

Massa reduzida

Para números quânticos muito grandes, os resultados da teoria quântica devem ser iguais aos da teoria clássica.

Constante de estrutura fina

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{mke^2} = \frac{\hbar}{mc\alpha} = 0{,}0529\ \text{nm} \qquad \textbf{4-19}$$

$$E_n = -\frac{Z^2 E_0}{n^2} \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{4-20}$$

em que $E_0 = mk^2e^4/2\hbar^2 = 13{,}6\ \text{eV}$

$$\mu = \frac{mM}{m + M} \qquad \textbf{4-25}$$

$$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} \approx 1/137 \qquad \textbf{4-30}$$

4. Espectros de raios X Equação de Moseley

$$f^{1/2} = A_n(Z - b) \qquad \textbf{4-34}$$

5. Experimento de Franck-Hertz

Confirmou a teoria de Bohr, demonstrando que as regras de quantização se aplicam quando os átomos absorvem energia.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Boorse, H. e L. Motz (eds.), *The World of the Atom*, Basic Books, New York, 1966. Esta obra de dois volumes, com 1873 páginas, é uma coleção de artigos originais, comentados e traduzidos para o inglês quando necessário. Muitos dos trabalhos mencionados neste capítulo e no resto do livro podem ser encontrados nesses volumes.

Cline, B., *The Questioners: Physicists and the Quantum Theory*, Thomas Y. Crowell, New York, 1965.

Gamow, G., *Thirty Years That Shook Physics: The Story of the Quantum Theory*, Doubleday, Garden City, NY, 1965.

Herzberg, G., *Atomic Spectra and Atomic Structure*, Dover Publications, New York, 1944. Este é sem dúvida um dos clássicos da física atômica.

Melissinos, A. e J. Napolitano, *Experiments in Modern Physics*, 2d ed., Academic Press, New York, 2003. Muitos dos experimentos clássicos que hoje se transformaram em demonstrações de laboratório são descritos com detalhes nesta obra.

Mohr, P. J. e B. N. Taylor, "The Fundamental Physical Constants", *Review of Modern Physics* **80**, 633-730 (April 2008).

Shamos, M. H. (ed.), *Great Experiments in Physics*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1962.

Virtual Laboratory (PEARL), Physics Academic Software, North Carolina State University, Raleigh, 1996. Inclui um modelo interativo do átomo de Bohr.

Virtual Spectroscope, Physics Academic Software, North Carolina State University, Raleigh, 2003. As linhas espectrais emitidas por várias fontes luminosas podem ser observadas com o auxílio de um espectroscópio virtual.

Visual Quantum Mechanics, Kansas State University, Manhattan, 1996. A parte de espectros atômicos deste programa de computador permite a montagem interativa dos níveis de energia de vários elementos, entre eles o hidrogênio e o hélio.

Notas

1. Joseph von Fraunhofer (1787-1826), físico alemão. Embora não tenha sido o primeiro a observar as linhas que receberam o seu nome (Wollaston havia visto sete dessas linhas, 12 anos antes), Fraunhofer mediu os comprimentos de onda de muitas delas, batizou as mais proeminentes e mostrou que ocorriam sempre para os mesmos comprimentos de onda, mesmo que a luz solar fosse refletida por um planeta ou satélite.

2. Até hoje, mais de 10.000 linhas de Fraunhofer já foram observadas no espectro solar.

3. Embora os primeiros experimentadores preferissem expressar os resultados das medidas em termos de comprimentos de onda, logo se percebeu que as fórmulas empíricas desenvolvidas com base nas regularidades dos espectros seriam muito mais simples se os resultados fossem expressos em termos do recíproco do comprimento de onda, denominado *número de onda*, que corresponde ao número de ciclos por unidade de comprimento. Como $f = c/\lambda$, isto equivale a usar a frequência nas expressões em vez do comprimento de onda.

4. Ernest Rutherford (1871-1937), físico inglês nascido na Nova Zelândia, discípulo de J. J. Thomson e um excepcional experimentador. Foi um dos primeiros cientistas a estudar a radioatividade e recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1908 por suas investigações relativas à transmutação dos elementos e à química das substâncias radioativas. Costumava lamentar o fato de ter recebido o Prêmio Nobel de Química, e não de Física, porque na época o estudo dos elementos era considerado domínio da química. Sucedeu a Thomson como diretor do Cavendish Laboratory.

5. As partículas alfa, como todas as partículas com carga elétrica, perdem energia ao excitarem e ionizarem os átomos do material no interior do qual estão se movendo. A energia perdida por unidade de distância percorrida ($-dE/dx$) é função do potencial de ionização dos átomos, do número atômico dos átomos e da energia das partículas α. Este valor pode ser calculado teoricamente (com alguma dificuldade) e é relativamente fácil de medir.

6. Observe que $2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta = d\Omega$, o ângulo sólido subtendido pela zona da Figura 4-11. Como a seção de choque σ é igual a πb^2 e, portanto, $d\sigma = 2\pi b db$, a Equação 4-9 pode ser escrita na forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{kZe^2}{m_\alpha v^2}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^4 \frac{\theta}{2}}$$

onde a razão $d\sigma/d\Omega$ é denominada *seção de choque diferencial*.

7. H. Geiger e E. Marsden, *Philosophical Magazine* (6), **25**, 604 (1913).

8. O valor de Z não podia ser medido diretamente neste experimento; entretanto, valores relativos para diferentes materiais podiam ser determinados, já que o número atômico Z é aproximadamente igual à metade do peso atômico.

9. Isto introduz outro desvio em relação às previsões teóricas baseadas no modelo de Rutherford, já que o modelo supõe que a massa da partícula é muito menor que a massa do alvo, o que deixa de ser verdadeiro no caso de alvos com pequena massa atômica. Entretanto, não é difícil introduzir uma correção nas equações para levar em conta este efeito; esta correção está presente, por exemplo, nas retas teóricas da Figura 4-9*b*.

10. Niels Henrik David Bohr (1885-1962), físico dinamarquês e excelente jogador de futebol. Depois de receber o título de Ph.D. em física pela Universidade de Copenhague, Bohr foi trabalhar no Cavendish Laboratory sob as ordens de J. J. Thomson. Entretanto, consta que Thomson se irritava com o sotaque carregado de Bohr. Felizmente, durante o banquete anual para comemorar o nascimento de Thomson, Bohr conheceu Rutherford, que logo o convidou para trabalhar com ele em Manchester, onde Bohr tomou conhecimento do modelo do átomo nuclear. Um dos gigantes da física do século XX, Bohr recebeu o Prêmio Nobel de 1922 por sua explicação do espectro dos elementos. Em uma visita aos Estados Unidos, em 1939, informou aos americanos que os alemães tinham conseguido observar a fissão de átomos de urânio. A história de sua vida é uma leitura fascinante.

11. N. Bohr, *Philosophical Magazine* (6), **26**, 1 (1913).

12. Mohr, P. J. e B. N. Taylor, "The Fundamental Physical Constants", *Reviews of Modern Physics* **80**, 633-730 (April 2008). A Equação 4-27 mostra apenas oito dos 14 algarismos significativos aceitos atualmente. A margem de erro deste valor é de apenas uma parte em 10^{12}!

13. Harold Clayton Urey (1893-1981), químico americano, foi um dos pioneiros no uso de traçadores radioativos em sistemas biológicos. Recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1934 pela descoberta do deutério.

14. A razão pela qual as órbitas elípticas resolvem este problema é que, classicamente, a frequência da radiação emitida depende da aceleração da carga. A aceleração é constante para uma órbita circular, mas varia com a distância em relação ao foco no caso de uma órbita elíptica; assim, no caso de órbitas elípticas, a Equação 4-29 deve ser substituída por uma equação mais complicada que concorda com a Equação 4-28, mesmo no caso de transições com $\Delta n > 1$. Classicamente, a energia de uma partícula em uma órbita circular de raio r é a mesma que a de uma partícula em uma órbita elíptica cujo semieixo maior é r; assim, esperamos que as únicas órbitas elípticas permitidas sejam aquelas cujo semieixo maior seja igual ao raio de uma das órbitas circulares de Bohr.

15. Quando são observadas em espectrômetros de alta resolução, as linhas do hidrogênio que aparecem na Figura 4-2*a* (na verdade, a maioria das linhas espectrais de todos os elementos) se desdobram em várias linhas muito próximas, que constituem a chamada estrutura fina. Este assunto será discutido com detalhes no Capítulo 7.

16. Henry Gwyn-Jeffreys Moseley (1887-1915), físico inglês, considerado por alguns o mais brilhante dos discípulos de Rutherford. Certamente teria recebido o Prêmio Nobel se não tivesse morrido em combate durante a Primeira Guerra Mundial. Seu pai participou como naturalista da expedição do HMS *Challenger*, o primeiro navio dedicado à exploração dos oceanos.

17. As letras L e K foram escolhidas pelo físico inglês Charles Glover Barkla(1877-1944), responsável pela descoberta das linhas características de raios X, que lhe valeu o Prêmio Nobel de Física de 1917. Barkla observou que havia duas séries de linhas de raios X para cada elemento, que chamou de K e L. As mesmas letras foram usadas mais tarde para rotular as camadas eletrônicas.*

18. O fato de que a influência do outro elétron da camada K deva resultar em $b = 1$, ou seja, em uma blindagem de exatamente 1e, não é óbvio. Na verdade, como vamos ver no Capítulo 7, trata-se de uma coincidência, pois a blindagem é produzida pelo efeito combinado do outro elétron da camada K com a penetração das ondas eletrônicas dos elétrons da camada L.

19. Como nos átomos com mais de um elétron as energias dos estados estacionários dependem do número de elétrons (veja o Capítulo 7), as energias E_n para um dado átomo são ligeiramente diferentes quando o átomo é monoionizado (como na produção das linhas do espectro característico de raios X) e quando é duplamente ionizado (como no efeito Auger).

20. James Franck (1882-1964), físico alemão naturalizado americano; Gustav Ludwig Hertz (1887-1975), físico alemão. Franck recebeu a Cruz de Ferro como soldado durante a Primeira Guerra Mundial e mais tarde trabalhou no Projeto Manhattan. Hertz era sobrinho de Heinrich Hertz, descobridor do efeito fotelétrico. Franck e Hertz receberam o Prêmio Nobel de Física de 1925 por seus estudos do espalhamento inelástico de elétrons.

21. Neste ponto, convém observar que existe um nível de energia do átomo de Hg 4,6 eV acima do estado fundamental, isto é, ligeiramente abaixo do nível observado por Franck e Hertz; entretanto, as transições do estado fundamental para este nível não são observadas. Como veremos no Capítulo 7, a ausência dessas transições está de acordo com as previsões da mecânica quântica avançada.

22. Como a razão q/m para os elétrons é muito maior que para os átomos ionizados, as dimensões de um espectrômetro magnético para elétrons não precisam ser tão grandes quanto as de um espectrômetro magnético para íons, mesmo quando os elétrons possuem energias da ordem de keV (veja a Equação 3-2).

Problemas

NÍVEL I

Seção 4-1 Espectros Atômicos

4-1. Calcule o comprimento de onda e a frequência dos limites das séries de Lyman, Balmer e Paschen do átomo de hidrogênio.

4-2. O comprimento de onda de uma certa linha da série de Balmer é 379,1 nm. A que transição corresponde a linha?

4-3. Um astrônomo descobre uma nova linha de absorção com $\lambda = 164{,}1$ nm na região ultravioleta do espectro contínuo do Sol. Ele atribui a linha à série de Lyman do hidrogênio. A hipótese está correta? Justifique sua resposta.

4-4. A série de linhas espectrais do hidrogênio com $m = 4$ é denominada série de Brackett. Calcule os comprimentos de onda das quatro primeiras linhas da série de Brackett.

4-5. Em uma amostra que contém hidrogênio, entre outros elementos, quatro linhas espectrais são observadas no infravermelho

com comprimentos de onda de 7.460 nm, 4.654 nm, 4.103 nm e 3.741 nm. Qual dessas linhas não pertence a nenhuma das séries do espectro do hidrogênio?

Seção 4-2 O Modelo Nuclear de Rutherford

4-6. Uma folha de ouro com 2,0 μm de espessura é usada em um experimento de Rutherford para espalhar partículas α com uma energia de 7,0 MeV. (*a*) Qual é a fração das partículas incidentes cujo ângulo de espalhamento é maior que 90º? (*b*) Qual é a fração cujos ângulos de espalhamento estão compreendidos entre 45º e 75º? (*c*) Use N_A, ρ e M para calcular o raio aproximado de um átomo de ouro. (Para o ouro, ρ = 19,3 g/cm^3 e M = 197 g/mol.)

4-7. (*a*) Qual é a razão entre o número de partículas por unidade de área do detector com um ângulo de espalhamento de 10º e com um ângulo de espalhamento de 1º? (*b*) Qual é a razão entre o número de partículas com um ângulo de espalhamento de 30º e com um ângulo de espalhamento de 1º?

4-8. No caso de partículas α com uma energia de 7,7 MeV (como as usadas por Geiger e Marsden), qual o valor do parâ-metro de impacto para que uma partícula α sofra uma deflexão de 2º em uma folha de ouro?

4-9. Qual é a distância de máxima aproximação r_d entre um núcleo de ouro e uma partícula α de 5,0 MeV? De 7,7 MeV? De 12 Mev?

4-10. Qual é a energia necessária para que uma partícula α atinja a superfície de um núcleo de Al, cujo raio é 4 fm?

4-11. Se uma partícula sofre uma deflexão de 0,01º a cada colisão, quantas colisões são necessárias para que o valor rms da deflexão seja 10º? (Use o resultado do problema estatístico da caminhada aleatória unidimensional, segundo o qual o valor rms da deflexão é igual ao módulo das deflexões individuais multiplicado pela raiz quadrada do número de deflexões.) Compare o resultado com o número de camadas atômicas em uma folha de ouro com 10^{-6} m de espessura, supondo que a espessura de cada átomo é 0,1 nm = 10^{-10} m.

4-12. Uma folha de ouro com 2,0 μm de espessura foi usada em um experimento de Rutherford para espalhar partículas α com uma energia de 7,0 MeV. Suponha que 1.000 partículas tenham sofrido uma deflexão maior que 25º. (*a*) Quantas partículas provavelmente sofreram uma deflexão de mais de 45º? (*b*) Quantas sofreram deflexões entre 25º e 45º? (*c*) Quantas sofreram deflexões entre 75º e 90º?

Seção 4-3 O Modelo de Bohr para o Átomo de Hidrogênio

4-13. O raio da órbita n = 1 do átomo de hidrogênio é a_0 = 0,053 nm. (*a*) Calcule o raio da órbita n = 6. (*b*) Calcule o raio da órbita n = 6 do hélio monoionizado (He^+), que, como o hidrogênio, possui apenas um elétron girando em torno do núcleo.

4-14. Mostre que a Equação 4-19 para o raio da primeira órbita de Bohr e a Equação 4-20 para o valor absoluto da energia do nível fundamental do átomo de hidrogênio podem ser escritas na forma

$$a_0 = \frac{\hbar c}{\alpha mc^2} = \frac{\lambda_c}{2\pi\alpha} \qquad E_1 = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2$$

onde $\lambda_c = h/mc$ é o comprimento de onda Compton do elétron e $\alpha = ke^2/\hbar c$ é a constante de estrutura fina. Use essas expressões para verificar se os valores numéricos das constantes a_0 e E_1 estão corretos.

4-15. Calcule os três maiores comprimentos de onda da série de Lyman (n_f = 1) em nm e indique a posição desses comprimentos de onda em uma escala horizontal linear. Indique o limite da série (menor comprimento de onda possível) no mesmo gráfico. Alguma dessas linhas pertence ao espectro visível?

4-16. Se o momento angular da Terra em seu movimento em torno do Sol fosse quantizado como o do átomo de hidrogênio (Equação 4-17), qual seria o número quântico da Terra? Qual seria a energia liberada em uma transição para o nível de energia imediatamente inferior? Essa energia (emitida possivelmente na forma de uma onda gravitacional) seria fácil de detectar? Qual seria o raio da nova órbita? (O raio da órbita da Terra é 1,50 × 10^{11} m.)

4-17. Em média, um átomo de hidrogênio permanece em um estado excitado cerca de 10^{-8} s antes de sofrer uma transição para um estado de menor energia. Quantas revoluções um elétron no estado n = 2 descreve em 10^{-8} s?

4-18. Em média, um átomo em um estado excitado sofre uma transição para um estado de menor energia em cerca de 10^{-8} s. Se o elétron de um átomo de lítio duplamente ionizado (Li^{+2}, que, como o hidrogênio, possui apenas um elétron) é colocado no estado n = 4, quantas revoluções o elétron descreve em torno do núcleo antes de sofrer uma transição para um estado de menor energia?

4-19. Um múon pode ser capturado por um próton para formar um átomo muônico. O múon é uma partícula igual ao elétron, exceto pela massa, que é 105,7 MeV/c^2. (*a*) Calcule o raio da primeira órbita de Bohr de um átomo muônico. (*b*) Calcule o valor absoluto da energia do estado fundamental. (*c*) Qual é o menor comprimento de onda da série de Lyman para este átomo?

4-20. No átomo de lítio (Z = 3), dois elétrons estão na órbita n = 1 e o terceiro na órbita n = 2. (Apenas dois elétrons podem

ocupar a órbita $n = 1$ por causa do princípio de exclusão, que será discutido no Capítulo 7.) O valor aproximado da energia de interação entre os elétrons internos e o elétron externo pode ser obtido escrevendo a energia do elétron externo na forma

$$E = -Z'^2 E_1 / n^2$$

onde $E_1 = 13{,}6$ eV, $n = 2$ e Z' é a carga nuclear efetiva, que é menor do que 3 por causa do efeito de blindagem dos dois elétrons internos. Use o valor experimental da energia de ionização do átomo de lítio, 5,39 eV, para calcular Z'.

4-21. Desenhe em escala um diagrama de níveis de energia para o átomo de hidrogênio, mostrando os níveis correspondentes a $n = 1, 2, 3, 4$ e ∞. Mostre no diagrama: (*a*) o limite da série de Lyman; (*b*) a linha H_β; (*c*) a transição entre o estado cuja energia de ligação (energia necessária para remover o elétron do átomo) é 1,51 eV e o estado cuja energia de excitação é 10,2 eV; (*d*) o comprimento de onda limite da série de Paschen.

4-22. Um átomo de hidrogênio em repouso no laboratório emite a radiação α da série de Lyman. (*a*) Calcule a energia cinética de recuo do átomo. (*b*) Que fração da energia de excitação do estado $n = 2$ é transformada em energia de recuo do átomo? (*Sugestão*: Use a lei de conservação do momento.)

4-23. (*a*) Desenhe em escala um diagrama de níveis de energia para o íon C^{5+}, mostrando os níveis correspondentes a $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e ∞. (*b*) Calcule o comprimento de onda da linha espectral associada à transição de $n = 3$ para $n = 2$, a linha H_α do C^{5+}. (*c*) A que parte do espectro eletromagnético pertence esta linha?

4-24. O par elétron-pósitron que foi discutido no Capítulo 2 pode formar um sistema semelhante ao átomo de hidrogênio chamado *positrônio*. Calcule (*a*) as energias dos três primeiros estados e (*b*) os comprimentos de onda das linhas α e β da série de Lyman do positrônio. (A observação dessas linhas é considerada como uma "assinatura" da formação de positrônio.)

4-25. Com o auxílio de lasers sintonizáveis, foram produzidos átomos de Rydberg do sódio com $n \approx 100$. O diâmetro atômico resultante corresponderia no hidrogênio a $n \approx 600$. (*a*) Qual seria o diâmetro de um átomo de hidrogênio com o elétron na órbita $n = 600$? (*b*) Qual seria a velocidade do elétron nessa órbita? (*c*) Qual é a razão entre a velocidade calculada no item (*b*) e a velocidade do elétron na órbita $n = 1$?

Seção 4-4 Espectros de Raios X

4-26. (*a*) Calcule o segundo e terceiro maiores comprimentos de onda da série *K* (o primeiro é o da linha K_α) do molibdênio. (*b*) Qual é o menor comprimento de onda da série?

4-27. O comprimento de onda da linha K_α do espectro de raios X de um elemento é 0,0794 nm. Identifique o elemento.

4-28. Moseley especulou a respeito da existência de elementos de número atômico 43, 61 e 75 que (na época) ainda não tinham sido descobertos. (*a*) De acordo com a Figura 4-19, qual era a previsão de Moseley para as frequências das linhas K_α desses elementos? (*b*) Use a Equação 4-37 para calcular os comprimentos de onda dessas linhas.

4-29. Qual é o raio aproximado da órbita $n = 1$ do ouro ($Z = 79$)? Compare este resultado com o raio do núcleo de ouro, que é 7,1 fm, aproximadamente.

4-30. Um elétron da camada *K* do Fe é ejetado por um elétron de alta energia que incide no alvo de um tubo de raios X. A lacuna resultante na camada $n = 1$ poderia ser completada por um elétron proveniente da camada $n = 2$, a camada *L*; entretanto, em vez de emitir o raio X característico K_α, o átomo ejeta em elétron Auger da camada $n = 2$. Calcule a energia do elétron Auger usando a teoria de Bohr.

4-31. Em um tubo de raios X, um elétron se aproxima do alvo com uma velocidade de $2{,}25 \times 10^8$ m/s. O elétron diminui de velocidade ao ser defletido por um núcleo do alvo, emitindo um fóton cuja energia é 32,5 keV. Ignorando o recuo do núcleo, mas não os efeitos relativísticos, calcule a velocidade final do elétron.

4-32. (*a*) Calcule a energia de um elétron na órbita $n = 1$ (camada *K*) do tungstênio, tomando $Z - 1$ como a carga efetiva do núcleo. (*b*) O valor experimental desta energia é 69,5 keV. Suponha que a carga nuclear efetiva seja $(Z - \sigma)$, em que σ é a chamada *constante de blindagem*, e calcule o valor de σ a partir do resultado experimental.

4-33. Plote um gráfico de Moseley semelhante ao da Figura 4-19 para as linhas K_β dos espectros de raios X dos elementos da tabela abaixo (as energias são dadas em keV):

Al	Ar	Sc	Fe
1,56	3,19	4,46	7,06
Ge	Kr	Zr	Ba

10,98	14,10	17,66	36,35

Determine a inclinação da reta e compare-a com a da linha K_β da Figura 4-19.

Seção 4-5 O Experimento de Franck-Hertz

4-34. Suponha que, em um experimento de Franck-Hertz, elétrons de energia até 13,0 eV possam ser produzidos no tubo. Se o tubo contém hidrogênio atômico, (*a*) determine o menor comprimento de onda que pode ser gerado no tubo; (*b*) faça uma lista de todas as linhas do hidrogênio que podem ser geradas no tubo.

4-35. Usando os dados da Figura 4-24*b* e uma régua, desenhe em escala um diagrama de níveis de energia na faixa de 0 eV a 60 eV para os estados vibracionais desse material. Que energia é típica das transições entre níveis vizinhos correspondentes ao maior de cada par de picos?

4-36. A transição do primeiro estado excitado para o estado fundamental do átomo de potássio resulta na emissão de um fóton com $\lambda = 770$ nm. Se o experimento de Franck-Hertz for executado com vapor de potássio, para que valor da tensão deverá ocorrer a primeira queda da corrente?

4-37. Se fosse possível encher um tubo de Franck-Hertz com positrônio, qual seria a tensão entre catodo e grade necessária para atingir a segunda queda de corrente em uma curva equivalente à da Figura 4-23? (Veja o Problema 4-24.)

4-38. Em um tubo de Franck-Hertz contendo vapor de mercúrio, os elétrons também podem sofrer colisões elásticas com os átomos de Hg. Se a colisão for frontal, que fração da energia cinética será perdida pelo elétron, supondo que o átomo de Hg esteja em repouso? Se a colisão não for frontal, a fração perdida será maior ou menor que no caso de uma colisão frontal?

NÍVEL II

4-39. Um átomo de hidrogênio de Rydberg está no estado excitado $n = 45$. (*a*) Qual é a diferença de energia (em eV) entre este estado e o estado $n = 46$? (*b*) Qual é a energia de ionização do átomo no estado $n = 45$? (*c*) Quais são a frequência e o comprimento de onda do fóton emitido em uma transição do estado $n = 46$ para o estado $n = 45$? (*d*) Qual é o raio do átomo no estado $n = 45$? Quantas vezes maior que o raio de Bohr é esse raio?

4-40. Três isótopos do hidrogênio são encontrados na natureza: hidrogênio comum, deutério e trítio. Os núcleos desses isótopos contêm, respectivamente, um próton, um próton e um nêutron e um próton e dois nêutrons. As massas dos três núcleos aparecem na Tabela 11-1. (*a*) Use a Equação 4-26 para determinar as constantes de Rydberg do deutério e do trítio. (*b*) Calcule a diferença entre os comprimentos de onda das linhas α de Balmer do hidrogênio e do trítio.

4-41. Demonstre a Equação 4-8 usando a sugestão que se segue à Equação 4-7.

4-42. Geiger e Marsden usaram partículas α com uma energia cinética de 7,7 MeV e descobriram que, quando essas partículas eram espalhadas por uma folha de ouro, o número de partículas espalhadas estava de acordo com a fórmula de Rutherford para todos os ângulos de espalhamento. Use esse fato para calcular um limite superior para o raio do núcleo de ouro.

4-43. (*a*) A corrente i associada a uma carga q que se move em círculos com uma frequência f_{rev} é qf_{rev}. Determine a corrente associada a um elétron que se encontra na primeira órbita de Bohr do átomo de hidrogênio. (*b*) O momento magnético de uma espira percorrida por corrente é iA, em que A é a área da espira. Calcule o momento magnético do elétron na primeira órbita de Bohr do átomo de hidrogênio em unidades de $A \cdot m^2$. Este momento magnético é conhecido como *magnéton de Bohr*.

4-44. Use uma planilha eletrônica para calcular o comprimento de onda (em nm) das cinco primeiras linhas espectrais das séries de Lyman, Balmer, Paschen e Brackett do hidrogênio. Mostre a posição dessas linhas em uma escala linear e indique quais estão na região do espectro que corresponde à luz visível.

4-45. Mostre que uma pequena variação da massa reduzida do elétron produz uma pequena variação do comprimento de onda das linhas espectrais, dada por $\Delta\lambda/\lambda = \Delta\mu/\mu$. Use este resultado para calcular a diferença $\Delta\lambda$ entre o comprimento de onda da linha vermelha da série de Balmer do hidrogênio, $\lambda = 656{,}3$ nm, e o comprimento de onda da linha correspondente no espectro do deutério, cujo núcleo possui uma massa duas vezes maior.

4.46. Considere o experimento de Frank-Hertz com vapor de mercúrio no tubo e a tensão entre o catodo e a grade igual a 4,0 V, ou seja, um valor insuficiente para que os elétrons causem uma transição dos átomos de Hg para o primeiro estado excitado. Isso significa que todas as colisões entre os elétrons e os átomos de Hg são elásticas. (*a*) Se a energia cinética dos elétrons é E_k, mostre que a energia cinética máxima que um átomo de Hg pode adquirir em uma colisão é, aproximadamente, $4mE_k/M$, em que M é a massa do átomo de Hg. (*b*) Qual é a energia cinética máxima que um elétron com $E_k = 2{,}5$ eV pode perder em uma colisão?

4-47. O íon de Li^{2+} é igual ao átomo de hidrogênio na teoria de Bohr, exceto pelo fato de que a carga e a massa do núcleo são diferentes. (*a*) Que transições do Li^{2+} dão origem a linhas de emissão com comprimentos de onda quase iguais às primeiras duas linhas da série de Lyman no hidrogênio? (*b*) Calcule a diferença entre o comprimento de onda da linha α da série de Lyman do

hidrogênio e a linha de emissão do Li que tem um comprimento de onda quase igual.

4-48. Em um experimento de espalhamento de partículas α, a área do detector é 0,50 cm^2. O detector está localizado a 10 cm de uma folha de prata com 1,0 μm de espessura. A corrente do feixe incidente é 1,0 nA e a energia das partículas α é 6,0 MeV. Quantas partículas α são contadas por segundo pelo detector (*a*) em $\theta = 60^o$? (*b*) em $\theta = 120^o$?

4-49. As linhas de raios X K_α, L_α e M_α são emitidas nas transições $n = 2 \rightarrow n = 1$, $n = 3 \rightarrow n = 2$ e $n = 4 \rightarrow n = 3$, respectivamente. No caso do cálcio ($Z = 20$), as energias dessas transições são 3,69 keV, 0,341 keV e 0,024 keV, respectivamente. Suponha que fótons de alta energia incidam na superfície de uma amostra de cálcio, causando a ejeção de elétrons da camada *K* dos átomos da superfície. Calcule as energias dos elétrons Auger que podem ser emitidos das camadas *L*, *M* e *N* ($n = 2, 3$ e 4) dos átomos da amostra, além dos raios X característicos.

4-50. A Figura 3-15*b* mostra as linhas K_α e K_β emitidas por um alvo de molibdênio (Mo) em um tubo de raios X com um potencial acelerador de 35 kV. Os comprimentos de onda são $K_\alpha = 0{,}071$ nm e $K_\beta = 0{,}063$ nm. (*a*) Calcule as energias dos fótons correspondentes. (*b*) Suponha que haja necessidade de preparar um feixe constituído principalmente por fótons da linha K_α. Uma das formas de conseguir isso é fazer passar os raios X emitidos pelo molibdênio por um material que absorva os fótons da linha K_β, através do efeito fotelétrico, com maior probabilidade que os fótons da linha K_α. A tabela abaixo mostra alguns elementos e as respectivas energias de ligação dos elétrons da camada *K*. Qual dos materiais o leitor escolheria? Justifique sua resposta.

Elemento	**Zr**	**Nb**	**Mo**	**Tc**	**Ru**
Z	40	41	42	43	44
E_k(keV)	18,00	18,99	20,00	21,04	22,12

NÍVEL III

4-51. Uma pequena esfera se choca com uma esfera estacionária de raio *R*. No ponto de impacto, a trajetória da esfera menor faz um ângulo β com a normal à esfera maior (Figura 4-25). Supondo que a esfera menor ricocheteia como um ângulo igual ao de incidência, o ângulo de espalhamento é dado por $\theta = 180^o - 2\beta$, como se pode ver na figura. Desprezando o raio da esfera menor, (*a*) mostre, pela geometria da figura, que o parâmetro de impacto é dado por $b = R\cos(\theta/2)$; (*b*) se a intensidade do feixe incidente é I_0 esferas por unidade de tempo e por unidade de área, determine o número de esferas para as quais o ângulo de espalhamento é maior do que θ; (*c*) mostre que a seção de choque para ângulos de espalhamento maiores que 0^o é πR^2; (*d*) discuta as implicações do fato de que a seção de choque de Rutherford para ângulos de espalhamento maiores que 0^o é infinita.

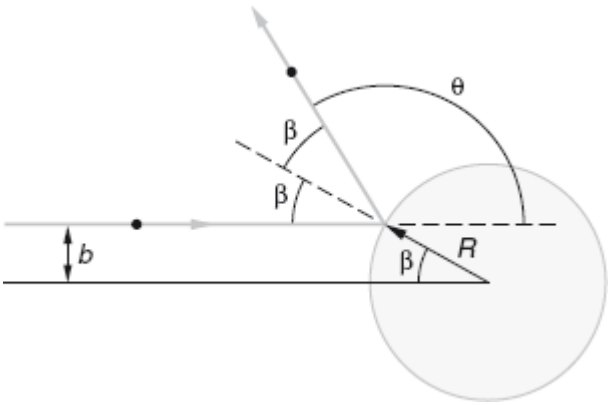


FIGURA 4-25 Choque entre uma esfera pequena e uma esfera de raio *R*.

4-52. O átomo de hélio monoionizado, He^+, se parece muito com o átomo de hidrogênio. (*a*) Desenhe em escala um diagrama de níveis de energia para o átomo de He^{2+}, semelhante ao que aparece na Figura 4-16, mostrando os níveis correspondentes a $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e ∞. (*b*) Qual é a energia de ionização do He^+? (*c*) Calcule a diferença entre os comprimentos de onda das primeiras duas linhas da série de Lyman do hidrogênio e os comprimentos de onda das primeiras duas linhas da série de Balmer do He^+. Nos dois casos, não se esqueça de incluir a correção da massa reduzida. (*d*) Mostre que, para cada linha espectral do hidrogênio, existe uma linha espectral do He^+ com um comprimento de onda quase igual. (A massa do He^+ é $6{,}65 \times 10^{-27}$ kg.)

4-53. A tabela a seguir mostra os comprimentos de onda das linhas L_α para vários elementos. Desenhe um gráfico de Moseley a partir desses dados e compare a inclinação do gráfico com a do gráfico correspondente na Figura 4-19. Determine e interprete o

ponto em que o gráfico intercepta o eixo vertical, usando uma equação análoga à Equação 4-35.

Elemento	P	Ca	Co	Kr	Mo	I
Z	15	20	27	36	42	53
Comprimento de onda (nm)	10,45	4,05	1,79	0,73	0,51	0,33

4-54. Neste problema, o leitor vai determinar os níveis de energia do átomo de hidrogênio sem usar a condição de quantização expressa pela Equação 4-17. Para relacionar a Equação 4-14 à fórmula de Balmer-Ritz, suponha que os raios das órbitas permitidas são dados por $r_n = n^2 r_0$, onde n é um número inteiro e r_0 uma constante a ser determinada. (*a*) Mostre que a frequência da radiação associada a uma transição de um estado com $n_i = n$ para um estado com $n_f = n - 1$ é dada por $f \approx kZe^2/hr_0n^3$ para $n >> 1$. (*b*) Mostre que a frequência de revolução é dada por

$$f_{rev}^2 = \frac{kZe^2}{4\pi^2 m r_0^3 n^6}$$

(*c*) Use o princípio de correspondência para determinar r_0 e compare o resultado com o da Equação 4-19.

4-55. Calcule as energias e velocidades dos elétrons nas órbitas circulares de Bohr de um átomo de um elétron usando expressões relativísticas para a energia cinética e o momento.

4-56. (*a*) Escreva um programa de computador para calcular as linhas das séries espectrais dos átomos de um elétron. Os dados de entrada devem ser o número quântico do estado final n_f, o número atômico Z e a massa nuclear M; os dados de saída, os comprimentos de onda e frequências das seis primeiras linhas e do limite da série. Leve em conta a correção da massa reduzida. (*b*) Use o programa para calcular os comprimentos de onda e frequências das linhas da série de Balmer do hidrogênio. (*c*) Escolha um valor de $n_f > 100$, batize a série com o seu nome e use o programa para calcular os comprimentos e frequências das seis primeiras linhas e do limite da série.

4-57. A Figura 4-26 mostra o espectro de perda de energia do He, medido em um sistema semelhante ao que aparece na Figura 4-24*a*. Use os dados da figura para desenhar, em escala, o diagrama de níveis de energia do He.

4-58. Suponha que não existissem cargas elétricas e a força de atração entre o elétron e o próton no átomo de hidrogênio fosse apenas a força gravitacional. Calcule os valores de a_0 e E_n para esse caso e determine a frequência e a energia da linha H_α e do limite da série de Balmer. Compare os valores obtidos com os valores correspondentes no hidrogênio "de verdade".

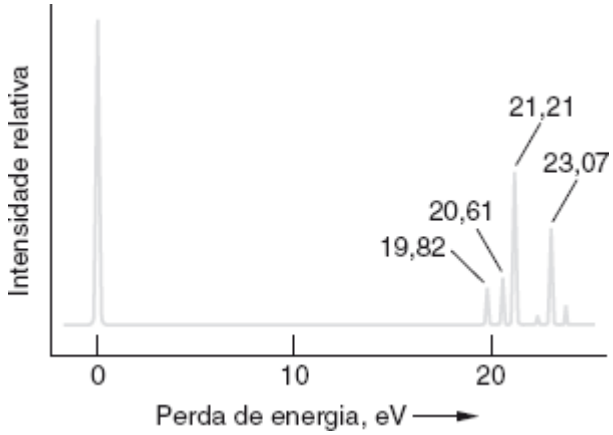


FIGURA 4-26 Espectro de perda de energia do hélio. A energia dos elétrons incidentes é 34 eV. O pico em 0 eV se deve aos elétrons que sofreram espalhamento elástico.

4-59. Em um recipiente com hidrogênio, todos os átomos estão no estado $n = 5$. Se todos os átomos voltarem ao estado fundamental, quantos fótons diferentes serão emitidos, supondo que todas as transições possíveis ocorram? Se existem 500 átomos na amostra e supondo que todas as transições para estados de menor energia são igualmente prováveis, qual é o número total de fótons emitidos até que todos os átomos voltem ao estado fundamental?

4-60. (*a*) Desenhe em escala um diagrama de níveis de energia para os átomos muônicos (veja o Problema 4-19), mostrando os níveis correspondentes a $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e ∞. (*b*) Calcule os raios das órbitas de múons $n = 1$ nos átomos muônicos H, He^{1+}, $^{12+}$ $^{78+}$

Al e Au . (*c*) Compare os resultados do item (*b*) com os raios das órbitas de elétrons $n = 1$ em torno dos mesmos núcleos. (*d*) Calcule os comprimentos de onda dos fótons emitidos nas transições de $n = 2$ para $n = 1$ em todos esses átomos muônicos.

***Do inglês *e*lectron *e*nergy *l*oss *s*pectroscopy. (N.T.)**

*** No caso de átomos de um elétro*n, as linhas da série K são chamadas de L_α, L_β, etc., e as da série L de H_α, H_β,* etc. (N.T.)**

CAPÍTULO 5

Propriedades Ondulatórias das Partículas

5-1 A Hipótese de de Broglie
5-2 Medida do Comprimento de Onda das Ondas de Matéria
5-3 Pacotes de Ondas
5-4 Interpretação Probabilística da Função de Onda
5-5 O Princípio de Indeterminação
5-6 Algumas Consequências do Princípio de Indeterminação
5-7 O Dualismo Onda-Partícula

Em 1924, um estudante francês, Louis de Broglie,[1] propôs em sua tese de doutorado que o dualismo onda-partícula, até então reconhecido apenas no caso das ondas eletromagnéticas, era também uma propriedade da matéria e, em especial, dos elétrons. Essa sugestão era altamente especulativa, já que não havia na época nenhum indício experimental do caráter ondulatório dos elétrons ou de qualquer outra partícula. Como o jovem cientista teria chegado a uma ideia aparentemente tão estranha? Na verdade, tratava-se de um "lampejo", semelhante à "ideia fantástica" de Einstein que o levou ao princípio de equivalência (veja o Capítulo 2). Nas palavras do próprio de Broglie:

> Depois da Primeira Guerra Mundial, pensei muito a respeito da teoria dos quanta e do dualismo onda-partícula ... Foi então que tive uma súbita inspiração. O dualismo onda-partícula de Einstein era um fenômeno absolutamente geral, que se estendia a toda a natureza.[2]

Como o universo visível é constituído exclusivamente de matéria e radiação, a hipótese de de Broglie é um postulado fundamental a respeito da simetria da natureza. (Existem atualmente fortes indícios experimentais de que a matéria comum constitui apenas cerca de 4% do universo visível. Cerca de 22% são constituídos por uma forma desconhecida de "matéria escura" invisível e 74% de uma igualmente misteriosa "energia escura". Veja o Capítulo 13.)

5-1 A Hipótese de de Broglie

Louis de Broglie expressou sua hipótese matematicamente através de equações para a frequência e comprimento de onda das ondas de matéria, hoje conhecidas como *relações de de Broglie*:

$$f = \frac{E}{h} \qquad \textbf{5-1}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \textbf{5-2}$$

onde E é a energia total, p o momento e λ o chamado *comprimento de onda de de Broglie* da partícula. No caso dos fótons, essas equações podem ser obtidas a partir da equação do quantum de radiação, $E = hf$, e da Equação 2-31, $E = pc$:

$$E = pc = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

Usando uma abordagem indireta, baseada na mecânica relativística, de Broglie demonstrou que as Equações 5-1 e 5-2 também se aplicam a partículas com massa de repouso diferente de zero. Em seguida, observou que essas equações levam a uma interpretação física da quantização do momento angular do elétron postulada por Bohr, a de que a quantização equivale à formação de uma onda estacionária (Figura 5-1). Temos:

$$mvr = n\hbar = \frac{nh}{2\pi} \qquad \text{para} \qquad n = \text{número inteiro}$$

$$2\pi r = \frac{nh}{mv} = \frac{nh}{p} = n\lambda = \text{circunferência da órbita} \qquad \textbf{5-3}$$

A ideia de explicar os estados discretos de energia da matéria em termos de ondas estacionárias parecia, portanto, bastante promissora.

As ideias de de Broglie foram ampliadas e transformadas em uma teoria completa por Erwin Schrödinger no final de 1925. Em 1927, C. J. Davisson e L. H. Germer confirmaram a hipótese de de Broglie ao produzirem figuras de interferência, uma característica dos fenômenos ondulatórios, usando feixes de elétrons. Vamos discutir daqui a pouco a teoria de Schrödinger e o experimento de Davisson-Germer, mas primeiro temos que nos perguntar por que as propriedades ondulatórias da matéria não foram observadas antes do trabalho de de Broglie. Podemos compreender a razão se nos lembrarmos de que as propriedades da luz também não foram observadas até que os experimentadores dispusessem de fendas ou aberturas com dimensões comparáveis ao comprimento de onda da luz. Isso aconteceu porque a natureza ondulatória da luz não é fácil de observar em experimentos nos quais as dimensões básicas do equipamento são muito maiores que o comprimento de onda da radiação que está sendo investigada. Assim, por exemplo, se A representa a largura de uma fenda, o primeiro mínimo de difração[3] (uma manifestação das propriedades ondulatórias) acontece para um ângulo θ em relação à direção original do feixe ($\theta = 0°$) tal que $\text{sen}\,\theta = \lambda/A$. Na ótica geométrica, $\lambda/A \to 0$ e, portanto, $\text{sen}\,\theta \approx \theta \to 0$. Se, porém, uma das dimensões características do equipamento é da mesma ordem que λ, o comprimento de onda da luz que atravessa o sistema, $\lambda/A \approx 1$. Nesse caso, $\theta \approx \text{sen}^{-1}(\lambda/A)$ é fácil de observar e as propriedades ondulatórias da luz se tornam evidentes. Como a constante de Planck é muito pequena, o comprimento de onda dado pela Equação 5-2 é extremamente pequeno no caso de objetos macroscópicos. Este será um dos pontos ilustrados na próxima seção.

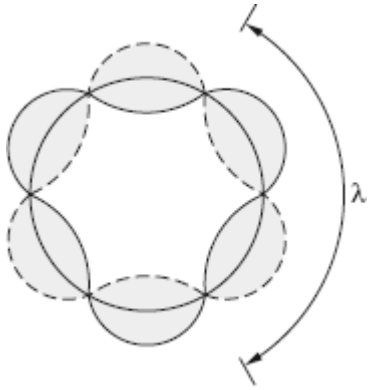


FIGURA 5-1 Ondas estacionárias ao longo de uma circunferência. Neste caso, a circunferência é igual a 3λ. Se o elemento vibrante fosse, por exemplo, um anel de aço excitado por um golpe de martelo, a forma do anel oscilaria entre as posições extremas representadas pelas linhas cheia e tracejada.



Luis V. de Broglie, o primeiro cientista a sugerir que os elétrons possuem propriedades ondulatórias. [*Cortesia de Culver Pictures*.]

5-2 Medida do Comprimento de Onda das Ondas de Matéria

Embora hoje em dia existam redes de difração com espaçamentos comparáveis ao diâmetro de um núcleo atômico, os sistemas de maior resolução a que os contemporâneos de de Broglie tinham acesso eram os planos atômicos dos sólidos cristalinos, cujo espaçamento é da ordem de 0,1 nm. Isso significa que mesmo para uma partícula macroscópica extremamente pequena, como um grão de pó ($m \approx 0{,}1$ mg) viajando pelo ar com a energia cinética média das moléculas do ar, os melhores sistemas de difração da época produziriam ângulos de difração da ordem de 10^{-10} radiano, impossíveis de observar na prática. Como o valor da constante de Planck é muito pequeno, o comprimento de onda λ das ondas de matéria é menor que quase todas as aberturas fisicamente realizáveis, o que torna a difração dessas ondas muito difícil de ser observada. No caso de objetos com momentos maiores que o de um grão de poeira, a possibilidade de observar *ondas de matéria* se torna ainda mais remota, como ilustra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 5-1 **Comprimento de Onda de uma Bola de Pingue-Pongue** Qual é o comprimento de onda de uma bola de pingue-pongue de 2,0 g ao ser rebatida com uma velocidade de 5 m/s?

SOLUÇÃO

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{(2{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg})\,(5\,\text{m/s})}$$
$$= 6{,}6 \times 10^{-32}\,\text{m} = 6{,}6 \times 10^{-23}\,\text{nm}$$

Trata-se um valor 17 ordens de grandeza menor que um núcleo atômico; obviamente, não existem aberturas tão pequenas.

A situação é bem diferente para elétrons em baixa velocidade; um dos primeiros a perceber esse fato foi de Broglie. Na *soutenance de thèse* (defesa de tese), quando Perrin[4] perguntou como seria possível testar a hipótese das ondas de matéria, de Broglie respondeu que talvez fazendo passar partículas elementares, elétrons, por exemplo, por fendas muito estreitas. Considere um elétron que tenha sido submetido a uma diferença de potencial de V_0 volts. A energia cinética (não relativística) é dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} = eV_0$$

Explicitando o momento p e substituindo na Equação 5-2, temos:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{(2mc^2eV_0)^{1/2}}$$

Fazendo $hc = 1{,}24 \times 10^3$ eV · nm e $mc^2 = 0{,}511 \times 10^6$ eV, obtemos:

$$\lambda = \frac{1{,}226}{V_0^{1/2}}\text{nm} \qquad \text{para} \qquad eV_0 \ll mc^2 \qquad \textbf{5-4}$$

No exemplo a seguir é calculado o comprimento da onda de matéria associada a um elétron, o que permite estimar o tamanho máximo da fenda para que sejam observados efeitos de difração.

EXEMPLO 5-2 **Comprimento de Onda de um Elétron Lento** Calcule o comprimento de onda de um elétron com uma energia cinética de 10 eV.

SOLUÇÃO

1. O comprimento de onda de de Broglie é dado pela Equação 5-2:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

2. *Método 1*: Como um elétron de 10 eV é não relativístico, podemos usar a relação clássica entre momento e energia cinética:

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

ou

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{2mE_k} \\ &= \sqrt{(2)(9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(10\,\text{eV})(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} \\ &= 1{,}71 \times 10^{-24}\,\text{kg} \cdot \text{m/s} \end{aligned}$$

3. Substituindo este resultado na Equação 5-2, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{s}}{1{,}71 \times 10^{-24}\,\text{kg} \cdot \text{m/s}} \\ &= 3{,}88 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0{,}39\,\text{nm} \end{aligned}$$

4. *Método 2*: O comprimento de onda do elétron também pode ser calculado fazendo $V_0 = 10$ V na Equação 5-4:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1{,}226}{V^{1/2}} = \frac{1{,}226}{\sqrt{10}} \\ &= 0{,}39\,\text{nm} \end{aligned}$$

Observação: *Embora este comprimento de onda seja pequeno, é da mesma ordem de grandeza que o tamanho de um átomo e que o espaçamento dos planos atômicos em um cristal.*

O Experimento de Davisson-Germer

Em uma breve nota publicada no número de 14 de agosto de 1925 da revista *Naturwissenschaften*, Walter Elsasser, que na época era aluno de J. Franck (o mesmo do experimento de Franck-Hertz), sugeriu que os efeitos ondulatórios associados a elétrons lentos poderiam ser observados usando monocristais para difratar as partículas. Este efeito foi observado pela primeira vez em 1927 por C. J. Davisson[5] e L. H. Germer, que estavam estudando a reflexão de elétrons em um alvo de níquel no Bell Telephone Laboratories e não tinham conhecimento nem da proposta de Elsasser nem da hipótese de de Broglie. Depois de aquecer o alvo para remover uma camada de óxido que havia se formado quando o sistema de vácuo sofreu um vazamento, descobriram que o gráfico da intensidade do feixe refletido em função do ângulo de espalhamento apresentava máximos e

mínimos. No processo de resfriamento, os átomos da superfície do alvo haviam formado monocristais de níquel relativamente grandes e o que estavam observando era a difração dos elétrons. Reconhecendo a importância da descoberta acidental, Davisson e Germer substituíram o alvo por um monocristal de níquel e investigaram exaustivamente o espalhamento dos elétrons. A Figura 5-2 ilustra o arranjo experimental usado pelos dois pesquisadores. Os dados obtidos para elétrons de 54 eV, reproduzidos na Figura 5-3, mostram um máximo de espalhamento em $\varphi = 50°$. Considere o espalhamento por uma família de planos de Bragg (Figura 5-4). A condição de Bragg para interferência construtiva é $n\lambda = 2d \operatorname{sen} \theta = 2d \cos \alpha$. O espaçamento d dos planos de Bragg está relacionado à distância interatômica D através da equação $d = D \operatorname{sen} \alpha$. Assim,

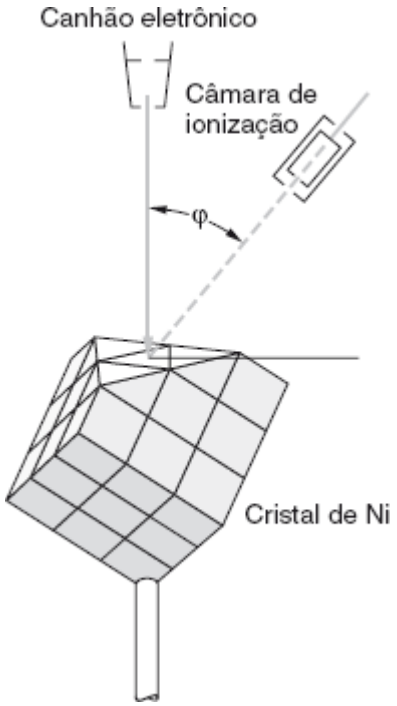


FIGURA 5-2 O experimento de Davisson-Germer. Elétrons de baixa energia são difratados por um cristal de níquel e detectados em uma câmara de ionização. Os experimentadores podiam fazer variar a energia cinética dos elétrons variando a tensão de aceleração do canhão eletrônico.

$$n\lambda = 2D \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = D \operatorname{sen} 2\alpha$$

ou

$$n\lambda = D \operatorname{sen} \varphi \qquad \textbf{5-5}$$

em que $\varphi = 2\alpha$ é o ângulo de espalhamento. Medidas de difração de raios X revelam que o valor de D para o Ni é 0,215 nm. O comprimento de onda calculado com o auxílio da Equação 5-5 para o pico observado em $\theta = 50°$ por Davisson e Germer é, para $n = 1$,

$$\lambda = 0{,}215 \operatorname{sen} 50° = 0{,}165 \text{ nm}$$

O comprimento de onda calculado a partir da relação de de Broglie para elétrons de 54 eV é

$$\lambda = \frac{1{,}226}{(54)^{1/2}} = 0{,}167 \text{ nm}$$

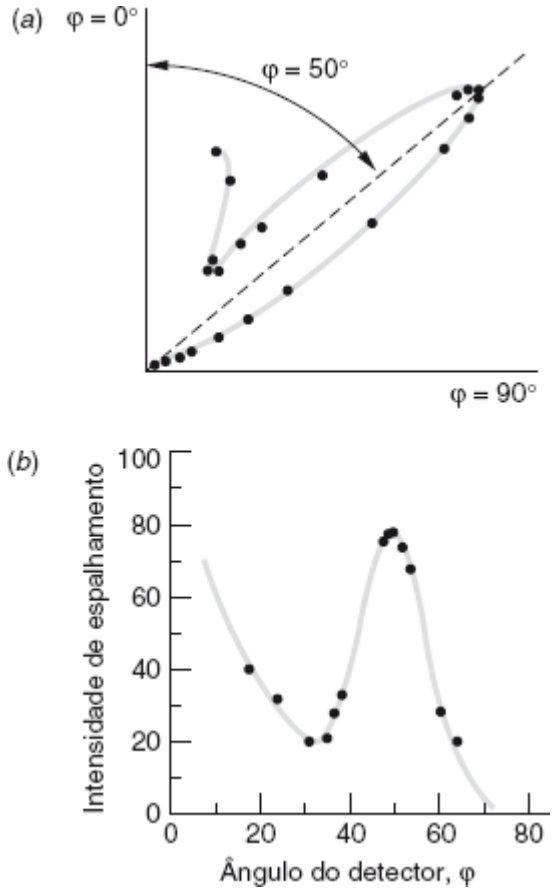


FIGURA 5-3 Intensidade do espalhamento em função do ângulo, para elétrons de 54 eV. (*a*) Gráfico polar dos resultados experimentais. Para cada ângulo, a intensidade é indicada pela distância entre o ponto e a origem. O ângulo de espalhamento φ é medido no sentido horário, tomando como origem o semieixo *y* positivo. (*b*) Os mesmos dados plotados em um gráfico cartesiano. As escalas de intensidade, embora arbitrárias, são iguais nos dois gráficos. Os gráficos mostram um pico em φ = 50° que satisfaz a condição de Bragg para ondas com um comprimento de onda λ = *h*/*p*. [*Fonte*: *Nobel Prize Lectures*: Physic (*Amsterdam and New York: Elsevier, © Nobel Foundation, 1964*).]

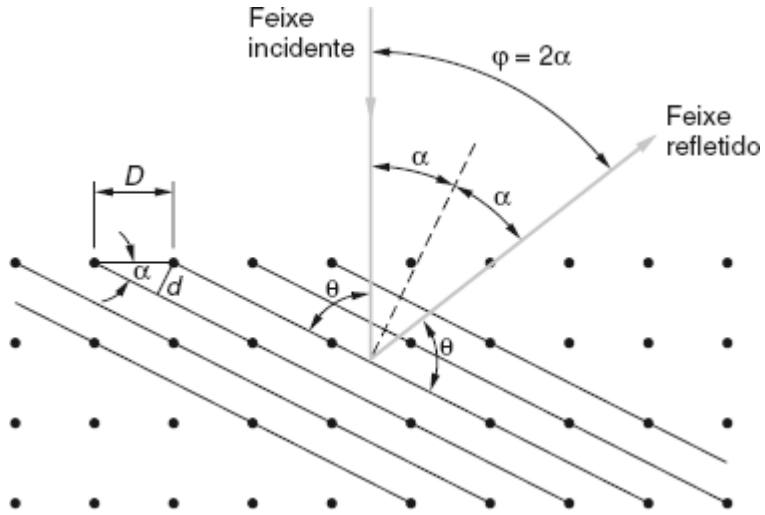


FIGURA 5-4 Espalhamento de elétrons por um cristal. As ondas eletrônicas sofrem um espalhamento significativo apenas quando a condição de Bragg $n\lambda = 2d \operatorname{sen} \theta$ é satisfeita. Esta condição é equivalente à condição $n\lambda = D \operatorname{sen} \varphi$.

A concordância com o valor experimental é excelente! Depois de obterem este resultado espetacular, Davisson e Germer executaram um estudo sistemático para testar a relação de de Broglie usando elétrons com energias até 400 eV e vários arranjos experimentais. A Figura 5-5 mostra um gráfico da largura de linha experimental em função de $V_0^{-1/2}$. Os comprimentos de onda medidos por difração são ligeiramente menores que as previsões teóricas porque a refração das ondas de matéria na superfície do cristal foi desprezada. Experimentos usando o efeito fotelétrico mostram que é preciso uma energia da ordem de alguns eV para remover um elétron de um metal. Isso significa que os elétrons que entram em um metal ganham energia cinética; assim, o comprimento de onda é ligeiramente menor no interior do cristal.[6]

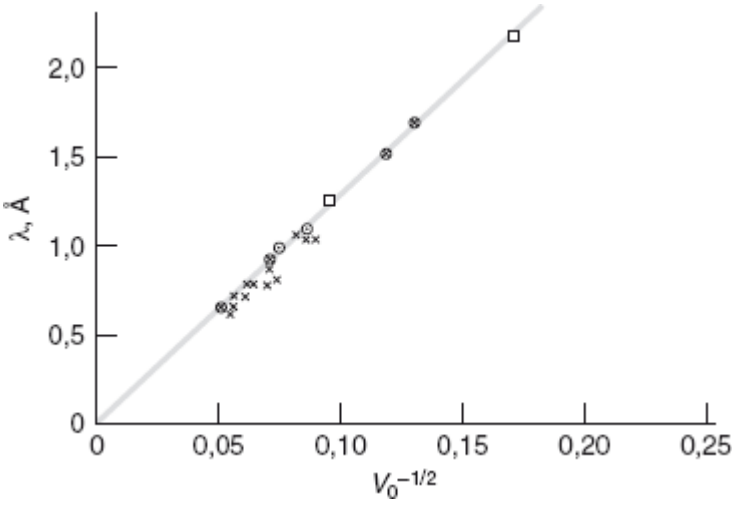


FIGURA 5-5 Teste experimental da fórmula de de Broglie $\lambda = h/p$. O comprimento de onda é calculado a partir dos resultados de difração e plotado em função de $V_0^{-1/2}$, em que V_0 é a tensão de aceleração. A equação da reta é $\lambda = 1{,}226V_0^{-1/2}$ nm, o que confirma a relação $\lambda = h(2mE)^{-1/2}$. Davisson se referiu a estes dados na palestra que proferiu por ocasião da entrega do Prêmio Nobel. (×, medidas de difração; ⊗, medidas de difração particularmente confiáveis; □, medidas de difração para ângulos rasantes; ⊙, medidas de reflexão.) [*Fonte*: *Nobel Prize Lectures*: *Physics* (*Amsterdam and New York*: *Elsevier*, © *Nobel Foundation*, *1964*).]

A esta altura, convém chamar a atenção para um ponto sutil. Observe que o comprimento de onda da Equação 5-5 depende apenas de D, a distância interatômica, enquanto nossa demonstração da equação incluiu também a distância interplanar d. O fato de que a estrutura do cristal é realmente importante se torna evidente quando fazemos variar a energia, como nos experimentos usados para colher os dados que aparecem na Figura 5-5. A Equação 5-5 mostra que a mudança no valor de λ associada a uma mudança na energia das partículas significa apenas que o máximo de difração passa a ocorrer em outro valor de φ para o qual a Equação 5-5 é satisfeita. Entretanto, como podemos ver examinando a Figura 5-4, o valor de φ é determinado por α, um ângulo que depende da estrutura do cristal. Assim, se não existem planos cristalinos fazendo um ângulo $\alpha = \varphi/2$ com a superfície, colocar o detector em $\varphi = \text{sen}^{-1}(\lambda/D)$ não resulta em interferência construtiva e uma forte reflexão para este valor de λ, mesmo que a Equação 5-5 seja satisfeita. Este fato está ilustrado na Figura 5-6, que mostra uma série de gráficos polares (como o da Figura 5-3*a*) para elétrons com energias entre 36 eV e 68 eV. Como já vimos, existe uma forte reflexão em $\varphi = 50^\circ$ para $V_0 = 54$ V. Entretanto, a Equação 5-5, quando considerada isoladamente, nos levaria a esperar, por exemplo, uma forte reflexão em $\varphi = 64^\circ$ para $V_0 = 40$ V, que simplesmente não é observada.



Clinton J. Davisson (à esquerda) e Lester H. Germer no Bell Laboratories, onde foi observada pela primeira vez a difração de elétrons. [*Bell Telephone Laboratories, Inc.*]

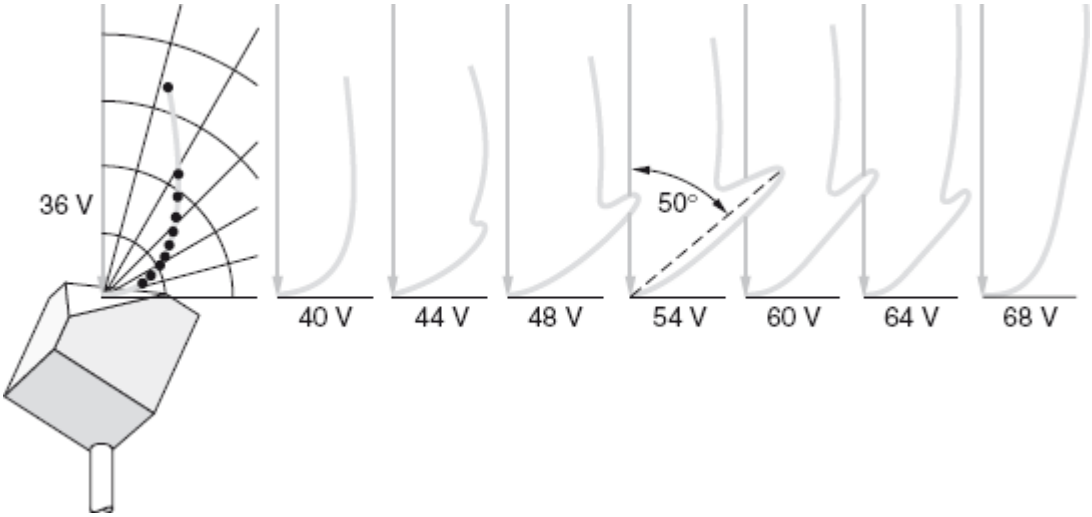


FIGURA 5-6 Gráficos polares mostrando os resultados obtidos por Davisson e Germer para tensões de aceleração dos elétrons entre 36 V e 68 V. Observe que o pico em $\varphi = 50^{o}$ atinge o máximo de intensidade para $V_0 = 54$ V.

Para demonstrar a influência das camadas atômicas internas sobre a difração, Davisson e Germer mantiveram fixo o ângulo φ do detector e variaram a tensão em vez de procurarem o ângulo correto para um dado valor de λ. Escrevendo a Equação 5-5 na forma

$$\lambda = \frac{D \operatorname{sen} \varphi}{n} = \frac{D \operatorname{sen} (2\alpha)}{n} \qquad \textbf{5-6}$$

A figura de difração formada pelas ondas de matéria de elétrons de alta energia espalhadas por núcleos é usada para determinar o raio e a distribuição interna de carga dos núcleos (veja o Capítulo 11).

e observando que $\lambda \propto V_0^{-1/2}$, um gráfico da intensidade em função de $V_0^{-1/2}$ para um dado ângulo φ deve apresentar (1) uma série de picos igualmente espaçados, correspondentes a valores sucessivos do número inteiro n, se existirem planos cristalinos fazendo um ângulo $\alpha = \varphi/2$ com a superfície; (2) nenhum pico de difração se não existirem planos cristalinos fazendo um ângulo $\varphi/2$ com a superfície. A variação da intensidade com o inverso do comprimento de onda observada pelos dois pesquisadores correspondeu às previsões teóricas dentro de uma margem de erro de ±1%. A Figura 5-7 mostra os resultados para $\varphi = 50°$. Davisson e Germer mostraram, portanto, de forma concludente, que partículas com massa de repouso diferente de zero, movendo-se com velocidade $v << c$, apresentam propriedades ondulatórias, como de Broglie havia previsto.

Davisson descreveu da seguinte forma a relação entre as previsões de de Broglie e os experimentos realizados por ele e Germer:

Talvez nenhuma ideia na física tenha evoluído tão rapidamente quanto esta. O próprio de Broglie, naturalmente, estava na vanguarda deste empreendimento, mas as principais contribuições se deveram a Schrödinger, mais velho e experiente. Seria ótimo poder dizer aos senhores que, logo que a sugestão de Elsasser se tornou pública, foram iniciados experimentos em Nova York que culminaram com a demonstração da difração dos elétrons... melhor ainda se eu pudesse dizer que o trabalho começou um dia depois que exemplares da tese de de Broglie chegaram à América. A verdadeira história envolve mais sorte e menos perspicácia... Foi descoberto, puramente por acidente, que a intensidade do espalhamento elástico [de elétrons] varia com a orientação do cristal responsável pelo espalhamento. Isso motivou, é claro, uma investigação do espalhamento elástico por monocristais de orientação conhecida... Assim, o experimento de Nova York não era visto, no início, como um teste da teoria ondulatória. Apenas no verão de 1926, depois que discuti a investigação na Inglaterra com Richardson, Born, Franck e outros, é que ela assumiu este caráter.[7]

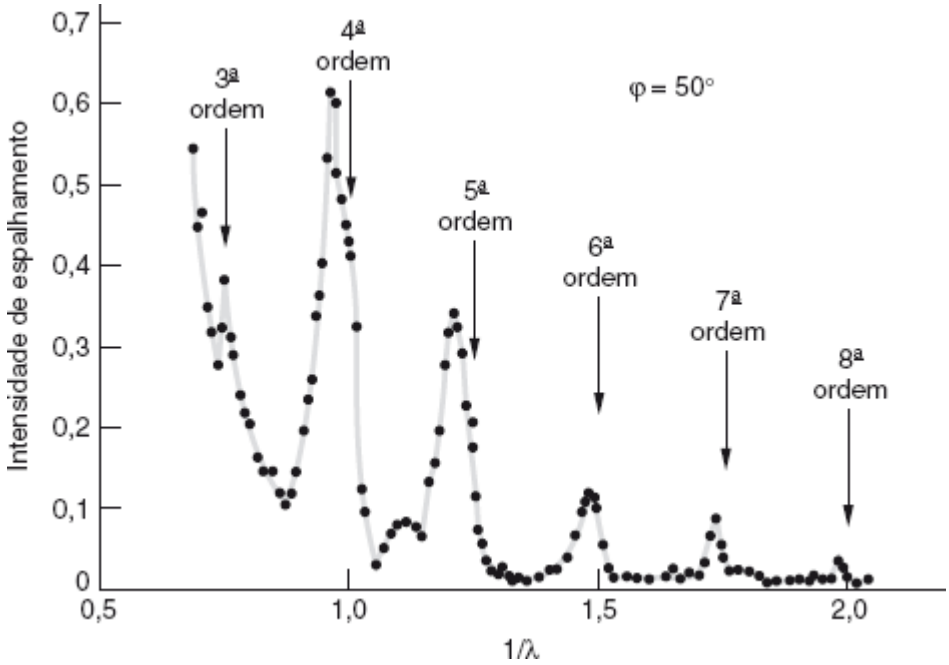


FIGURA 5-7 Variação da intensidade do feixe difratado com o inverso do comprimento de onda, para φ constante. Como existia um ângulo de 10° entre o feixe incidente e a normal, a refração fez com que as posições experimentais dos picos não coincidissem exatamente com as posições calculadas a partir da Equação 5-5, como está explicado na nota 6. [*Fonte*: C. J. Davisson e L. H. Germer, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **14**, 619 (1928).]

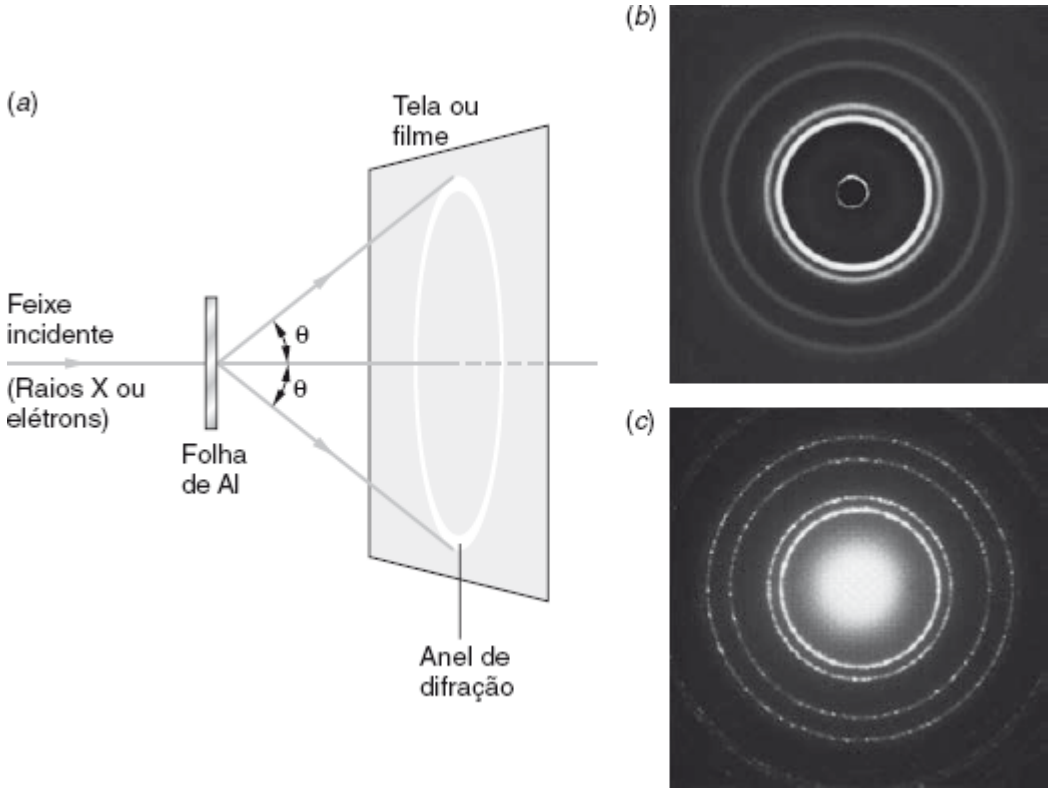


FIGURA 5-8 (*a*) Arranjo experimental usado para produzir uma figura de difração com um alvo de alumínio policristalino. (*b*) Figura de difração produzida por raios X com um comprimento de onda de 0,071 nm. (*c*) Figura de difração produzida por elétrons com uma energia de 600 eV, o que corresponde a um comprimento de onda de aproximadamente 0,05 nm. A figura foi ampliada 1,6 vez para poder ser comparada diretamente com (*b*). [*Cortesia de Film Studio, Education Development Center*.]

Uma demonstração das propriedades ondulatórias de elétrons relativísticos foi feita no mesmo ano por G. P. Thomson, que observou a passagem de elétrons com energias na faixa de 10 a 40 keV por folhas metálicas delgadas. (G. P. Thomson, filho de J. J. Thomson, dividiu com Davisson o Prêmio Nobel de Física de 1937.) O arranjo experimental (Figura 5-8*a*) era semelhante ao usado para obter figuras de Laue usando raios X (veja a Figura 3-11). Como a folha de metal possui muitos cristalitos (pequenos monocristais) orientados aleatoriamente, a figura de difração é constituída por anéis concêntricos. Quando um cristalito faz um ângulo θ com o feixe incidente e θ satisfaz à condição de Bragg, o feixe difratado passa por um máximo de intensidade em um ângulo θ (no sentido oposto) igual ao ângulo de incidência; assim, a intensidade do feixe difratado é máxima

para um ângulo 2θ em relação ao feixe incidente. As Figuras 5-8*b* e *c* ilustram a semelhança entre as figuras de difração produzidas por raios X e elétrons.

Difração de Outras Partículas

As propriedades ondulatórias de átomos e moléculas neutros foram demonstradas pela primeira vez em 1930 por O. Stern e I. Estermann, que usaram um cristal de fluoreto de lítio para difratar feixes de átomos de hélio e moléculas de hidrogênio. Como essas partículas são neutras, não é possível acelerá-las usando campos elétricos; a energia dos átomos e moléculas é a da agitação térmica, cerca de 0,03 eV, o que, de acordo com a Equação 5-2, corresponde a um comprimento de onda de de Broglie da ordem de 0,10 nm. Devido à baixa energia, a profundidade de penetração é menor que no experimento de Davisson e Germer e as partículas são difratadas apenas pelos átomos da superfície do cristal. A Figura 5-9 ilustra a geometria do processo de espalhamento, o arranjo experimental e os resultados. A Figura 5-9*c* mostra claramente a difração dos átomos de He.

As figuras de difração formadas pelas ondas de matéria de átomos de hélio são usadas para estudar impurezas e defeitos na superfície de cristais. Por ser um gás nobre, o hélio não reage quimicamente com as moléculas da superfície nem "adere" à superfície.

Mais recentemente, a difração de outros átomos, de prótons e de nêutrons também foi observada (Figuras 5-10, 5-11 e 5-12). Em todos os casos, o comprimento de onda medido estava de acordo com a previsão de de Broglie. Não resta dúvida, portanto, de que, assim como as ondas eletromagnéticas apresentam propriedades corpusculares, todas as partículas de matéria apresentam propriedades ondulatórias.

Uma Forma Simples de Determinar o Comprimento de Onda de de Broglie

Em muitos problemas práticos, existe interesse em determinar o comprimento de onda de de Broglie associado a uma partícula cuja energia cinética é conhecida. No caso de baixas energias, ou seja, de partículas não relativísticas, a equação que leva à Equação 5-4 pode ser escrita em termos da energia cinética clássica:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} \qquad \textbf{5-7}$$

Para determinar uma expressão equivalente que se aplique tanto a partículas relativísticas como não relativísticas, começamos pela equação relativística que relaciona a energia total ao momento:

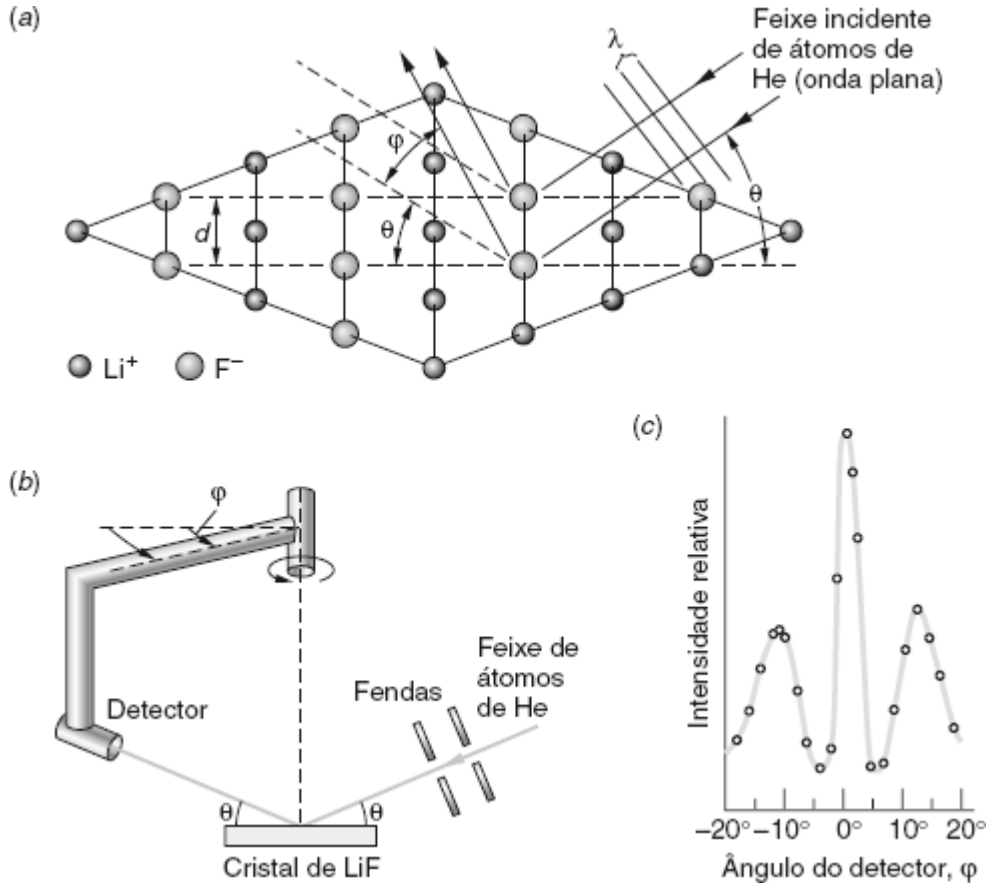


FIGURA 5-9 (*a*) Átomos de He incidem em um cristal de LiF fazendo um ângulo θ com a superfície (θ = 18,5º, no experimento de Estermann e Stern). O feixe refletido também faz um ângulo θ com a superfície, mas é difratado de um ângulo azimutal φ em relação a um eixo perpendicular à superfície. (*b*) O detector observa a superfície de um ângulo θ fixo, mas o ângulo φ pode ser variado. (*c*) No ângulo φ para o qual a diferença de percurso (d sen φ) entre "raios" vizinhos é $n\lambda$, é observada interferência construtiva, ou seja, ocorre um pico de difração. Existem dois picos para $n = 1$, um de cada lado do pico para $n = 0$.

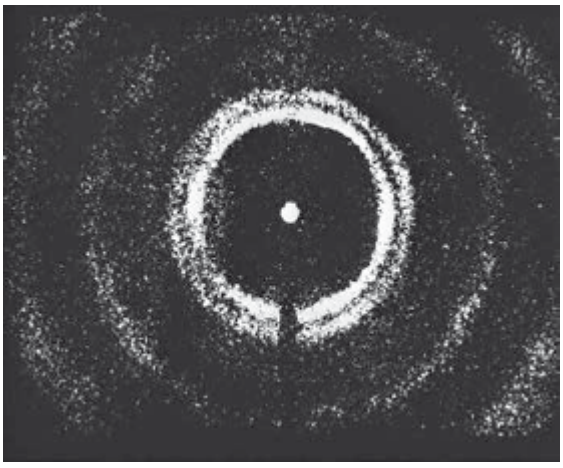


FIGURA 5-10 Figura de difração produzida por nêutrons com uma energia de 0,0568 eV (o que corresponde a um comprimento de onda de 0,120 nm) incidindo em um alvo de cobre policristalino. Observe a semelhança entre as figuras produzidas por raios X, elétrons e nêutrons. [*Cortesia de C.G. Shull*.]

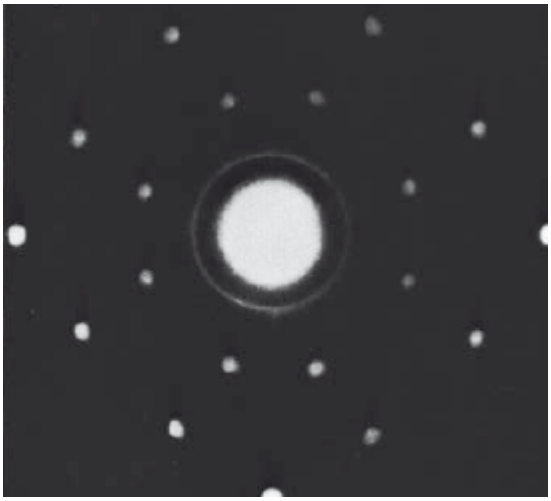


FIGURA 5-11 Figura de Laue produzida por nêutrons incidindo em um alvo de NaCl. Compare com a figura de Laue produzida por raios X (Figura 3-11). [*Cortesia de E.O. Wollan e C.G. Shull*.]

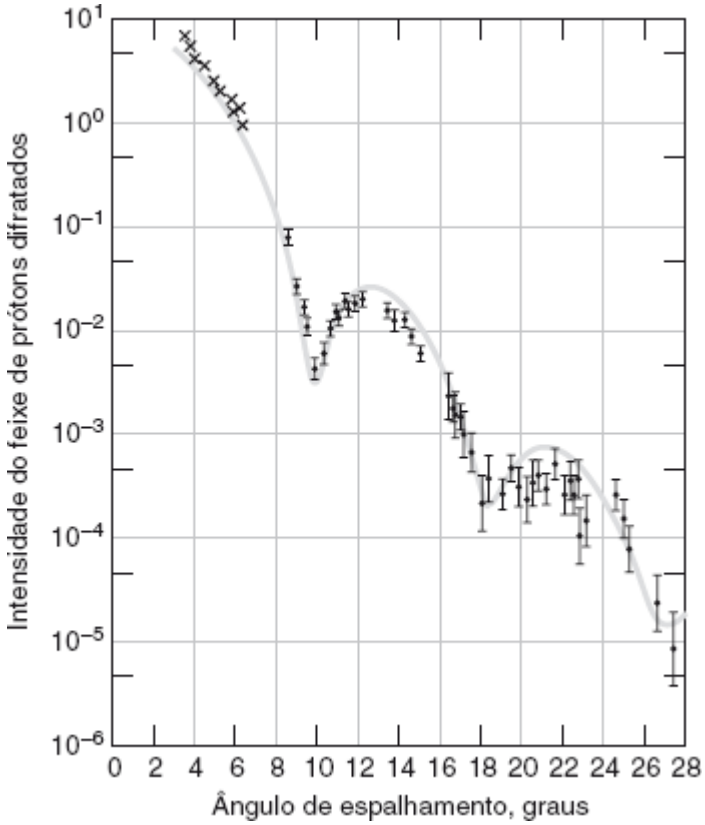


FIGURA 5-12 Os núcleos se comportam como obstáculos com dimensões da ordem de 10^{-15} m. Este gráfico mostra o espalhamento de prótons de 1 GeV incidindo em núcleos de oxigênio, que se parece com a difração produzida por uma fenda.

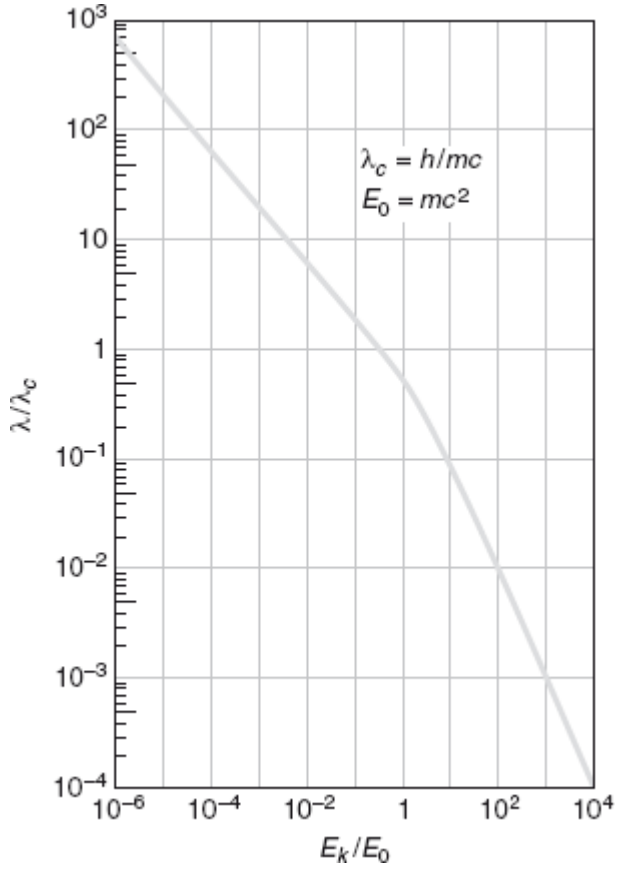


FIGURA 5-13 Relação entre o comprimento de onda λ e o comprimento de onda de Compton λ_c, para uma partícula de massa m, em função da razão entre a energia cinética E_k e a energia de repouso $E_0 = mc^2$. No caso de prótons e nêutrons, E_0 = 0,938 GeV e λ_c = 1,32 fm. No caso de elétrons, E_0 = 0,511 MeV e λ_c = 0,00234 nm.

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad \textbf{2-31}$$

Fazendo $mc^2 = E_0$, em que E_0 é a energia de repouso da partícula, temos:

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^2 \qquad \textbf{5-8}$$

Como a energia total é dada por $E = E_0 + E_k$, a Equação 5-8 pode ser escrita na forma

$$(E_0 + E_k)^2 = (pc)^2 + E_0^2$$

Explicitando p, obtemos:

$$p = \frac{(2E_0E_k + E_k^2)^{1/2}}{c}$$

que, combinada com a Equação 5-2, resulta em

$$\lambda = \frac{hc}{(2E_0E_k + E_k^2)^{1/2}} \qquad \textbf{5-9}$$

A Equação 5-9 pode ser escrita em uma forma particularmente útil, aplicável a qualquer partícula com qualquer energia, dividindo o numerador e o denominador pela energia de repouso E_0:

$$\lambda = \frac{hc/mc^2}{(2E_0E_k + E_k^2)^{1/2}/E_0} = \frac{h/mc}{[2(E_k/E_0) + (E_k/E_0)^2]^{1/2}}$$

Como h/mc é o comprimento de onda de Compton λ_c da partícula (veja a Seção 3-4), temos:

$$\lambda/\lambda_c = \frac{1}{[2(E_k/E_0) + (E_k/E_0)^2]^{1/2}} \qquad \textbf{5-10}$$

A Figura 5-13 mostra um gráfico log-log de λ/λ_c em função de E_k/E_0. Como se pode ver, o gráfico apresenta duas regiões de inclinação quase constante, uma para $E_k << mc^2$ e a outra para $E_k >> mc^2$, ligadas por uma parte curva, localizada aproximadamente no intervalo $0{,}1 < E_k/E_0 < 10$. O exemplo a seguir ilustra o uso da Figura 5-13.

EXEMPLO 5-3 **Comprimento de Onda de de Broglie de um Próton de Alta Energia** Um detector a bordo de um satélite observa um próton proveniente do espaço com uma energia cinética de 150 GeV. Qual é o comprimento de onda do próton, de acordo com a Figura 5-13?

SOLUÇÃO

Como a massa do próton é $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg e a energia de repouso é $mc^2 = 0{,}938$ GeV, a razão E_k/E_0 é

$$\frac{E_k}{E_0} = \frac{150\ \text{GeV}}{0{,}938\ \text{GeV}} = 160$$

De acordo com a curva da Figura 5-13, este valor corresponde a $\lambda/\lambda_c \approx 6 \times 10^{-3}$. O comprimento de onda de Compton do próton é dado por

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})\,(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})}$$
$$= 1{,}32 \times 10^{-15}\ \text{m}$$

e, portanto, o comprimento de onda da partícula é

$$\lambda = (6 \times 10^{-3})(1{,}32 \times 10^{-15}\ \text{m}) = 7{,}9 \times 10^{-18}\ \text{m}$$
$$= 7{,}9 \times 10^{-3}\ \text{fm}$$

Exercícios

1. Como a energia dos elétrons usados por Davisson e Germer não era muito grande, a profundidade de penetração correspondia a apenas alguns planos atômicos; é de certo modo surpreendente que os efeitos das camadas internas apareçam tão claramente nos resultados experimentais. Que aspecto da difração é mais afetado pelo fato de a profundidade de penetração ser relativamente pequena?
2. Como seria possível medir a frequência das ondas de de Broglie?
3. Por que não é razoável fazer estudos cristalográficos usando prótons em vez de elétrons ou raios X?

5-3 Pacotes de Ondas

Em qualquer discussão a respeito de ondas, sempre surge a questão: "O que está ondulando?" No caso de algumas ondas, a resposta é óbvia: nas ondas do mar, é a água que "ondula"; nas ondas sonoras, são as moléculas do ar; no caso da luz, são os campos elétrico e magnético, **E** e **B**. E no caso das ondas de matéria? Para as ondas de matéria, como para as ondas luminosas, não existe "éter". Como será explicado nesta seção e na seguinte, no caso das ondas de matéria o que está ondulando é a *probabilidade de observar a partícula*.

As ondas clássicas são soluções da *equação de onda* clássica

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \textbf{5-11}$$

Uma classe importante de ondas clássicas são as *ondas harmônicas* de amplitude y_0, frequência f e período T, que se propagam no sentido positivo do eixo x de acordo com a equação

$$y(x, t) = y_0 \cos(kx - vt)$$
$$= y_0 \cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) = y_0 \cos\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \qquad \textbf{5-12}$$

onde a *frequência angular* ω e o *número de onda*[8] *k* são definidos através das equações

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad \textbf{5-13}a$$

e

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \textbf{5-13}b$$

e a velocidade da onda, conhecida como *velocidade de fase* e representada pelo símbolo v_p, é dada por

$$v_p = f\lambda \qquad \textbf{5-14}$$

Um dos fenômenos ondulatórios mais comuns é o pulso, que não pode ser descrito por uma única onda harmônica. Uma deformação isolada que se propaga ao longo de uma corda (Figura 5-14*a*), o ruído de uma explosão e o clarão causado pela abertura e fechamento de um obturador situado à frente de uma fonte luminosa são exemplos de pulsos. A principal característica de um pulso é o fato de se tratar de um fenômeno localizado no tempo e no espaço. Uma onda harmônica isolada não é localizada nem no tempo nem no espaço; entretanto, um pulso pode ser representado por um grupo de funções harmônicas de diferentes frequências e comprimentos de onda. Um grupo desse tipo é conhecido como *pacote de ondas* (veja a Figura 5-14*b*). A matemática usada para representar pulsos de forma arbitrária como somas de funções senoidais envolve as chamadas séries e integrais de Fourier. Vamos ilustrar os fenômenos associados aos pacotes de ondas considerando alguns exemplos simples e um tanto artificiais e discutindo qualitativamente as propriedades gerais desses pacotes. O estudo dos pacotes de ondas é importante para a física das partículas elementares porque a descrição ondulatória de uma partícula deve incluir a importante propriedade da localização.

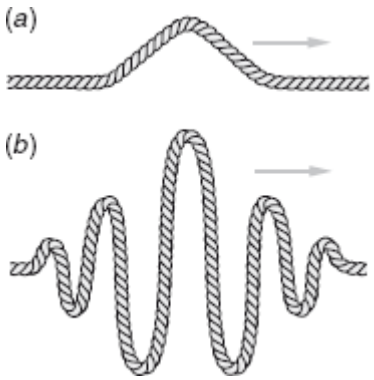


FIGURA 5-14 (*a*) Uma deformação isolada que se propaga ao longo de uma corda é um exemplo de pulso. O pulso tem um começo e um fim, ou seja, é um fenômeno localizado, ao contrário das ondas harmônicas, que se estendem indefinidamente no espaço e no tempo. (*b*) Um pacote de ondas formado pela superposição de ondas harmônicas.

Considere um pacote constituído por apenas duas ondas de mesma amplitude e frequências muito próximas. Este tipo de pacote é responsável pelo fenômeno conhecido como batimento e é discutido em muitos livros de física elementar. As grandezas *k*, ω e v estão relacionadas pelas Equações 5-13 e 5-14. Vamos chamar de k_1 e k_2 os números de onda das duas ondas, de ω_1 e ω_2 as frequências angulares e de v_1 e v_2 as velocidades. A soma das duas ondas é dada pela equação

$$y(x, t) = y_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + y_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

que, através de transformações trigonométricas, pode ser escrita na forma

$$y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

onde $\Delta k = k_2 - k_1$ e $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. Como os números de onda e as frequências são muito próximos, os termos $(k_1 + k_2)/2$ e $(\omega_1 + \omega_2)/2$ podem ser substituídos por um número de onda médio $\bar{k}$ e uma frequência angular média $\bar{\omega}$, o que nos dá

$$y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \qquad \textbf{5-15}$$

A Figura 5-15 mostra um gráfico de $y(x, t)$ em função de x em um dado instante t_0. A curva tracejada é a envoltória da soma das duas ondas, dada pelo primeiro termo em cosseno da Equação 5-15. A onda no interior da envoltória se propaga com

velocidade ω/k, a velocidade de fase v_p associada ao segundo termo em cosseno. Escrevendo o primeiro termo (responsável pela modulação de amplitude) na forma $\cos\{\Delta k[x - (\Delta\omega/\Delta k)t]/2\}$, vemos que a envoltória se propaga com velocidade $\Delta\omega/\Delta k$. A velocidade da envoltória é denominada *velocidade de grupo* e representada pelo símbolo v_g.

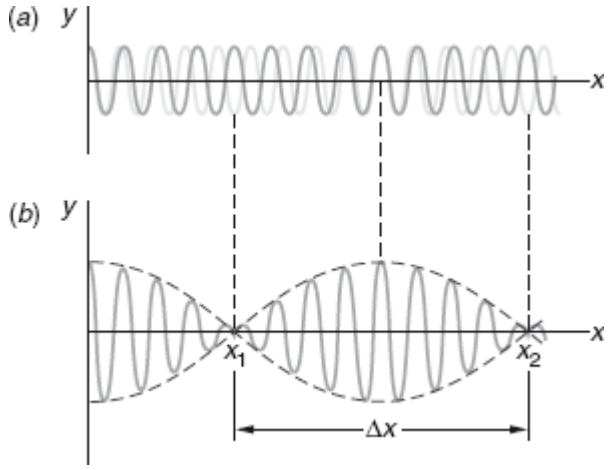


FIGURA 5-15 Duas ondas de comprimentos de onda e frequências ligeiramente diferentes produzem batimentos. (*a*) Amplitudes $y(x)$ das duas ondas em um dado instante de tempo t_0. As ondas estão em fase na origem; entretanto, por causa da diferença nos comprimentos de onda, ficam alternadamente em fase e fora de fase à medida que x aumenta. (*b*) Soma das duas ondas. A largura da envoltória, Δx, é inversamente proporcional à diferença entre os números de onda, Δk, em que $k = 2\pi/\lambda$. Gráficos semelhantes são obtidos quando as amplitudes y são plotadas em função do tempo t em um ponto fixo x. Nesse caso, a largura da envoltória, Δt, é inversamente proporcional à diferença entre as frequências, $\Delta\omega$.

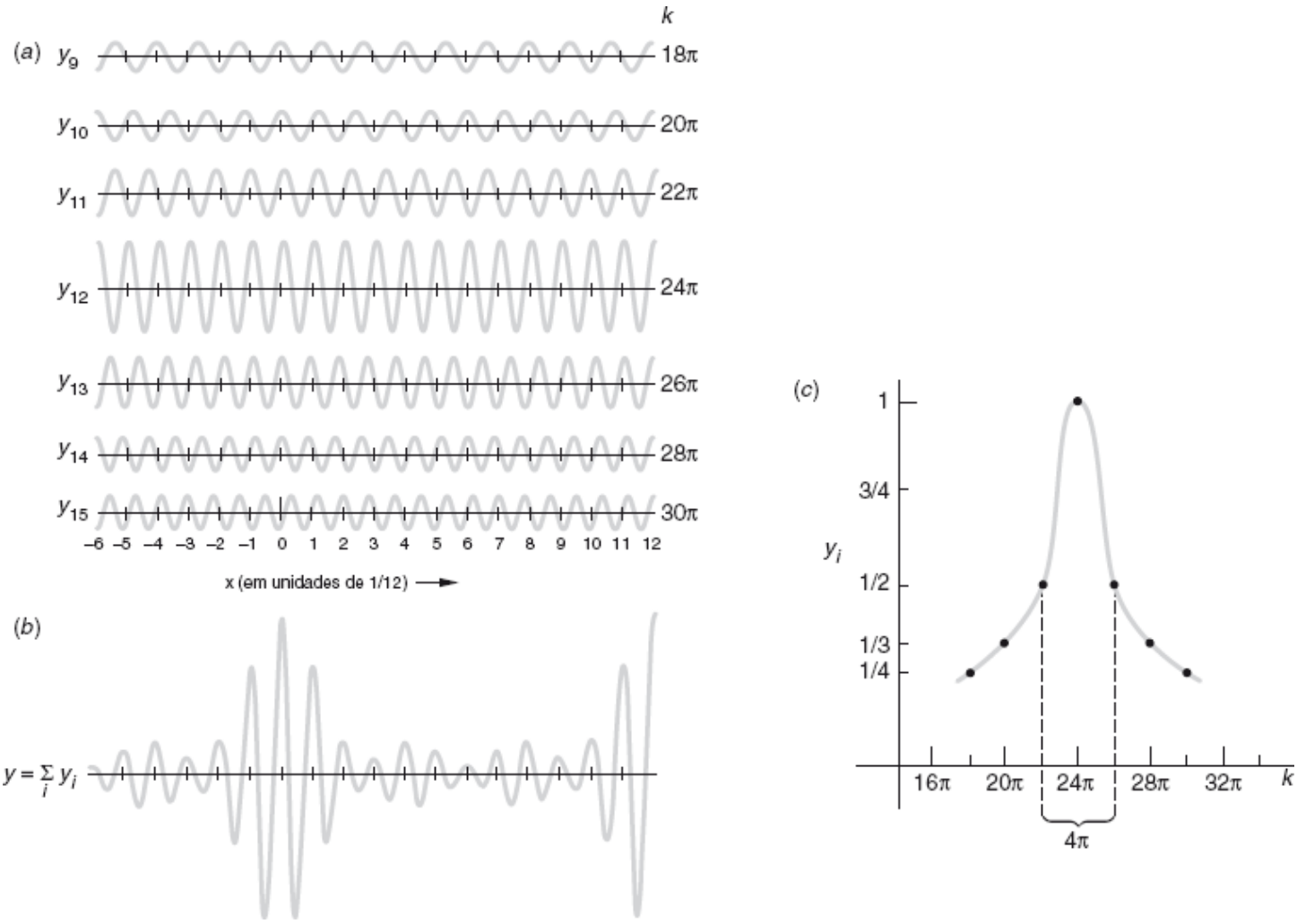


FIGURA 5-16 (*a*) Sete senoides $y_k(x, t) = y_{0i}\cos(kx - \omega t)$ com números de onda igualmente espaçados de $k = 18\pi$ a $k = 30\pi$ e amplitudes 1/4, 1/3, 1/2, 1, 1/2, 1/3 e 1/4. (*b*) A soma $y(x, 0) = \sum_{i=9}^{15} y_i(x, 0)$ é máxima em $x = 0, \pm1, \pm2 \ldots$ (*c*) Amplitudes das senoides, y_i, em função do número de onda k.

Podemos construir um pacote de ondas mais genérico se, em vez de somar apenas duas ondas senoidais, como na Figura 5-15, somarmos um número maior de ondas com comprimentos de onda ligeiramente diferentes e amplitudes diferentes. A Figura 5-16*a* mostra, por exemplo, no instante $t = 0$, a superposição de sete cossenos com comprimentos de onda de $\lambda_9 = 1/9$ a $\lambda_{15} = 1/15$ (números de onda de $k_9 = 18\pi$ a $k_{15} = 30\pi$) e amplitudes 1/4, 1/3, 1/2, 1, 1/2, 1/3 e 1/4. As ondas estão todas em fase em $x = 0$ e estão novamente em fase em $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, … A onda resultante $y(x, 0) = \sum_{i=9}^{15} y_i(x, 0)$ tem amplitude máxima para esses valores de x e outras amplitudes para outros valores de x, dependendo da fase relativa das ondas (veja a Figura 5-16*b*). Se superpusermos um número infinito de ondas no mesmo intervalo de comprimentos de onda e comprimentos de onda da Figura 5-16*a*, mas com o número de onda e a amplitude das ondas componentes variando continuamente, como na Figura 5-16*c*, o grupo central em torno de $x = 0$ será praticamente o mesmo da Figura 5-16*b*, mas os grupos secundários deixarão de existir, pois as ondas se cancelarão mutuamente. Assim, teremos formado um pacote de ondas que se propaga ao longo do eixo x com uma velocidade de grupo $v_g = d\omega/dk$. A matemática necessária para demonstrar esse fato envolve o uso da integral de Fourier, que é o tema de uma Revisão de Conceitos Clássicos.



As velocidades de fase das ondas que formam o pacote são dadas pela Equação 5-14:

$$v_p = f\lambda = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{k}\right) = \frac{\omega}{k}$$

Escrevendo essa relação na forma $\omega = kv_p$ e derivando em relação a k, obtemos a seguinte expressão para a velocidade de grupo:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p + k\frac{dv_p}{dk} \qquad \textbf{5-16}$$

Se a velocidade de fase é a mesma para todas as frequências, $dv/dk = 0$ e a velocidade de grupo é igual à velocidade de fase. Um meio no qual a velocidade de fase é a mesma para todas as frequências é chamado de *não dispersivo*. Alguns exemplos de meios não dispersivos são uma corda perfeitamente flexível para ondas mecânicas, o ar para ondas sonoras e o vácuo para ondas eletromagnéticas. Uma característica importante de um meio não dispersivo é que, como todas as ondas harmônicas que formam um pacote de ondas se movem com a mesma velocidade, o pacote se propaga sem mudar de forma. Quando a velocidade de fase é diferente para diferentes frequências, o pulso muda de forma enquanto se propaga. Nesse caso, a velocidade de fase e a velocidade de grupo são diferentes e dizemos que o meio é *dispersivo*. Alguns exemplos de meios dispersivos são a água para as ondas do mar, uma corda que não é perfeitamente flexível para as ondas mecânicas e um meio transparente como o vidro ou a água para as ondas luminosas. Normalmente, é a velocidade de grupo que é vista pelos observadores.

Relações de Indeterminação Clássicas

Note que a largura[9] Δx do pacote de ondas $y(x,0)$ da Figura 5-16*b* é ligeiramente maior que 1/12, enquanto a largura do gráfico da amplitude das ondas em função de k é $\Delta k = 4\pi$, ou seja, um pouco maior que 12 (Figura 5-16*c*), de modo que

$$\Delta k\,\Delta x \sim 1 \qquad \textbf{5-17}$$

Após uma análise semelhante, concluímos que

$$\Delta\omega\,\Delta t \sim 1 \qquad \textbf{5-18}$$

Os intervalos de números de onda e frequências das ondas harmônicas necessárias para formar um pacote de ondas dependem da extensão e duração do pulso. Se a extensão do pulso Δx é pequena, o pacote de ondas deve ocupar um grande intervalo Δk de números de onda. Da mesma forma, se a duração Δt do pulso é pequena, o pacote deve ocupar um grande intervalo de frequências $\Delta\omega$. As Equações 5-17 e 5-18 foram escritas com o sinal de aproximação porque o valor exato dos produtos $\Delta x\Delta k$ e $\Delta t\Delta\omega$ depende da forma como os intervalos são definidos e da forma detalhada do pacote de ondas. A Equação 5-18 é conhecida como relação *tempo de resposta-banda passante* para expressar o fato de que um elemento de um circuito (um amplificador, por exemplo) deve ter uma grande banda passante ($\Delta\omega$ grande) para responder a sinais de curta duração (Δt pequeno) e vice-versa.

As relações de indeterminação clássicas são usadas para definir os intervalos de frequência a que devem responder equipamentos eletrônicos de todos os tipos, de telefones celulares a supercomputadores.

Existe uma pequena variação da Equação 5-17 que também é usada para interpretar a relação entre Δx e Δk. Diferenciando o número de onda na Equação 5-13*b*, obtemos a seguinte equação:

$$dk = \frac{-2\pi d\lambda}{\lambda^2} \qquad \textbf{5-19}$$

Substituindo as diferenciais por pequenos intervalos e tomando o valor absoluto de ambos os membros, temos:

$$\Delta k = \frac{2\pi \Delta\lambda}{\lambda^2}$$

que, quando substituída na Equação 5-17, nos dá

$$\Delta x \, \Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi} \qquad \textbf{5-20}$$

De acordo com a Equação 5-20, o produto da extensão de uma onda clássica, Δx, pela indeterminação (ou "erro") na medida do comprimento de onda é sempre da ordem de $\lambda^2/2\pi$. Os exemplos a seguir ilustram o significado das Equações 5-17 e 5-18, conhecidas como *relações de indeterminação clássicas*, e da Equação 5-20.

EXEMPLO 5-4 **O Valor de Δλ para as Ondas do Mar** Você está no meio de um cais de 20 m de comprimento e observa que, em um certo instante, existem 15 cristas de onda entre as duas extremidades do cais. Determine a margem de erro para o comprimento de onda calculado com base nesta informação.

SOLUÇÃO

1. A indeterminação $\Delta\lambda$ na medida do comprimento de onda é dada pela Equação 5-20:

$$\Delta x \, \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi}$$

2. O comprimento de onda λ é

$$\lambda = \frac{20 \text{ m}}{15 \text{ cristas}} = 1{,}3 \text{ m}$$

3. A extensão total das ondas é

$$\Delta x = 20 \text{ m}$$

4. Explicitando $\Delta\lambda$ na Equação 5-20 e substituindo λ e Δx por seus valores, obtemos:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi \Delta x} = \frac{(1{,}3 \text{ m})^2}{2\pi \times 20 \text{ m}}$$
$$= 0{,}013 \text{ m}$$
$$\Delta\lambda \approx 0{,}01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

Observação: *Esta é a margem mínima de erro. Qualquer imprecisão na contagem do número de cristas da onda e na medição do comprimento do cais aumenta a indeterminação do valor de* λ.

EXEMPLO 5-5 **Controle de Frequência** A frequência da tensão alternada produzida por uma usina de energia elétrica é mantida em 60,00 Hz. A frequência é mostrada em um painel digital na sala de controle. Quais devem ser o intervalo de medida da frequência e a frequência de atualização do painel para que o erro de leitura não exceda 0,01 Hz?

SOLUÇÃO

Como $\omega = 2\pi f$, $\Delta\omega = 2\pi\Delta f = 2\pi(0{,}01)$ rad/s e, portanto,

$$\Delta t \sim 1/\Delta\omega = 1/2\pi(0{,}01)$$
$$\Delta t \sim 16 \text{ s}$$

Assim, para que o erro de leitura não exceda 0,01 Hz, a frequência deve ser medida durante pelo menos 16 s e o painel não deve ser atualizado mais do que uma vez a cada 16 s.

Exercícios

4. Qual é o parâmetro mais importante para as telecomunicações, a velocidade de grupo ou a velocidade de fase?
5. Quais são os valores de Δx e Δk para uma onda harmônica, isto é, uma onda com uma frequência e um comprimento de onda únicos?

Pacotes de Ondas de Matéria

No caso das ondas de matéria, a grandeza análoga ao deslocamento $y(x, t)$ para as ondas mecânicas, à pressão $P(x, t)$ para as ondas sonoras e ao campo elétrico $\xi(x, t)$ para as ondas eletromagnéticas é a *função de onda*, representada pelo símbolo $\Psi(x, t)$. É a essa função que vamos associar a probabilidade de encontrarmos a partícula e, como já antecipamos, o que "ondula", no caso, é a probabilidade. Considere, por exemplo, uma onda associada a um elétron com uma única frequência e um único comprimento de onda. Uma onda desse tipo pode ser representada de várias formas diferentes, exatamente como uma onda clássica: $\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, $\Psi(x,t) = A\,\text{sen}(kx - \omega t)$ ou $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$.

A velocidade de fase desta onda é dada por

$$v_p = f\lambda = (E/h)(h/p) = E/p$$

onde usamos as relações de de Broglie para a frequência e o comprimento de onda. No caso de uma partícula que esteja se movendo no espaço vazio, longe de outras partículas, a única energia é a energia cinética, que, no caso não relativístico, é dada por

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

de modo que a velocidade de fase é

$$v_p = E/p = (p^2/2m)/p = p/2m = v/2$$

ou seja, a velocidade de fase é igual à metade da velocidade do elétron. Vemos, portanto, que a velocidade da onda de matéria associada a uma partícula *não é igual* à velocidade da partícula. Além disso, uma onda de uma única frequência e comprimento de onda se estende a todo o espaço, o que torna difícil associá-la a uma partícula. Na verdade, para representar adequadamente uma partícula como o elétron, uma onda de matéria deve ser localizada, ou seja, $\Psi(x,t)$ deve ser um pacote de ondas constituído por ondas com vários números de onda k e frequências ω. É o pacote de ondas $\Psi(x,t)$ que esperamos que se mova com uma velocidade (a velocidade de grupo) igual à da partícula, o que, como veremos daqui a pouco, realmente acontece. Ao observar a partícula, esperamos encontrá-la em algum ponto do pacote de ondas $\Psi(x,t)$; a localização exata será assunto para a próxima seção.

Para observar a diferença entre a velocidade de fase e a velocidade de grupo, produza uma onda em uma piscina (ou em uma banheira) e observe que as ondulações que formam a onda parecem "passar por cima" da crista da onda com duas vezes a velocidade da onda.

Para ilustrar a igualdade entre a velocidade de grupo v_g das ondas de matéria e a velocidade v da partícula, é conveniente expressar as relações de de Broglie em uma forma um pouco diferente. Escrevendo a Equação 5-1 como

$$E = hf = h\omega/2\pi \qquad \text{ou} \qquad E = \hbar\omega \qquad \textbf{5-21}$$

e a Equação 5-2 como

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi/k} = \frac{hk}{2\pi} \qquad \text{ou} \qquad E = \hbar K \qquad \textbf{5-22}$$

a velocidade de grupo é dada por

$$v_g = d\omega/dk = (dE/\hbar)/(dp/\hbar) = dE/dp$$

Usando novamente a expressão não relativística $E = p^2/2m$, obtemos:

$$v_g = dE/dp = p/m = v$$

e, portanto, *o pacote de ondas* $\Psi(x,t)$ se *propaga com a velocidade do elétron*. Esta foi uma das razões pelas quais de Broglie optou pelas Equações 5-1 e 5-2. (Na verdade, de Broglie usou as expressões relativísticas para a energia e momento, que também levam a uma igualdade entre a velocidade de grupo e a velocidade da partícula.)

5-4 Interpretação Probabilística da Função de Onda

Vamos examinar mais de perto a relação entre a função de onda $\Psi(x, t)$ e a localização do elétron. Antes, porém, é conveniente discutir o caso da luz. A equação de onda para a luz é a Equação 5-11 com $y = \xi$, o campo elétrico, como função de onda. A energia por unidade de volume de uma onda luminosa é proporcional a ξ^2, mas a energia de uma onda luminosa é quantizada em unidades de hf para cada fóton. Esperamos, portanto, que o número de fótons por unidade de volume seja proporcional a ξ^2, uma relação que foi proposta pela primeira vez por Einstein.

Considere o famoso experimento de dupla fenda (Figura 5-17). A figura que aparece na tela depende da interferência das ondas que passam pelas fendas. Em um ponto da tela no qual a onda que passa por uma das fendas está defasada de 180° em relação à onda que passa pela outra fenda, o campo elétrico resultante é nulo, a energia luminosa também e o ponto não é iluminado. Mesmo que a intensidade luminosa seja muito pequena, podemos observar a figura de interferência se substituirmos a tela comum por um arranjo bidimensional de detectores de fótons (como, por exemplo, os de uma câmara digital) e esperarmos um tempo suficiente.

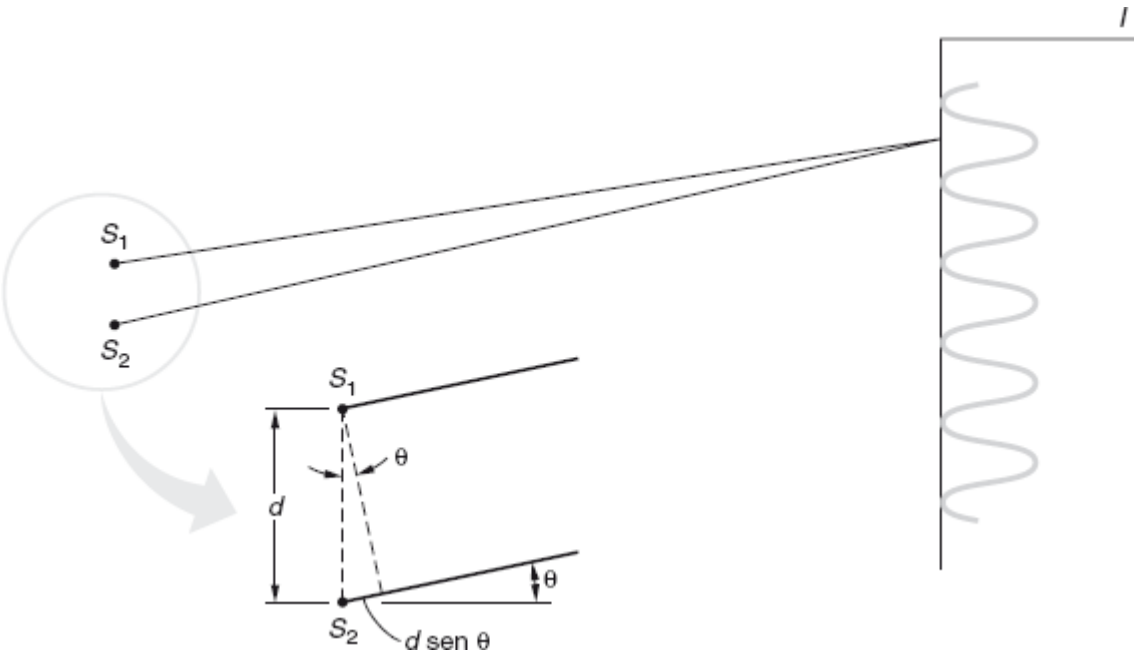


FIGURA 5-17 Figura de interferência produzida por duas fontes. Se as fontes são coerentes e estão em fase, as ondas interferem construtivamente nos pontos para os quais a diferença de percurso, d sen θ, é igual a um número inteiro de comprimentos de onda.

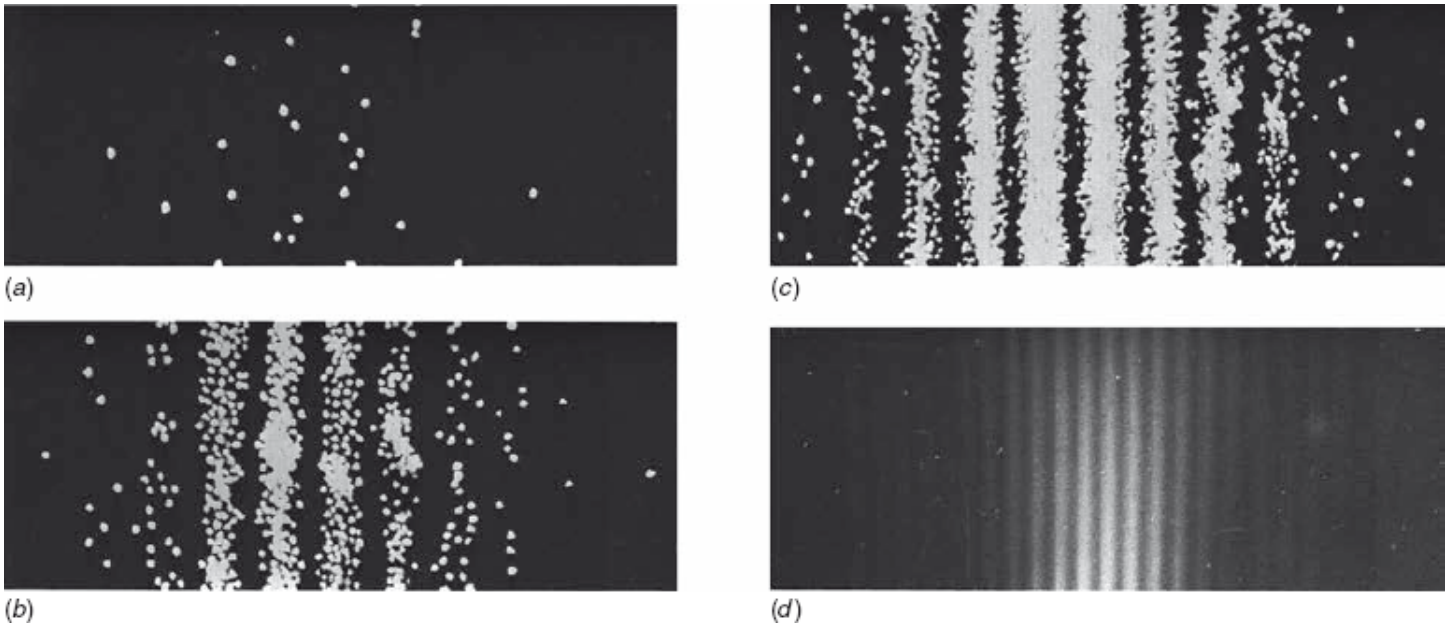


FIGURA 5-18 Formação da figura de interferência em um experimento de duas fendas. A fotografia (*d*) mostra a figura de interferência que se forma quando o filme fotográfico é exposto a milhões de elétrons. Se o experimento fosse realizado com fótons, a figura seria praticamente igual. Se o filme fosse observado em vários estágios, como depois de ser atingido por 28, 1.000 e 10.000 elétrons, as figuras seriam semelhantes às que aparecem em (*a*), (*b*) e (*c*), exceto pelo fato de que os pontos seriam muito menores que os que aparecem na figura. Observe que não existem pontos nas regiões onde estão os mínimos de interferência. A probabilidade de um ponto qualquer do filme ser exposto é determinada pela teoria ondulatória, independentemente do fato de serem usados elétrons ou fótons. [*Fonte*: (*a*), (*b*) e (*c*), E. R. Huggins, *Physics I*, copyright © by W. A. Benjamin, Inc., Menlo Park, California; (*d*), cortesia de C. Jonsson.]

A interação da luz com os detectores é um fenômeno quântico. Quando iluminamos os detectores por um tempo muito curto, usando uma fonte luminosa de baixa intensidade, não vemos simplesmente uma versão mais fraca da figura de interferência; em vez disso, podemos observar os "pontos" resultantes da detecção individual dos fótons (veja a Figura 5-18). Nos locais onde as ondas que passam pelas duas fendas interferem destrutivamente, não é observado nenhum ponto; nos locais onde as ondas interferem construtivamente, são observados muitos pontos. Quando, porém, a exposição é curta e a fonte luminosa é de baixa intensidade, flutuações aleatórias em relação aos resultados teóricos são claramente visíveis. Quando a exposição é suficientemente longa para que muitos fótons atinjam os detectores, as flutuações se cancelam e a natureza quântica da luz não pode ser observada. A figura de interferência depende apenas do número total de fótons que chegam aos detectores e não do tempo de exposição. *Mesmo quando a intensidade da fonte é tão baixa que não existe mais do que um fóton se propagando em um dado instante de tempo, a figura de interferência está de acordo com as previsões da teoria ondulatória.* No caso de baixas intensidades, podemos dizer que ξ^2 é proporcional à *probabilidade* de detectarmos um fóton em uma certa região do espaço. Nos pontos onde ξ^2 é nulo, nunca são observados fótons; nos pontos onde ξ^2 tem um valor elevado, são observados muitos fótons.

Não são apenas as ondas eletromagnéticas que produzem figuras de interferência; essas figuras também são produzidas por elétrons e outras partículas. Na teoria ondulatória dos elétrons, a onda de de Broglie de um *único* elétron é descrita por uma função de onda Ψ. A amplitude de Ψ em qualquer ponto está relacionada à probabilidade de que a partícula seja encontrada nesse ponto. Em analogia com a interpretação de ξ^2 no caso das ondas luminosas, *a grandeza* $|\Psi|^2$ *é proporcional à probabilidade de que um elétron seja encontrado em uma certa região do espaço, em que* $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$ é o produto da função Ψ pelo seu complexo conjugado. Em uma dimensão, $|\Psi|^2 dx$ é a probabilidade de que um elétron seja encontrado no intervalo dx.[10] (Veja a Figura 5-19.) Chamando essa probabilidade de $P(x)dx$, em que $P(x)$ é a função distribuição de probabilidade, temos:

$$P(x)dx = |\Psi|^2 dx \qquad \textbf{5-23}$$

No próximo capítulo, vamos discutir com mais detalhes a amplitude das ondas de matéria associadas a partículas e, em particular, o método matemático usado para calcular as amplitudes e probabilidades em várias situações. O fato de não havermos apresentado até agora uma interpretação física para a amplitude das ondas de matéria, que se comportam como ondas clássicas, exibindo fenômenos como reflexão, refração, interferência e difração e obedecendo ao princípio da superposição, tem uma razão: no caso mais geral, a amplitude dessas ondas é um número complexo, com uma parte real e uma parte imaginária, a segunda proporcional a $i = \sqrt{-1}$. Não é possível medir ou interpretar diretamente números complexos em nosso mundo de números reais; entretanto, como vamos ver, definir as probabilidades em termos de $|\Psi|^2$, que é sempre um número real, não apresenta a mesma dificuldade.

5-5 O Princípio de Indeterminação

As relações de indeterminação das ondas de matéria, que desempenham um papel importante na teoria quântica, são análogas às relações de indeterminação clássicas (Equações 5-17 e 5-18).

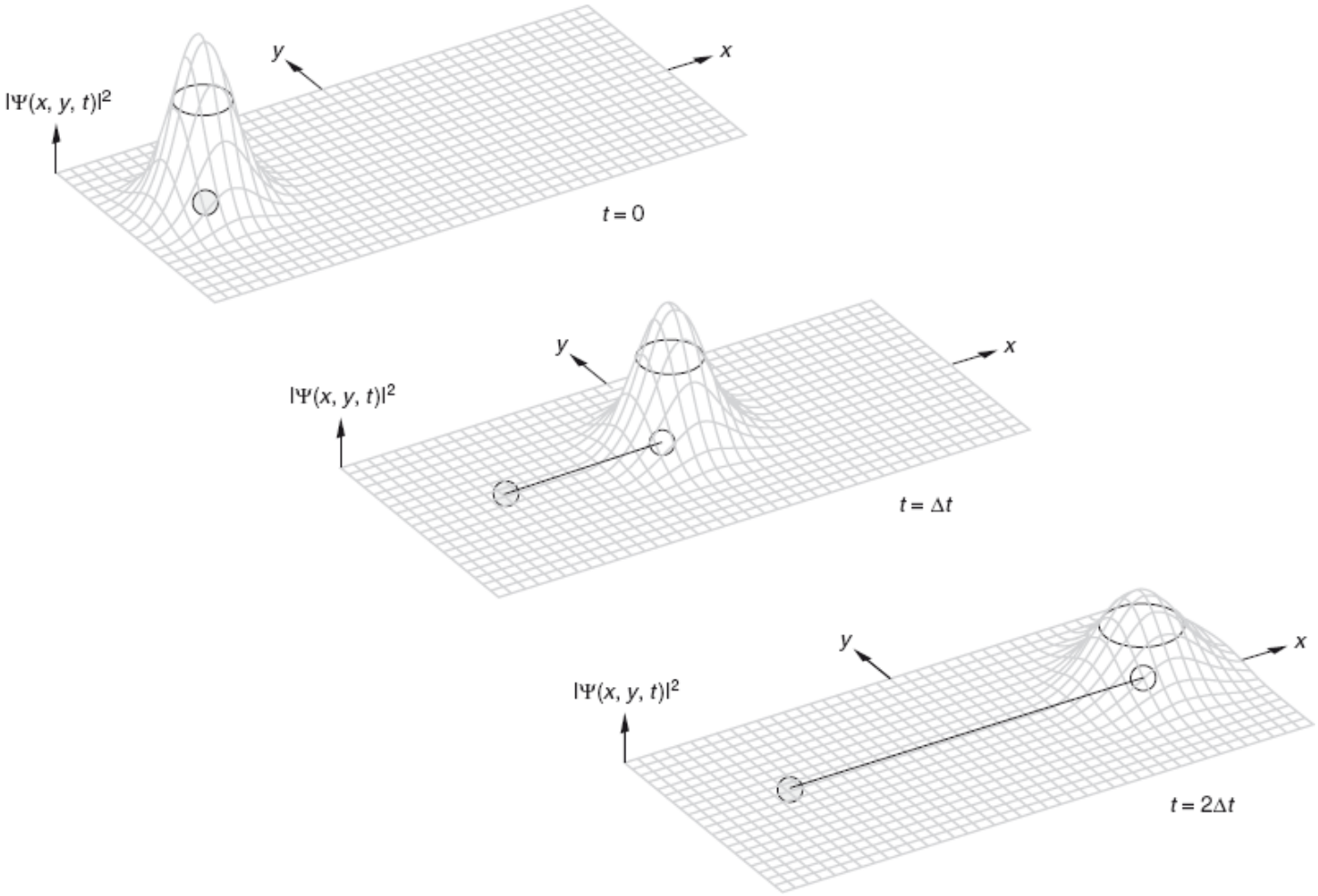


FIGURA 5-19 Pacote de ondas tridimensional representando uma partícula em movimento ao longo do eixo x. O ponto indica a posição de uma partícula clássica. Observe que, com o passar do tempo, o pacote se torna mais largo. Este alargamento se deve ao fato de que a velocidade da fase não é a mesma para todas as ondas que formam o pacote. (No caso de um pacote de ondas quadridimensional, difícil de representar graficamente, o espalhamento também acontece na direção z.)

Considere um pacote de ondas $\Psi(x, t)$ que representa um elétron. A posição mais provável do elétron é o valor de x para o qual $|\Psi(x, t)|^2$ é máxima. Como $|\Psi(x, t)|^2$ é proporcional à probabilidade de que o elétron esteja em x e $|\Psi(x, t)|^2$ é diferente de zero para vários valores de x, existe uma *indeterminação* na posição do elétron (veja a Figura 5-19). Isso significa que, se medirmos as posições de vários elétrons que se encontram exatamente nas mesmas condições (ou seja, elétrons que podem ser representados pela mesma função de onda), não obteremos sempre o mesmo resultado; a função de distribuição dos resultados das medidas será $|\Psi(x, t)|^2$. Se o pacote de ondas for estreito, a indeterminação da posição será pequena. Entretanto, as ondas harmônicas que formam um pacote de ondas estreito possuem muitos números de onda k. Como o momento está relacionado ao número de onda através da equação $p = \hbar k$, o pacote também possui muitos valores de momento. Sabemos que, para todos os pacotes de onda, existe a seguinte relação entre Δx e Δk:

$$\Delta k \, \Delta x \sim 1 \qquad \textbf{5-17}$$

Da mesma forma, existe a seguinte relação entre a duração de um pacote, Δt, e a faixa de frequências das ondas que o pacote contém, $\Delta\omega$:

$$\Delta\omega \, \Delta t \sim 1 \qquad \textbf{5-18}$$

As Equações 5-17 e 5-18 expressam propriedades comuns a todos os tipos de ondas. Multiplicando essas equações por $\hbar$ e usando as relações $p = \hbar k$ e $E = \hbar\omega$, obtemos:

$$\Delta x \, \Delta p \sim \hbar \qquad \textbf{5-24}$$

e

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \qquad \textbf{5-25}$$

As Equações 5-24 e 5-25 são a expressão matemática do *princípio de indeterminação*, formulado em 1927 por Werner K. Heisenberg.[11] A Equação 5-24 expressa o fato de que as funções de distribuição de posição e momento não podem ser tornadas arbitrariamente estreitas ao mesmo tempo (veja a Figura 5-16); assim, as indeterminações nas medidas de posição e momento estão relacionadas entre si (Equação 5-24). Naturalmente, por causa dos erros experimentais, o produto de Δx e Δp geralmente é muito maior do que $\hbar$. O limite inferior não se deve a uma deficiência dos equipamentos de medida, algo que possa ser resolvido com o progresso da tecnologia; trata-se de um limite intrínseco, associado ao dualismo ondapartícula.

O princípio de indeterminação de Heisenberg ajuda a explicar a existência das *partículas virtuais* que mantêm o núcleo atômico coeso (veja o Capítulo 11) e as flutuações quânticas que podem ter dado origem ao Big Bang (veja o Capítulo 13).

Para expressar o princípio de indeterminação através de uma equação matemática, precisamos definir melhor o que significa a indeterminação das medidas de posição e momento. Se σ_x é o desvio-padrão das medidas de posição e σ_k é o desviopadrão das medidas de número de onda, o produto $\sigma_x\sigma_k$ tem o valor mínimo de 1/2 quando as duas funções distribuição são gaussianas. Definindo Δx e Δp como desvios-padrão, o valor mínimo do produto das duas grandezas é $\hbar/2$. Assim,

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar \qquad \textbf{5-26}$$

Analogamente,

$$\Delta E \, \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar \qquad \textbf{5-27}$$

Exercício

6. De acordo com o princípio de indeterminação, jamais poderemos medir o momento de uma partícula com uma precisão maior que um certo valor?



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
O Microscópio de Raios Gama

Vejamos o que aconteceria se tentássemos fazer uma medição tão precisa que violasse o princípio de indeterminação. Uma das formas mais comuns de medir a posição de um objeto (um elétron, digamos) é iluminá-lo, isto é, banhá-lo com luz e examinar a figura de difração resultante. O momento pode ser medido observando novamente o elétron após alguns instantes e usando as duas observações para calcular a velocidade da partícula. Por causa dos efeitos de difração, não podemos conhecer a posição de um objeto com uma precisão maior que o comprimento de onda da radiação utilizada, de modo que usaremos a radiação de menor comprimento de onda conhecida, os raios gama. (Em princípio, não existe um limite inferior para o comprimento de onda das ondas eletromagnéticas.) Também sabemos que a luz possui momento e energia e que, portanto, afeta o movimento do elétron ao ser espalhada; assim, devemos usar a menor intensidade possível de radiação. Reduzir a intensidade da radiação significa diminuir o número de fótons, mas precisamos usar pelo menos um fóton para observar o elétron. A menor intensidade possível, portanto, é a correspondente a um único fóton. O espalhamento de um fóton por um elétron constitui o efeito Compton, discutido na Seção 3-4. O momento do fóton é $hf/c = h/\lambda$. Quanto menor o λ da radiação usada para medir a posição do elétron, maior o momento do fóton e, portanto, maior a perturbação sofrida pelo elétron, mas podemos analisar o evento de espalhamento e introduzir uma correção, contanto que o momento do fóton e o ângulo de espalhamento sejam conhecidos.

A situação está ilustrada na Figura 5-20. (Heisenberg propôs este problema como um *gedankenexperiment*, ou experimento imaginário.) Como um único fóton não pode produzir uma figura de difração, podemos pensar na figura de difração como o resultado de uma série de experimentos iguais. A posição do elétron é determinada observando em um microscópio a posição do fóton espalhado. Vamos supor que apenas um fóton tenha sido utilizado. Podemos tomar como indeterminação da posição a resolução máxima que pode ser conseguida usando uma radiação de comprimento de onda λ:[12]

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \theta}$$

em que θ é metade do ângulo subtendido pela lente (Figura 5-22*a* e *b*).

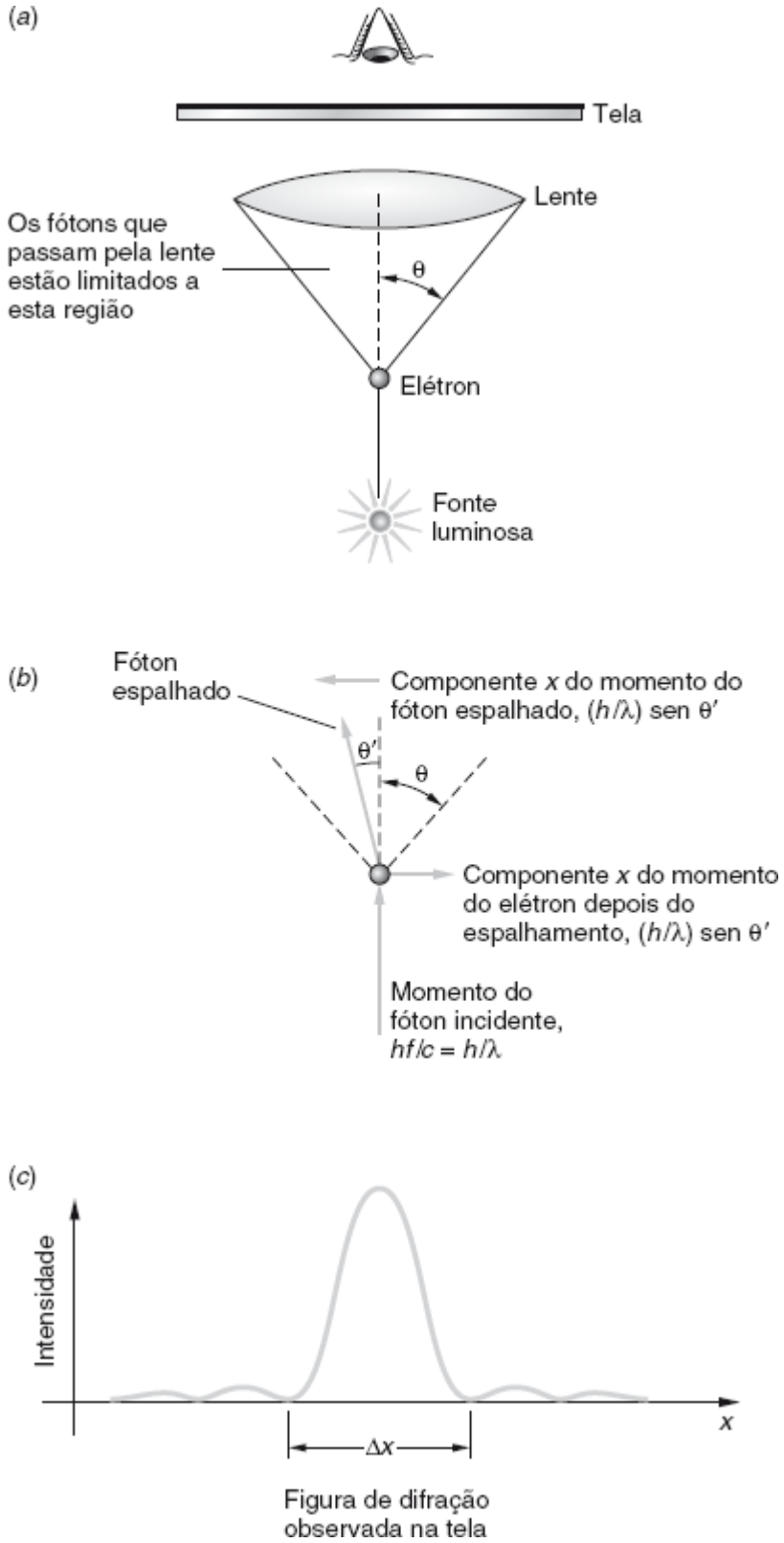


FIGURA 5-20 (*a*) "Observação de um elétron" com o auxílio de um microscópio de raios gama. (*b*) Por causa do tamanho finito da lente, existe uma indeterminação $\Delta p_x \approx p \text{ sen } \theta = h \text{ sen } \theta/\lambda$ do momento do fóton difratado. A indeterminação do momento do elétron após o espalhamento é pelo menos igual a este valor. (*c*) A posição do elétron não pode ser conhecida com uma precisão maior que a largura do máximo central da figura de difração, $\Delta x = \lambda/\text{sen } \theta$. O produto das indeterminações, $\Delta p_x \, \Delta x$, é, portanto, da ordem de h, a constante de Planck.

Vamos supor que a componente x do momento do fóton tenha sido determinada em um experimento anterior. Para chegar à tela e contribuir para a figura de difração da Figura 5-20*c*, o fóton espalhado precisa passar pela lente; assim, a componente x do momento do fóton espalhado pode ter qualquer valor entre 0 e $p_x = p \text{ sen } \theta$, na qual p é o momento total do fóton espalhado. De acordo com a lei de conservação do momento, a indeterminação no momento do elétron depois do espalhamento deve ser maior ou igual à do fóton espalhado (seria igual, naturalmente, se o momento inicial do elétron fosse conhecido com precisão); nesse caso,

$$\Delta p_x \geq p \operatorname{sen}\theta - \frac{h}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$$

e

$$\Delta x\,\Delta p_x \geq \frac{\lambda}{2\operatorname{sen}\theta}\frac{h\operatorname{sen}\theta}{\lambda} = \frac{1}{2}h$$

Assim, embora o elétron pudesse ter uma posição e um momento precisamente definidos antes de ser observado; nossa observação introduziu inevitavelmente uma indeterminação nos valores medidos dessas grandezas. Isso ilustra o ponto essencial do princípio de indeterminação: o fato de que o produto das indeterminações na posição e no momento não pode ser menor que uma constante da ordem de h nem mesmo *em princípio*, ou seja, ainda que as condições de observação sejam ideais. Se o elétron fosse "iluminado" com outros elétrons em lugar de fótons, a conclusão seria a mesma, já que a relação $\lambda = h/p$ é válida tanto para fótons como para elétrons.

5-6 Algumas Consequências do Princípio de Indeterminação

No próximo capítulo vamos ver que a equação de Schrödinger pode ser aplicada a muitos problemas de física atômica. Entretanto, nem sempre é fácil resolvê-la em situações concretas. O princípio de indeterminação permite chegar a muitas conclusões semiquantitativas a respeito do comportamento de sistemas atômicos sem necessidade de resolver o problema em todos os seus pormenores. A abordagem usada para aplicar o princípio de indeterminação a sistemas atômicos será ilustrada inicialmente tomando como exemplo uma partícula localizada no interior de uma caixa. Em seguida, apresentaremos exemplos numéricos e discutiremos algumas consequências adicionais do princípio de indeterminação.

Energia Mínima de uma Partícula em uma Caixa

Uma consequência importante do princípio de indeterminação é o fato de que uma partícula confinada em um espaço finito não pode ter energia cinética nula. Considere o caso de uma partícula em uma "caixa" unidimensional de comprimento L. Se sabemos com certeza que a partícula se encontra no interior da caixa, Δx não pode ser maior que L. Isso significa que Δp deve ser maior ou igual a $\hbar/L$. (Como estamos interessados apenas em ordens de grandeza, vamos ignorar o fator 1/2 da Equação 5-26. De qualquer forma, muitas distribuições não são gaussianas, de modo que, no caso geral, $\Delta x\,\Delta p > \hbar/2$.) Vamos tomar o desvio-padrão como uma medida de Δp:

$$(\Delta p)^2 = (p - \bar{p})^2_{\text{av}} = (p^2 - 2p\bar{p} + \bar{p}^2)_{\text{av}} = \overline{p^2} - \bar{p}^2$$

No caso de uma caixa simétrica, o momento médio $\bar{p}$ é nulo, já que a probabilidade de a partícula estar se movendo para a direita em um determinado instante é igual à probabilidade de estar se movendo para a esquerda. Assim, temos:

$$(\Delta p)^2 = \overline{p^2} \geq \left(\frac{\hbar}{L}\right)^2$$

e a energia cinética média é

$$\bar{E} = \frac{\overline{p^2}}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2mL^2} \qquad \textbf{5-28}$$

Assim, de acordo com o princípio de indeterminação, a energia de uma partícula (*qualquer* partícula) no interior de uma caixa fechada (*qualquer* caixa) não pode ser nula. Essa energia mínima, que, no caso de uma partícula em uma caixa unidimensional, é dada pela Equação 5-28, é conhecida como *energia de ponto zero*.

EXEMPLO 5-6 **Partícula Macroscópica em uma Caixa** Considere uma partícula pequena mas macroscópica, de massa $m = 10^{-6}$ g, confinada em uma caixa unidimensional de comprimento $L = 10^{-6}$ m. Calcule a energia cinética mínima da partícula e a velocidade correspondente.

SOLUÇÃO

1. A energia cinética mínima é dada pela Equação 5-28:

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \frac{\hbar^2}{2mL^2} = \frac{(1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2}{(2)(10^{-9}\,\mathrm{kg})(10^{-6}\,\mathrm{m})^2} \\ &= 5{,}57 \times 10^{-48}\,\mathrm{J} \\ &= 3{,}47 \times 10^{-29}\,\mathrm{eV}\end{aligned}$$

2. A velocidade correspondente a esta energia cinética é

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2(5{,}57 \times 10^{-48}\,\mathrm{J})}{10^{-9}\,\mathrm{kg}}} \\ &= 1{,}06 \times 10^{-19}\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

Observação: *Este cálculo mostra que, no caso de objetos macroscópicos, a energia cinética mínima associada ao princípio de indeterminação é tão pequena que não pode ser medida.*

EXEMPLO 5-7 **Elétron em uma Caixa de Dimensões Atômicas** Se a partícula em uma caixa unidimensional de comprimento $L = 0{,}1$ nm (o tamanho de um átomo) é um elétron, qual é a energia de ponto zero?

SOLUÇÃO

Usando novamente a Equação 5-28, obtemos:

$$E = \frac{(\hbar c)^2}{2mc^2L^2} = \frac{(197{,}3\ \mathrm{eV\cdot nm})^2}{2(0{,}511 \times 10^6\,\mathrm{eV})(0{,}1\,\mathrm{nm})^2} = 3{,}81\ \mathrm{eV}$$

Os elétrons dos átomos têm uma energia cinética da mesma ordem de grandeza.

Tamanho do Átomo de Hidrogênio

A energia de um elétron de momento p a uma distância r de um próton é dada por

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{ke^2}{r}$$

Tomando a indeterminação na posição do elétron, Δx, como igual a r, temos:

$$(\Delta p)^2 = \overline{p^2} \geq \frac{\hbar^2}{r^2}$$

Assim, a energia pode ser escrita na forma

$$E = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}$$

Existe uma distância r_m para a qual E é mínima. Fazendo $dE/dr = 0$, obtemos os valores de r_m e E_m:

$$r_m = \frac{\hbar^2}{ke^2m} = a_0 = 0{,}0529\ \mathrm{nm}$$

e

$$E_m = -\frac{k^2e^4m}{2\hbar^2} = -13{,}6\ \mathrm{eV}$$

O fato de que o valor obtido para r_m é exatamente igual ao raio da primeira órbita de Bohr se deve à escolha judiciosa de $\Delta x = r$ em vez de $2r$ ou $r/2$, valores igualmente razoáveis. O importante, porém, é que obtemos um valor da ordem de grandeza correta

para o tamanho do átomo para qualquer valor razoável de Δx.

Largura das Linhas Espectrais

Uma das consequências da Equação 5-27 é o fato de que a energia de um sistema não pode ser medida exatamente, a menos que a medida seja realizada durante um tempo infinito. Quando um átomo se encontra em um estado excitado, não permanece indefinidamente nesse estado, mas sofre transições sucessivas para estados de menor energia até chegar ao estado fundamental. O decaimento de um estado excitado é um processo estatístico.

Podemos considerar o tempo médio de decaimento, τ, conhecido como *tempo de vida* do estado excitado, como uma medida do tempo disponível para determinar a energia do estado. No caso das transições atômicas, τ é da ordem de 10^{-8} s. A indeterminação na energia correspondente a esse tempo é dada por

$$\Delta E \geq \frac{\hbar}{\tau} = \frac{6{,}58 \times 10^{-16}\,\text{eV} \cdot \text{s}}{10^{-8}\,\text{s}} \approx 10^{-7}\,\text{eV}$$

Esta indeterminação na energia faz com que haja uma indeterminação $\Delta\lambda$ no comprimento de onda da luz emitida. No caso de transições para o estado fundamental, que tem uma energia perfeitamente determinada E_0 graças ao tempo de vida infinito, a indeterminação percentual do comprimento de onda pode ser calculada da seguinte forma:

$$E - E_0 = \frac{hc}{\lambda}$$

$$dE = -hc\frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

$$|\Delta E| \approx hc\frac{|\Delta\lambda|}{\lambda^2}$$

o que nos dá,

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{\Delta E}{E - E_0}$$

A indeterminação na energia $\Delta E = \hbar/\tau$ é denominada *largura de linha natural* e representada pelo símbolo Γ_0. Outros efeitos responsáveis pelo alargamento das linhas espectrais são o efeito Doppler, o efeito de recuo e as colisões atômicas. No caso de espectros óticos na faixa dos elétrons-volts, a largura de linha Doppler D é da ordem de 10^{-6} eV à temperatura ambiente, ou seja, aproximadamente 10 vezes maior que a largura de linha natural, e a largura de linha de recuo pode ser ignorada. No caso de transições nucleares na faixa dos MeV, a largura de linha Doppler e a largura de linha de recuo são da ordem de eV, muito maiores que a largura de linha natural. Como vamos ver no Capítulo 11, em alguns casos especiais de átomos em sólidos em baixas temperaturas, as larguras de linha Doppler e de recuo são praticamente nulas e a largura das linhas espectrais é a largura natural. Este efeito, conhecido como *efeito Mössbauer* em homenagem ao descobridor, é extremamente importante, pois permite gerar fótons com energias muito bem definidas, que podem ser usados em experimentos de altíssima precisão. Assim, por exemplo, os fótons de 14,4 keV emitidos pelo átomo de ^{57}Fe têm uma largura natural 10^{-11} vezes menor que a energia.

Exercícios

7. O que acontece com a energia de ponto zero de uma partícula em uma caixa unidimensional quando o comprimento da caixa tende a infinito?

8. Por que o princípio de indeterminação não é importante no caso de objetos macroscópicos?

EXEMPLO 5-8 **Emissão de um Fóton** Quase todos os átomos excitados decaem, isto é, emitem um fóton, após um tempo τ da ordem de 10^{-8} s. Qual é a indeterminação mínima (1) da energia e (2) da frequência do fóton emitido?

SOLUÇÃO

1. Como a indeterminação mínima da energia é a largura de linha natural $\Gamma_0 = \hbar/\tau$,

$$\Gamma_0 = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{2\pi \times 10^{-8}\,\text{s}} = \frac{4{,}14 \times 10^{-15}\,\text{eV}\cdot\text{s}}{2\pi \times 10^{-8}\,\text{s}}$$
$$= 6{,}6 \times 10^{-8}\,\text{eV}$$

2. De acordo com a relação de de Broglie $E = \hbar\omega$, temos:

$$\Delta E = \hbar\Delta\omega = \hbar(2\pi\,\Delta f) = h\,\Delta f$$

de modo que a Equação 5-27 pode ser escrita na forma

$$\Delta E \Delta t = h\Delta f \Delta t \geq \hbar$$

e, portanto, a indeterminação da frequência é dada por

$$\Delta f \geq \frac{1}{2\pi\,\Delta t} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8}}$$
$$\Delta f \geq 1{,}6 \times 10^{7}\,\text{Hz}$$

Observação: *A frequência dos fótons na região visível do espectro é da ordem de 10^{14} Hz.*

5-7 O Dualismo Onda-Partícula

Vimos neste capítulo que o elétron, inicialmente considerado uma partícula, exibe as propriedades ondulatórias de difração e interferência. Vimos também, em capítulos anteriores, que a luz, inicialmente considerada um fenômeno ondulatório, apresenta as propriedades de uma partícula nas interações com a matéria, como no efeito fotelétrico e no efeito Compton. Na verdade, todos os fenômenos naturais (elétrons, átomos, luz, som) possuem aspectos corpusculares e aspectos ondulatórios.

Costuma-se dizer, por exemplo, que os elétrons se comportam ao mesmo tempo como ondas e como partículas. Esta afirmação pode parecer paradoxal para o leitor, já que, na física clássica, os conceitos de onda e de partícula são mutuamente excludentes. Uma *partícula clássica* se comporta como uma bala de revólver: pode ser localizada e desviada, transfere energia bruscamente, através de colisões, e *não* exibe as propriedades de difração e interferência. Uma *onda clássica* se comporta como uma onda do mar: não tem uma localização precisa, transfere energia de forma gradual e exibe as propriedades de difração e interferência. Nenhuma entidade, pensavam os cientistas até o início do século XX, podia se comportar ao mesmo tempo como uma partícula e uma onda.

Hoje sabemos que os conceitos clássicos não descrevem adequadamente nem as ondas nem as partículas. Tanto a matéria como a radiação apresentam aspectos corpusculares e ondulatórios. Quando estamos estudando a emissão e absorção de energia, os aspectos corpusculares predominam. Quando estamos mais preocupados com a propagação de energia no espaço, os aspectos ondulatórios são dominantes. Observe que a emissão e a absorção de energia são eventos localizados. Assim, por exemplo, a luz atinge a retina do olho de um pesquisador e um fóton é absorvido, transferindo energia para um determinado cone ou bastonete: uma observação acabou de ocorrer. Esta descrição ilustra o fato de que as *observações* de fenômenos físicos são descritas em termos de aspectos corpusculares. Por outro lado, para prever a distribuição da intensidade luminosa na retina do pesquisador, é preciso levar em conta as amplitudes de ondas que se propagaram no espaço e foram difratadas na pupila. Assim, as *previsões*, ou seja, estimativas prévias do que vai ser observado, são descritas em termos de aspectos ondulatórios. Vamos analisar mais de perto esta questão.

Todo fenômeno pode ser descrito por uma função de onda que é a solução de uma equação de onda. No caso da luz, a função de onda é o campo elétrico $\xi(x, t)$ (em uma dimensão), que é a solução de uma equação de onda como a Equação 5-11. A função de onda do elétron é chamada de $\Psi(x, t)$. A equação de onda correspondente, denominada *equação de Schrödinger*, será discutida no próximo capítulo. O quadrado do módulo da função de onda é igual à probabilidade (por unidade de volume) de que o elétron seja observado em um ponto do espaço. A função de onda exibe as propriedades de uma onda clássica, como interferência e difração. Para podermos prever onde estará um elétron (ou qualquer outra partícula) em um instante futuro, temos que estudar a propagação da função de onda, usando métodos semelhantes aos da teoria ondulatória clássica. Quando um elétron (ou um fóton) interage com outras partículas, a função de onda é modificada pela interação. Essa interação pode ser descrita pela teoria corpuscular clássica, como no caso do efeito Compton. Existem casos em que a teoria corpuscular clássica e a teoria ondulatória clássica levam aos mesmos resultados. *Quando o comprimento de onda é muito menor que qualquer objeto ou abertura, os resultados obtidos usando a teoria corpuscular são iguais aos obtidos usando a teoria ondulatória, já que os efeitos de difração e interferência são pequenos demais para serem observados.* Exemplos comuns são a ótica geométrica, que pode ser considerada uma teoria corpuscular, e o movimento de bolas de futebol e aviões a jato. Quando estamos interessados apenas nos valores médios da energia e do momento, a teoria ondulatória funciona tão bem como a teoria corpuscular. Assim,

por exemplo, a teoria ondulatória da luz prevê corretamente que a corrente elétrica total no efeito fotelétrico é proporcional à intensidade da luz.



Leitura Suplementar

A ideia de que partículas de matéria como os elétrons também podem se comportar como ondas pode, à primeira vista, parecer paradoxal. Uma explicação particularmente lúcida do dualismo onda-partícula foi proposta por R. P. Feynman e serviu de base para o ensaio *O Experimento de Duas Fendas*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram a Equação 5-29 e as Figuras 5-21 e 5-22.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Relações de de Broglie	$f = E/h$ **5-1** $\lambda = h/p$ **5-2** Os elétrons e todas as outras partículas apresentam propriedades ondulatórias, como interferência e difração.
2. Ondas de matéria Davisson e Germer	Mostraram que os elétrons são difratados por um monocristal de Ni de acordo com a equação de Bragg $n\lambda = D \operatorname{sen} \varphi$ **5-5**
3. Pacotes de ondas Equação de onda Relações de indeterminação Velocidade de fase Velocidade de grupo Velocidade das ondas de matéria	$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2}$ **5-11** $\Delta k \Delta x \sim 1$ **5-17** $\Delta\omega\Delta t \sim 1$ **5-18** $v_p = f\lambda = \omega/k$ $v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_p + k\frac{dv_p}{dk}$ **5-16** O pacote de ondas se propaga com a velocidade da partícula, ou seja, a velocidade da partícula é igual à velocidade de grupo v_g.
4. Interpretação probabilística	O módulo da função de onda ao quadrado é proporcional à probabilidade de que a partícula seja observada no intervalo *dx*. $P(x)dx = \lvert\Psi\rvert^2 dx$ **5-23**
5. O princípio de indeterminação de Heisenberg	

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar \qquad \textbf{5-26}$$

$$\Delta E \, \Delta t \geq \frac{1}{2}\hbar \qquad \textbf{5-27}$$

Partícula em uma caixa

onde as indeterminações são definidas como os desvios-padrão correspondentes.

Energia do átomo de hidrogênio

$$\overline{E} \geq \frac{\hbar^2}{2mL^2} \qquad \textbf{5-28}$$

A energia mínima de uma partícula em uma "caixa" é maior que zero.

De acordo com o princípio de indeterminação, $E_{min} = -13{,}6$ eV, o mesmo valor obtido usando o modelo de Bohr.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

De Broglie, L., *Matter and Light: The New Physics*, Dover, New York, 1939. Nesta coletânea de ensaios está a palestra proferida por de Broglie por ocasião da entrega do Prêmio Nobel, na qual ele expõe o raciocínio que o levou a imaginar que a matéria possui um aspecto ondulatório.

Feynman, R. P., "Probability and Uncertainty − The Quantum-Mechanical View of Nature", aula filmada, Educational Services, Inc., Film Library, Newton, MA.

Feynman, R. P., R. B. Leighton e M. Sands, *Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading., MA, 1965.

Fowles, G. R., *Introduction to Modern Optics*, Holt, Rinehart & Winston, New York, 1968.

Hecht, E., *Optics*, 2d ed., Addison-Wesley, Reading, MA, 1987.

Jenkins, F. A. e H. E. White, *Fundamentals of Optics*, 4th ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

Mehra, J. e H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982.

Resnick, R. e D. Halliday, *Basic Concepts in Relativity and Early Quantum Theory*, 2d ed., Wiley, New York, 1992.

Tipler, P. A. e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed., W.H. Freeman, New York, 2008. Os Capítulos 15 e 16 contêm uma discussão completa de ondas clássicas.

Notas

1. Louis V. P. R. de Broglie (1892-1987), físico francês. Formado em história, interessou-se por problemas de física e matemática por influência do irmão Maurice, que era físico, e chegou a trabalhar como técnico de rádio do exército francês (na Torre Eiffel) durante a Primeira Guerra Mundial. O assunto da tese de doutorado de de Broglie recebeu atenção especial porque o orientador, Paul Langevin (que descobriu o princípio no qual se baseia o sonar), comentou a respeito com Einstein, que descreveu a hipótese de de Broglie a Lorentz como "... o primeiro raio de luz a iluminar... o maior dos enigmas da física". Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1929, tornando-se a primeira pessoa a receber o prêmio por uma pesquisa feita para uma tese de doutorado.

2. L. de Broglie, *New Perspectives in Physics*, Basic Books, New York, 1962.

3. Veja, por exemplo, Tipler, P., *Physics for Scientists and Engineers*, 5th ed. (New York: W. H. Freeman and Co., 2008), Section 35-5.

4. Jean-Baptiste Perrin (1870-1942), físico francês. Foi o primeiro a demonstrar que os raios catódicos eram na verdade partículas carregadas, o que serviu de inspiração para o experimento no qual J. J. Thomson mediu a razão q/m dessas partículas, que hoje chamamos de elétrons. Foi também o primeiro a medir o tamanho aproximado dos átomos e moléculas e a calcular o número de Avogadro. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1926 pelo conjunto de suas pesquisas.

5. Clinton Joseph Davisson (1881-1958), físico americano. Dividiu o Prêmio Nobel de Física de 1937 com George Paget Thomson pela observação da difração de partículas. Davisson foi o primeiro cientista a ganhar o prêmio Nobel por uma

pesquisa que não foi realizada em uma instituição de ensino. Lester Halbert Germer era um dos assistentes de Davisson no Bell Telephone Laboratories.

6. As ondas de matéria, como qualquer onda, mudam de direção ao passarem de um meio (no caso, o cristal de Ni) para outro (o vácuo). Este efeito, que depende da razão entre os índices de refração dos dois meios, pode ser calculado com o auxílio da lei de Snell. No caso de incidência normal, a Equação 5-5 não é afetada; para outros ângulos de incidência, é necessária uma pequena correção, que não foi levada em conta nem na Figura 5-6 nem na Figura 5-7.

7. *Nobel Prize Lectures: Physics* (Amsterdam e New York: Elsevier, 1964).

8. Os físicos usam duas definições diferentes para o número de onda. Para os físicos experimentais, o número de onda é dado por $k = 1/\lambda$; para os físicos teóricos, o número de onda é dado por $k = 2\pi/\lambda$. Neste livro, adotamos a segunda definição.

9. Por convenção, a largura é definida como a distância entre os pontos em que a amplitude da envoltória é igual à metade da amplitude máxima.

10. Esta interpretação de $|\Psi|^2$ foi proposta pela primeira vez pelo físico alemão Max Born (1882-1970), que sucedeu a Planck como professor da Universidade de Berlim. Born recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1954, em parte pela interpretação de $|\Psi|^2$.

11. Werner Karl Heisenberg (1901-1976), físico alemão. Depois de receber o título de Ph.D. sob a orientação de Sommerfeld, trabalhou como assistente de Born e de Bohr. Foi diretor do projeto de pesquisa nuclear da Alemanha durante a Segunda Guerra Mundial. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1932 pela criação da mecânica quântica.

12. O poder de resolução dos microscópios é discutido com detalhes em Jenkins, F. A. e H. E. White, *Fundamentals of Optics*, 4th ed. (New York: McGraw-Hill, 1976), pp. 332-334. A expressão de Δx usada no texto é determinada pelo critério de Rayleigh, segundo o qual o limite de resolução de dois pontos corresponde ao caso em que o máximo central da figura de difração produzida por um dos pontos coincide com o primeiro mínimo da figura de difração produzida pelo outro ponto.

13. Richard Phillips Feynman (1918-1988), físico americano. Esta discussão foi inspirada no livro *Lectures on Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley, 1965). Feynman compartilhou o Prêmio Nobel de Física de 1965 com S. Tomonaga e J. Schwinger pela criação da eletrodinâmica quântica. Foi Feynman que, como membro da comissão encarregada de investigar a explosão do ônibus espacial *Challenger*, descobriu que o defeito estava nos anéis de retenção dos foguetes auxiliares. Um dos expoentes da física americana, Feynman foi também um exímio tocador de bongô e arrombador de cofres.

Problemas

NÍVEL I

Seção 5-1 A Hipótese de de Broglie

5-1. (*a*) Qual é o comprimento de onda de um corpo de 1 g que se move com uma velocidade de 1 m por ano? (*b*) Qual deveria ser a velocidade do corpo para que o comprimento de onda fosse igual a 1 cm?

5-2. Se a energia cinética de uma partícula é muito maior do que a energia de repouso, podemos usar a aproximação relativística $E \approx pc$. Use essa aproximação para calcular o comprimento de onda de um elétron com uma energia de 100 MeV.

5-3. Os elétrons de um microscópio eletrônico são acelerados por uma diferença de potencial V_0 que faz com que o comprimento de onda seja 0,04 nm. Qual é o valor de V_0?

5-4. Calcule o comprimento de onda de uma partícula com uma energia cinética de 4,5 keV supondo que se trata (*a*) de um elétron; (*b*) de um próton; (*c*) de uma partícula alfa.

5-5. De acordo com a mecânica estatística, a energia cinética média de uma partícula a uma temperatura T é $3kT/2$, onde k é a constante de Boltzmann. Qual é o comprimento de onda das moléculas de nitrogênio à temperatura ambiente?

5-6. Determine o comprimento de onda de um nêutron com uma energia cinética de 0,02 eV (o valor aproximado de kT à temperatura ambiente).

5-7. Um próton se move livremente entre duas paredes rígidas separadas por uma distância L = 0,01 nm. (*a*) Se o próton é representado por uma onda estacionária unidimensional, com um nó em cada parede, mostre que os valores permitidos do comprimento de onda são dados por $\lambda = 2L/n$, em que n é um número inteiro positivo. (*b*) Encontre uma expressão geral para a energia cinética do próton e determine os valores dessa energia para $n = 1$ e $n = 2$.

5-8. Qual deve ser a energia cinética de um elétron para que a razão entre o comprimento de onda de de Broglie e o comprimento de onda de Compton seja (*a*) 10^2; (*b*) 0,2; (*c*) 10^{-3}?

5-9. Calcule o comprimento de onda de um próton proveniente do espaço sideral cuja energia é (*a*) 2 GeV; (*b*) 200 GeV.

Seção 5-2 Medida do Comprimento de Onda das Ondas de Matéria

5-10. Qual é o ângulo de Bragg φ para elétrons difratados por um cristal de níquel se a energia dos elétrons é (*a*) 75 V; (*b*) 100

eV?

5-11. Calcule a energia cinética de um próton cujo comprimento de onda de de Broglie é 0,25 nm. Se um feixe de prótons com esse comprimento de onda é difratado por um cristal de calcita com uma distância interplanar de 0,304 nm, qual é o ângulo correspondente ao máximo de difração de Bragg de primeira ordem?

5-12. (*a*) O ângulo de difração de elétrons de 50 eV em um cristal de MgO é 55,6°. Qual é a distância interatômica *D*? (*b*) Qual é o ângulo de difração para elétrons de 100 eV?

5-13. Um cristal tem uma família de planos cujo espaçamento é 0,30 nm. Um feixe de nêutrons incide normalmente no cristal e o primeiro máximo de difração é observado em $\phi = 42°$. Determine o comprimento de onda e a energia cinética dos nêutrons.

5-14. Mostre que no experimento de Davisson e Germer com elétrons de 54 eV, usando planos com $D = 0{,}215$ nm, não é possível observar picos de difração correspondentes a $n \geq 2$.

5-15. Um feixe de elétrons com uma energia cinética de 350 eV incide normalmente à superfície de um cristal de KCl que foi cortado de tal forma que o espaçamento *D* entre átomos vizinhos nos planos paralelos à superfície é 0,315 nm. Calcule o ângulo φ para o qual são observados picos de difração de todas as ordens possíveis.

Seção 5-3 Pacotes de Ondas

5-16. Informações são transmitidas através de um cabo, na forma de pulsos elétricos, a uma taxa de 100.000 pulsos/s. (*a*) Qual a maior duração que os pulsos podem ter sem que haja superposição? (*b*) Para essa duração, qual deve ser a banda passante mínima do receptor?

5-17. Duas ondas harmônicas se propagam simultaneamente em um fio comprido. As ondas podem ser descritas pelas funções $y_1 = 0{,}002\cos(8{,}0x - 400t)$ e $y_2 = 0{,}002\cos(7{,}6x - 380t)$, onde *y* e *x* estão em metros e *t* em segundos. (*a*) Escreva a função de onda da onda resultante na forma da Equação 5-15. (*b*) Qual é a velocidade de fase da onda resultante? (*c*) Qual é a velocidade de grupo? (*d*) Calcule a distância Δx entre dois zeros sucessivos do pacote de ondas e determine essa distância em função de Δk.

5-18. (*a*) Demonstre, a partir da Equação 5-16, que a velocidade de grupo também pode ser expressa na forma

$$v_g = v_p - \lambda(dv_p/d\lambda)$$

(*b*) A velocidade de fase da luz no vidro comum varia com o comprimento de onda, ou seja, o vidro é um meio dispersivo. Qual é a forma geral da variação de *v* com λ no vidro? O valor de $dv/d\lambda$ é positivo ou negativo?

5-19. Um aparelho de radar usado para medir a velocidade de bolas de tênis emite pulsos com um comprimento de onda de 2,0 cm e uma duração de 0,25 μs. (*a*) Qual é a duração do pacote de ondas produzido? (*b*) Para que frequência o receptor deve ser sintonizado? (*c*) Qual deve ser a banda passante mínima do receptor?

5-20. A frequência natural de um certo diapasão é 880 Hz. Se o diapasão é golpeado com um pequeno martelo e um quarto de segundo mais tarde é envolvido com uma flanela, qual é, aproximadamente, a faixa de frequências contida no pulso sonoro emitido pelo diapasão?

5-21. Se uma linha telefônica pode transmitir uma faixa de frequências $\Delta f = 5.000$ Hz, qual é a duração aproximada do pulso mais curto que a linha é capaz de transmitir?

5-22. (*a*) Você é encarregado de montar um experimento de duas fendas usando elétrons de 5 eV. Se você deseja que o primeiro mínimo da figura de difração seja observado para um ângulo de 5°, qual deve ser a distância entre as fendas? (*b*) A que distância das fendas deve estar o plano do detector para que a distância entre os primeiros mínimos de um lado e do outro do máximo central seja 1 cm?

Seção 5-4 Interpretação Probabilística da Função de Onda

5-23. Uma esfera rígida tem 100 g de massa, 1 cm de raio, uma energia cinética de 2 J, não está sujeita a nenhuma força e está confinada a uma região entre duas paredes rígidas separadas por uma distância de 50 cm. (*a*) Qual é a probabilidade de que, em um determinado instante, o centro da esfera esteja exatamente a meio caminho entre as duas paredes? (*b*) Qual é a probabilidade de que o centro da esfera esteja entre as marcas de 24,9 e 25,1 cm?

5-24. A função de onda de uma partícula que se move em uma dimensão entre duas paredes separadas por uma distância *L* é $\Psi(x) = A\,\text{sen}(\pi x/L)$. Supondo que a partícula não pode deixar a região entre as paredes, qual é o valor de *A*?

5-25. A função de onda que descreve o estado de um elétron confinado ao eixo *x* é dada, no instante $t = 0$, por

$$\Psi(x,0) = Ae^{-x^2/4\sigma^2}$$

Determine a probabilidade de que o elétron seja encontrado em uma região *dx* com centro em (*a*) $x = 0$; (*b*) $x = \sigma$; (*c*) $x = 2\sigma$. (*d*) Qual é a posição mais provável do elétron?

Seção 5-5 O Princípio de Indeterminação

5-26. Um diapasão de frequência f_0 vibra durante um intervalo de tempo Δt, produzindo uma forma de onda como a da Figura 5-23. Esta função de onda é semelhante a uma onda harmônica, exceto pelo fato de que está limitada a um intervalo de tempo Δt e a uma distância $\Delta x = v\Delta t$, em que v é a velocidade de fase. Seja N o número aproximado de ciclos da oscilação. Podemos determinar a frequência contando o número de ciclos e dividindo o resultado por Δt. (*a*) A contagem do número de ciclos envolve uma indeterminação de ± 1 ciclo. Explique por quê (veja a figura). Qual é a indeterminação resultante no cálculo da frequência f? (*b*) Escreva uma expressão para o número de onda k em função de Δx e N. Mostre que a indeterminação de N (±1) leva a uma indeterminação $\Delta k = 2\pi/\Delta x$ no valor de k.

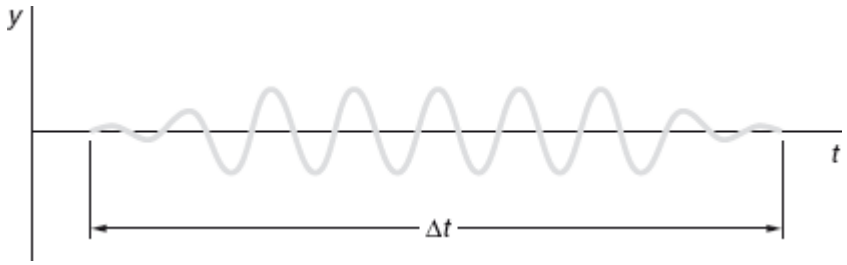


FIGURA 5-23 Problema 5-26.

5-27. Se um estado excitado de um átomo tem um tempo de vida de 10^{-7} s, qual é a indeterminação da energia dos fótons emitidos por esse átomo em uma transição espontânea para o estado fundamental?

5-28. A observação de uma joaninha de 5 mm de diâmetro e 1,0 mg de massa, usando uma lente de baixa ampliação, revela que o inseto está parado, com uma indeterminação de 10^{-2} mm. Com que velocidade a joaninha pode estar se movendo?

5-29. O ^{222}Rn decai por emissão de uma partícula α com um tempo de vida de 3,823 dias. A energia cinética da partícula α é 5,490 MeV. Qual é a indeterminação da energia cinética? Explique em uma frase de que forma o tempo de vida finito do estado excitado do núcleo de radônio afeta a indeterminação de energia da partícula α emitida.

5-30. Se a indeterminação da posição é igual ao comprimento de onda de uma partícula, qual é a relação entre a indeterminação e o valor do momento da partícula?

5-31. Em uma das histórias do personagem de G. Gamow chamado Mr. Tompkins, o herói visita uma "selva quântica" na qual h tem um valor muito grande. Suponha que você se encontre em um local onde $h = 50\ \text{J} \cdot \text{s}$. Um leopardo passa correndo, a poucos metros de distância. O animal tem 2 m, do focinho até a ponta da cauda, uma massa de 30 kg e está se movendo com uma velocidade de 40 m/s. Qual é a indeterminação na posição do "ponto médio" do leopardo? Descreva em uma frase qual seria o aspecto do leopardo nessas circunstâncias.

5-32. Para determinar a posição de uma partícula (um elétron, por exemplo) usando ondas eletromagnéticas (ou seja, "iluminando" a partícula), o comprimento de onda da radiação usada deve ser no máximo da mesma ordem que a precisão desejada. Calcule o momento e a energia de um fóton com um comprimento de onda $\lambda = 5 \times 10^{-12}$ m. Se a posição de um elétron é determinada com uma precisão $\Delta x = 5 \times 10^{-12}$ m, qual é a indeterminação do momento do elétron?

5-33. O decaimento de átomos e núcleos a partir de estados excitados muitas vezes deixa o sistema em outro estado excitado de menor energia. (*a*) Um exemplo é o decaimento do núcleo de ^{48}Ti. O estado excitado superior tem um tempo de vida de 1,4 ps; o estado excitado inferior, um tempo de vida de 3,0 ps. Qual é a indeterminação relativa $\Delta E/E$ da energia dos raios gama de 1,3117 MeV que são emitidos na transição do estado superior para o inferior? (*b*) Outro exemplo é a linha H_α da série de Balmer do hidrogênio. Nesse caso, o tempo de vida dos dois estados é praticamente o mesmo, 10^{-8} s. Qual é a indeterminação da energia dos fótons responsáveis pela linha H_α?

5-34. Usando lasers, é possível produzir pulsos luminosos com alguns femtossegundos de duração. Esses pulsos são tão curtos que não é possível associar uma cor específica ao pulso. Para verificar que isso é verdade, calcule a duração de um pulso de laser cujo intervalo de frequências cobre toda a faixa do espectro visível (de $4{,}0 \times 10^{14}$ Hz a $7{,}5 \times 10^{14}$ Hz).

Seção 5-6 Algumas Consequências do Princípio de Indeterminação

5-35. Que tamanho deve ter um corpo para exibir efeitos de difração ao ser bombardeado com nêutrons de 10 MeV? Existe algo na natureza com dimensões dessa ordem de grandeza, que possa ser usado como alvo para demonstrar as propriedades ondulatórias de nêutrons de 10 MeV?

5-36. No interior dos núcleos, a força atrativa entre os prótons e nêutrons se manifesta através da troca de píons (veja o Capítulo 11). Para que isso aconteça sem que a lei de conservação da energia seja violada, o píon deve ser reabsorvido dentro de um intervalo de tempo compatível com o princípio de indeterminação de Heisenberg. Considere a reação de emissão $p \rightarrow p + \pi$, na qual $m_\pi = 135\ \text{MeV}/c^2$. (*a*) Ignorando a energia cinética, de quanto é a violação da conservação de energia nesta reação? Dentro

de que intervalo de tempo o píon deve ser reabsorvido para que a lei de conservação da energia não seja violada?

5-37. Mostre que a relação $\Delta p_s \Delta s > \hbar$ pode ser escrita na forma $\Delta L \Delta \varphi > \hbar$ para uma partícula que esteja se movendo em círculos em torno do eixo dos z, onde p_s é o momento linear tangencial ao círculo, s é o comprimento de um arco de círculo, L é o momento angular e φ é o ângulo subtendido pelo arco de círculo. Com que precisão é possível especificar a posição angular do elétron no átomo de Bohr?

5-38. Um estado excitado de um certo núcleo tem uma meia-vida de 0,85 ns. Considerando que este tempo é a indeterminação Δt para a emissão de um fóton, use a Equação 5-25 para calcular a indeterminação da frequência, Δf, e calcule $\Delta f/f$ para $\lambda = 0{,}01$ nm.

5-39. Os tempos de vida das partículas conhecidas como ressonâncias não podem ser medidos diretamente, mas são calculados a partir da largura (ou indeterminação) da curva da seção reta de espalhamento em função da energia (veja o Capítulo 12). Assim, por exemplo, o espalhamento de um píon por um próton pode dar origem, através da reação $\pi + p \rightarrow \Delta$, a uma ressonância Δ com uma massa de 1.685 MeV/c^2 e uma largura de 250 Mev, como mostra a Figura 5-24. Calcule o tempo de vida da ressonância Δ.

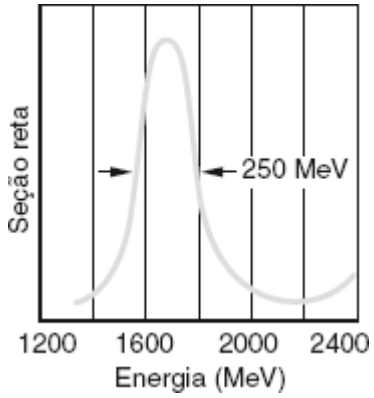


FIGURA 5-24 Problema 5-39.

Seção 5-7 O Dualismo Onda-Partícula

5-40. Uma partícula com uma massa de 4 g, que se move a uma velocidade constante de 100 m/s, atravessa um orifício. Qual deve ser, no máximo, a largura do orifício para que os efeitos de difração da onda de matéria associada à partícula sejam observados? Explique por que um objeto comum não poderia passar pelo orifício.

5-41. Dado que um objeto menor que o comprimento da onda da radiação que o ilumina não pode ser "visto", qual deve ser, no mínimo, a energia cinética dos elétrons de um microscópio eletrônico para que um átomo com um diâmetro de 0,1 nm, o tamanho aproximado de um átomo de silício, possa ser observado?

NÍVEL II

5-42. No interior de um núcleo atômico, os prótons e nêutrons estão confinados em uma região com aproximadamente 10^{-15} m de diâmetro. (*a*) Qual é a velocidade mínima de um próton ou nêutron nessas condições? (*b*) Qual é a energia cinética mínima de um próton ou nêutron nessas condições? (c) Qual seria a energia cinética mínima de um elétron nessas condições?

5-43. Usando a expressão relativística $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, (*a*) mostre que a velocidade de fase da onda associada a um elétron é maior que c; (*b*) mostre que a velocidade de grupo da onda associada a um elétron é igual à velocidade do elétron.

5-44. Mostre que, se y_1 e y_2 são soluções da Equação 5-11, a função $y_3 = C_1y_1 + C_2y_2$ também é uma solução, quaisquer que sejam os valores das constantes C_1 e C_2.

5-45. O apito da polícia de Londres tem uma frequência de 2.500 Hz. Se um guarda sopra o apito durante 3,0 s, (*a*) qual é a incerteza da frequência? (*b*) Qual é a largura do pacote de ondas produzido? (*c*) Qual é a incerteza do comprimento de onda do som? (*d*) Qual é o comprimento de onda do som?

5-46. Uma partícula de massa m está se movendo no interior de uma caixa unidimensional de comprimento L. (Suponha que a energia potencial da partícula no interior da caixa é nula e, portanto, a energia total é igual à energia cinética, $p^2/2m$.) A energia da partícula é quantizada pela condição de onda estacionária $n\lambda/2 = L$, na qual λ é o comprimento de onda da partícula e n é um número inteiro. (*a*) Mostre que as energias permitidas são dadas por $E_n = n^2E_1$, na qual $E_1 = h^2/8mL^2$. (*b*) Determine E_n para um elétron no interior de uma caixa com 0,1 nm de comprimento e faça um diagrama de níveis de energia para os estados de $n = 1$ a $n = 5$. Use o segundo postulado de Bohr, $f = \Delta E/h$, para calcular o comprimento de onda da radiação eletromagnética emitida quando o elétron sofre uma transição (*c*) do estado $n = 2$ para o estado $n = 1$; (*d*) do estado $n = 3$ para o estado $n = 2$; (*e*) do estado $n = 5$ para o estado $n = 1$.

5-47. (*a*) Use os resultados do Problema 5-46 para determinar a energia do estado fundamental ($n = 1$) e dos dois primeiros estados excitados de um próton em uma caixa unidimensional de comprimento $L = 10^{-15}$ m = 1 fm. (Essas energias são da mesma ordem de grandeza que as energias nucleares.) Calcule o comprimento de onda da radiação eletromagnética emitida quando o próton sofre uma transição (*b*) do estado $n = 2$ para o estado $n = 1$; (*c*) do estado $n = 3$ para o estado $n = 2$; (*d*) do estado $n = 3$ para o estado $n = 1$.

5-48. (*a*) Uma partícula de massa *m* é confinada ao espaço unidimensional entre duas barreiras infinitas situadas a uma distância *A* uma da outra. Usando o princípio de indeterminação, obtenha uma expressão para a energia de ponto zero (energia mínima) da partícula. (*b*) Use o resultado do item (*a*) para calcular a energia mínima de um elétron confinado ao espaço entre duas barreiras infinitas para $A = 10^{-10}$ m e $A = 1$ cm. (*c*) Calcule a energia mínima de uma esfera de 100 mg que pode se mover apenas entre dois pontos situados a 2 cm de distância um do outro.

5-49. Um próton e uma bala de revólver de 10 g se movem a uma velocidade de 500 m/s, medida com uma precisão de 0,01%. Se as posições dos dois objetos são medidas ao mesmo tempo que as respectivas velocidades, qual é a maior precisão possível das medidas de posição?

NÍVEL III

5-50. Mostre que a Equação 5-11 é satisfeita pela função $y = f(\varphi)$, na qual $\varphi = x - vt$, qualquer que seja a função *f*.

5-51. Um elétron e um pósitron se movem um em direção ao outro com a mesma velocidade escalar, 3×10^6 m/s. As duas partículas se aniquilam mutuamente e produzem dois fótons de mesma energia. (*a*) Quais eram os comprimentos de onda do elétron e do pósitron? Determine (*b*) a energia; (*c*) o momento; (*d*) o comprimento de onda dos fótons.

5-52. Algumas partículas elementares podem "violar" a lei de conservação da energia criando outra partícula e tornando a absorvê-la logo em seguida. Assim, por exemplo, um próton pode emitir um píon positivo através da reação $p \rightarrow n + \pi^+$, na qual *n* representa um nêutron. O píon tem uma massa de 140 MeV/c^2. A reabsorção deve ocorrer dentro de um intervalo de tempo Δt que seja compatível com o princípio de indeterminação. (*a*) Determine, no exemplo acima, o excesso ΔE pelo qual a lei de conservação da energia foi violada (ignore a energia cinética). (*b*) Por quanto tempo Δt o píon pode existir? (*c*) Supondo que o píon esteja se movendo com uma velocidade praticamente igual à da luz, a que distância do núcleo consegue chegar no intervalo de tempo Δt? (Como veremos no Capítulo 11, este é o alcance aproximado da interação nuclear forte.) (*d*) Supondo que no momento em que um píon é reabsorvido outro píon é emitido, quantos píons seriam registrados por uma "câmara de núcleons" durante 1 μs?

5-53. Inicialmente, de Broglie aplicou a Equação 5-2 aos fótons, imaginando que tivessem uma massa pequena mas diferente de zero. Ele supôs que as ondas de radiofrequência, com $\lambda = 30$ m, viajavam com uma velocidade igual a pelo menos 99% da velocidade da luz visível, para a qual $\lambda = 500$ nm. Partindo da expressão relativística $hf = \gamma mc^2$, na qual $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, verifique a conclusão do cientista de que o limite superior para a massa de repouso do fóton é 10^{-44} g. (*Sugestão*: Encontre uma expressão para v/c em função de hf e mc^2 e suponha que $mc^2 << hf$.)

5-54. Suponha que você deixe cair várias bolinhas de chumbo em um alvo desenhado no chão. De acordo com o princípio de indeterminação, mesmo que o ponto médio de lançamento esteja situado diretamente acima da mosca, as bolinhas não caem necessariamente na mosca, pois o resultado do experimento depende da indeterminação das condições iniciais. (*a*) Se existe uma indeterminação Δx na posição horizontal da bolinha e uma indeterminação Δv_x na componente horizontal da velocidade da bolinha, escreva uma expressão para a dispersão mínima ΔX dos pontos de impacto em relação ao centro do alvo, supondo que a distância vertical entre o ponto de lançamento e o alvo é y_0. (*b*) Modifique o resultado do item (*a*) para incluir o efeito sobre ΔX das indeterminações Δy e Δv_y no ponto de lançamento.

5-55. Usando a aproximação de primeira ordem para o efeito Doppler, $f' = f_0(1 + v/c)$, calcule a variação de energia de um fóton de 1 eV emitido por um átomo de ferro que está se aproximando do observador com uma energia $3kT/2$ a uma temperatura $T = 300$ K. Compare este alargamento Doppler com a largura de linha natural calculada no Exemplo 5-8. Repita o cálculo para um fóton de 1 MeV emitido em uma transição nuclear.

5-56. Calcule a ordem de grandeza da variação de energia de um fóton associada ao recuo de um núcleo de ferro se a energia do fóton for (*a*) 1 eV; (*b*) 1 MeV. Para isso, calcule primeiro o momento do fóton e depois o valor de $p^2/2m$ para o núcleo usando o valor calculado para o momento do fóton. Compare os resultados com a largura de linha natural calculada no Exemplo 5-8.

CAPÍTULO 6

A Equação de Schrödinger

6-1 A Equação de Schrödinger em Uma Dimensão
6-2 O Poço Quadrado Infinito
6-3 O Poço Quadrado Finito
6-4 Valores Esperados e Operadores
6-5 O Oscilador Harmônico Simples
6-6 Reflexão e Transmissão de Ondas

O fato de que o uso de ondas clássicas estacionárias parecia ser uma forma natural de quantizar o momento e a energia das partículas com massa de repouso diferente de zero, apoiado pela demonstração experimental da difração de elétrons e outras partículas, inspirada na hipótese de de Broglie, levou os físicos a buscar uma teoria ondulatória para o elétron análoga à teoria ondulatória da luz. Nessa teoria ondulatória do elétron, a mecânica clássica apareceria como o limite para pequenos comprimentos de onda, assim como a ótica geométrica é o limite da teoria ondulatória da luz para pequenos comprimentos de onda. A gênese da teoria correta é descrita da seguinte forma por Felix Bloch,[1] que estava presente na ocasião:

> ... em um dos colóquios seguintes [no início de 1926], Schrödinger apresentou uma explicação muito clara do modo como de Broglie associava uma onda a uma partícula e a forma como ele [de Broglie] podia chegar às regras de quantização... impondo que uma órbita estacionária contivesse um número inteiro de ondas. Quando terminou, Debye[2] comentou que achava aquela forma de trabalhar quase infantil... [que para] lidar com ondas de forma adequada, era preciso dispor de uma função de onda.

Em 1926, Erwin Schrödinger[3] publicou sua hoje famosa equação de onda, que governa a propagação das ondas de matéria, incluindo as dos elétrons. Alguns meses antes, na tentativa de explicar os fenômenos atômicos, Werner Heisenberg havia proposto uma teoria, aparentemente distinta, que envolvia apenas grandezas mensuráveis. Grandezas dinâmicas, como energia, posição e momento, eram representadas por matrizes; os elementos diagonais dessas matrizes representavam os resultados possíveis das medidas. Embora as teorias de Schrödinger e Heisenberg pareçam diferentes, o próprio Schrödinger provou que são equivalentes, isto é, que uma pode ser demonstrada a partir da outra. A teoria resultante, hoje conhecida como *mecânica ondulatória* ou *mecânica quântica*, foi uma das teorias mais bem-sucedidas de todos os tempos. Embora seus princípios possam parecer estranhos para aqueles de nós cujas experiências se limitam ao mundo macroscópico, e embora a matemática necessária para resolver até mesmo os problemas mais simples seja bastante sofisticada, parece não haver alternativa para descrever corretamente os resultados experimentais da física atômica e nuclear. Neste livro, vamos limitar nosso estudo à teoria de Schrödinger porque é mais fácil de aprender e um pouco menos abstrata que a teoria de Heisenberg. Inicialmente, vamos limitar nossa discussão a problemas unidimensionais que envolvem uma só partícula.

6-1 A Equação de Schrödinger em Uma Dimensão

A equação de onda que governa o movimento de elétrons e outras partículas com massa de repouso diferente de zero, que é análoga à equação de onda clássica (Equação 5-11), foi proposta por Schrödinger no final de 1925 e hoje é conhecida como equação de Schrödinger. Como a equação de onda clássica, a equação de Schrödinger relaciona as derivadas da função de onda em relação ao tempo e em relação ao espaço. O raciocínio seguido por Schrödinger para chegar à equação que recebeu o seu nome foi algo tortuoso e não há necessidade de reproduzi-lo aqui. De qualquer forma, a equação de Schrödinger não pode ser demonstrada, assim como não é possível demonstrar as leis de Newton. *A validade de equação de Schrödinger*, *como a de qualquer equação fundamental*, *está na concordância com os resultados experimentais*. Como a segunda lei de Newton, a equação de Schrödinger não é relativisticamente correta, ou seja, vale apenas para velocidades muito menores que a velocidade da luz. Apesar disso, como o leitor bem sabe, as leis de Newton são perfeitamente satisfatórias para resolver uma imensa quantidade de problemas não relativísticos. O mesmo acontece com a equação de Schrödinger quando é aplicada a problemas não relativísticos de física atômica, molecular e da matéria condensada. Schrödinger tentou, sem sucesso, formular uma equação de onda relativística, o que só foi conseguido por Dirac em 1928.

Embora fosse apropriado simplesmente postular a equação de Schrödinger, podemos ter uma ideia do que esperar considerando primeiro a equação de onda para fótons, que é a Equação 5-11 com a velocidade v igual a c e com a função $y(x, t)$ substituída pelo campo elétrico $\xi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad \textbf{6-1}$$

Como vimos no Capítulo 5, uma solução particularmente importante desta equação é a função de onda harmônica $\xi(x, t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$. Diferenciando esta função duas vezes, obtemos:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi_0 \cos(kx - \omega t) = -\omega^2 \xi(x,t)$$

e

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \xi(x,t)$$

Substituindo na Equação 6-1, temos:

$$-k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

ou

$$\omega = kc \qquad \textbf{6-2}$$

Fazendo $\omega = E/\hbar$ e $p = \hbar k$, já que se trata de uma radiação eletromagnética, temos:

$$E = pc \qquad \textbf{6-3}$$

que, como já vimos, é a relação entre a energia e o momento de um fóton.

Vamos agora aplicar as relações de de Broglie a uma partícula como o elétron e determinar uma relação entre ω e k que seja análoga à Equação 6-2. Poderemos então usar este resultado para verificar qual deve ser a diferença entre a equação de onda para elétrons e a Equação 6-1. A energia total de uma partícula (não relativística) de massa m é dada por



Erwin Schrödinger. [*Cortesia da Niels Bohr Library, American Institute of Physics.*]

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \qquad \textbf{6-4}$$

em que V é a energia potencial. Combinando as relações de de Broglie (Equações 5-21 e 5-22) com a Equação 6-4, obtemos:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \qquad \textbf{6-5}$$

Existem duas diferenças importantes entre a Equação 6-5 e a Equação 6-2: a presença da energia potencial V e o fato de que a frequência angular ω não varia linearmente com k. Observe que obtemos um fator de ω quando derivamos uma função de onda harmônica em relação ao tempo e um fator de k quando derivamos a função em relação à posição. Esperamos, portanto, que a função de onda para os elétrons relacione a derivada *primeira* em relação ao tempo à derivada *segunda* em relação ao espaço e que também envolva a energia potencial do elétron.

Finalmente, também é preciso que a equação de onda para os elétrons seja uma equação diferencial linear em relação à função de onda $\Psi(x, t)$. Isso assegura que, se $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$ forem soluções da equação de onda para a mesma energia potencial, qualquer combinação linear destas soluções também seja uma solução, isto é, que $\Psi(x, t) = a_1\Psi_1(x, t) + a_2\Psi_2(x, t)$ seja uma solução, em que a_1 e a_2 são constantes arbitrárias. Uma combinação deste tipo é dita *linear* porque as funções $\Psi_1(x, t)$ e $\Psi_2(x, t)$ aparecem apenas elevadas à primeira potência. A linearidade garante que diferentes funções de onda se somem para produzir interferências construtivas e destrutivas, que, como vimos, constituem uma característica importante das ondas de matéria. Observe, em particular, que (1) *todos* os termos da equação de onda devem ser lineares em relação a $\Psi(x, t)$; (2) *todas* as derivadas de $\Psi(x, t)$ devem ser lineares em relação a $\Psi(x, t)$.[4]

A Equação de Schrödinger

Estamos agora prontos para postular a equação de Schrödinger para uma partícula de massa m. Em uma dimensão, a equação tem a seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \qquad \textbf{6-6}$$

Vamos mostrar que esta equação é satisfeita por uma função de onda harmônica no caso especial de uma partícula livre, isto é, sobre a qual não age nenhuma força e para a qual, portanto, a energia potencial é constante: $V(x, t) = V_0$. Observe, em primeiro lugar, que uma função da forma $\cos(kx - \omega t)$ não satisfaz esta equação porque a derivação em relação ao tempo transforma o

cosseno em seno, mas duas derivações sucessivas em relação a x produzem um cosseno. Um raciocínio semelhante mostra que a função sen($kx - \omega t$) também não pode ser uma solução. Entretanto, a forma exponencial da função de onda harmônica satisfaz a equação. Considere a função

$$\begin{aligned}\Psi(x,t) &= Ae^{i(kx-\omega t)} \\ &= A\left[\cos(kx - \omega t) + i\,\mathrm{sen}(kx - \omega t)\right] \end{aligned} \quad \textbf{6-7}$$

na qual A é uma constante. Nesse caso,

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\omega A\, e^{i(kx-\omega t)} = -i\omega\Psi$$

e

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = (ik)^2 A\, e^{i(kx-\omega t)} = -k^2\Psi$$

Substituindo essas derivadas na equação de Schrödinger e fazendo $V(x, t) = V_0$, obtemos:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}(-k^2\Psi) + V_0\Psi = i\hbar(-i\omega)\Psi$$

ou

$$\frac{\hbar^2k^2}{2m} + V_0 = \hbar\omega$$

que é a Equação 6-5.

Uma diferença importante entre a equação de Schrödinger e a equação de onda clássica está no fato de que o número imaginário $i = \sqrt{-1}$ aparece explicitamente[5] na equação de Schrödinger. As funções de onda que satisfazem a equação de Schrödinger não são necessariamente reais, como podemos ver no caso da função de onda de uma partícula livre (Equação 6-7). Isso significa que a função de onda $\Psi(x, t)$ que satisfaz a equação de Schrödinger não é uma função diretamente mensurável como a função de onda clássica $y(x, t)$, já que os resultados de medições são necessariamente números reais. Entretanto, como vimos na Seção 5-4, a probabilidade de encontrarmos um elétron no intervalo entre x e $x + dx$ pode ser determinada, assim como podemos determinar a probabilidade de que o resultado de uma jogada de cara ou coroa seja cara. A probabilidade $P(x)dx$ de que o elétron seja encontrado no intervalo entre x e $x + dx$ foi definida pela Equação 5-23 como igual a $|\Psi|^2dx$. Esta interpretação probabilística de Ψ foi proposta por Max Born e reconhecida, apesar dos imediatos e respeitáveis protestos de Einstein e Schrödinger, como o modo mais apropriado de relacionar as soluções da equação de Schrödinger aos resultados de medições. A probabilidade de que um elétron esteja no intervalo dx, um número real, pode ser medida verificando que fração do tempo a partícula é encontrada nesta região em uma série muito grande de situações iguais. Como $\Psi(x, t)$ é uma função complexa, devemos modificar ligeiramente a interpretação da função de onda que foi discutida no Capítulo 5 para que a probabilidade de encontrar o elétron no intervalo de dx, de acordo com a interpretação de Born, seja um número real. Definimos essa probabilidade por meio da equação

$$P(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = \left|\Psi(x,t)\right|^2dx \quad \textbf{6-8}$$

na qual Ψ^*, o complexo conjugado de Ψ, é obtido substituindo i por $-i$ na função Ψ.[6] O fato de que Ψ é uma função complexa apenas reforça a ideia de que é inútil tentar responder a perguntas como "O que está oscilando em uma onda de matéria?" e "Em que tipo de meio as ondas de matéria se propagam?" A função de onda não passa de um artifício matemático; o que tem significado real é o produto $\Psi^*\Psi = |\Psi|^2$, que representa uma distribuição de probabilidade $P(x, t)$ ou, como também é frequentemente chamado, uma *densidade de probabilidade*. Para manter a analogia com as ondas e funções de onda clássicas, $\Psi(x, t)$ é às vezes chamada de *amplitude de densidade de probabilidade* ou simplesmente *amplitude de probabilidade*.

A probabilidade de que um elétron seja encontrado no intervalo (x_1, $x_1 + dx$) ou no intervalo (x_2, $x_2 + dx$) é a soma das probabilidades parciais, $P(x_1)dx + P(x_2)dx$. Como o elétron tem que estar necessariamente em algum ponto do espaço, a soma das probabilidades para todos os valores possíveis de x deve ser igual a 1. Assim, temos:[7]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \Psi \, dx = 1 \qquad \textbf{6-9}$$

A Equação 6-9 é conhecida como *condição de normalização*. Esta condição desempenha um papel importante na mecânica quântica, pois impõe uma restrição adicional às possíveis soluções da equação de Schrödinger. No caso particular que estamos considerando, a condição de normalização significa que a função de onda $\Psi(x, t)$ deve tender a zero com rapidez suficiente para que a integral da Equação 6-9 permaneça finita quando $x \rightarrow \pm\infty$. Se isso não acontecer, a probabilidade não poderá ser definida. Como vamos ver na Seção 6-3, é esta restrição, combinada com as condições de contorno do problema, que leva à quantização da energia de partículas confinadas.

Nos capítulos que se seguem, vamos estudar as soluções da equação de Schrödinger para uma grande variedade de sistemas reais; ao longo deste capítulo, porém, estaremos interessados apenas em apresentar algumas das técnicas usadas para resolver a equação e discutir as propriedades muitas vezes surpreendentes das soluções. Com este objetivo, vamos nos concentrar em problemas unidimensionais e usar algumas funções de energia potencial pouco realistas, como, por exemplo, barreiras infinitas, que nos permitirão investigar as várias propriedades das soluções sem nos perdermos em complicações matemáticas. Vamos descobrir que muitos problemas práticos podem ser resolvidos aproximadamente usando esses modelos simples.

Separação das Funções do Tempo e do Espaço de $\psi(x, t)$

Schrödinger aplicou primeiro sua equação de onda a problemas simples como o do átomo de hidrogênio (no modelo de Bohr) e o do oscilador harmônico (no modelo de Planck), mostrando que a quantização da energia nesses sistemas pode ser explicada naturalmente em termos de ondas estacionárias. Essas ondas também são chamadas de *autofunções*. Nos problemas em que a energia potencial não varia com o tempo, as funções do tempo e do espaço na equação de onda podem ser separadas, o que permite escrever a equação de Schrödinger em uma forma muito mais simples.[8] Para isso, supomos que a função $\psi(x, t)$ é o produto de uma função apenas de x por uma função apenas de t:

$$\Psi(x,t) = \psi(x)\phi(t) \qquad \textbf{6-10}$$

Vamos mostrar em seguida que a função $\Psi(x, t)$ pode ser escrita na forma da Equação 6-10 nos casos em que função potencial *não varia com o tempo*, ou seja, pode ser escrita na forma $V(x)$.

Substituindo $\Psi(x, t)$, dada pela Equação 6-10, na equação de Schrödinger, Equação 6-6, obtemos:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)\phi(t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)\phi(t) = i\hbar\frac{\partial\psi(x)\phi(t)}{\partial t} \qquad \textbf{6-11}$$

o que nos dá

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\phi(t)\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x)\phi(t) = i\hbar\psi(x)\frac{d\phi(t)}{dt} \qquad \textbf{6-12}$$

onde as derivadas agora são ordinárias e não parciais. Dividindo a Equação 6-12 por $\psi(x)\phi(t)$, temos:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x) = i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{d\phi(t)}{dt} \qquad \textbf{6-13}$$

Observe que o lado esquerdo da Equação 6-13 é função apenas de x e o lado direito é função apenas de t. Isso significa que variações de t não podem afetar o valor do lado esquerdo da Equação 6-13 e variações de x não podem afetar o valor do lado direito. Assim, os dois lados da equação devem ser iguais à mesma constante C, conhecida como *constante de separação*, e vemos que a hipótese da Equação 6-10 é válida: as variáveis podem ser separadas. Com isso, substituímos uma equação diferencial parcial com duas variáveis independentes, a Equação 6-6, por duas equações diferenciais ordinárias com apenas uma variável independente cada uma:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi(x)}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x) = C \qquad \textbf{6-14}$$

$$i\hbar\frac{1}{\phi(t)}\frac{d\phi(t)}{dt} = C \qquad \textbf{6-15}$$

Vamos resolver primeiro a Equação 6-15. Existem dois motivos para isso: (1) a Equação 6-15 não envolve o potencial $V(x)$; em consequência, a parte dependente do tempo $\phi(t)$ de *todas* as soluções $\Psi(x, t)$ da equação de Schrödinger tem a mesma forma quando o potencial não varia com o tempo, de modo que só precisamos fazer o cálculo uma vez; (2) a constante de separação C tem um significado especial que queremos discutir antes de resolver a Equação 6-14. A Equação 6-15 pode ser escrita na forma

$$\frac{d\phi(t)}{\phi(t)} = \frac{C}{i\hbar}dt = -\frac{iC}{\hbar}dt \qquad \textbf{6-16}$$

A solução geral da Equação 6-16 é

$$\phi(t) = e^{-iCt/\hbar} \qquad \textbf{6-17}a$$

que também pode ser escrita na forma

$$\phi(t) = e^{-iCt/\hbar} = \cos\left(\frac{Ct}{\hbar}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{Ct}{\hbar}\right) =$$
$$= \cos\left(2\pi\frac{Ct}{h}\right) - i\,\mathrm{sen}\left(2\pi\frac{Ct}{h}\right) \qquad \textbf{6-17}b$$

Assim, $\phi(t)$, que descreve a variação com o tempo de $\Psi(x, t)$, é uma função oscilatória de frequência $f = C/h$. Entretanto, de acordo com a relação de de Broglie (Equação 5-1), a frequência da onda representada por $\Psi(x, t)$ é $f = E/h$; assim, a constante de separação C deve ser igual a E, a energia total da partícula, e, portanto,

$$\phi(t) = e^{-iEt/\hbar} \qquad \textbf{6-17}c$$

para todas as soluções da Equação 6-6 que envolvem potenciais independentes do tempo. Fazendo $C = E$ na Equação 6-14 e multiplicando ambos os membros por $\psi(x)$, obtemos:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad \textbf{6-18}$$

A Equação 6-18 é conhecida como *equação de Schrödinger independente do tempo.*

A equação de Schrödinger independente do tempo em uma dimensão é uma equação diferencial ordinária com apenas uma variável independente e, portanto, é muito mais fácil de lidar que a forma geral da equação de Schrödinger (Equação 6-6). A condição de normalização da Equação 6-9 pode ser expressa em termos de $\psi(x)$, já que a variação com o tempo desaparece quando calculamos o quadrado do valor absoluto da função de onda:

$$\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \psi^*(x)e^{+iEt/\hbar}\psi(x)e^{-iEt/\hbar} = \psi^*(x)\psi(x) \qquad \textbf{6-19}$$

e, portanto, a Equação 6-9 se reduz a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \qquad \textbf{6-20}$$

Condições que uma Função de Onda Deve Satisfazer

A forma da função de onda $\psi(x)$ que satisfaz a Equação 6-18 depende da forma da função energia potencial $V(x)$. Nas próximas seções, vamos discutir alguns problemas simples, mas importantes, nos quais $V(x)$ é especificada. Os potenciais usados nesses exemplos serão aproximações de potenciais encontrados na natureza, simplificados para facilitar os cálculos matemáticos. Em alguns casos, a derivada da energia potencial pode ser descontínua, isto é, $V(x)$ pode ter uma forma em uma região do espaço e outra forma em uma região vizinha. [Esta é uma aproximação válida de situações reais nas quais $V(x)$ varia rapidamente em uma pequena região do espaço, como a superfície de um metal.] O método usado nesses casos consiste em resolver separadamente a equação de Schrödinger para cada região e exigir que as soluções sejam iguais nos pontos de transição.

Como a probabilidade de encontrar uma partícula não pode variar descontinuamente de um ponto para o ponto vizinho, a função de onda $\psi(x)$ deve ser contínua.[9] Como a equação de Schrödinger envolve a derivada segunda $d^2\psi/dx^2 = \psi''(x)$, a derivada primeira, $d\psi/dx = \psi'(x)$ [que é a inclinação de $\psi(x)$], também deve ser contínua. Assim, o gráfico de $\psi(x)$ em função de x não deve apresentar variações bruscas. [Nos casos especiais em que a energia potencial é infinita em uma certa região do

espaço, esta restrição não existe. Como nenhuma partícula pode ter energia potencial infinita, $\psi(x)$ deve ser nula nas regiões onde $V(x)$ é infinita. Isso significa que, na fronteira de uma região na qual a energia potencial é infinita, $\psi'(x)$ deve ser descontínua para que $\psi(x)$ se anule bruscamente.]

Se $\psi(x)$ ou $d\psi/dx$ não fosse finita ou unívoca, o mesmo aconteceria com $\Psi(x, t)$ ou $d\Psi/dx$. Como veremos daqui a pouco, as previsões da mecânica ondulatória com relação aos resultados de medições envolvem essas duas grandezas e, portanto, funções de onda com essas propriedades não seriam aceitáveis, já que grandezas mensuráveis, como momento angular e posição, jamais são infinitas ou plurívocas. Uma restrição final quanto à forma da função de onda $\psi(x)$ é que $\psi(x)$ deve tender a zero quando $x \rightarrow \pm\infty$ com rapidez suficiente para que a normalização seja preservada. Vamos resumir, para futuras consultas, as condições que uma função de onda $\psi(x)$ deve satisfazer:

1. $\psi(x)$ deve existir, ser contínua e satisfazer a equação de Schrödinger.
2. $d\psi/dx$ deve existir e ser contínua.
3. $\psi(x)$ e $d\psi/dx$ devem ser finitas.
4. $\psi(x)$ e $d\psi/dx$ devem ser unívocas.
5. ψ deve tender a zero com suficiente rapidez, quando $x \rightarrow \pm\infty$, para que a integral de normalização, Equação 6-20, convirja.

Exercícios

1. Como a equação de onda clássica, a equação de Schrödinger é linear. Por que isso é importante?
2. Não existe um fator $i = \sqrt{-1}$ na Equação 6-18. Isso significa que $\psi(x)$ deve ser real?
3. Por que o campo elétrico $\xi(x, t)$ deve ser real? A equação de onda clássica pode ser satisfeita por funções complexas?
4. Explique a relação entre a equação de Schrödinger e a hipótese de de Broglie.
5. Qual seria o efeito sobre a equação de Schrödinger de somarmos a energia de repouso de uma partícula à energia total E que aparece na relação de de Broglie $f = E/h$?
6. Descreva em palavras o que significa a normalização da função de onda.

EXEMPLO 6-1 **Uma Solução da Equação de Schrödinger** Mostre que, para uma partícula livre, de massa m, que se move em uma dimensão, a função $\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$ é uma solução da equação de Schrödinger independente do tempo para qualquer valor das constantes A e B.

SOLUÇÃO

Para uma partícula livre, $V(x) = 0$ e, portanto, a energia total é igual à energia cinética; assim, $p = \hbar k = (2mE)^{1/2}$. Derivando $\psi(x)$, obtemos:

$$\frac{d\psi}{dx} = kA\cos kx - kB\operatorname{sen} kx$$

Derivando novamente, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dx^2} &= -k^2 A\operatorname{sen} kx - k^2 B\cos kx \\ &= -k^2(A\operatorname{sen} kx + B\cos kx) = -k^2\psi(x)\end{aligned}$$

Substituindo na Equação 6-18,

$$\frac{-\hbar^2}{2m}[(-k^2)(A\operatorname{sen} kx + B\cos kx)] = E(A\operatorname{sen} kx + B\cos kx)$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi(x) = E\psi(x)$$

Como $\hbar^2 k^2 = 2mE$, temos:

$$E\psi(x) = E\psi(x)$$

e, portanto, a função dada é uma solução da Equação 6-18.

6-2 O Poço Quadrado Infinito

Um problema que pode ser usado para ilustrar várias propriedades das funções de onda e também é um dos problemas mais fáceis de resolver usando a equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo é o do poço quadrado infinito, também chamado de problema da partícula em uma caixa. Um exemplo macroscópico seria uma conta pendurada em um fio sem atrito e limitada a mover-se entre dois obstáculos impenetráveis. Podemos também construir uma "caixa" para elétrons usando eletrodos e grades em um tubo evacuado, como na Figura 6-1*a*. As paredes da caixa são representadas pelos potenciais entre as grades *G* e os eletrodos *C* (Figuras 6-1*b* e 6-1*c*). Para tornar as paredes mais altas e mais íngremes, basta aumentar o potencial *V* e diminuir a distância entre os eletrodos e as grades, respectivamente. No limite, a energia potencial tem o aspecto da Figura 6-2, que é um gráfico da energia potencial de um poço quadrado infinito. Neste problema, a energia potencial é da forma

$$\begin{aligned} V(x) &= 0 \qquad 0 < x < L \\ V(x) &= \infty \qquad x < 0 \quad \text{e} \quad x > L \end{aligned} \tag{6-21}$$

Embora um potencial assim definido seja claramente artificial, vale a pena analisar este problema a fundo, por várias razões: (1) soluções exatas da equação de Schrödinger podem ser obtidas sem a difícil matemática que quase sempre é necessária no caso de potenciais mais realistas; (2) o problema está relacionado de perto ao problema da corda vibrante da física clássica; (3) o problema pode ser usado para ilustrar muitos aspectos gerais dos problemas da mecânica quântica; (4) este potencial constitui uma aproximação razoável para algumas situações reais, como a de um elétron livre no interior de um metal (veja o Capítulo 10).

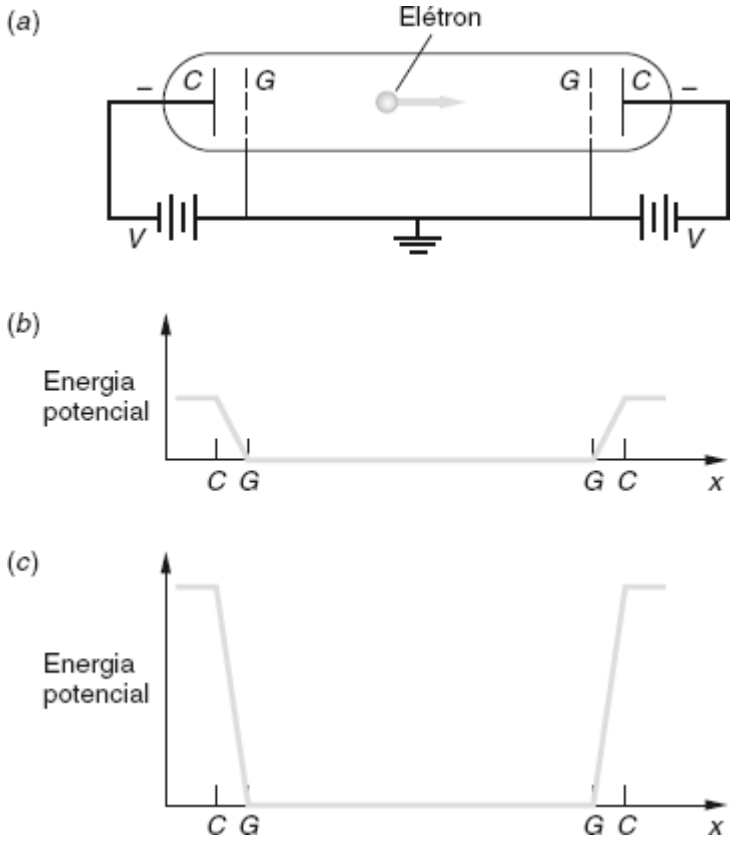


FIGURA 6-1 (*a*) Um elétron que se encontre na região entre as duas grades *G* não experimenta nenhuma força, já que as grades estão aterradas. Nas regiões entre as grades *G* e os eletrodos *C*, porém, existe um campo elétrico cuja intensidade depende do valor da tensão *V*. (*b*) Quando *V* é pequena, o gráfico da energia potencial do elétron em função de *x* apresenta "paredes" pequenas e com uma inclinação suave. (*c*) Quando *V* é grande, as paredes são altas e íngremes, tornando-se intransponíveis quando $V \rightarrow \infty$.

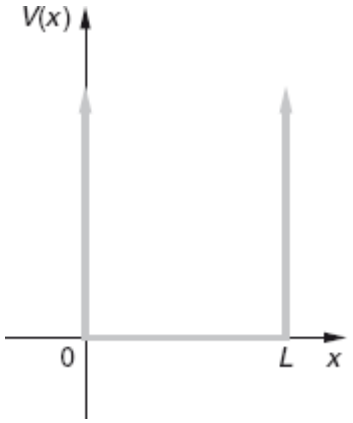


FIGURA 6-2 Energia potencial de um poço quadrado infinito. Para $0 < x < L$, a energia potencial $V(x)$ é nula. Fora dessa região, $V(x)$ é infinita. A partícula fica confinada na região do poço, $0 < x < L$.

Como a energia potencial é infinita do lado de fora do poço, a função de onda é necessariamente nula nessa região, ou seja, a partícula não pode deixar o poço. (Durante a resolução deste e de outros problemas, não se esqueça da interpretação de Born: a densidade de probabilidade da posição da partícula é proporcional a $|\psi|^2$.) Assim, precisamos resolver a Equação 6-18 apenas na região no interior do poço, $0 < x < L$, atendendo à condição de que, como a função de onda deve ser contínua, $\psi(x)$ deve ser nula em $x = 0$ e $x = L$. A condição imposta à função de onda na fronteira entre dois meios (no caso, a fronteira entre a região em que a energia potencial é nula e a região em que a energia potencial é infinita) é chamada de *condição de contorno*. Vamos ver que, do ponto de vista matemático, são as condições de contorno que, juntamente com a exigência de que $\psi(x) \rightarrow 0$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, levam à quantização da energia. Um exemplo clássico é o de uma corda vibrante fixa nas duas extremidades. Nesse caso, a função de onda $y(x, t)$ é o deslocamento da corda. Se os pontos fixos da corda são $x = 0$ e $x = L$, temos as mesmas condições de contorno que no caso do poço quadrado infinito, isto é, $y(x, t)$ deve ser nula em $x = 0$ e $x = L$. Essas condições de contorno levam à quantização das frequências de vibração da corda. Foi esta quantização de frequências (que sempre ocorre na física clássica nos problemas que envolvem ondas estacionárias), juntamente com a hipótese de de Broglie, que motivou Schrödinger a procurar uma equação de onda para os elétrons.

A condição de onda estacionária para ondas clássicas em uma corda de comprimento L fixa nas duas extremidades é que *a corda contenha um número inteiro de meios comprimentos de onda*:

$$n\frac{\lambda}{2} = L \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{6-22}$$

Vamos mostrar em seguida que a mesma condição surge espontaneamente na solução da equação de Schrödinger para uma partícula em um poço quadrado infinito (Figura 6-2). Como o comprimento de onda está relacionado ao momento da partícula através da relação de de Broglie $p = h/\lambda$ e a energia total da partícula no interior do poço é igual à energia cinética $p^2/2m$, esta quantização do comprimento de onda significa que a energia também é quantizada e que os valores permitidos são dados por

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} = \frac{h^2}{2m(2L/n)^2} = n^2\frac{h^2}{8mL^2} \qquad \textbf{6-23}$$

Como a energia depende do número inteiro n, costuma-se usar o símbolo E_n para representá-la. Em termos de $\hbar = h/2\pi$, a energia é dada por

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = n^2E_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{6-24}$$

em que E_1 é a menor energia permitida,[10] dada por

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad \textbf{6-25}$$

Vamos agora chegar ao mesmo resultado resolvendo a equação de Schrödinger independente do tempo (Equação 6-18), que, para $V(x) = 0$, é dada por

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

ou

$$\psi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = -k^2\psi(x) \qquad \textbf{6-26}$$

em que

$$k^2 = \left(\frac{p}{\hbar}\right)^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \qquad \textbf{6-27}$$

é o quadrado do número de onda e $\psi''(x) \equiv d^2\psi(x)/dx^2$. A Equação 6-26 possui soluções da forma

$$\psi(x) = A\operatorname{sen} kx \qquad \textbf{6-28}a$$

e

$$\psi(x) = B\cos kx \qquad \textbf{6-28}b$$

em que A e B são constantes. A condição de contorno $\psi(x) = 0$ em $x = 0$ exclui a solução em cosseno (Equação 6-28*b*) porque cos 0 = 1; assim, devemos ter necessariamente $B = 0$. A condição de contorno $\psi(x) = 0$ em $x = L$ nos dá

$$\psi(L) = A\operatorname{sen} kL = 0 \qquad \textbf{6-29}$$

Para que esta condição seja satisfeita, kL deve ser igual a um número inteiro multiplicado por ψ, isto é, os valores permitidos de k são dados por

$$k_n = n\frac{\pi}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{6-30}$$

Escrevendo o número de onda k em termos do comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$, vemos que a Equação 6-30 é igual à Equação 6-22, usada para calcular os comprimentos de onda das ondas estacionárias em uma corda vibrante. Os níveis de energia quantizados, ou *autovalores de energia*, podem ser obtidos a partir da Equação 6-27 substituindo k pelos valores k_n dados pela Equação 6-30. O resultado é

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = n^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = n^2E_1$$

que é igual à Equação 6-24. A Figura 6-3 mostra o diagrama de níveis de energia e a função energia potencial do poço quadrado infinito.

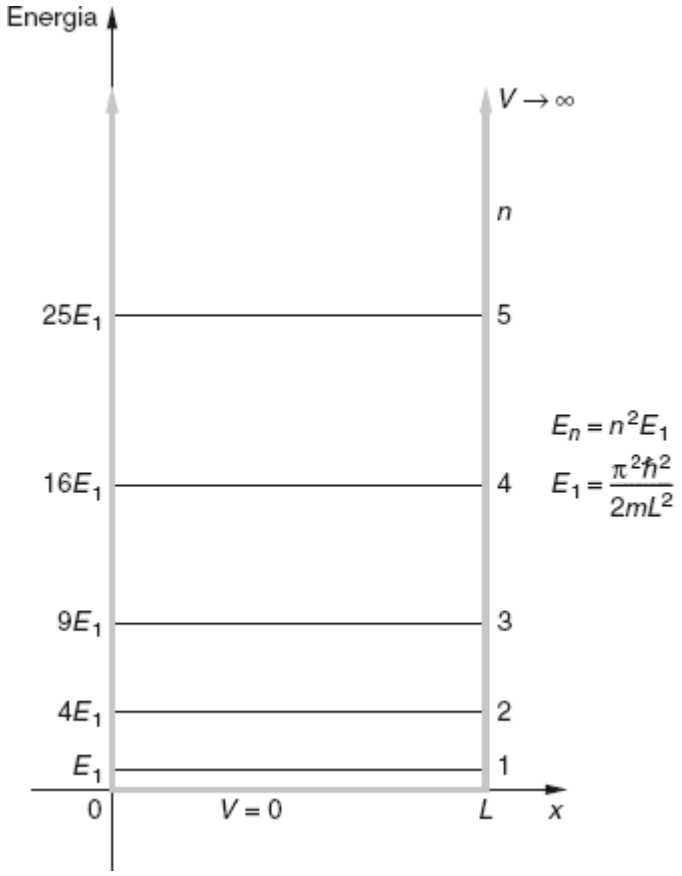


FIGURA 6-3 Gráfico da energia em função de x para uma partícula em um poço quadrado infinito. A energia potencial $V(x)$ está indicada por retas verticais. O conjunto de valores permitidos E_n da energia total, dados pela Equação 6-24, constitui o diagrama de níveis de energia do poço de potencial quadrado infinito. Classicamente a energia da partícula pode ter qualquer valor. Na mecânica quântica, apenas os valores dados por $E_n = n^2(\hbar^2\pi^2/2mL^2)$ estão associados a soluções bem comportadas da equação de Schrödinger. Normalmente, o eixo x é omitido nos diagramas de níveis de energia.

A constante A da função de onda da Equação 6-28*a* é determinada pela condição de normalização:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_n \psi_n dx = \int_0^L A_n^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 1 \qquad \textbf{6-31}$$

Como a função de onda é nula nas regiões do espaço onde a energia potencial é infinita, as regiões de $-\infty$ a 0 e de L a $+\infty$ não contribuem para a integral. Assim, só é necessário calcular a integral de 0 a L. O resultado, que não depende de n, é $A_n = (2/L)^{1/2}$. As funções de onda normalizadas que representam as soluções deste problema, também conhecidas como *autofunções*, são, portanto, dadas por

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{6-32}$$

Essas funções de onda são exatamente iguais às ondas estacionárias $y_n(x)$ de uma corda vibrante. As funções de onda e as distribuições de probabilidade $P_n(x)$ são mostradas na Figura 6-4 para o estado de menor energia, $n = 1$, denominado *estado fundamental*, e para os dois primeiros *estados excitados*, $n = 2$ e $n = 3$. [Como neste caso as funções de onda são reais, $P_n(x) = \psi^*_n\psi_n = \psi^2_n$.] Observe na Figura 6-4 que os valores máximos de $\psi_n(x)$ e $P_n(x)$ são $(2/L)^{1/2}$ e $2/L$, respectivamente, para qualquer valor de n. Observe também que tanto $\psi_n(x)$ como $P_n(x)$ existem para qualquer valor de x entre $-\infty$ e $+\infty$, mas são diferentes de zero apenas para $x > 0$ e $x < L$.

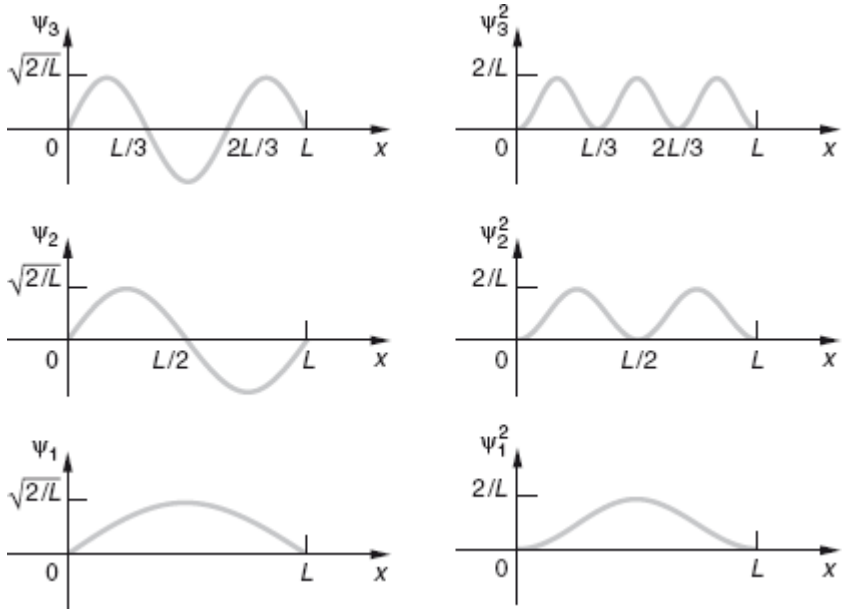


FIGURA 6-4 Funções de onda $\psi_n(x)$ e densidades de probabilidade $P_n(x) = \psi^2_n(x)$ com $n = 1$, 2 e 3, para o poço quadrado infinito. Embora não seja mostrado na figura, $\psi_n(x) = 0$ para $x < 0$ e $x > L$.

O número n que aparece nas equações acima é chamado de *número quântico* e especifica tanto a energia como a função de onda. Dado um valor qualquer de n, podemos escrever imediatamente a função de onda e a energia do sistema. O número quântico n aparece por causa das condições de contorno, $\psi(x) = 0$ em $x = 0$ e $\psi(x) = 0$ em $x = L$. Vamos ver na Seção 7-1 que nos problemas tridimensionais surgem naturalmente três números quânticos, associados às condições de contorno das três coordenadas.

Comparação com os Resultados Clássicos

Vamos agora comparar nossa solução do problema usando a mecânica quântica com a solução clássica. Na mecânica clássica, se conhecemos a função energia potencial $V(x)$, podemos determinar a força por meio da equação $F_x = -dV/dx$ e a aceleração por meio da equação $a_x = F_x/m$ (segunda lei de Newton). Integrando duas vezes a aceleração, podemos calcular a posição x em função do tempo t se conhecermos a posição inicial e a velocidade inicial. No problema que estamos considerando, não existe nenhuma força quando a partícula se encontra na região entre as paredes do poço, pois nessa região $V = 0$. Assim, a partícula se move com velocidade constante no interior do poço. Nas paredes do poço, a energia potencial muda descontinuamente de zero para infinito. Podemos interpretar essa variação como a presença de uma força muito grande que age apenas a curta distância e faz a partícula ricochetear na parede, passando a mover-se no sentido oposto com a mesma velocidade. Classicamente, qualquer velocidade, e, portanto, qualquer energia, é permitida. A descrição clássica não é adequada porque, de acordo com o princípio de indeterminação, não podemos especificar exatamente a posição e o momento (e, portanto, a velocidade) ao mesmo tempo. Isso significa que não podemos especificar com precisão as condições iniciais e, portanto, não podemos atribuir à partícula uma posição e um momento definidos. Naturalmente, no caso de uma partícula macroscópica no interior de uma caixa macroscópica, a energia é muito maior que a constante E_1 da Equação 6-25 e a indeterminação mínima do momento, que é da ordem de $\hbar/L$, é muito menor que o momento e também muito menor que o erro experimental. Nesse caso, a diferença entre as energias de estados vizinhos corresponde a uma pequena fração da energia total, a quantização é imperceptível e a descrição clássica é perfeitamente adequada.[11]

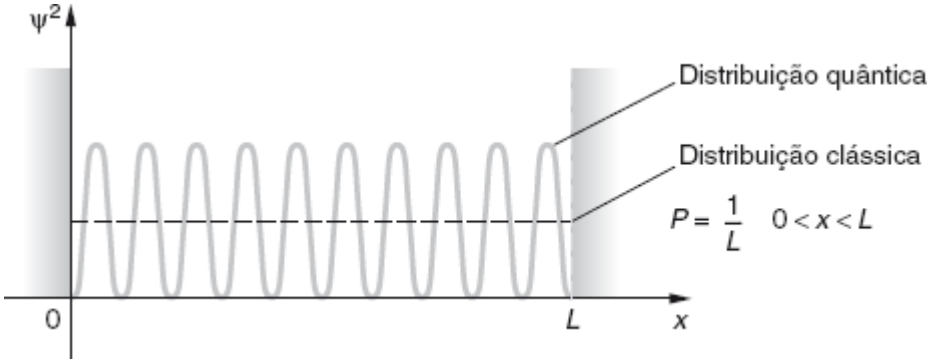


FIGURA 6-5 Distribuição de probabilidade do poço quadrado infinito para $n = 10$. A linha tracejada é a densidade de probabilidade

clássica $P = 1/L$, que é igual à média da distribuição quântica em uma região Δx contendo várias oscilações. Uma medição com resolução Δx fornecerá o valor clássico se n for suficientemente grande para que o intervalo Δx contenha muitas oscilações de $\psi^2(x)$.

Vamos também comparar a previsão clássica para a distribuição das medidas de posição com os resultados da mecânica quântica. Classicamente, a probabilidade de encontrarmos a partícula em uma certa região dx depende do tempo que a partícula passa na região, que é proporcional a dx/v, em que v é a velocidade. Como a velocidade é constante, a função de distribuição clássica é constante no interior do poço. A função de distribuição clássica normalizada é dada por

$$P_C(x) = \frac{1}{L}$$

A Figura 6-4 mostra que, no caso dos estados de baixa energia, a função de distribuição quântica está longe de ser uniforme. De acordo com o princípio de correspondência de Bohr, toda distribuição quântica deve tender para a distribuição clássica correspondente quando $n \to \infty$, isto é, para altas energias. Para qualquer estado n, a distribuição quântica apresenta n picos. A Figura 6-5 mostra a distribuição para $n = 10$. No caso de valores muito grandes de n, os picos estão muito próximos; se existem muitos picos em uma pequena região Δx, apenas o valor médio é observado. Acontece que o valor médio de $\text{sen}^2\, k_n x$ para um ou mais ciclos completos é 1/2. Assim,

$$[\psi_n^2(x)]_{\text{méd}} = \left[\frac{2}{L}\text{sen}^2 k_n x\right]_{\text{méd}} = \frac{2}{L}\frac{1}{2} = \frac{1}{L}$$

que é exatamente a distribuição clássica.

A Função de Onda Completa

De acordo com as Equações 6-10 e 6-17*c*, a função de onda completa, incluindo a variação temporal, é obtida multiplicando a parte espacial por

$$e^{-i\omega t} = e^{-i(E_n/\hbar)t}$$

Como já observamos, a função de onda correspondente a uma energia E_n varia no tempo com uma frequência angular $\omega_n = E_n/\hbar$, mas a distribuição de probabilidade $|\Psi_n(x, t)|^2$ é independente do tempo. Esta é a razão pela qual um estado desse tipo é chamado de estado estacionário. É instrutivo examinar a função de onda completa para um estado n:

$$\Psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\text{sen}k_n x\, e^{-i\omega_n t}$$

Usando a identidade

$$\text{sen}k_n x = \frac{(e^{ik_n x} - e^{-ik_n x})}{2i}$$

podemos escrever a função de onda na forma

$$\Psi_n(x,t) = \frac{1}{2i}\sqrt{\frac{2}{L}}\left[e^{i(k_n x - \omega_n t)} - e^{-i(k_n x + \omega_n t)}\right]$$

Exatamente como no caso da função de onda estacionária de uma corda vibrante, podemos considerar esta função de onda estacionária como a superposição de duas ondas de mesma frequência e amplitude, uma se propagando para a direita e outra para a esquerda. Como as grandezas mensuráveis estão relacionadas a $P \propto |\Psi|^2$, o fato de que Ψ é uma função complexa não é problema.

EXEMPLO 6-2 **Um Elétron em um Fio** Um elétron que se move em um fio fino de metal é uma aproximação razoável para uma partícula em um poço infinito unidimensional. O potencial no interior do fio é constante mas aumenta bruscamente nas extremidades. Suponha que o fio tem 1,0 cm de comprimento. (*a*) Calcule a energia do estado fundamental do elétron. (*b*) Se a energia do elétron é igual à energia cinética média das moléculas em um gás à temperatura $T = 300$ K, cerca de 0,03 eV, qual é o número quântico n do elétron?

SOLUÇÃO

1. (*a*) A energia do estado fundamental é dada pela Equação 6-25:

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$
$$= \frac{\pi^2(1{,}055 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}{(2)(9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(10^{-2}\,\text{m})^2}$$
$$= 6{,}03 \times 10^{-34}\,\text{J} = 3{,}80 \times 10^{-15}\,\text{eV}$$

2. (*b*) A energia do estado *n* é dada pela Equação 6-24:

$$E_n = n^2 E_1$$

e, portanto,

$$n^2 = \frac{E_n}{E_1}$$

Fazendo E_n = 0,03 V, substituindo E_1 pelo valor calculado no item (*a*) e extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtemos:

$$n = \sqrt{\frac{E_n}{E_1}} = \sqrt{\frac{0{,}03\,\text{eV}}{3{,}80 \times 10^{-15}\,\text{eV}}}$$
$$= 2{,}81 \times 10^6$$

Observação: *O valor de E_1 calculado acima não só é pequeno demais para ser medido, mas também é menor que a indeterminação da energia de um elétron confinado em uma região com 1 cm de extensão. O valor de n é tão grande que, de acordo com o princípio de correspondência, o problema pode ser tratado classicamente.*

EXEMPLO 6-3 **Cálculo de Probabilidades** Suponha que a posição do elétron do Exemplo 6-2 possa ser medida com o elétron no estado fundamental. (*a*) Qual é a probabilidade de encontrar o elétron na região $0 < x < L/4$? (*b*) Qual é a probabilidade de encontrar o elétron em uma região com $\Delta x = 0{,}01L$ de largura e com centro em $x = 5L/8$?

SOLUÇÃO

(*a*) A função de onda do estado fundamental é dada pela Equação 6-32 com $n = 1$:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{L}$$

A probabilidade de que o elétron seja encontrado na região especificada é

$$\int_0^{L/4} P_1(x)\,dx = \int_0^{L/4} \frac{2}{L}\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Fazendo $\pi x/L = u$ (e, portanto, $dx = L\,du/\pi$) e expressando o limite superior da integral em função de *u*, temos:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{2}{\pi}\,\text{sen}^2 u\,du = \frac{2}{\pi}\left(\frac{u}{2} - \frac{\text{sen}\,2u}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = 0{,}091$$

Assim, se medirmos seguidamente a posição do elétron, ele será encontrado na região $0 < x < 0{,}25$ cm aproximadamente 9% do tempo. Esta probabilidade corresponde à área sombreada mais larga da Figura 6-6.

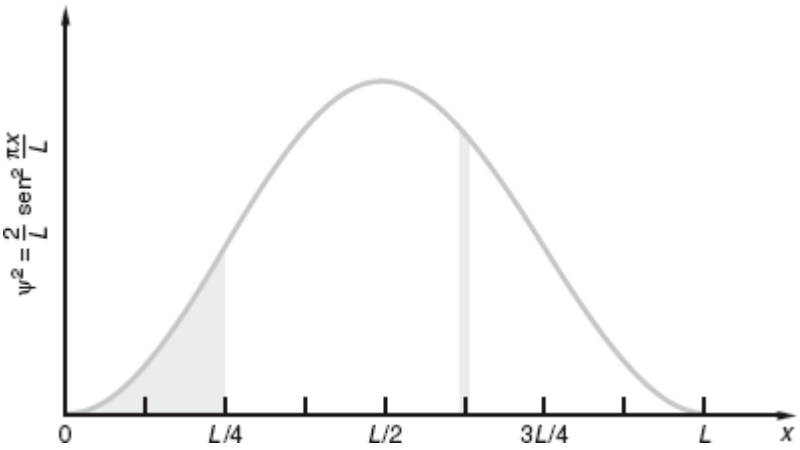


FIGURA 6-6 Densidade de probabilidade $\psi^2(x)$ em função de x para uma partícula no estado fundamental de um poço quadrado infinito. A probabilidade de encontrar a partícula na região $0 < x < L/4$ é igual à área sombreada mais larga. A área sombreada mais estreita corresponde à probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $\Delta x = 0{,}01L$ no entorno do ponto $x = 5L/8$.

(*b*) Como a região $\Delta x = 0{,}01L$ é muito pequena em comparação com L, não precisamos calcular a integral, mas podemos determinar o valor aproximado da probabilidade da seguinte forma:

$$P = P(x)\Delta x = \frac{2}{L}\text{sen}^2\frac{\pi x}{L}\Delta x$$

Fazendo $\Delta x = 0{,}01L$ e $x = 5L/8$, temos:

$$P = \frac{2}{L}\text{sen}^2\frac{\pi(5L/8)}{L}(0{,}01L)$$
$$= \frac{2}{L}(0{,}854)(0{,}01L) = 0{,}017$$

Isso significa que a probabilidade de encontrar o elétron em uma região com $\Delta x = 0{,}01L$ de largura no entorno do ponto $x = 5L/8$ é 1,7%, aproximadamente. Este fato está ilustrado na Figura 6-6, onde a área da região sombreada mais estreita corresponde a 1,7% da área total da curva.

EXEMPLO 6-4 **Um Elétron em uma Caixa do Tamanho de um Átomo** (*a*) Determine a energia do estado fundamental de um elétron confinado em uma caixa unidimensional com $L = 0{,}1$ nm de comprimento (o tamanho aproximado de um átomo). (*b*) Faça um diagrama de níveis de energia e calcule o comprimento de onda dos fótons emitidos em todas as transições que têm como estado inicial um estado com $n \leq 3$ ou menos e como estado final um estado de menor energia.

SOLUÇÃO

(*a*) A energia do estado fundamental é dada pela Equação 6-25. Multiplicando o numerador e o denominador por $c^2/4\pi^2$, obtemos uma expressão em termos de hc e mc^2, a energia equivalente à massa de repouso do elétron (veja o Capítulo 2):

$$E_1 = \frac{(hc)^2}{8mc^2L^2}$$

Fazendo $hc = 1240$ eV · nm e $mc^2 = 0{,}511$ MeV, obtemos:

$$E_1 = \frac{(1240\text{ eV}\cdot\text{nm})^2}{8(5{,}11\times10^5\text{ eV})(0{,}1\text{ nm})^2} = 37{,}6\text{ eV}$$

Esta energia é da mesma ordem de grandeza que a energia cinética do elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio, que é 13,6 eV. No caso do átomo de hidrogênio, o comprimento de onda do elétron é igual ao comprimento de uma circunferência com 0,0529 nm de raio, 0,33 nm, aproximadamente, enquanto, para o elétron em uma caixa unidimensional com 0,1 nm de comprimento, o comprimento de onda no estado fundamental é $2L = 0{,}2$ nm.

(*b*) As energias deste sistema são dadas por

$$E_n = n^2E_1 = n^2(37{,}6\text{ eV})$$

A Figura 6-7 mostra essas energias em um diagrama de níveis de energia. A energia do primeiro estado excitado é $E_2 = 4(37,6\text{ eV}) = 150,4\text{ eV}$ e a do segundo estado excitado é $E_3 = 9(37,6\text{ eV}) = 338,4\text{ eV}$. As transições possíveis do nível 3 para o nível 2, do nível 3 para o nível 1 e do nível 2 para o nível 1 estão indicadas por setas verticais no diagrama. As energias dessas transições são

$$\Delta E_{3\to 2} = 338,4\text{ eV} - 150,4\text{ eV} = 188,0\text{ eV}$$
$$\Delta E_{3\to 1} = 338,4\text{ eV} - 37,6\text{ eV} = 300,8\text{ eV}$$
$$\Delta E_{2\to 1} = 150,4\text{ eV} - 37,6\text{ eV} = 112,8\text{ eV}$$

Os comprimentos de onda dos fótons produzidos nessas transições são

$$\lambda_{3\to 2} = \frac{hc}{\Delta E_{3\to 2}} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{188,0\text{ eV}} = 6,60\text{ nm}$$

$$\lambda_{3\to 1} = \frac{hc}{\Delta E_{3\to 1}} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{300,8\text{ eV}} = 4,12\text{ nm}$$

$$\lambda_{2\to 1} = \frac{hc}{\Delta E_{2\to 1}} = \frac{1240\text{ eV}\cdot\text{nm}}{112,8\text{ eV}} = 11,0\text{ nm}$$

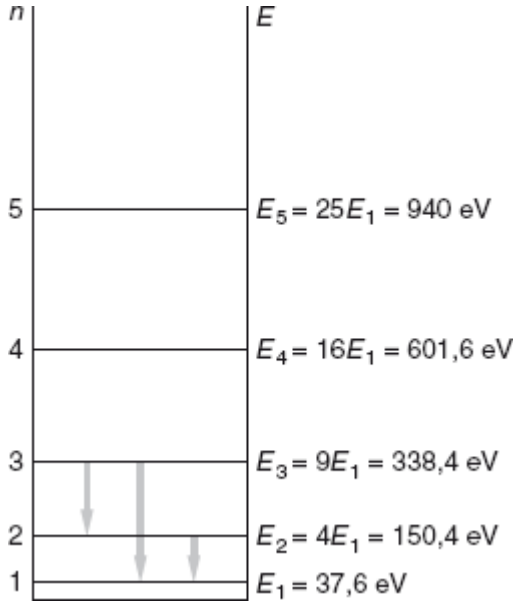


FIGURA 6-7 Diagrama de níveis de energia do Exemplo 6-4. As setas verticais indicam as transições do estado $n = 3$ para os estados $n = 2$ e $n = 1$ e do estado $n = 2$ para o estado $n = 1$.

6-3 O Poço Quadrado Finito

A quantização da energia que encontramos para uma partícula em um poço quadrado infinito é um resultado geral associado à solução da equação de Schrödinger para qualquer partícula confinada em uma região do espaço. Vamos ilustrar este fato considerando o comportamento qualitativo da função de onda para uma função energia potencial um pouco geral, a do poço quadrado finito que aparece na Figura 6-8. As soluções da equação de Schrödinger para este tipo de potencial são muito diferentes, dependendo de se a energia total E é maior ou menor que V_0. Vamos deixar para discutir o caso em que $E > V_0$ na Seção 6-5, limitando-nos no momento a observar que, nesse caso, a partícula não está confinada e qualquer valor de energia é permitido, ou seja, não existe quantização da energia. No momento, vamos supor que $E < V_0$.

No interior do poço, $V(x) = 0$ e a equação de Schrödinger independente do tempo (Equação 6-18) se reduz à Equação 6-26, a mesma de um poço infinito:

$$\psi''(x) = -k^2\psi(x) \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

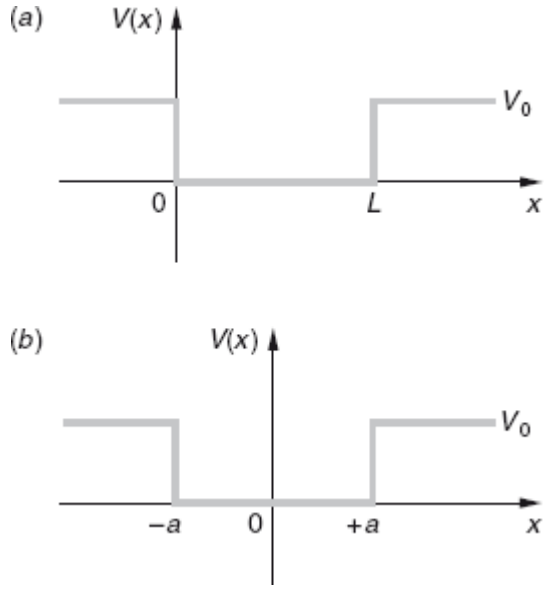


FIGURA 6-8 (*a*) Potencial de um poço quadrado finito. (*b*) O mesmo potencial, com a origem dos eixos coordenados no centro do poço.

A solução geral envolve senos e cossenos (Equação 6-28). No caso que estamos estudando, não é necessário que $\psi(x)$ seja nula nos limites da região central, como no caso do poço infinito, mas apenas que $\psi(x)$ e $\psi'(x)$ sejam contínuas nesses pontos. Do lado de fora do poço, isto é, para $0 > x > L$, a Equação 6-18 se torna

$$\psi''(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)\psi(x) - \alpha^2\psi(x) \qquad \textbf{6-33}$$

em que

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E) > 0 \qquad \textbf{6-34}$$

O método mais direto para determinar as funções de onda e as energias permitidas consiste em resolver a Equação 6-33 do lado de fora do poço e exigir que $\psi(x)$ e $\psi'(x)$ sejam contínuas nas paredes do poço. Não é difícil resolver a Equação 6-33 [a solução é da forma $\psi(x) = Ce^{-\alpha x}$ para x positivo], mas a aplicação das condições de contorno envolve um método com o qual o leitor talvez não esteja familiarizado; este método é descrito com detalhes na Leitura Suplementar intitulada Solução Gráfica do Poço Quadrado Finito.

Em primeiro lugar, vamos explicar, em palavras, de que forma as exigências de que as funções ψ e ψ' sejam contínuas nas paredes do poço e de que $\psi \to 0$ para $x \to \pm\infty$ levam à seleção de apenas certas funções de onda e certas energias para a partícula no interior do poço, supondo que $0 < E < V_0$. O aspecto mais importante da Equação 6-33 é que a segunda derivada ψ'', que está associada à curvatura da função de onda, tem o mesmo sinal que ψ. Se ψ é positiva, ψ'' também é positiva e a função de onda se afasta do eixo x, como na Figura 6-9*a*; se ψ é negativa, ψ'' é negativa e ψ também se afasta do eixo x. Este comportamento é diferente do observado no interior do poço, ou seja, na região $0 < x < L$. *Nessa região, ψ e ψ'' têm sinais opostos e, portanto, ψ sempre se aproxima do eixo dos x.* Graças ao comportamento que apresenta do lado de fora do poço, para a maioria dos valores da energia a função de onda tende a infinito para $x \to \pm\infty$; em outras palavras, a função $\psi(x)$ não é bem comportada. Funções desse tipo, embora satisfaçam a equação de Schrödinger, não são funções de onda apropriadas porque não podem ser normalizadas.

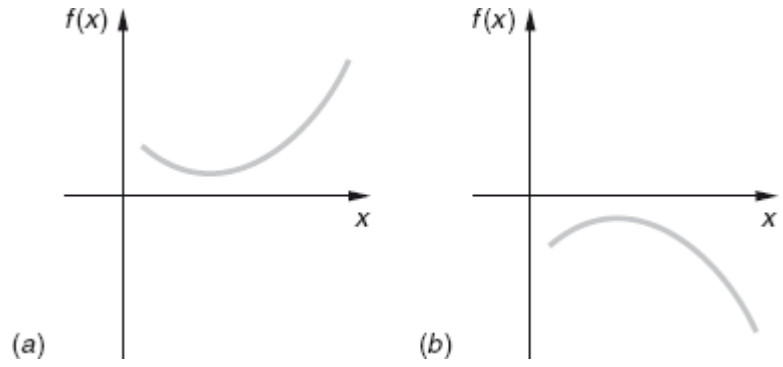


FIGURA 6-9 (*a*) Função positiva com curvatura positiva; (*b*) função negativa com curvatura negativa.

A Figura 6-10 mostra a função de onda de um estado com energia $E = p^2/2m = h^2/2m\lambda^2$ para $\lambda = 4L$. A Figura 6-11 mostra uma função de onda bem comportada, correspondente ao comprimento de onda $\lambda = \lambda_1$, que é a função de onda do estado fundamental para o poço finito, e o comportamento das funções de onda para duas energias próximas. Os níveis de energia permitidos no caso de um poço quadrado finito podem ser obtidos resolvendo matematicamente o problema. A Figura 6-12 mostra as funções de onda e as distribuições de probabilidade para o estado fundamental e os dois primeiros estados excitados. De acordo com a figura, os comprimentos de onda no interior do poço são ligeiramente maiores que os comprimentos de onda no interior de um poço infinito de mesma largura e, portanto, as energias correspondentes são ligeiramente menores que as energias em um poço infinito, como mostra a Figura 6-13. Outra característica do poço finito é que existe apenas um número finito de energias permitidas, que depende do valor de V_0. Quando o potencial V_0 é pequeno, existe apenas um nível permitido de energia, isto é, só pode existir um estado ligado. Este fato está evidente na solução detalhada que apresentamos na Leitura Suplementar.

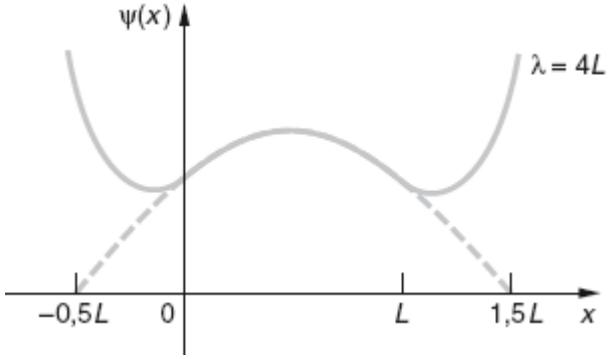


FIGURA 6-10 A função que satisfaz a equação de Schrödinger com $\lambda = 4L$ no interior do poço não é uma função de onda aceitável porque tende a infinito para grandes valores de x. Embora em $x = L$ a função esteja se aproximando do eixo dos x (a inclinação seja negativa), a taxa de aumento da inclinação ψ'' é tão grande que a inclinação se torna positiva antes que a função se anule e a função volta a aumentar para maiores valores de x. Como ψ'' tem o mesmo sinal que ψ, a inclinação aumenta sempre e a função aumenta sem limite. [*Este gráfico gerado em computador é cortesia de Paul Doherty, The Exploratorium*.]

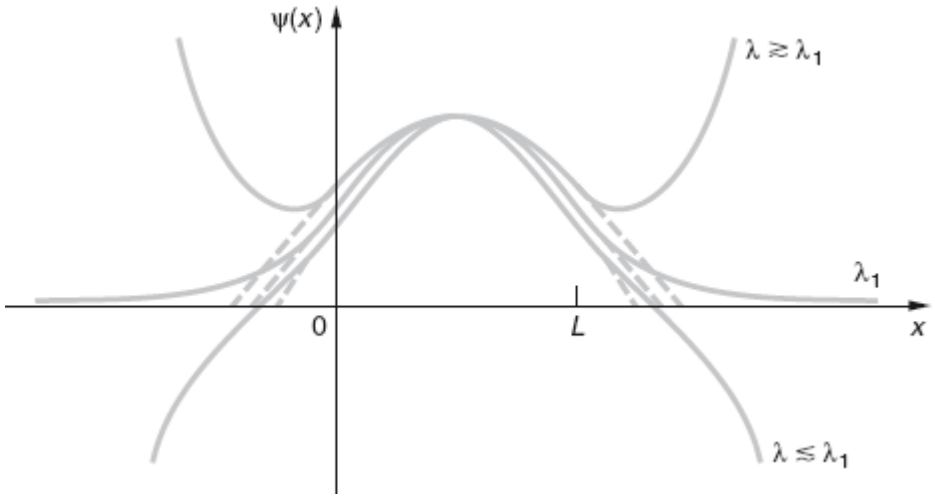


FIGURA 6-11 Funções que satisfazem a equação de Schrödinger com comprimentos de onda próximos do comprimento de onda crítico λ_1. Quando λ é ligeiramente maior que λ_1, a função tende a infinito como na Figura 6-10. Para o comprimento de onda λ_1, a função e sua derivada tendem, juntas, para zero. Esta é uma função de onda aceitável, que corresponde à energia $E_1 = h^2/2m\lambda_1^2$. Quando λ é ligeiramente menor que λ_1, a função atravessa o eixo dos x enquanto a derivada ainda é negativa. A derivada se torna cada vez mais negativa porque sua taxa de variação ψ'' agora é negativa. Esta função tende a $-\infty$ para grandes valores de x. [*Este gráfico gerado em computador é cortesia de Paul Doherty, The Exploratorium*.]

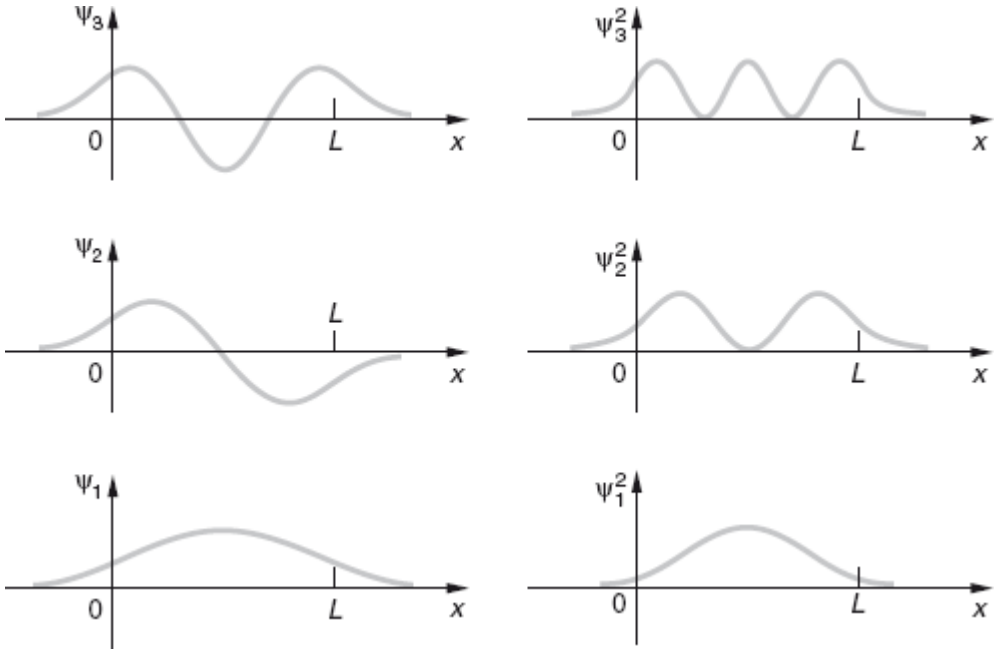


FIGURA 6-12 Funções de onda $\psi_n(x)$ e distribuições de probabilidade $\psi^2{}_n(x)$ para o poço quadrado finito, com $n = 1$, 2 e 3. Compare os gráficos com os do poço quadrado infinito (Figura 6-4), nos quais as funções de onda são nulas em $x = 0$ e $x = L$. Os comprimentos de onda são ligeiramente maiores que os comprimentos de onda correspondentes no poço quadrado infinito e as energias permitidas são ligeiramente menores.

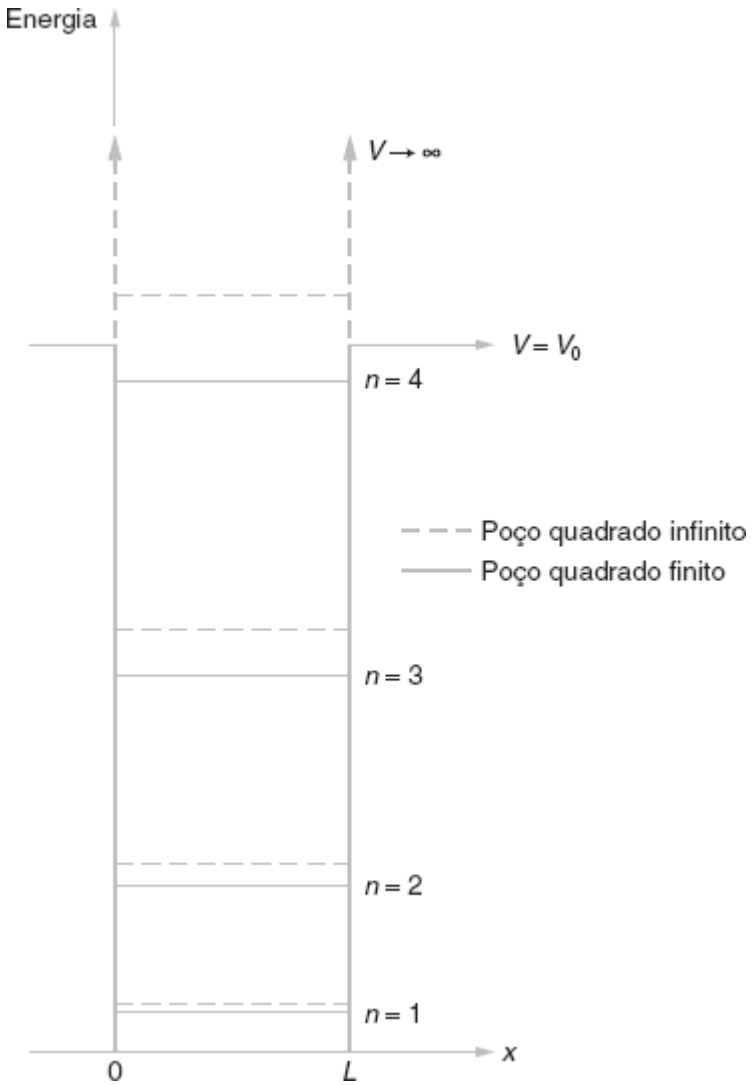


FIGURA 6-13 Comparação entre os quatro primeiros níveis de energia do poço de potencial quadrado infinito (linhas tracejadas) com os de um poço finito (linhas cheias) de mesma largura. Quanto menor a profundidade do poço finito, menor o número de níveis de energia; o nível $n = 1$, porém, continua a existir, mesmo quando $V_0 \to 0$.

Observe que, ao contrário do que acontece no caso clássico, existe uma probabilidade finita de que a partícula seja observada do lado de fora do poço, ou seja, nas regiões $x > L$ e $x < 0$. Nessas regiões, a energia total é menor que a energia potencial e, portanto, a impressão que se tem é de que a energia cinética seria negativa. Como uma energia cinética negativa não faz sentido na física clássica, é interessante especular quanto ao significado da existência da função de onda do lado de fora da barreira de potencial. Será que a mecânica quântica prevê que iremos obter um valor negativo para a energia cinética da partícula nessas duas regiões? Se a resposta fosse afirmativa, a teoria estaria em sérias dificuldades. Felizmente, podemos recorrer ao princípio de indeterminação para explicar o que acontece, sem cair em contradições. Considere a região $x > L$ (um raciocínio semelhante se aplica à região $x < 0$). Como a função de onda é proporcional a $e^{-\alpha x}$, em que α é dado pela Equação 6-34, a densidade de probabilidade $\psi^2 = e^{-2\alpha x}$ é muito pequena a uma distância da barreira da ordem de $\Delta x \approx \alpha^{-1}$. Supondo que $\psi(x) \approx 0$ para valores de x maiores que $L + \alpha^{-1}$, podemos dizer que encontrar a partícula na região $x > L$ equivale aproximadamente a encontrá-la em uma região $\Delta x \approx \alpha^{-1}$. Esta restrição introduz uma indeterminação no momento da ordem de $\Delta p \approx \hbar/\Delta x = \hbar\alpha$ e uma energia cinética mínima da ordem de $(\Delta p)^2/2m = h^2\alpha^2/2m = V_0 - E$, o suficiente para evitar que a energia cinética se torne negativa! A existência da função de onda em uma região classicamente proibida é responsável pelo fenômeno do tunelamento, que será discutido na Seção 6-6.

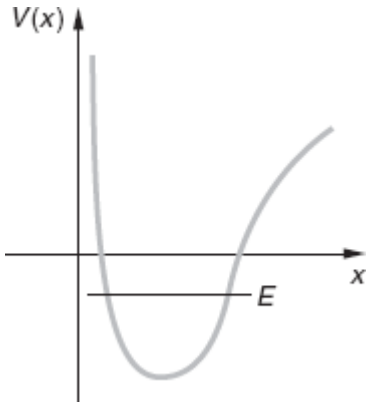


FIGURA 6-14 Potencial arbitrário do tipo poço com um possível nível de energia E. No interior do poço, $\psi(x)$ e $\psi''(x)$ têm sinais opostos e as soluções são do tipo oscilatório. Do lado de fora do poço, $\psi(x)$ e $\psi''(x)$ têm o mesmo sinal e a função não é bem comportada, exceto para certos valores de E.

Boa parte de nossa discussão do problema do poço quadrado finito se aplica a outros problemas nos quais $E > V(x)$ em uma região e $E < V(x)$ fora da região. Considere, por exemplo, a energia potencial $V(x)$ da Figura 6-14. No interior do poço, a equação de Schrödinger é da forma

$$\psi''(x) = -k^2\psi(x) \qquad \textbf{6-35}$$

em que $k^2 = 2m[E - V(x)]/\hbar^2$, ao contrário dos casos anteriores, depende de x. Como o número de onda $k = 2\pi/\lambda$ varia com x, as soluções desta equação não são simples combinações de senos e cossenos; entretanto, ψ'' e ψ têm sinais opostos e, portanto, ψ sempre se aproxima do eixo x e as soluções são do tipo oscilatório. Do lado de fora do poço, ψ se afasta do eixo x e, portanto, existem apenas alguns valores de E para os quais as soluções tendem a zero quando $x \to \infty$.



Leitura Suplementar

As soluções numéricas dos problemas de poços finitos em geral envolvem funções transcendentais e são muito trabalhosas. No caso de alguns potenciais finitos, porém, as soluções gráficas são relativamente simples e permitem chegar a algumas conclusões interessantes. Este é o tema da leitura suplementar *Solução Gráfica do Poço Quadrado Finito*, disponível no site da LTC para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 6-36 a 6-43 e a Figura 6-15.

6-4 Valores Esperados e Operadores

Valores Esperados

O objetivo de toda teoria científica é explicar observações experimentais. Na mecânica clássica, as soluções teóricas quase sempre envolvem o cálculo da posição de uma ou mais partículas em função do tempo. Nos sistemas microscópicos, porém, efeitos ondulatórios tornam isso impossível; temos que nos contentar com o cálculo da função de onda $\Psi(x, t)$ e da função distribuição de probabilidade $|\Psi(x, t)|^2$. O máximo que podemos conhecer a respeito da posição de uma partícula é a

probabilidade de que uma medição forneça um certo valor de x. O *valor esperado* de x é definido através da equação

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, x\, \Psi(x,t)\, dx \qquad \textbf{6-44}$$

O valor esperado de x é o valor médio de x que esperamos obter quando medimos a posição de um grande número de partículas descritas pela mesma função de onda $\Psi(x, t)$. Como vimos, para uma partícula em um estado de energia definida, a distribuição de probabilidade é independente do tempo. Nesse caso, o valor esperado de x é dado por

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx \qquad \textbf{6-45}$$

Assim, por exemplo, no caso de um poço quadrado infinito, é fácil mostrar por simetria (ou por cálculo direto) que $\langle x \rangle = L/2$, o ponto correspondente ao centro do poço.

O valor esperado de qualquer função $f(x)$ é dado por

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^* f(x) \psi\, dx \qquad \textbf{6-46}$$

O valor esperado de $\langle x^2 \rangle$ para um poço quadrado infinito de largura L, por exemplo, pode ser calculado usando a Equação 6-46. Fica a cargo do leitor (veja o Problema 6-58) mostrar que

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2} \qquad \textbf{6-47}$$

O leitor talvez tenha reconhecido os valores esperados definidos pelas Equações 6-45 e 6-46 como médias ponderadas que a física tomou emprestadas da estatística e da teoria das probabilidades. Note que o resultado de uma medida não tem necessariamente uma alta probabilidade de ser igual ao valor esperado. No caso de um elétron em um poço quadrado infinito em um estado com n par, por exemplo, a probabilidade de que $x = L/2$ é nula porque a função de onda $\text{sen}(n\pi x/L) = 0$ para $x = L/2$. Mesmo assim, $\langle x^2 \rangle = L/2$, já que a função de probabilidade $\psi^*\psi$ é simétrica em relação ao centro do poço. Não se esqueça de que o valor esperado é o valor mais provável da média de muitas medições.

Operadores

Se pudéssemos expressar o momento p de uma partícula em função de x, poderíamos calcular o valor esperado do momento, $\langle x^2 \rangle$, usando a Equação 6-46. Entretanto, isso é impossível, já que, de acordo com o princípio de indeterminação, os valores de x e p não podem ser determinados com precisão absoluta no mesmo instante. Assim, para calcular $\langle p \rangle$, precisamos conhecer a função de distribuição para o momento. Esta função pode ser determinada a partir da função de onda $\psi(x)$ usando os métodos de análise de Fourier. Também é possível calcular $\langle p \rangle$ usando a Equação 6-48, na qual $\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ é um operador matemático que age sobre a função de onda para produzir a componente x do momento (veja também a Equação 6-6).

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi\, dx \qquad \textbf{6-48}$$

Da mesma forma, o valor esperado do quadrado do momento, $\langle p^2 \rangle$, pode ser calculado usando a equação

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \Psi\, dx$$

Note que, quando calculamos o valor esperado de uma grandeza, o operador que representa essa grandeza age sobre a função $\psi(x, t)$ e *não* sobre a função $\psi^*(x, t)$; a posição correta do operador é entre ψ^* e ψ. Este fato é irrelevante quando o operador é uma constante ou uma função multiplicativa, mas pode se tornar extremamente importante quando o operador inclui uma derivação, como é o caso do operador momento. No caso do poço quadrado infinito, sabemos de antemão, sem necessidade de realizar nenhum cálculo, que $\langle p^2 \rangle = 2mE$, já que, nesse caso, E e p não variam com x no interior do poço e $E = p^2/2m$. A grandeza $\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$, que opera sobre a função de onda na Equação 6-48, é chamada *operador momento* e representada pelo

símbolo p_{op}:

$$p_{op} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} \qquad \textbf{6-49}$$

EXEMPLO 6-5 **Valores Esperados de p e p^2** Determine os valores de $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ para a função de onda do estado fundamental do poço quadrado infinito. (Antes de continuar, tente prever o resultado.)

SOLUÇÃO

Podemos ignorar a variação de Ψ com o tempo e escrever:

$$\langle p \rangle = \int_0^L \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\frac{nx}{L}\right)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\frac{nx}{L}\right)dx$$
$$= \frac{\hbar}{i}\frac{2}{L}\frac{\pi}{L}\int_0^L \operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}dx = 0$$

Como a probabilidade de que a partícula esteja se movendo no sentido positivo do eixo x é igual à probabilidade de que esteja se movendo no sentido oposto, o momento *médio* é nulo.

Por outro lado, como

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\hbar^2\left(-\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{L}\right)$$
$$= +\frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}\psi$$

temos:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}\int_0^L \psi^*\psi\,dx = \frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}$$

Como, de acordo com a Equação 6-25, $E_1 = \hbar^2\pi^2/2mL^2$, temos, como havíamos antecipado, $\langle p^2 \rangle = 2mE$.

A equação de Schrödinger independente do tempo (Equação 6-18) pode ser escrita em termos de p_{op}:

$$\left(\frac{1}{2m}\right)p_{op}^2\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad \textbf{6-50}$$

em que

$$p_{op}^2\psi(x) = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)\right] = -\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

Na mecânica clássica, a energia total $H(x, t)$, expressa em termos das variáveis que representam a posição e o momento, é chamada de *função hamiltoniana*: $H = p^2/2m + V$. Substituindo o momento pelo operador momento, p_{op}, e supondo que o potencial não varia com o tempo, obtemos o *operador hamiltoniano*, representado pelo símbolo H_{op}:

$$H_{op} = \frac{p_{op}^2}{2m} + V(x) \qquad \textbf{6-51}$$

Nesse caso, a equação de Schrödinger independente do tempo pode ser escrita na forma

$$H_{op}\psi = E\psi \qquad \textbf{6-52}$$

A vantagem de escrever a equação de Schrödinger desta forma é que fica mais fácil generalizá-la para problemas mais complicados, como o de várias partículas em movimento no espaço tridimensional: para obter o operador hamiltoniano do

sistema, simplesmente escrevemos a energia total do sistema em termos da posição e do momento e substituímos as variáveis que representam o momento pelos operadores apropriados.

A Tabela 6-1 mostra os operadores que representam algumas grandezas físicas já discutidas e outras que serão discutidas em breve.

Exercícios

7. Explique (em palavras) por que $\langle p \rangle$ e $\langle p^2 \rangle$ não são nulos no Exemplo 6-5.

8. A probabilidade de que a posição de uma partícula seja igual a $\langle x^2 \rangle$ pode ser nula?

Tabela 6-1 Alguns operadores da mecânica quântica

Símbolo	Grandeza	Operador
$f(x)$	Qualquer função de x, como a posição x ou a energia potencial $V(x)$	$f(x)$
p_x	Componente x do momento	$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$
p_y	Componente y do momento	$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$
p_z	Componente z do momento	$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$
E	Hamiltoniano (independente do tempo)	$\frac{p_{\text{op}}^2}{2m} + V(x)$
E	Hamiltoniano (dependente do tempo)	$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
E_k	Energia cinética	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
L_z	Componente z do momento angular	$-i\hbar\frac{\partial}{\partial \phi}$



Leitura Suplementar

Para que coisas interessantes aconteçam em um sistema com níveis de energia quantizados, é preciso que a densidade de probabilidade varie com o tempo; apenas desta forma o sistema pode liberar ou absorver energia. A leitura suplementar *Transições entre Estados Quânticos*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 6-52*a* a 6-52*e* e a Figura 6-16, descreve o processo e o aplica à emissão de luz por um átomo.

6-5 O Oscilador Harmônico Simples

Um dos problemas resolvidos por Schrödinger em seus primeiros artigos sobre mecânica ondulatória foi de uma partícula

sujeita ao potencial do oscilador harmônico simples,* como o de um pêndulo, que é dado por

$$V(x) = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

em que K é a constante de força e ψ é a frequência angular de oscilação, definida por $\omega = (K/m)^{1/2} = 2\pi f$. A solução da equação de Schrödinger para este potencial é particularmente importante porque pode ser aplicada a problemas como o da vibração de moléculas em gases e sólidos. A função energia potencial do oscilador harmônico simples está representada graficamente na Figura 6-17, que mostra também um possível valor para a energia total E.



Na mecânica clássica, uma partícula sujeita a este tipo de potencial fica em equilíbrio na origem ($x = 0$), em que $V(x)$ é mínima e a força $F_x = -dV/dx$ é nula. Quando é afastada da posição de equilíbrio, a partícula passa a oscilar entre $x = -A$ e $x = +A$, os pontos nos quais a energia cinética é nula e a energia total é igual à energia potencial. Estes pontos são conhecidos como pontos de retorno clássicos. A distância A está relacionada à energia total E através da equação

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \qquad \textbf{6-53}$$

Classicamente, a probabilidade de que a partícula seja encontrada no intervalo dx é proporcional ao tempo que a partícula passa nesse intervalo, que é igual a dx/v. A velocidade da partícula pode ser calculada a partir da lei de conservação da energia:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = E$$

A probabilidade clássica é, portanto,

$$P_c(x)\,dx \propto \frac{dx}{v} = \frac{dx}{\sqrt{(2/m)\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)}} \qquad \textbf{6-54}$$

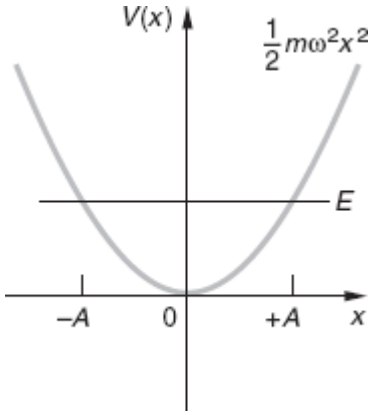


FIGURA 6-17 Função energia potencial do oscilador harmônico simples. Classicamente, a partícula está confinada na região entre os "pontos de retorno" $-A$ e $+A$.

Qualquer valor da energia E é permitido. A menor energia é $E = 0$, que corresponde ao caso em que a partícula se encontra em repouso na origem.

A equação de Schrödinger para este problema é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi(x) = E\psi(x) \qquad \textbf{6-55}$$

As técnicas matemáticas envolvidas na solução deste tipo de equação diferencial são estudadas apenas em cursos avançados; por essa razão, vamos discutir o problema qualitativamente. Em primeiro lugar, observamos que, como o potencial é simétrico em relação à origem ($x = 0$), esperamos que a função distribuição de probabilidade $|\psi(x)|^2$ também seja simétrica em relação à origem, isto é, possua o mesmo valor para $-x$ e $+x$:

$$|\psi(-x)|^2 = |\psi(x)|^2$$

Isto significa que a função de onda $\psi(x)$ deve ser simétrica, com $\psi(-x) = +\psi(x)$, ou antissimétrica, com $\psi(-x) = -\psi(x)$. Podemos, portanto, simplificar a discussão considerando apenas a região em que x é positivo e determinando por simetria as soluções para x. (A simetria de ψ será discutida com detalhes daqui a pouco, na Seção Exploratória "Paridade".)

Suponha que a energia total da partícula seja E. Para x menor que o ponto de retorno clássico A definido pela Equação 6-53, a energia potencial $V(x)$ é menor que a energia total E; para $x > A$, $V(x) > E$. A discussão da Seção 6-3 pode ser aplicada diretamente a este problema. Para $x < A$, a equação de Schrödinger assume a forma

$$\psi''(x) = -k^2\psi(x)$$

em que

$$k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]$$

e, portanto, a função $\psi(x)$ se aproxima do eixo dos x e tem um comportamento oscilatório. Para $x > A$, a equação de Schrödinger se torna

$$\psi''(x) = +\alpha^2\psi(x)$$

em que

$$\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}[V(x) - E]$$

e, portanto, a função $\psi(x)$ se afasta do eixo dos x. Apenas certos valores de E levam a soluções bem comportadas, ou seja, que tendem a zero quando $x \to \infty$. Os valores permitidos de E no caso do oscilador harmônico simples devem ser calculados resolvendo a equação de Schrödinger. O resultado é o seguinte:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{6-56}$$

Assim, a energia do estado fundamental é $\hbar\omega/2$ e o espaçamento dos níveis de energia é constante; a distância entre níveis vizinhos é $\hbar\omega$.

A Figura 6-18 mostra as funções de onda do estado fundamental ($n = 0$) e dos dois primeiros estados excitados ($n = 1$ e $n = 2$) do oscilador harmônico simples. A função de onda do estado fundamental tem a forma de uma curva gaussiana e a energia do estado, $E_0 = \hbar\omega/2$, é a menor energia compatível com o princípio de indeterminação.

As soluções permitidas da equação de Schrödinger, as funções de onda do oscilador harmônico simples, têm a seguinte forma:

$$\psi_n(x) = C_n e^{-m\omega x^2/2\hbar} H_n(x) \qquad \textbf{6-57}$$

onde as constantes C_n são constantes de normalização e as funções $H_n(x)$ são polinômios de ordem n denominados *polinômios de Hermite*.[13] As funções de onda para $n = 0$, 1 e 2 (Figura 6-18) são:

$$\begin{aligned}
\psi_0(x) &= A_0 e^{-m\omega x^2/2\hbar} \\
\psi_1(x) &= A_1\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, e^{-m\omega x^2/2\hbar} \qquad \textbf{6-58} \\
\psi_2(x) &= A_2\left(1 - \frac{2m\omega x^2}{\hbar}\right) e^{-m\omega x^2/2\hbar}
\end{aligned}$$

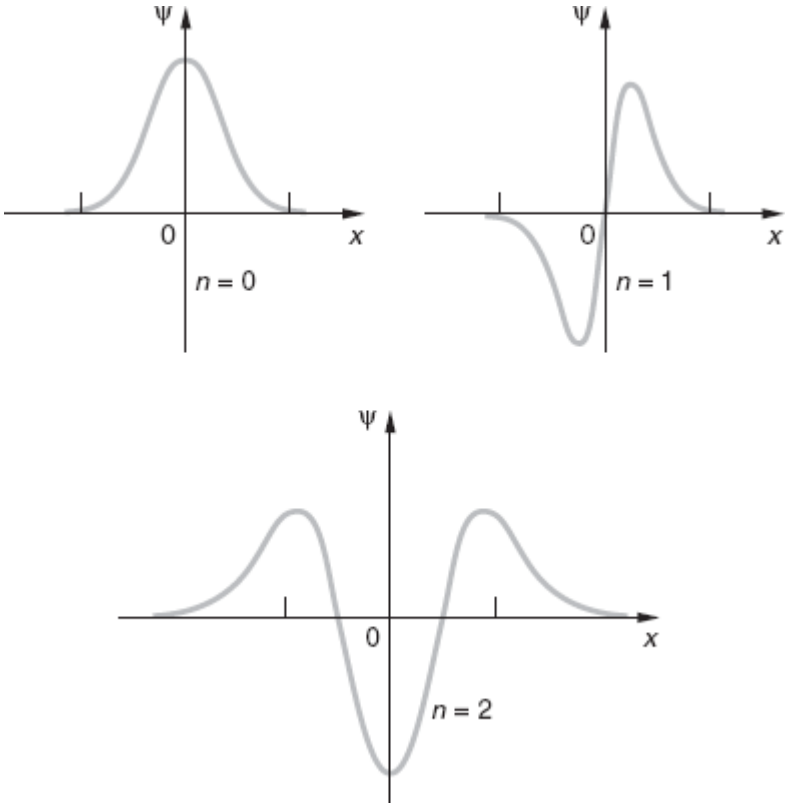


FIGURA 6-18 Funções de onda do estado fundamental e dos dois primeiros estados excitados do oscilador harmônico simples, ou seja, dos estados com $n = 0$, 1 e 2.

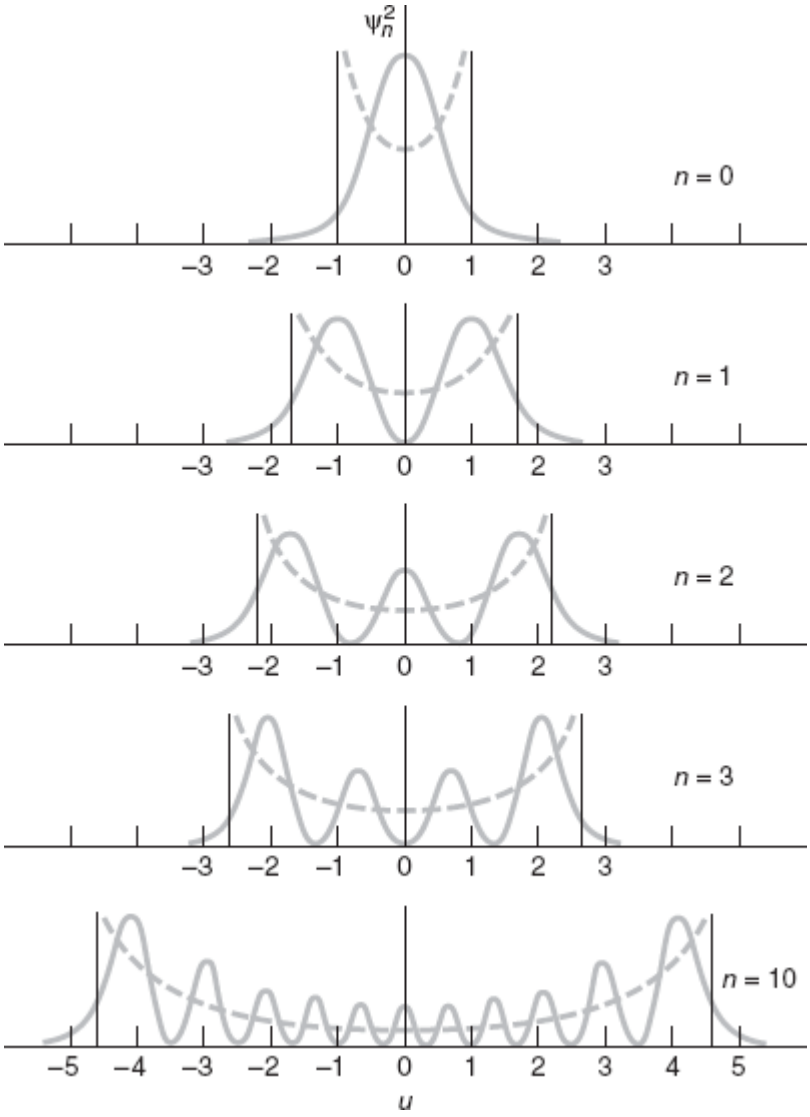


FIGURA 6-19 Densidade de probabilidade $\psi_n(x)$ do oscilador harmônico simples, em função da variável adimensional $u = (m\omega/\hbar)\ x$, para n = 0, 1, 2, 3 e 10. As curvas tracejadas são as densidades de probabilidade clássicas para as mesmas energias; as retas verticais indicam os pontos de retorno clássicos, $x = \pm A$.

As moléculas, ao vibrar, se comportam como osciladores harmônicos. Medindo a frequência das vibrações (veja o Capítulo 9), é possível determinar as constantes de força, a energia de ligações químicas e outras propriedades dos sólidos.

Note que as funções de onda são simétricas para valores pares de n e antissimétricas para valores ímpares de n. A Figura 6-19 mostra as distribuições de probabilidade $\psi^2_n(x)$ para n = 0, 1, 2, 3 e 10 e as distribuições clássicas correspondentes.

É possível demonstrar que as funções de onda dadas pela Equação 6-57 apresentam a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_n x \psi_m \, dx = 0 \quad \text{a menos que} \quad n = m \pm 1 \qquad \textbf{6-59}$$



17

Esta propriedade leva a uma condição, conhecida como *regra de seleção*, para que as transições (do tipo dipolo elétrico) entre os estados de um oscilador harmônico simples sejam possíveis:

A diferença entre os números quânticos do estado final e do estado inicial deve ser igual a +1 ou a −1.

Esta regra de seleção é expressa pela seguinte equação:

$$\Delta n = \pm 1 \qquad \textbf{6-60}$$

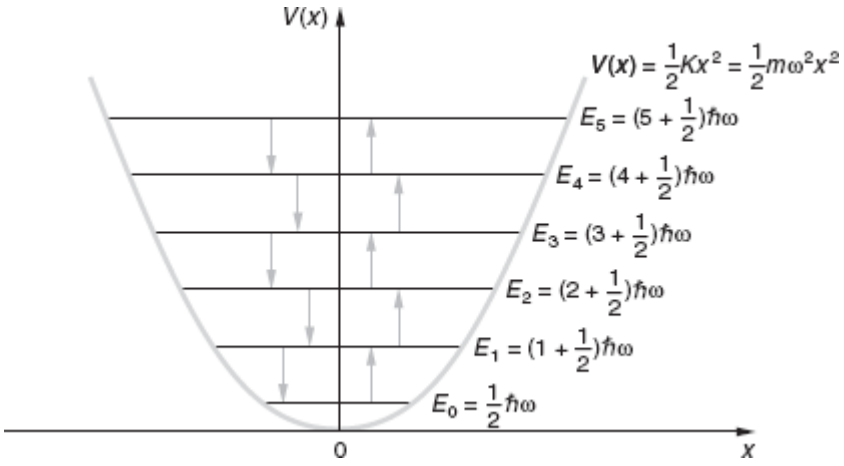


FIGURA 6-20 Níveis de energia do oscilador harmônico simples. As transições que obedecem à regra de seleção $\Delta n = \pm 1$ estão indicadas por setas (setas apontando para baixo indicam emissão; setas apontando para cima indicam absorção). Como o espaçamento dos níveis é uniforme, a mesma energia $\hbar\omega$ é emitida ou absorvida em todas as transições permitidas. Para este potencial em particular, a frequência do fóton emitido ou absorvido é igual à frequência de oscilação, o que está de acordo com as previsões da teoria clássica.

Como a diferença de energia entre dois estados vizinhos é $\hbar\omega$, esta é a energia do fóton emitido ou absorvido em uma transição do tipo dipolo elétrico. A frequência do fóton é, portanto, igual à frequência clássica do oscilador, como imaginou Planck para chegar à fórmula da radiação do corpo negro. A Figura 6-20 mostra o diagrama de níveis de energia do oscilador harmônico simples, com as transições permitidas indicadas por setas verticais.



Leitura Suplementar

A solução da equação de Schrödinger para o oscilador harmônico simples (Equação 6-55) envolve o uso de técnicas matemáticas sofisticadas. Entretanto, é possível calcular os níveis de energia permitidos usando um método bem mais fácil, proposto pelo próprio Schrödinger. Este é o tema da leitura suplementar *O Artifício de Schrödinger*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, com agradecimentos para Wolfgang Lorenzon, que chamou a atenção dos autores para esta interessante solução alternativa.

SEÇÃO EXPLORATÓRIA

Paridade



Nesta seção, tivemos o cuidado de representar o potencial do oscilador harmônico simples de uma forma que o tornasse simétrico em relação ao ponto $x = 0$ (veja a Figura 6-17). Fizemos o mesmo, anteriormente, com o poço quadrado finito da Figura 6-8*b*. O objetivo em casos como esses é chamar a atenção para a simetria do problema e simplificar os cálculos. Se o potencial $V(x)$ é simétrico em relação à origem, $V(x) = V(-x)$. Isso significa que o operador hamiltoniano H_{op}, definido pela Equação 6-51, é invariante em relação à transformação $x \rightarrow -x$. Esta transformação é conhecida com *operação de paridade* e representada pelo operador P. Assim, se $\psi(x)$ é uma solução da equação de Schrödinger

$$H_{op}\psi(x) = E\psi(x) \qquad \textbf{6-52}$$

a operação de paridade P leva a

$$H_{op}\psi(-x) = E\psi(-x)$$

e, portanto, $\psi(-x)$ é também uma solução da equação de Schrödinger, com a mesma energia E. Quando duas (ou mais) funções de onda são soluções correspondentes ao mesmo valor de energia, dizemos que esse nível de energia é *degenerado*. Neste caso, como existem duas funções, $\psi(x)$ e $\psi(-x)$, associadas à mesma energia E, dizemos que o nível de energia é duplamente degenerado.

Para que as duas equações anteriores sejam verdadeiras, $\psi(x)$ e $\psi(-x)$ podem diferir apenas por uma constante multiplicativa C, isto é,

$$\psi(x) = C\psi(-x) \qquad \psi(-x) = C\psi(x)$$

ou

$$\psi(x) = C\psi(-x) = C^2\psi(x)$$

o que nos dá $C = \pm 1$. Se $C = 1$, $\psi(x)$ é uma função par, isto é, $\psi(-x) = \psi(x)$. Se $C = -1$, $\psi(x)$ é uma função ímpar, ou seja, $\psi(-x) = -\psi(x)$. A paridade é usada na mecânica quântica para descrever as propriedades de simetria das funções de onda em relação a uma reflexão das coordenadas *espaciais* em relação à origem, isto é, em relação a uma operação de paridade. Os termos *par* e *ímpar* são usados para descrever a simetria das funções de onda e não significam necessariamente que os números quânticos correspondentes sejam pares ou ímpares. Voltaremos a falar de paridade no Capítulo 12.

6-6 Reflexão e Transmissão de Ondas

Até agora, estivemos interessados em problemas de estados ligados, nos quais a energia potencial era maior que a energia total para grandes valores de x. Nesta seção, vamos discutir alguns exemplos simples de estados não ligados, ou seja, de estados para os quais $E > V(x)$ quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$ (ou ambos). Nesse tipo de problema, $d^2\psi(x)/dx^2$ e $\psi(x)$ têm sinais opostos nas regiões em que $E > V(x)$ e portanto, nessas regiões, $\psi(x)$ se aproxima do eixo dos x e não se torna infinita para grandes valores de $|x|$. Isso significa que qualquer valor de E é permitido. Funções de onda desse tipo não são normalizáveis, já que $\psi(x)$ não tende a zero quando x tende a $+\infty$ ou a $-\infty$ (ou ambos) e, em consequência,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 dx \rightarrow \infty$$

A solução rigorosa deste tipo de problema seria a combinação de um número infinito de ondas planas em um pacote de ondas de largura finita que fosse normalizável. Para nossos propósitos, porém, basta limitar a integral a dois limites arbitrários finitos a e b, o que permite que a função $\psi(x)$ seja normalizada. Funções de onda desse tipo são encontradas com frequência no espalhamento de feixes de partículas por potenciais e por isso é comum normalizá-las em termos da densidade de partículas do feixe, ρ. Assim,

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx = \int_a^b \rho dx = \int_a^b dN = N$$

em que dN é o número de partículas no intervalo dx e N é o número de partículas no intervalo $(b - a)$.[14] Como vamos ver, mesmo neste caso em que a energia não é quantizada, o fato de as soluções da equação de Schrödinger apresentarem um comportamento ondulatório leva a alguns resultados muito interessantes.

Degrau de Potencial

Considere uma região na qual a energia potencial é descrita por uma função degrau (Figura 6-21), definida da seguinte forma:

$$V(x) = 0 \quad \text{para} \quad x < 0$$
$$V(x) = V_0 \quad \text{para} \quad x > 0$$

Estamos interessados no que acontece quando um feixe de partículas, todas com a mesma energia total E, movendo-se da esquerda para a direita, encontra o degrau de potencial.

A resposta clássica é simples. Para $x < 0$, a partícula está se movendo para a direita com uma velocidade $v = (2E/m)^{1/2}$. Em $x = 0$, é submetida a uma força impulsiva. Se a energia total E é menor que V_0, a partícula inverte seu movimento e passa a se mover para a esquerda com a mesma velocidade, ou seja, é refletida pelo degrau. Se a energia total E é maior que V_0, a partícula continua a se mover para a direita, mas com uma velocidade menor, dada por $v = [2(E - V_0)/m]^{1/2}$. Este problema clássico corresponde ao de uma bola de massa m que está rolando em uma superfície plana e encontra uma rampa de altura $y_0 = V_0/mg$. Se a energia cinética inicial da bola é menor que V_0, a bola sobe parcialmente a ladeira e depois rola de volta para a esquerda, chegando à superfície plana com uma velocidade igual à inicial. Se a energia cinética inicial é maior que V_0, a bola chega ao alto da ladeira e continua a rolar para a direita com menor velocidade.

O resultado da mecânica quântica é semelhante ao resultado clássico se $E < V_0$, mas bem diferente se $E > V_0$, como na Figura 6-22*a*. A equação de Schrödinger nas duas regiões do espaço indicadas na figura é dada por

Região I

$$(x < 0) \qquad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_1^2\psi(x) \qquad \textbf{6-61}$$

Região II

$$(x > 0) \qquad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k_2^2\psi(x) \qquad \textbf{6-62}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

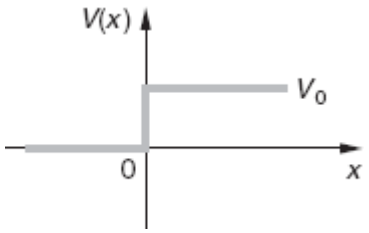


FIGURA 6-21 Degrau de potencial. Classicamente, uma partícula proveniente da esquerda, com uma energia total E maior que V_0, é sempre transmitida; a variação de potencial em $x = 0$ simplesmente dá origem a uma força impulsiva que reduz a velocidade da partícula. Por outro lado, uma onda proveniente da esquerda é parcialmente transmitida e parcialmente refletida porque o comprimento de onda muda abruptamente em $x = 0$.

As soluções gerais são

Região I

$$(x < 0) \qquad \psi_I(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \qquad \textbf{6-63}$$

Região II

$$(x > 0) \qquad \psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \qquad \textbf{6-64}$$

Particularizando estas soluções para o problema que estamos examinando, no qual as partículas se movem da esquerda para a direita, vemos que o primeiro termo da Equação 6-63 representa o feixe original, já que, multiplicando Ae^{ik1x} pela parte temporal de $\Psi(x, t)$, $e^{-i\omega t}$, obtemos uma onda plana (isto é, um feixe de partículas livres) se movendo para a direita. O segundo termo,

Be^{-ik1x}, representa partículas se movendo para a esquerda na região I. Na Equação 6-64, $D = 0$, já que o segundo termo representa partículas se movendo inicialmente da direita para a esquerda na região II e não existe nenhuma partícula nesta situação. Assim, a constante A é conhecida (pois o termo Ae^{ik1x}, como vimos, pode ser normalizado em termos da densidade de partículas do feixe), a constante D é nula e os valores de B e C devem ser calculados de tal forma que a solução geral satisfaça as condições de contorno do problema. Para determinar os valores de B e C, aplicamos a condição de continuidade às funções $\psi(x)$ e $d\psi/dx$ em $x = 0$, exigindo que $\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ e $d\psi_I(0)/dx = d\psi_{II}(0)/dx$. Para que ψ seja contínua em $x = 0$, é preciso que

$$\psi_I(0) = A + B = \psi_{II}(0) = C$$

ou

$$A + B = C \qquad \textbf{6-65}a$$

Para que $d\psi/dx$ seja contínua em $x = 0$, é preciso que

$$k_1A - k_1B = k_2C \qquad \textbf{6-65}b$$

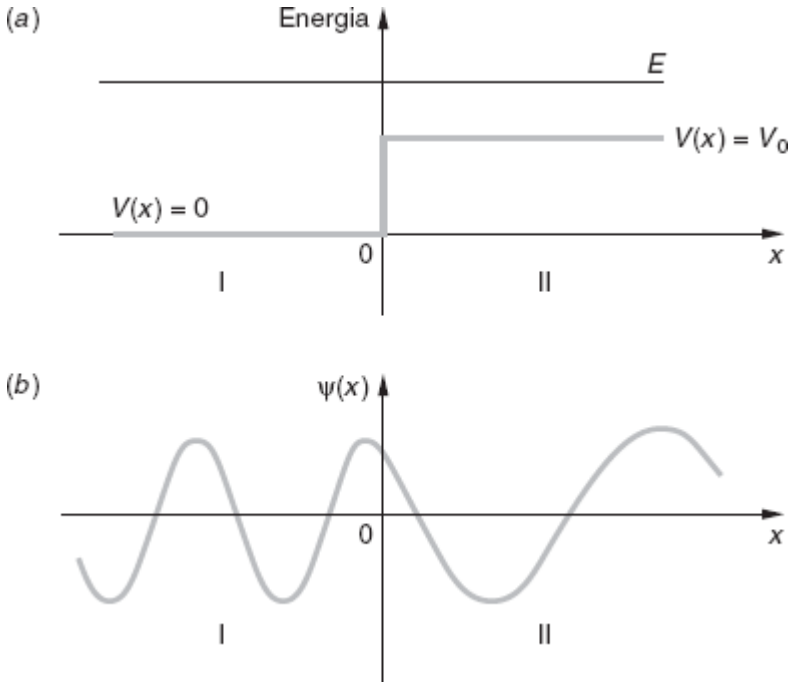


FIGURA 6-22 (*a*) Degrau de potencial. As partículas se movem da esquerda para a direita com energia total $E > V_0$. (*b*) O comprimento de onda da onda incidente (região I) é menor do que o da onda transmitida (região II). Como $k_2 < k_1$, $|C|^2 > |A|^2$; além disso, $T < 1$.

Resolvendo o sistema de Equações 6-65 considerando B e C como incógnitas (Problema 6-49), obtemos:

$$B = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}A = \frac{E^{1/2} - (E - V_0)^{1/2}}{E^{1/2} + (E - V_0)^{1/2}}A \qquad \textbf{6-66}$$

$$C = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}A = \frac{2E^{1/2}}{E^{1/2} + (E - V_0)^{1/2}}A \qquad \textbf{6-67}$$

As Equações 6-66 e 6-67 podem ser usadas para calcular as amplitudes relativas da onda refletida e da onda transmitida, respectivamente. Também é possível definir os coeficientes de reflexão (R) e transmissão (T) como as *intensidades* relativas dos feixes refletido e transmitido:[15]

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 \qquad \textbf{6-68}$$

$$T = \frac{k_2}{k_1}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2} \qquad \textbf{6-69}$$

É fácil mostrar que

$$T + R = 1 \qquad \textbf{6-70}$$

Entre as consequências do fato de que as soluções da equação de Schrödinger apresentam um comportamento ondulatório, podemos destacar as seguintes:

1. O coeficiente de reflexão R *não é nulo* para $E > V_0$. Assim, ao contrário do que acontece no caso clássico, algumas partículas são refletidas pelo degrau de potencial, mesmo que tenham energia suficiente para ultrapassá-lo. (Este fenômeno é análogo à reflexão de ondas eletromagnéticas na interface de dois meios com índices de refração diferentes.)
2. O valor de R depende da diferença entre k_1 e k_2, mas *não depende* do sinal da diferença; em outras palavras, o coeficiente de reflexão seria o mesmo se as partículas estivessem se movendo de uma região de potencial maior para uma região de potencial menor.

Como $k = p/\hbar = 2\pi/\lambda$, o comprimento de onda muda quando as partículas passam pelo degrau. À primeira vista, a amplitude da onda transmitida deveria ser necessariamente menor que a da onda incidente; lembre-se, porém, de que $|\psi|^2$ é proporcional à densidade de partículas. Como as partículas se movem mais lentamente na região II ($k_2 < k_1$), $|\psi_{II}|^2$ pode ser inicialmente maior que $|\psi_I|^2$, como na Figura 6.22*b*. A Figura 6-23 mostra a variação com o tempo de um pacote de ondas incidente em um degrau de potencial, para $E > V_0$.

Vamos agora considerar o caso da Figura 6-24*a*, em que $E < V_0$. Classicamente, esperamos que todas as partículas sejam refletidas em $x = 0$. No caso quântico, observamos que k_2 na Equação 6-64 agora é um número imaginário. Assim,

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} = Ce^{-\alpha x} \qquad \textbf{6-71}$$

é uma função exponencial *real*, na qual $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$ (Escolhemos a raiz positiva para que $\psi_{II} \to 0$ para $x \to \infty$.) Isso significa que o numerador e o denominador do lado direito da Equação 6-66 são complexos conjugados e, portanto, $|B|^2 = |A|^2$, $R = 1$ e $T = 0$. A Figura 6-25 mostra a variação de R e T com a razão E/V_0, na qual E é a energia das partículas e V_0 a altura do degrau. Em concordância com o resultado clássico, para $E/V_0 < 1$ todas as partículas são refletidas de volta para a região I. Entretanto, outro resultado interessante da solução quântica é que nem todas as partículas são refletidas no ponto $x = 0$. Como ψ_{II} é uma função exponencial decrescente, a densidade de partículas na região II é proporcional a

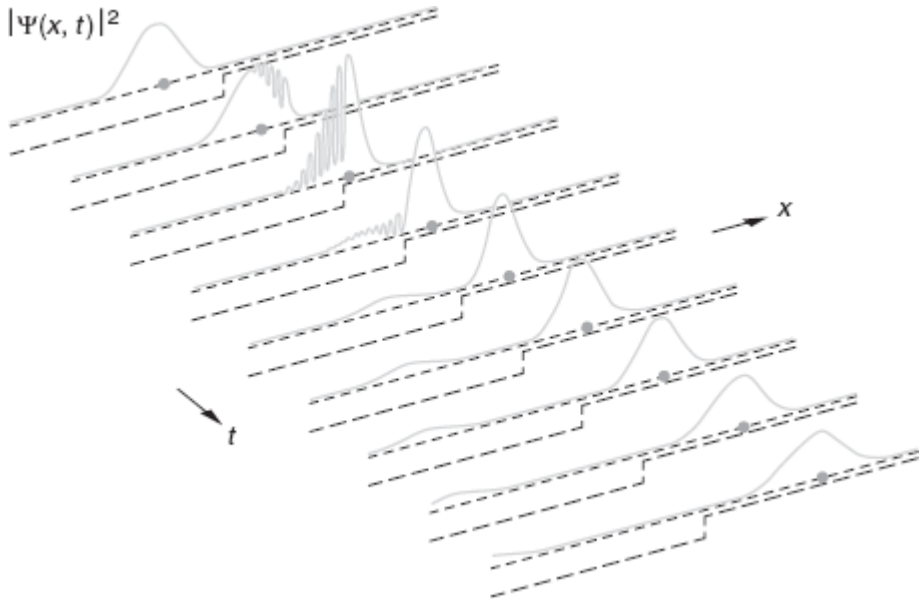


FIGURA 6-23 Variação com o tempo de um pacote de ondas unidimensional que representa uma partícula incidente em um degrau de potencial, para $E > V_0$. A posição de uma partícula clássica está indicada por um ponto. Observe que parte do pacote é transmitida e parte é refletida, embora a energia da partícula representada pelo pacote seja suficiente para transpor a barreira. Os picos estreitos são causados pela descontinuidade de $V(x)$ em $x = 0$.

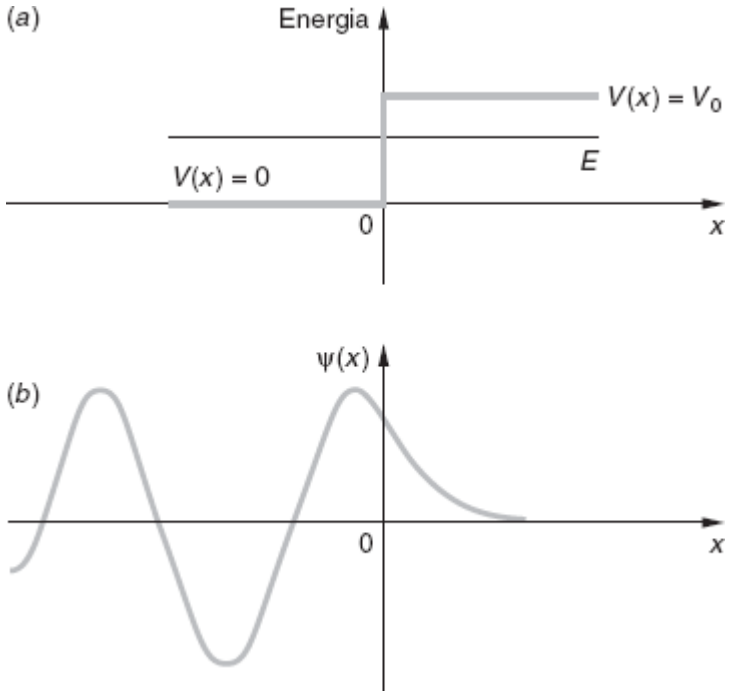


FIGURA 6-24 (*a*) Degrau de potencial. As partículas incidentes se movem da esquerda para a direita com energia total $E < V_0$. (*b*) A onda que penetra na região II é uma exponencial decrescente; o valor de R neste caso é igual a 1 e nenhuma energia é transmitida.

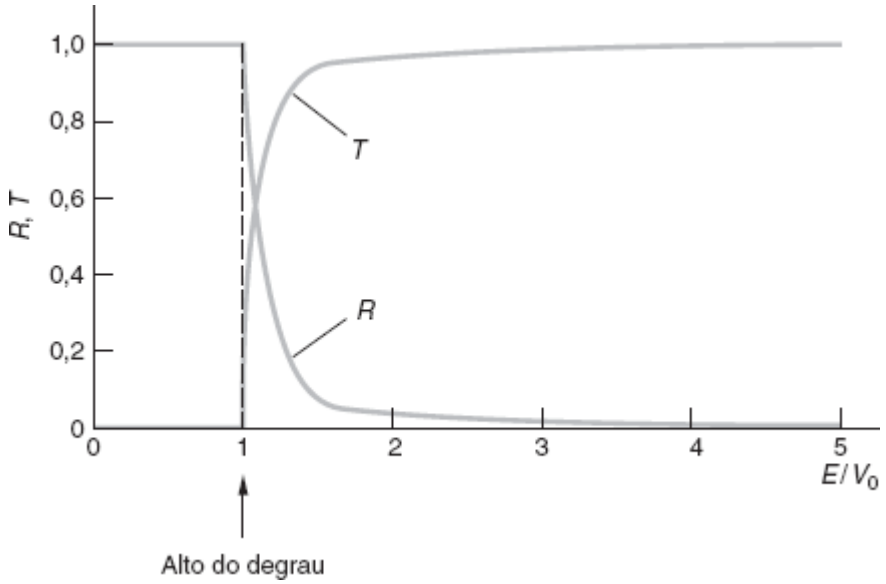


FIGURA 6-25 Coeficiente de reflexão R e coeficiente de transmissão T de um degrau de potencial V_0 em função da energia E (em unidades de V_0).

$$|\psi_{II}|^2 = |C|^2 e^{-2\alpha x} \qquad \textbf{6-72}$$

A Figura 6-24*b* mostra a função de onda para o caso em que $E < V_0$. A função de onda não se anula para $x > 0$, mas a amplitude diminui exponencialmente, como no caso do poço de potencial finito. A onda penetra ligeiramente na região classicamente proibida ($x > 0$), mas, em seguida, é totalmente refletida. (Como foi visto na Seção 6-3, isso não significa que partículas com energia cinética negativa sejam *observadas* nessa região, já que observar uma partícula nessa região introduz uma indeterminação no momento que corresponde a uma energia cinética mínima maior que $V_0 - E$.) Esta situação é semelhante à da reflexão interna total na ótica clássica.

EXEMPLO 6-6 **Reflexão em um Degrau com $V_0 > E$** Um feixe de elétrons de energia $E = 0{,}1V_0$ incide em um degrau de potencial $V_0 = 2$ eV. Este potencial é da mesma ordem de grandeza que a função trabalho dos elétrons na superfície dos metais (veja a Seção 3-3). Faça um gráfico da probabilidade relativa $|\psi|^2$ de que os elétrons penetrem uma distância x no degrau para o intervalo de $x = 0$ até $x = 10^{-9}$ m, o equivalente a cinco diâmetros atômicos.

SOLUÇÃO

Para $x > 0$, a função de onda é dada pela Equação 6-71. De acordo com a Equação 6-67, temos:

$$|C|^2 = \left| \frac{2(0{,}1V_0)^{1/2}}{(0{,}1\,V_0)^{1/2} + (-0{,}9\,V_0)^{1/2}} \right|^2 = 0{,}4$$

onde tomamos $|A|^2 = 1$. Calculando $2\alpha x$ para vários valores de x entre 0 e 10^{-9} m, obtemos, para $2\alpha = [2m(1{,}9V_0)]^{1/2}/\hbar$, as duas primeiras colunas da Tabela 6-2. Calculando $e^{-2\alpha x}$ e multiplicando por $|C|^2 = 0{,}4$, obtemos $|\psi|^2$, que aparece na terceira coluna da Tabela 6-2 e está plotado na Figura 6-26 em função de x.

Tabela 6-2 $|\psi|^2$

$x(m)$	$2\alpha x$	$\lvert\psi^2\rvert$
0	0	0,40
$0{,}1 \times 10^{-10}$	0,137	0,349
$1{,}0 \times 10^{-10}$	1,374	0,101
$2{,}0 \times 10^{-10}$	2,748	0,026
$5{,}0 \times 10^{-10}$	6,869	0,001
$10{,}0 \times 10^{-10}$	13,74	≈ 0

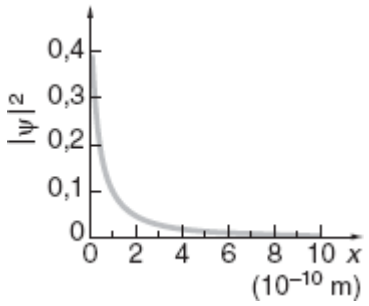


FIGURA 6-26

Barreira de Potencial Quadrada

Vamos agora discutir um dos potenciais mais interessantes da mecânica quântica, a barreira de potencial quadrada (Figura 6-27*a*), que pode ser expressa matematicamente da seguinte forma:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \text{ para } 0 < x < a \\ 0 \text{ para } 0 > x \text{ e } x > a \end{cases} \qquad \textbf{6-73}$$

No caso clássico, uma partícula que está se movendo da esquerda para a direita na região I, com $E > V_0$, continua a se mover para a direita na região II, mas com menor velocidade; ao chegar à região III, recupera a velocidade inicial. se $E < V_0$, a partícula não consegue penetrar na região II; é refletida na fronteira entre as regiões I e II e passa a se mover da direita para a esquerda na região I. No caso quântico, o comportamento das partículas é *muito* diferente, tanto para energias menores que V_0 quanto para energias maiores que V_0!

Em primeiro lugar, vamos ver o que acontece quando um feixe de partículas que se movem da esquerda para a direita, todas com a mesma energia $E < V_0$, incide em uma barreira de potencial (Figura 6-27). Por analogia com o caso do degrau de potencial, é fácil ver que as soluções gerais da equação de onda são as seguintes:

$$\begin{aligned}\psi_{\mathrm{I}}(x) &= Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \qquad x < 0\\ \psi_{\mathrm{II}}(x) &= Ce^{-\alpha x} + De^{\alpha x} \qquad 0 < x < a\\ \psi_{\mathrm{III}}(x) &= Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x} \qquad x > a\end{aligned} \qquad \textbf{6-74}$$

em que $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$ e $\alpha = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Observe que os expoentes de ψ_{II} são reais, enquanto os expoentes de ψ_{I} e ψ_{III} são imaginários. Como as partículas do feixe incidente estão se movendo da esquerda para a direita, $G = 0$. O valor de A depende da intensidade do feixe incidente e as constantes B, C, D e F podem ser determinadas aplicando as condições de contorno do problema, isto é, exigindo que ψ e $d\psi/dx$ sejam contínuas em $x = 0$ e $x = a$. Não vamos nos preocupar com os detalhes matemáticos; limitaremos a discussão aos resultados mais interessantes.

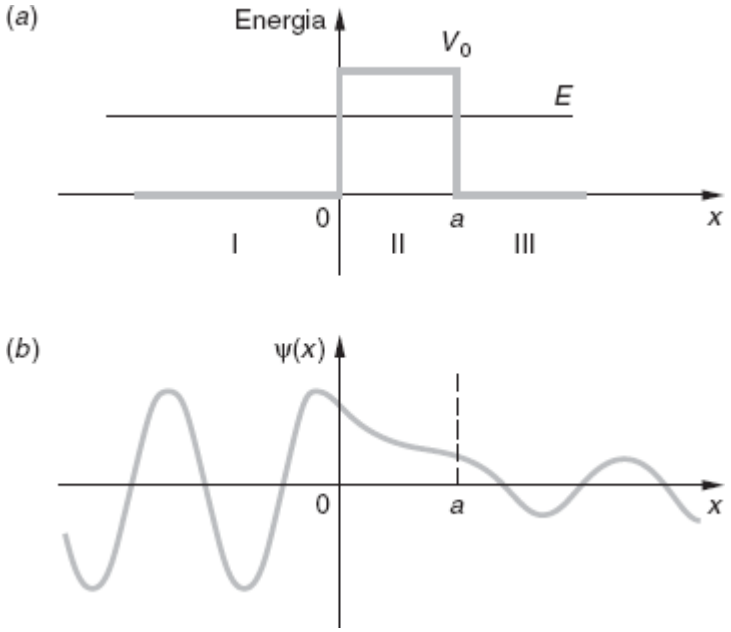


FIGURA 6-27 (*a*) Barreira de potencial quadrada. (*b*) Penetração da barreira por uma onda com uma energia menor que a da barreira. Parte da onda consegue atravessar a barreira, embora, classicamente, a partícula não possa entrar na região $0 < x < a$, na qual a energia potencial é maior que a energia total.

Como vimos no estudo do degrau de potencial, no caso em que $E < V_0$, a amplitude da função de onda não cai bruscamente para zero na fronteira das regiões I e II, mas passa a sofrer um decaimento exponencial enquanto penetra na região II. A partir da fronteira das regiões II e III, a função de onda volta a apresentar um comportamento senoidal, como mostra a Figura 6-27*b*. Isso significa que existe uma probabilidade finita de que a partícula representada pela função de onda seja encontrada do outro lado da barreira, embora classicamente não tenha energia suficiente para ultrapassá-la. Este fenômeno, conhecido como *efeito túnel* ou *tunelamento*, é análogo a um fenômeno da ótica clássica denominado reflexão interna total frustrada (veja a Figura 6-28). A probabilidade de que o tunelamento ocorra em uma dada situação é expressa por meio do coeficiente de transmissão.

O coeficiente de transmissão T da região I para a região III é dado pela seguinte expressão (veja o Problema 6-64):

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{\operatorname{senh}\alpha a}{4\dfrac{E}{V_0}\left(1 - \dfrac{E}{V_0}\right)}\right]^{-1} \qquad \textbf{6-75}$$

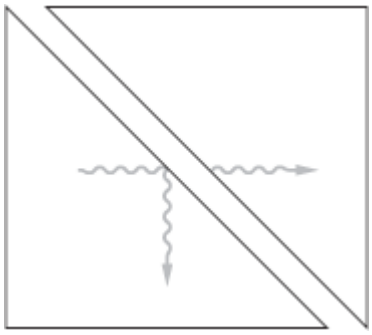


FIGURA 6-28 O fenômeno ótico conhecido como reflexão interna total frustrada. Graças à presença do segundo prisma, parte da onda atravessa o espaço vazio, embora o ângulo de incidência no primeiro prisma seja maior que o ângulo crítico. Este efeito pode ser

demonstrado com um laser e dois prismas de 45° feitos de vidro ou com um feixe de micro-ondas e dois prismas de 45° feitos de parafina.

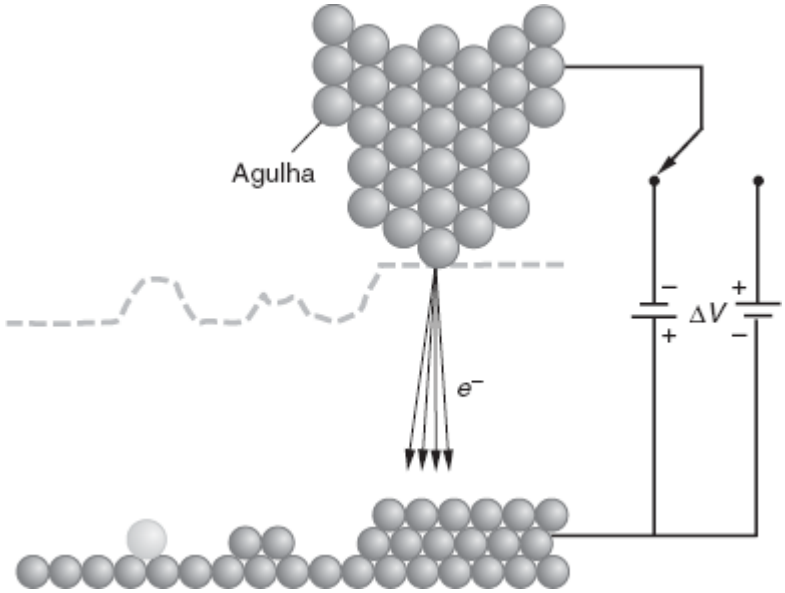


FIGURA 6-29 Diagrama esquemático mostrando o percurso da agulha de um microscópio de tunelamento (linha tracejada) ao longo da superfície de uma amostra, enquanto a altura é ajustada para que a corrente de tunelamento se mantenha constante. A agulha tem uma ponta de dimensões atômicas que permite observar irregularidades de pequenas dimensões (até mesmo átomos isolados), como mostra a linha tracejada.

Para $\alpha a >> 1$, a Equação 6-75 assume uma forma um pouco mais simples:

$$T \approx 16\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)e^{-2\alpha a} \qquad \textbf{6-76}$$

No *microscópio de tunelamento* (STM*), inventado na década de 1980 por Gerd Binnig e Heinrich Rohrer, o pequeno espaço vazio entre uma amostra e uma agulha funciona como uma barreira de potencial para os elétrons da superfície da amostra, como se pode ver na Figura 6-29. Uma tensão aplicada entre a agulha e a amostra faz com que os elétrons atravessem o espaço vazio por tunelamento. A corrente de tunelamento é extremamente sensível à distância entre a agulha e a amostra; uma variação de apenas 0,5 nm (o diâmetro de um átomo) na largura da barreira pode fazer com que a corrente se torne 10^4 vezes maior ou menor. Se a distância entre a agulha e a amostra é ajustada para que a corrente de tunelamento permaneça constante, os movimentos verticais da agulha reproduzem a topografia da superfície da amostra. Desta forma, é possível estudar a superfície de uma amostra com resolução atômica.

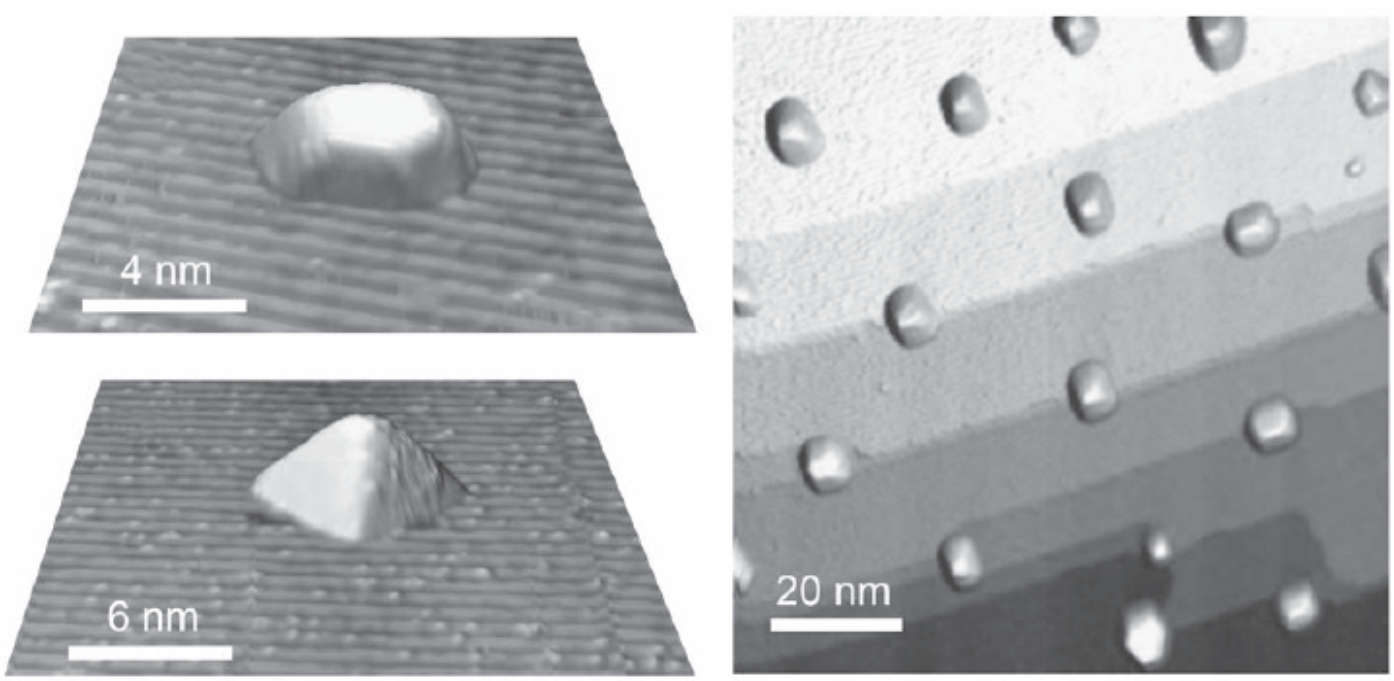
Uma importante aplicação do tunelamento é o *diodo túnel*, um componente usado em circuitos eletrônicos. Outra é a *emissão de campo*, o tunelamento de elétrons facilitado por um campo elétrico, usado atualmente em microscópios eletrônicos de transmissão e varredura e em um tipo de tela para computadores.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Decaimento Alfa

O efeito túnel foi usado por G. Gamow, E. U. Condon e R. W. Gurney em 1928 para explicar a enorme variação da vida média para o decaimento α dos núcleos radioativos e a própria existência, até certo ponto surpreendente, do decaimento α.[16] No decaimento α, que será discutido com mais detalhes no Capítulo 11, quanto menor a energia da partícula α emitida, maior a vida média. A energia das partículas α emitidas pelos átomos radioativos varia de 4 a 7 MeV, enquanto as vidas médias correspondentes variam de 10^{10} anos a 10^{-6} s. Gamow representou o núcleo radioativo como um poço de potencial no interior do qual se encontra a partícula α (Figura 6-30*a*). Para r menor que o raio atômico R, a partícula α é atraída pela força nuclear. Como não conheciam praticamente nada a respeito dessa força, Gamow e colaboradores a representaram como um poço quadrado. Do lado de fora do núcleo, a partícula α é repelida pela força de Coulomb. Essa repulsão é dada pela energia potencial de Coulomb $+kZze^2/r$, na qual $z = 2$ para a partícula α e Ze é a carga residual do núcleo. A energia total E é igual à energia cinética da partícula α emitida, já que a energia potencial se reduz praticamente a zero a uma curta distância do núcleo. Podemos ver na Figura 6-30*a* que o aumento de E reduz a altura relativa da barreira, $V - E$, e também a largura. Como, de acordo com a Equação 6-76, a probabilidade de transmissão varia exponencialmente com a largura e a raiz quadrada da altura da barreira, um pequeno aumento de E leva a um grande aumento da

probabilidade de transmissão e, portanto, a uma grande redução da vida média. A partir deste modelo, Gamow e colaboradores conseguiram chegar a uma expressão para a taxa de decaimento α dos núcleos radioativos em função da energia cinética das partículas emitidas que concordava muito bem com os resultados experimentais. O raciocínio usado pelos cientistas foi o seguinte:



Imagens em um microscópio de tunelamento de nanopartículas de platina, de tamanhos e formas escolhidos, depositadas em TiO_2(110). [*Fonte: Prof. Beatriz Roldan Cuenya at the Ruhr – University Bochum, Germany*.]

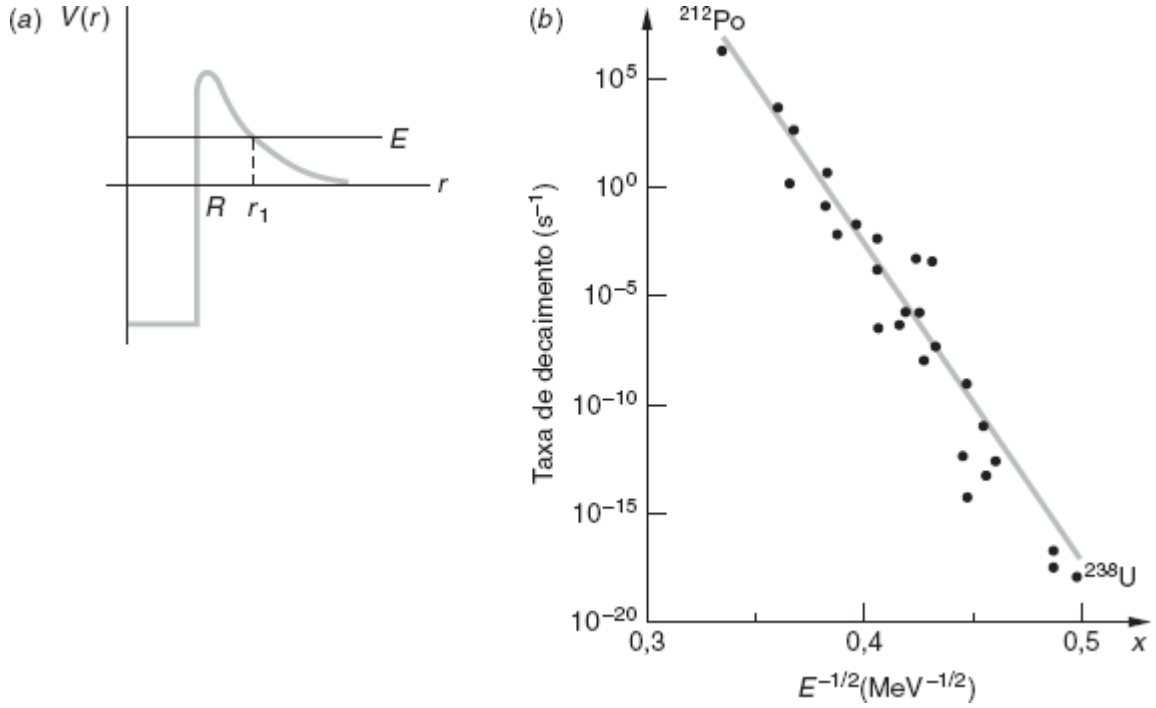


FIGURA 6-30 (*a*) Modelo da função energia potencial para uma partícula α dentro e fora de um núcleo atômico. No interior do núcleo (isto é, para $r < R$), a interação nuclear pode ser descrita aproximadamente por um poço de potencial. Do lado de fora do núcleo, a interação nuclear é desprezível e o potencial pode ser descrito pela lei de Coulomb, $V(r) = +kZze^2/r$, em que Ze é a carga residual do núcleo e ze é a carga da partícula α. No interior do núcleo, a partícula α oscila de um lado para o outro e é refletida repetidamente pela barreira de potencial. De acordo com a mecânica quântica, cada vez que a partícula α se choca com a barreira, existe uma pequena probabilidade de que consiga atravessá-la e apareça do lado de fora do núcleo em $r = r_1$. A função de onda é semelhante à que aparece na Figura 6-27*b*. (*b*) Taxa de decaimento para a emissão de partículas α por vários núcleos radioativos em função da energia das partículas emitidas. A reta representa a previsão teórica (Equação 6-79); os pontos são resultados experimentais.

A probabilidade de que uma partícula α atravesse a barreira por tunelamento em uma única tentativa é proporcional ao coeficiente de transmissão T da Equação 6-76. Na prática, o valor do produto αa é tão grande que a variação da exponencial com a energia da partícula α domina a expressão e podemos escrever

$$T \approx e^{-2\sqrt{2m(V_0-E)}a/\hbar} \qquad \textbf{6-77}$$

O valor dado pela Equação 6-77 é um número muito pequeno, ou seja, em cada colisão com a barreira, é muito provável que a partícula α seja refletida. O número N de vezes por segundo que a partícula α se aproxima da barreira é dado aproximadamente por

Quando $E > V_0$, não há onda refletida se $\alpha a = \pi, 2\pi, \ldots$, por causa da interferência destrutiva. No caso de elétrons incidentes em átomos de gases nobres, este fenômeno, que resulta em um coeficiente de transmissão igual a 1 para certas energias dos elétrons, é conhecido como efeito Ramsauer-Townsend e pode ser usado para medir o diâmetro atômico dos gases nobres.

$$N \approx \frac{v}{2R} \qquad \textbf{6-78}$$

em que v é a velocidade da partícula no interior do núcleo. Assim, a taxa de decaimento, ou seja, a probabilidade por unidade de tempo de que o núcleo emita uma partícula α, que também é igual ao inverso da vida média τ, é dada por

$$\text{taxa de decaimento} = \frac{1}{\tau} = \frac{v}{2R} e^{-2\sqrt{2m(V_0-E)}a/\hbar} \qquad \textbf{6-79}$$

A Figura 6-30*b* ilustra a boa concordância entre os resultados teóricos obtidos a partir do modelo de Gamow e os dados experimentais.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
O Relógio Atômico de NH_3

O efeito túnel também desempenha um papel importante na *inversão periódica* das moléculas de amônia. A molécula de NH_3 possui duas configurações de equilíbrio (Figura 6-31*a*). Os três átomos de hidrogênio estão no mesmo plano; o átomo de nitrogênio oscila entre duas posições de equilíbrio, de um lado e do outro do plano formado pelos átomos de hidrogênio. A função energia potencial $V(x)$ a que o átomo de N está sujeito possui dois mínimos dispostos simetricamente em relação ao plano (Figura 6-31*b*). Como o átomo de nitrogênio está ligado à molécula, a energia é quantizada; os níveis de menor energia estão muito abaixo do máximo central do potencial. O máximo central constitui, portanto, uma barreira para o átomo de N que se encontra em um dos níveis de menor energia. Classicamente, a barreira seria intransponível; graças ao efeito túnel, porém, existe uma probabilidade finita de que seja atravessada pelo átomo de N. Isso faz com que o átomo de N oscile lentamente de um lado para outro do plano formado pelos átomos de H.[17] A frequência de oscilação é $2{,}3786 \times 10^{10}$ Hz quando o átomo de nitrogênio se encontra no estado caracterizado pela energia E_1 da Figura 6-31*b*. Esta frequência é relativamente baixa em comparação com a da maioria das vibrações moleculares, um fato que permitiu que a frequência de tunelamento do átomo de N na molécula de NH_3 fosse usada como padrão nos primeiros *relógios atômicos*, dispositivos usados para medir o tempo com precisão.

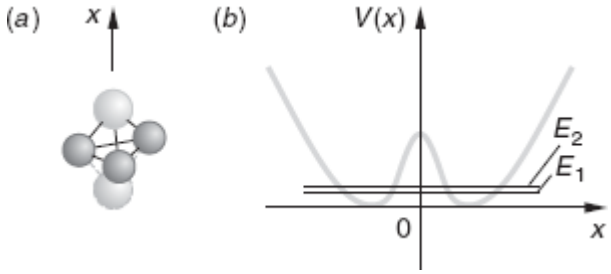


FIGURA 6-31 (*a*) A molécula de NH_3 oscila entre as duas posições de equilíbrio indicadas na figura. As três moléculas de H estão no mesmo plano; o átomo de N pode estar acima ou abaixo deste plano. (*b*) Energia potencial do átomo de N em função da distância acima ou abaixo do plano formado pelos átomos de H. Algumas energias permitidas, incluindo a do estado fundamental e do primeiro estado excitado, são menores que a da barreira central; mesmo assim, o átomo de N é capaz de atravessá-la por tunelamento.



Leitura Suplementar

O fenômeno quântico do tunelamento serve de base para vários dispositivos usados em equipamentos eletrônicos, como a junção Josephson e o diodo túnel, que é o tema da leitura suplementar *O Diodo Túnel*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram a Equação 6-80 e a Figura 6-32.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Equação de Schrödinger	$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t} \quad \textbf{6-6}$$
Dependente do tempo, em uma dimensão	$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad \textbf{6-18}$$
Independente do tempo, em uma dimensão	$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1 \quad \textbf{6-9}$$ e $$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx = 1 \quad \textbf{6-20}$$
Condição de normalização	
Condições de aceitabilidade	1. $\psi(x)$ deve existir e satisfazer a equação de Schrödinger. 2. $\psi(x)$ e $d\psi/dx$ devem ser contínuas. 3. $\psi(x)$ e $d\psi/dx$ devem ser finitas. 4. $\psi(x)$ e $d\psi/dx$ devem ser unívocas. 5. $\psi(x)$ deve ser normalizável.
2. Poço quadrado infinito	$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = n^2E_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{6-24}$$
Energias permitidas	$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad \textbf{6-32}$$
Funções de onda	
3. Poço quadrado finito	As energias permitidas em um poço finito são menores que as energias correspondentes em um poço quadrado infinito de mesma largura. Todo poço finito possui pelo menos um estado ligado, ao qual está associada uma energia permitida.
4. Valores esperados e operadores	O valor esperado ou valor médio de uma grandeza física representada por um operador, como o operador momento p_{op}, é dado por $$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* p_{op}\Psi dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi\, dx \quad \textbf{6-48}$$
5. Oscilador harmônico simples	$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \textbf{6-56}$$
Energias permitidas	

6. Reflexão e Transmissão	Quando o potencial varia abruptamente em uma distância pequena em comparação com o comprimento de onda de uma partícula, a partícula pode ser refletida, mesmo que $E > V(x)$. Uma partícula também pode penetrar em uma região na qual $E < V(x)$.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Brandt, S. e H. D. Dahmen, *The Picture Book of Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1985.

Eisberg, R., e R. Resnick, *Quantum Physics*, 2d ed., Wiley, New York, 1985.

Feynman, R. P., R. B. Leighton e M. Sands, *Lectures on Physics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

Ford, K. W., *The Quantum World*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 2004.

French, A. P. e E. F. Taylor, *An Introduction to Quantum Physics*, Norton, New York, 1978.

Mehra, J., e H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982.

Park, D., *Introduction to Quantum Theory*, 3d ed., McGraw-Hill, New York, 1992.

Visual Quantum Mechanics, Kansas State University, Manhattan, 1996. Programa de simulação em computador que permite analisar os efeitos de vários potenciais unidimensionais, incluindo os poços quadrados e o oscilador harmônico simples discutidos neste capítulo.

Notas

1. Felix Bloch (1905-1983), físico suíço naturalizado americano. Estava estudando na Universidade de Zurique quando assistiu ao colóquio mencionado no texto. A citação é de um discurso proferido na sede da American Physical Society em 1976. Bloch recebeu, com Edward Mill Purcell, o Prêmio Nobel de Física de 1952, por haver medido o momento magnético do nêutron usando um método que ele mesmo havia desenvolvido e que levou à criação de uma técnica de medida conhecida como ressonância magnética nuclear (NMR*).

2. Peter Joseph Wilhelm Debye (1884-1966), químico holandês naturalizado americano. Sucedeu a Einstein na cadeira de física teórica da Universidade de Zurique e recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1936 por suas contribuições para o estudo da estrutura das moléculas.

3. Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961), físico austríaco. Sucedeu a Planck na cadeira de física teórica da Universidade de Berlim em 1928, dois anos depois de publicar, em rápida sucessão, seis artigos que estabeleceram os fundamentos da mecânica ondulatória. Graças a esses trabalhos, dividiu o Prêmio Nobel de Física de 1933 com P.A.M. Dirac. Por não concordar com o regime nazista, mudou-se em 1940 para a Irlanda, onde permaneceu até se aposentar, em 1955. Em 1956, voltou para Viena, onde morreu em 1961.

4. Para verificar que isso é verdade, considere o efeito sobre $\partial^2\Psi(x, t)/\partial x^2$ de multiplicar $\Psi(x, t)$ por um fator C. Nesse caso, $\partial^2 C\Psi(x, t)/\partial x^2 = C\partial^2\Psi(x, t)/\partial x^2$ e a derivada é multiplicada pelo mesmo fator. Assim, a derivada é proporcional à primeira potência da função, ou seja, é linear em relação a $\Psi(x, t)$.

5. O número imaginário i aparece porque a equação de Schrödinger relaciona uma derivada *primeira* em relação ao tempo a uma derivada *segunda* em relação ao espaço. No caso da equação de onda clássica (Equação 5-11), a relação é entre a derivada segunda em relação ao tempo e a derivada segunda em relação ao espaço. Em consequência, a função $\Psi(x, t)$ é uma função complexa, enquanto a função $y(x, t)$ é uma função real.

6. Embora os resultados das medições sejam números reais, a parte imaginária de Ψ contribui para esses resultados. Todo número complexo pode ser escrito na forma $z = a + bi$, em que a e b são números reais e $i = \sqrt{1}$. O módulo ou valor absoluto de z é definido por meio da expressão $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Como o complexo conjugado de z é $z^* = a - bi$, $z^*z = (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$; assim, o cálculo de $|\Psi|^2$ inclui uma contribuição da parte imaginária.

7. Estamos usando a convenção da estatística segundo a qual a certeza é representada por uma probabilidade igual a 1.

8. Este método de solução das equações diferenciais parciais é conhecido como *método da separação de variáveis*. Na mecânica quântica, como na mecânica clássica, muitos potenciais de interesse são independentes do tempo; assim, o método pode ser aplicado à equação de Schrödinger em uma grande variedade de situações.

9.É preciso observar que existem exceções para esta exigência na teoria quântica.

10. A solução $E = 0$, correspondente a $n = 0$, não é fisicamente possível. Como vimos na Seção 5-6, de acordo com o princípio

de indeterminação, a energia mínima para uma partícula em uma caixa deve ser maior ou igual a $\hbar^2/2mL^2$.

11. Lembrando que combinações lineares das soluções da equação de Schrödinger também são soluções, devemos observar que a simulação do comportamento clássico de uma partícula macroscópica em uma caixa macroscópica exige o uso de funções de onda que são uma combinação de muitos estados estacionários; assim, as partículas clássicas jamais possuem uma energia definida, pelo menos em termos microscópicos.

12. Para simplificar a notação, vamos às vezes omitir as variáveis independentes e escrever simplesmente ψ_n em vez de $\psi_n(x)$ e Ψ_n em vez de $\Psi_n(x, t)$.

13. Os polinômios de Hermite são funções conhecidas, já que constituem as soluções de uma importante equação diferencial da física matemática. Muitos livros de mecânica quântica contêm uma lista dos polinômios de Hermite para vários valores de n.

14. É fácil mostrar que a única diferença entre uma função $\psi(x)$ normalizada em termos da densidade de partículas e uma função $\psi(x)$ para a qual $|\psi(x)|^2$ representa a densidade de probabilidade está apenas em uma constante multiplicativa.

15. Na maioria dos livros elementares de mecânica quântica, T e R são expressos em unidades de partículas por unidade de tempo.

16. Rutherford havia mostrado que o espalhamento de partículas ψ de 8,8 MeV produzidas pelo decaimento de ^{212}Po obedecia à lei de Coulomb até distâncias menores que 3×10^{-14} m, isto é, da ordem das dimensões do núcleo. Isso queria dizer que a barreira de Coulomb a essa distância tinha uma altura de pelo menos 8,8 MeV; entretanto, a energia das partículas α emitidas pelo ^{238}U é apenas 4,2 MeV, menos de metade da altura da barreira. A física clássica era incapaz de explicar este paradoxo.

17. Como o centro de massa da molécula deve permanecer fixo em um referencial inercial, o plano formado pelos átomos de H também oscila no sentido oposto ao do átomo de N. Na verdade, como a massa dos átomos de hidrogênio é muito menor que a dos átomos de nitrogênio, a amplitude do movimento do plano é maior que a do movimento do átomo de nitrogênio. Entretanto, é o movimento relativo que é importante.

18. Veja, por exemplo, F. Capasso e S. Datta, "Quantum Electron Devices", *Physics Today*, **43**, 74 (1990). Leo Esaki recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1973 (juntamente com Ivar Giaver e Brian D. Josephson) pela invenção do diodo túnel.

Problemas

NÍVEL I

Seção 6-1 A Equação de Schrödinger em Uma Dimensão

6-1. Mostre que a função de onda $\Psi(x, t) = Ae^{(kx - \omega t)}$ não satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo.

6-2. Mostre que a função $\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ satisfaz tanto a equação de Schrödinger dependente do tempo quanto a equação de onda clássica (Equação 6-1).

6-3. Em uma região do espaço, uma partícula possui uma função de onda dada por $\omega(x) = Ae^{-x^2/2L^2}$ e uma energia dada por $\hbar^2/2mL^2$, em que L é um comprimento. (*a*) Determine a energia potencial em função de x e faça um gráfico de V em função de x. (*b*) Que tipo de potencial clássico tem essa forma?

6-4. (*a*) Determine a energia cinética em função de x para a partícula do Problema 6-3. (*b*) Mostre que $x = L$ é o ponto de retorno clássico. (*c*) A energia potencial de um oscilador harmônico simples é dada por $V(x) = m\omega^2x^2/2$, na qual ω é a frequência angular do oscilador. Compare este valor com o encontrado no item (*a*) do Problema 6-3 e mostre que a energia total para esta função de onda pode ser escrita na forma $E = \hbar\omega/2$.

6-5. (*a*) Mostre que a função de onda $\Psi(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ *não satisfaz* a equação de Schrödinger dependente do tempo. (*b*) Mostre que $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t) + iA \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ satisfaz a equação de Schrödinger dependente do tempo.

6-6. A função de onda de um elétron livre, ou seja, de um elétron que não está sujeito a uma força, é dada por $\psi(x) = A \operatorname{sen}[(2{,}5 \times 10^{10})x]$, na qual x está em metros. Determine (*a*) o momento do elétron; (*b*) a energia total do elétron; (*c*) o comprimento de onda do elétron.

6-7. Uma partícula de massa m e energia total zero se encontra em uma região do espaço na qual a função de onda é $\psi(x) = Ce^{-x^2/L^2}$. (*a*) Determine a energia potencial $V(x)$ da partícula em função de x; (*b*) faça um gráfico de $V(x)$ em função de x.

6.8. Normalize a função de onda do Problema 6-2 entre $-a$ e $+a$. Por que a função não pode ser normalizada entre $-\infty$ e $+\infty$?

Seção 6-2 O Poço Quadrado Infinito

6-9. Uma partícula se encontra em um poço quadrado infinito de largura L. Calcule a energia do estado fundamental (*a*) se a partícula é um próton e L = 0,1 nm, o tamanho aproximado de uma molécula; (*b*) se a partícula é um próton e L = 1 fm, o tamanho aproximado de um núcleo.

6-10. Uma partícula se encontra no estado fundamental em um poço quadrado infinito cujo potencial é dado pela Equação 6-21. Determine a probabilidade de que a partícula seja encontrada no intervalo $\Delta x = 0{,}002L$ em (*a*) $x = L/2$; (*b*) $x = 2L/3$; (*c*) $x = L$. (Como Δx é muito pequeno, não é necessário executar uma integração.)

6-11. Repita o Problema 6-10 para o caso de uma partícula no segundo estado excitado ($n = 3$) de um potencial quadrado infinito.

6-12. Um corpo com uma massa de 10^{-6} g está se movendo com uma velocidade de 10^{-1} cm/s em uma caixa de 1 cm de comprimento. Considerando a caixa como um poço unidimensional quadrado infinito, calcule o valor aproximado do número quântico *n* do estado em que se encontra a partícula.

6-13. (*a*) Determine os valores de Δx e Δp para o corpo do Problema 6-12, supondo que $\Delta x/L = 0{,}01\%$ e $\Delta p/p = 0{,}01\%$. (*b*) Qual é o valor de $\Delta x \Delta p/\hbar$?

6-14. Uma partícula de massa *m* está confinada em um tubo de comprimento *L*. (*a*) Use a relação de indeterminação para estimar a menor energia possível do sistema. (*b*) Supondo que não existem forças no interior do tubo e que a partícula sofre choques elásticos com as paredes das extremidades do tubo, use a equação de Schrödinger para determinar a energia do estado fundamental da partícula. Compare a resposta com a do item (*a*).

6-15. (*a*) Qual é o comprimento de onda da partícula do Problema 6-14 no estado fundamental? (*b*) Qual é o comprimento de onda da partícula no segundo estado excitado ($n = 3$)? (*c*) Use a relação de de Broglie para calcular o módulo do momento da partícula no estado fundamental. (*d*) Mostre que a energia da partícula no estado fundamental é igual a $p^2/2m$.

6-16. O comprimento de onda da luz emitida por um laser de rubi é 694,3 nm. Se a emissão de um fóton com este comprimento de onda estivesse associada à transição de um elétron do nível $n = 2$ para o nível $n = 1$ de um poço quadrado infinito, qual seria a largura *L* do poço?

6-17. As energias permitidas de uma partícula de massa *m* em um poço quadrado infinito unidimensional são dadas pela Equação 6-24. Mostre que um nível com $n = 0$ viola o princípio de indeterminação de Heisenberg.

6-18. Em um modelo simplificado do átomo neutro de urânio, os elétrons estão confinados em uma caixa unidimensional de 0,05 nm de largura, com um elétron por nível de energia. (*a*) Calcule a energia do nível ocupado de maior energia neste modelo. (*b*) Compare o resultado do item (*a*) com a energia de repouso do elétron.

6-19. Suponha que uma conta macroscópica com uma massa de 2,0 g esteja se movendo sem atrito em um fio horizontal no qual existem dois batentes a 10 cm de distância um do outro. Se a velocidade da conta é 20 nm/ano (ou seja, uma velocidade extremamente pequena), qual é o valor do número quântico correspondente?

6-20. Um elétron se encontra no estado $n = 5$ de um poço unidimensional quadrado infinito. (*a*) Mostre que a probabilidade de encontrar o elétron na região entre os pontos $x = 0{,}2L$ e $x = 0{,}4L$ é 1/5. (*b*) Calcule a probabilidade de encontrar o elétron em um "volume" $\Delta x = 0{,}01L$ no entorno do ponto $x = L/2$.

6-21. Nos primórdios da física nuclear, antes que o nêutron fosse descoberto, acreditava-se que o núcleo fosse constituído por elétrons e prótons. Considerando o núcleo um poço unidimensional quadrado infinito de largura $L = 10$ fm e ignorando efeitos relativísticos, calcule a energia do estado fundamental (*a*) para um elétron e (*b*) para um próton no interior do núcleo. (*c*) Determine a diferença de energia entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado de cada partícula. (As diferenças entre os níveis de energia dos núcleos são da ordem de 1 MeV.)

6-22. Um elétron se encontra no estado fundamental de um poço unidimensional infinito de largura $L = 10^{-10}$ m. Calcule a força que o elétron exerce ao se chocar com uma das paredes do poço. (*Sugestão*: $F = -dE/dL$. Por quê?) Como esta força se compara com o peso de um elétron na superfície da Terra?

6-23. As funções de onda de uma partícula em um poço quadrado unidimensional infinito são dadas pela Equação 6-32. Mostre que, para essas funções, $\int \psi_n(x)\psi_m(x)dx = 0$, ou seja, que $\psi_n(x)$ e $\psi_m(x)$ são ortogonais.

Seção 6-3 O Poço Quadrado Finito

6-24. Faça um gráfico (*a*) da função de onda; (*b*) da distribuição de probabilidade para o estado $n = 4$ do poço quadrado finito.

6-25. Um poço quadrado finito com 1,0 fm de largura contém um nêutron. Qual deve ser a profundidade do poço para que existam apenas dois níveis permitidos de energia para o nêutron?

6-26. Um elétron está confinado em um poço quadrado finito cujas "paredes" têm 8,0 eV de altura. Se a energia do estado fundamental é 0,5 eV, estime a largura do poço.

6-27. Levando em conta características como a curvatura, o comprimento de onda e a amplitude, faça um gráfico da função de onda associada a uma partícula de energia *E* no poço de potencial finito da Figura 6-33.

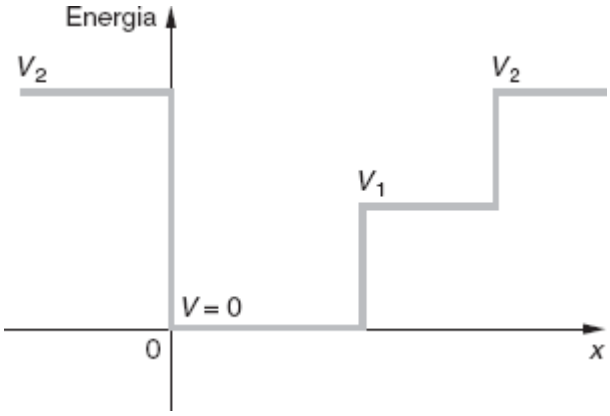


FIGURA 6-33 Problema 6-27.

6-28. Para um poço quadrado finito de largura a = 10 nm, com seis níveis de energia permitidos, (*a*) faça um gráfico do poço de potencial; (*b*) faça um gráfico da função de onda do estado com n = 3, entre $x = -2a$ e $x = +2a$; (*c*) faça um gráfico da densidade de probabilidade para o mesmo intervalo do item (*b*).

Seção 6-4 Valores Esperados e Operadores

6-29. Calcule o valor esperado da componente x do momento de uma partícula de massa m no nível n = 3 de um poço quadrado unidimensional infinito de largura L. Você considera o resultado razoável, já que a energia de uma partícula neste nível é $9\pi^2\hbar^2/2mL^2$?

6-30. Determine (*a*) $\langle x \rangle$; (*b*) $\langle x^2 \rangle$ para o segundo estado excitado (n = 3) de um poço quadrado infinito.

6-31. (*a*) Mostre que a distribuição clássica de probabilidade para uma partícula em um poço unidimensional quadrado infinito de largura L é dada por $P(x) = 1/L$. (*b*) Use o resultado do item (*a*) para calcular $\langle x^2 \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ para uma partícula clássica nesse tipo de poço.

6-32. Mostre, a partir da equação de Schrödinger dependente do tempo, que $\langle p^2 \rangle = \langle 2m[E - V(x)] \rangle$ para qualquer potencial $V(x)$ e que $\langle p^2 \rangle = \langle 2mE \rangle$ para o poço quadrado infinito. Use este resultado para calcular $\langle p^2 \rangle$ para o estado fundamental do poço quadrado infinito.

6-33. Calcule e $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, $\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$, $\sigma_x\sigma_p$ para a função de onda do estado fundamental do poço quadrado infinito. (*Sugestões*: Por simetria, $\langle p \rangle = 0$; de acordo com o Problema 6-32, $\langle p^2 \rangle = \langle 2mE \rangle$).

Seção 6-5 O Oscilador Harmônico Simples

6-34. Determine os valores de $\langle x^2 \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$ para o estado fundamental de um oscilador harmônico simples (Equação 6-58). O valor de A_0 é $(m\omega/\hbar\pi)^{1/4}$.

6-35. Use a lei de conservação da energia para obter uma expressão relacionando x^2 e p^2 no caso do oscilador harmônico simples. Em seguida, use essa expressão e o resultado do Problema 6-34 para calcular o valor de $\langle p^2 \rangle$ para o estado fundamental do oscilador harmônico simples.

6-36. (*a*) Usando o valor de A_0 dado no Problema 6-34, escreva a função de onda total $\Psi_0(x, t)$ para o estado fundamental do oscilador harmônico simples. (*b*) Use o operador p_x da Tabela 6-1 para calcular $\langle p^2 \rangle$.

6-37. Para o estado fundamental do oscilador harmônico simples (n = 0), o polinômio de Hermite $H_n(x)$ da Equação 6-57 é $H_0(x) = 1$. Determine (*a*) a constante de normalização C_0; (*b*) $\langle x^2 \rangle$; (*c*) $\langle V(x) \rangle$ para esse estado. (*Sugestão*: As integrais necessárias para resolver o problema estão na Tabela B1-1 do Apêndice B1.)

6-38. Para o primeiro estado excitado do oscilador harmônico simples (n = 1), o polinômio de Hermite da Equação 6-57 é $H_1(x) = x$. Determine (*a*) a constante de normalização C_1; (*b*) $\langle x \rangle$; (*c*) $\langle x^2 \rangle$; (*d*) $\langle V(x) \rangle$ para este estado. (*Sugestão*: A mesma do Problema 6-37.)

6-39. Um oscilador harmônico quântico de massa m se encontra no estado fundamental com pontos de retorno clássicos em $\pm A$. (*a*) Calcule o valor de Δp para este estado, supondo que a massa está confinada em uma região $\Delta x \approx 2A$. (*b*) Compare a energia cinética calculada a partir do valor de Δp obtido no item (*a*): (1) com a energia total do estado fundamental; (2) com o valor esperado da energia cinética.

6-40. Calcule o espaçamento entre níveis de energia vizinhos por unidade de energia, isto é, o valor de $\Delta E_n/E_n$, para o oscilador harmônico quântico; em seguida, faça $n \rightarrow \infty$ e mostre que o resultado está de acordo com o princípio de correspondência de Bohr (veja a Seção 4-3).

6-41. Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle x \rangle$ (*a*) para o estado fundamental e (*b*) para o primeiro estado excitado do oscilador harmônico simples.

6-42. O período de um pêndulo macroscópico constituído por uma esfera de 10 g suspensa por um fio de massa desprezível com 50 cm de comprimento é 1,42 s. (*a*) Calcule a energia do estado fundamental do sistema (energia de ponto zero). (*b*) Se o pêndulo é colocado em um estado no qual a massa atinge uma altura 0,1 mm acima da altura mínima, qual é o número quântico desse estado? (*c*) Qual é a frequência de oscilação do pêndulo no estado do item (*b*)?

6-43. Mostre que as funções de onda do estado fundamental e do primeiro estado excitado do oscilador harmônico simples, dadas na Equação 6-58, são ortogonais, ou seja, mostre que $\int \psi_0(x)\psi_1(x)dx = 0$.

Seção 6-6 Reflexão e Transmissão de Ondas

6-44. Uma partícula livre, de massa m e número de onda k_1, está se movendo para a direita. No ponto $x = 0$, o potencial muda bruscamente de 0 para V_0 e permanece com este valor para todos os valores positivos de x. (*a*) Se a energia inicial da partícula é $E = \hbar^2 k_1^2/2m$, qual é o número de onda k_2 na região $x > 0$? Expresse a resposta em função de k_1 e V_0. (*b*) Calcule o coeficiente de reflexão R do degrau de potencial. (*c*) Qual é o valor do coeficiente de transmissão T? (*d*) A cada milhão de partículas com número de onda k_1 que incidem no degrau de potencial, quantas partículas, em média, continuam a se mover no sentido positivo do eixo x? Como este valor se compara com a previsão clássica?

6-45. Um próton com uma energia de 44 MeV se encontra em um núcleo cujo poço de potencial tem 50 MeV de profundidade. O próton "enxerga" uma barreira de Coulomb com 10^{-15} m de largura na superfície do núcleo. (*a*) Use a Equação 6-76 para calcular a probabilidade de que o próton atravesse a barreira na primeira vez em que se chocar com ela. (*b*) Supondo que o raio R do núcleo é 10^{-15} m e a velocidade do próton é não relativística, calcule a taxa de emissão de prótons (ou seja, a taxa de decaimento) de um material que contém esse tipo de núcleo. (*c*) Por que fator é dividida a resposta do item (*b*) se a largura da barreira é multiplicada por dois?

6-46. No Problema 6-44, suponha que o potencial varie bruscamente de 0 para $-V_0$ em $x = 0$, fazendo a velocidade da partícula aumentar em vez de diminuir. O número de onda da partícula incidente continua a ser k_1 e a energia inicial continua a ser $2V_0$. (*a*) Qual é o número de onda da partícula na região $x > 0$? (*b*) Calcule o coeficiente de reflexão R do degrau de potencial. (*c*) Qual é o valor do coeficiente de transmissão T? (*d*) A cada milhão de partículas com número de onda k_1 que incidem no degrau de potencial, quantas partículas, em média, continuam a se mover no sentido positivo do eixo x? Como este valor se compara com a previsão clássica?

6-47. Em um dispositivo semicondutor, uma camada de óxido forma uma barreira com 0,6 nm de largura e 9 eV de altura entre dois fios condutores. Elétrons chegam à barreira depois de serem acelerados por uma tensão de 4 V. (*a*) Que fração dos elétrons incidentes consegue atravessar a barreira por tunelamento? (*b*) Qual deve ser a tensão de aceleração para que a fração dos elétrons incidentes que consegue atravessar a barreira por tunelamento seja o dobro do valor encontrado no item (*a*)?

6-48. Use a Equação 6-70 para mostrar que $T = 0$ no caso de partículas incidentes em um degrau de potencial com $E < V_0$.

6-49. Demonstre as Equações 6-66 e 6-67 a partir das Equações 6-65*a* e 6-65*b*.

6-50. Um feixe de elétrons com uma energia cinética $E = 2{,}0$ eV incide em uma barreira de potencial de altura $V_0 = 6{,}5$ eV e largura $a = 5{,}0 \times 10^{-10}$ m (veja a Figura 6-26). Que fração dos elétrons consegue transpor a barreira?

6-51. Um feixe de prótons com uma energia cinética de 40 MeV incide em um degrau de potencial de 30 MeV. (*a*) Que fração do feixe é refletida? Que fração é transmitida? (*b*) Responda ao item (*a*) supondo que as partículas são elétrons.

NÍVEL II

6-52. Um próton se encontra em um poço quadrado infinito dado pela Equação 6-21 com $L = 1$ fm. (*a*) Calcule a energia do estado fundamental em MeV. (*b*) Faça um diagrama de níveis de energia para este sistema. Calcule o comprimento de onda dos fótons emitidos nas transições (*c*) de $n = 2$ para $n = 1$; (*d*) de $n = 3$ para $n = 2$; (*e*) de $n = 3$ para $n = 1$.

6-53. Uma partícula se encontra no estado fundamental de um poço quadrado infinito dado pela Equação 6-21. Calcule a probabilidade de que a partícula seja encontrada na região (*a*) $0 < x < L/2$; (*b*) $0 < x < L/3$; (*c*) $0 < x < 3L/4$.

6-54. (*a*) Mostre que, para grandes valores de n, a diferença relativa de energia entre o estado n e o estado $n + 1$ de uma partícula em um poço quadrado infinito é dada aproximadamente por

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \approx \frac{2}{n}$$

(*b*) Qual é a diferença percentual aproximada entre as energias dos estados $n_1 = 1.000$ e $n_2 = 1.001$? (*c*) Comente a respeito da relação entre os resultados dos itens (*a*) e (*b*) e o princípio de correspondência de Bohr.

6.55. Calcule o valor esperado da energia cinética de uma partícula de massa m que se move no nível $n = 2$ de um poço

quadrado unidimensional infinito de largura L.

6.56. Uma partícula de massa m se encontra em um poço quadrado infinito cujo potencial é dado por

$$\begin{aligned} V &= \infty \quad x < -L/2 \\ V &= 0 \quad -L/2 < x < +L/2 \\ V &= \infty \quad +L/2 < x \end{aligned}$$

Como este potencial é simétrico em relação à origem, a densidade de probabilidade, $|\psi(x)|^2$, também deve ser simétrica. (*a*) Mostre que isso significa que $\psi(-x) = \psi(x)$ ou $\psi(-x) = -\psi(x)$. (*b*) Mostre que as soluções da equação de Schrödinger independente do tempo são

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

e

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 2, 4, 6, 8, \ldots$$

(*c*) Mostre que as energias permitidas são as mesmas do poço quadrado infinito cujo potencial é dado pela Equação 6-21.

6-57. A função de onda do estado fundamental de um oscilador harmônico simples é $\psi_0(x) = Ae^{-x^2/2L^2}$. (*a*) Mostre que $\psi_1(x) = Ld\psi_0(x)/dx$ também é uma solução da equação de Schrödinger. (*b*) Qual é a energia desse novo estado? (*c*) Depois de examinar os nós da função de onda do item (*b*), como você classificaria este estado excitado?

6-58. Para as funções de onda

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

correspondentes a um poço quadrado infinito de largura L, mostre que

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$

6-59. Um elétron com uma energia de 10 eV incide em uma barreira de potencial de 25 eV de altura e 1 nm de largura. (*a*) Use a Equação 6-76 para calcular a ordem de grandeza da probabilidade de que o elétron atravesse a barreira por tunelamento. (*b*) Repita o cálculo supondo que a barreira tem 0,1 nm de largura.

6-60. Uma partícula de massa m se encontra em uma região na qual a energia potencial tem um valor constante V_0. (a) Mostre que nem $\Psi(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ nem $\Psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ satisfazem a equação de Schrödinger dependente do tempo. (*Sugestão*: se $C_1 \operatorname{sen} \phi + C_2 \cos \phi = 0$ para qualquer valor de ϕ, $C_1 = C_2 = 0$.) (*b*) Mostre que $\Psi(x, t) = A\,[\cos(kx - \omega t) + i \operatorname{sen}(kx - \omega t)] = Ae^{i(kx - \omega t)}$ satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo, contanto que a relação entre k, V_0 e ω seja dada pela Equação 6-5.

NÍVEL III

6-61. A energia potencial de uma partícula de massa m sobre uma mesa pode ser descrita pelas equações

$$\begin{aligned} V &= mgz \quad \text{para } z > 0 \\ V &= \infty \quad \text{para } z < 0 \end{aligned}$$

Para um valor positivo qualquer da energia total E, indique a região classicamente permitida em um gráfico de $V(z)$ em função de z. Faça também um gráfico da energia cinética em função de z. A equação de Schrödinger para este problema é muito difícil de resolver. Usando argumentos semelhantes aos da Seção 6-3 a respeito da curvatura das funções de onda que representam soluções válidas da equação de Schrödinger, faça esboços das funções de onda do estado fundamental e dos dois primeiros estados excitados.

6-62. Use a equação de Schrödinger para mostrar que o valor esperado da energia cinética de uma partícula é dado por

$$\langle E_k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \right) dx$$

6-63. Um elétron no interior de um poço quadrado infinito de largura $L = 10^{-12}$ m está se movendo com velocidade relativística; isso significa que o momento do elétron *não é dado* por $p = (2mE)^{1/2}$. (*a*) Use o princípio de indeterminação para confirmar que a velocidade é relativística. (*b*) Encontre uma expressão para os níveis permitidos de energia do elétron. (*c*) Calcule o valor de E_1. (*d*) Qual é a diferença relativa entre o valor relativístico e o valor não relativístico de E_1?

6-64. (*a*) Demonstre a Equação 6-75. (*b*) Mostre que a Equação 6-76 constitui uma aproximação da Equação 6-75 para $\alpha a >> 1$.

6-65. Um feixe de prótons com uma energia de 20 MeV incide, no ponto $x = 0$, em um degrau de potencial de 40 MeV de altura. Faça um gráfico da probabilidade relativa de que os prótons sejam observados na região entre $x = 0$ e $x = 5$ fm em função de x. (*Sugestão*: Faça $|A|^2 = 1$ e use o resultado do Exemplo 6-6.)

***O termo "simples" é usado para indicar que o oscilador está sujeito apenas a uma força de retorno, ou seja, o problema do oscilador simples não envolve outras forças, como forças externas e forças de amortecimento. (N.T.)**

***Do inglês *S*canning *T*unneling *M*icroscope, ou seja, Microscópio de Tunelamento e Varredura. (N.T.)**

***Do inglês *N*uclear *M*agnetic *R*esonance. (N.T.)**

CAPÍTULO 7

Física Atômica

7-1 A Equação de Schrödinger em Três Dimensões
7-2 Quantização do Momento Angular e da Energia do Átomo de Hidrogênio
7-3 As Funções de Onda do Átomo de Hidrogênio
7-4 O Spin do Elétron
7-5 Momento Angular Total e Interação Spin-Órbita
7-6 A Equação de Schrödinger para Duas (ou Mais) Partículas
7-7 Estados Fundamentais dos Átomos: A Tabela Periódica
7-8 Estados Excitados e Espectros dos Metais Alcalinos

Neste capítulo, vamos aplicar a teoria quântica a sistemas atômicos. Para todos os átomos neutros, com exceção do hidrogênio, a equação de Schrödinger não pode ser resolvida exatamente. Apesar disso, foi no reino da física atômica que a equação de Schrödinger colheu seus maiores sucessos, já que os físicos sabem como descrever matematicamente a interação eletromagnética dos elétrons com outros elétrons e com o núcleo atômico. Com o uso de métodos aproximados e de computadores de alta velocidade, vários aspectos do comportamento de átomos mais complexos que o hidrogênio, como os comprimentos de onda e intensidades das linhas espectrais, podem ser calculados, muitas vezes com uma precisão tão alta quanto se deseje. A equação de Schrödinger para o átomo de hidrogênio foi resolvida no primeiro artigo de Schrödinger, publicado em 1926. Este problema é muito importante, não só porque neste caso a equação de Schrödinger pode ser resolvida exatamente, mas também porque as soluções obtidas servem como ponto de partida para soluções aproximadas no caso de outros átomos. Vamos, portanto, estudar este problema com certa profundidade. Embora algumas passagens matemáticas necessárias para resolver a equação de Schrödinger sejam relativamente difíceis, vamos tentar apresentar resultados quantitativos na medida do possível, mostrando alguns resultados sem demonstrá-los e discutindo qualitativamente aspectos importantes desses resultados apenas quando necessário. Sempre que possível, forneceremos argumentos físicos simples para mostrar que os resultados são razoáveis.

7-1 A Equação de Schrödinger em Três Dimensões

No Capítulo 6, consideramos movimentos em apenas uma dimensão, mas, naturalmente, o mundo real tem três dimensões. Embora em muitos casos o estudo do movimento em apenas uma dimensão seja suficiente para revelar todos os aspectos físicos importantes do problema, existem algumas peculiaridades do movimento em três dimensões que precisam ser destacadas. Em coordenadas retangulares, a equação de Schrödinger independente do tempo tem a seguinte forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+V\psi=E\psi \qquad \textbf{7-1}$$

No caso geral, tanto a função de onda como a energia potencial são funções das três coordenadas espaciais, x, y e z.

O Poço Quadrado Infinito em Três Dimensões

Para começar, vamos considerar a versão tridimensional do problema da partícula em uma caixa. Nesse caso, a função energia potencial $V(x, y, z)$ é nula para $0 < x < L$, $0 < y < L$ e $0 < z < L$. A energia potencial é infinita do lado de fora dessa região de forma cúbica. Aplicando as condições de contorno, verificamos que a função de onda é nula nas paredes da caixa e é uma função senoidal no interior da caixa. Na verdade, quando consideramos apenas uma das coordenadas, como, por exemplo, a coordenada x, obtemos uma solução igual à do problema da partícula em uma caixa unidimensional, discutido na Seção 6-2. Em outras palavras, a variação da função de onda com x é da forma sen k_1x, em que $k_1 = n_1\pi/L$ e n_1 é um número inteiro. A função de onda completa $\Psi(x, y, z)$ pode ser escrita como um produto de três funções: uma função apenas de x, uma função apenas de y e uma função apenas de z:

$$\psi(x,y,z) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z) \qquad \textbf{7-2}$$

onde as funções Ψ_n são funções senoidais. Assim, por exemplo, experimentando a solução

$$\psi(x,y,z) = A \operatorname{sen} k_1x \operatorname{sen} k_2y \operatorname{sen} k_3z \qquad \textbf{7-3}$$

constatamos, substituindo esta função na Equação 7-1, que a energia é dada por

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

que é equivalente a

$$E = \frac{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}{2m}$$

em que $p_x = \hbar k_1$, $p_y = \hbar k_2$ e $p_z = \hbar k_3$. Para que a função de onda seja nula nas paredes, é necessário que $k_1 = n_1\pi/L$, $k_2 = n_2\pi/L$ e $k_3 = n_3\pi/L$. Nesse caso, a energia total é dada por

$$E_{n_1n_2n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \qquad \textbf{7-4}$$

em que n_1, n_2 e n_3 são números inteiros positivos, como na Equação 6-24.

Note que *a energia e a função de onda são caracterizadas por três números quânticos, resultantes de três condições de contorno, uma para cada coordenada.* Neste caso, os três números quânticos são independentes, mas em outros problemas o valor de um dos números quânticos pode afetar o valor dos outros. Assim, por exemplo, como vamos ver daqui a pouco, em problemas como o do átomo de hidrogênio, nos quais o potencial tem simetria esférica, é mais fácil resolver a equação de Schrödinger em coordenadas esféricas. Os números quânticos associados a condições de contorno em coordenadas esféricas são interdependentes.

No caso da caixa cúbica, o estado fundamental (estado de menor energia) é dado pela Equação 7-4 com $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. O primeiro estado excitado corresponde a três combinações diferentes dos números quânticos: $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 1$; $n_2 = 2$, $n_1 = n_3 = 1$; $n_3 = 2$, $n_1 = n_2 = 1$, já que, de acordo com a Equação 7-4, $E_{211} = E_{121} = E_{112}$. A cada um desses conjuntos de números quânticos corresponde uma função de onda diferente, embora a energia seja a mesma. Por exemplo, a função de onda para $n_1 = 2$ e $n_2 = n_3 = 1$ é

$$\psi_{211} = A \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi y}{L} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{L}$$

Um nível de energia ao qual estão associadas duas ou mais funções de onda recebe o nome de *degenerado*. Neste caso, a degeneração é tripla, já que existem três funções de onda com a mesma energia. A degeneração está relacionada à simetria do problema; tudo que destrói ou modifica a simetria também destrói ou modifica a degeneração.[1] No caso, por exemplo, de uma caixa em forma de paralelepípedo, na qual $V = 0$ para $0 < x < L_1$, $0 < y < L_2$ e $0 < z < L_3$, as condições de contorno levam às relações $k_1L_1 = n_1\pi$, $k_2L_2 = n_2\pi$, $k_3L_3 = n_3\pi$ e a energia total é dada por

$$E_{n_1n_2n_3} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2}\right) \qquad \textbf{7-5}$$

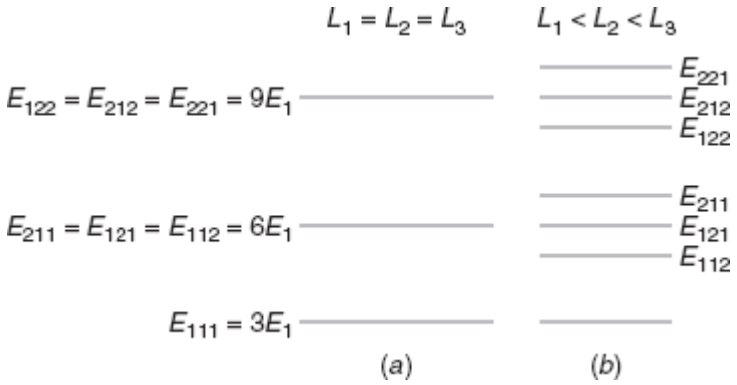


FIGURA 7-1 Diagrama de níveis de energia (*a*) de um poço cúbico infinito; (*b*) de um poço infinito em forma de paralelepípedo. No poço cúbico, muitos níveis de energia são triplamente degenerados, isto é, existem três funções de onda diferentes com a mesma energia. Essa degeneração desaparece quando a simetria do potencial é menor, como em (*b*). O diagrama é apenas esquemático; nenhum dos níveis de (*b*) tem necessariamente a mesma energia que um dos níveis de (*a*).

A Figura 7-1 mostra os níveis de energia do estado fundamental e dos dois primeiros estados excitados para uma caixa cúbica ($L_1 = L_2 = L_3$), caso em que os estados excitados são degenerados, e para uma caixa em forma de paralelepípedo ($L_1 \neq L_2 \neq L_3$), caso em que não existe degeneração.

A Equação de Schrödinger em Coordenadas Esféricas

Vamos agora discutir outro tipo de poço de potencial, mais parecido com o de um átomo de verdade. Supondo que o próton está em repouso, podemos tratar o átomo de hidrogênio como uma partícula isolada, o elétron, se movendo com energia cinética $p^2/2m_e$ no campo elétrico do núcleo, representado por uma energia potencial $V(r)$:

Os cientistas conseguiram produzir átomos de um elétron, que possuem níveis de energia semelhantes aos do átomo de hidrogênio, a partir de todos os elementos químicos até o urânio, cujo átomo de um elétron é o íon U^{91+}. Feixes de átomos altamente ionizados são usados para estudar efeitos relativísticos e detalhes da estrutura atômica. Colisões de átomos de ouro totalmente ionizados, movendo-se a uma velocidade próxima da velocidade da luz, produziram a "estrela" de milhares de partículas mostrada na Seção 12-1.

$$V(r) = -\frac{Zke^2}{r} \qquad \textbf{7-6}$$

Como na teoria de Bohr, incluímos o número atômico Z, que é igual a 1 no caso do hidrogênio, para podermos aplicar os resultados a sistemas semelhantes, como o átomo de hélio ionizado He^+, para o qual $Z = 2$. Observe também que podemos levar em conta o movimento do núcleo substituindo a massa do elétron, m_e, pela massa reduzida $\mu = m_e/(1 + m_e/M_N)$, em que M_N é a massa do núcleo. A equação de Schrödinger independente do tempo em três dimensões para uma partícula de massa μ é a Equação 7-1 com μ em lugar de m:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + V\psi = E\psi \qquad \textbf{7-7}$$

Como a energia potencial $V(r)$ depende apenas da distância radial $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$, é mais fácil resolver o problema em coordenadas esféricas r, θ e ϕ, que estão relacionadas às coordenadas x, y e z através da transformação

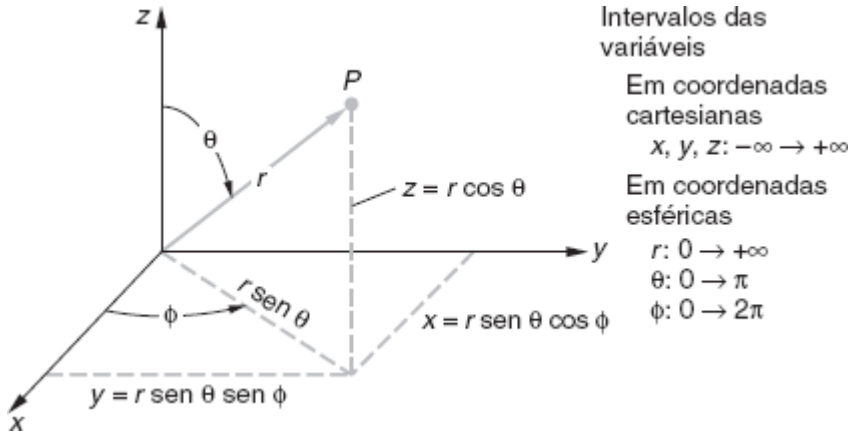


FIGURA 7-2 Relações geométricas entre coordenadas esféricas e retangulares.

$$\begin{aligned} x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \\ y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \qquad \textbf{7-8}$$

Essas relações estão ilustradas na Figura 7-2. A transformação da equação de Schrödinger em três dimensões para coordenadas esféricas não é difícil, mas é bastante trabalhosa. Vamos nos limitar a apresentar o resultado:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right] + V(r)\psi = E\psi \qquad \textbf{7-9}$$

Apesar do aspecto assustador desta equação, Schrödinger não teve dificuldade para resolvê-la porque é semelhante a outras equações diferenciais parciais, associadas a problemas de física clássica, que já haviam sido exaustivamente investigadas pelos matemáticos. Vamos apresentar a solução com todos os detalhes, tendo o cuidado de indicar a origem do número quântico associado a cada dimensão. Como no poço cúbico tridimensional, os números quânticos surgem em consequência das condições de contorno impostas à equação de onda, que neste caso é a Equação 7-9.

7-2 Quantização do Momento Angular e da Energia do Átomo de Hidrogênio

Nesta seção, vamos resolver a equação de Schrödinger independente do tempo para o átomo de hidrogênio e outros átomos com um elétron. Veremos que a quantização da energia e do momento angular são consequências naturais das condições de aceitabilidade das funções de onda (veja a Seção 6-1) e discutiremos a origem e o significado físico dos números quânticos n, ℓ e m.

O primeiro passo para resolver uma equação diferencial parcial como a Equação 7-9 consiste em procurar soluções separáveis escrevendo a função de onda $\Psi(r,\theta,\phi)$ como o produto de funções de uma única variável. Assim, escrevemos:

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)f(\theta)g(\phi) \qquad \textbf{7-10}$$

em que R depende apenas da coordenada radial r, f depende apenas de θ e g depende apenas de ϕ. Quando esta forma de $\Psi(r,\theta,\phi)$ é substituída na Equação 7-9, a equação diferencial parcial pode ser transformada em três equações diferenciais ordinárias, uma para $R(r)$, uma para $f(\theta)$ e uma para $g(\phi)$. Muitas das soluções da Equação 7-9, naturalmente, não possuem esta forma; entretanto, se um número suficiente de soluções com a forma da Equação 7-10 for encontrado,[2] todas as soluções da equação poderão ser expressas como combinações lineares dessas soluções. Na verdade, as soluções com a forma da Equação 7-10 são fisicamente as mais importantes, pois correspondem a valores definidos (*autovalores*) da energia e do momento angular. Substituindo a Equação 7-10 na Equação 7-9 e executando as derivações indicadas, obtemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} fg \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} Rg \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{df}{d\theta}\right)$$
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{Rf}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2g}{d\phi^2} + VRfg = ERfg \qquad \textbf{7-11}$$

já que as derivadas em relação a r não afetam $f(\theta)$ e $g(\phi)$, as derivadas em relação a θ não afetam $R(r)$ e $g(\phi)$ e as derivadas em relação a ϕ não afetam $R(r)$ e $f(\theta)$. Para separar as funções que dependem de r das funções que dependem de θ e de ϕ, basta multiplicar a Equação 7-11 por $-2\mu r^2/\hbar^2 Rfg$ e reagrupar os termos. O resultado é o seguinte:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{2\mu r^2}{\hbar^2}[E - V(r)] =$$
$$-\left[\frac{1}{f(\theta)\operatorname{sen}\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{df(\theta)}{d\theta}\right) + \frac{1}{g(\phi)\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2}\right] \qquad \textbf{7-12}$$

Dois pontos importantes podem ser observados com relação à Equação 7-12: (1) O lado esquerdo contém apenas termos que dependem de r, enquanto o lado direito contém apenas termos que dependem de θ e ϕ. Como as variáveis são independentes, mudanças em r não podem alterar o valor do lado direito da equação, enquanto mudanças em θ e ϕ não podem alterar o valor do lado esquerdo. Assim, os dois lados da equação devem ser iguais à mesma constante, que vamos chamar, por questões que veremos mais tarde, de $\ell(\ell + 1)$. (2) Como o potencial depende apenas de r, a solução do lado direito (a parte angular) da Equação 7-12 deve ser a mesma para *qualquer potencial*[3] que dependa apenas de r.

Tendo em vista o segundo ponto, vamos resolver primeiro a equação angular para que os resultados estejam disponíveis quando começarmos a examinar as soluções da equação que depende de r, conhecida como *equação radial*, para valores particulares do potencial $V(r)$. Fazendo o lado direito da Equação 7-12 igual a $\ell(\ell + 1)$, multiplicando por $\operatorname{sen}^2\theta$ e reagrupando os termos, temos:

$$\frac{1}{g(\phi)}\frac{d^2g(\phi)}{d\phi^2} =$$
$$-\ell(\ell + 1)\operatorname{sen}^2\theta - \frac{\operatorname{sen}\theta}{f(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left[\operatorname{sen}\theta\frac{df(\theta)}{d\theta}\right] \qquad \textbf{7-13}$$

Como o lado esquerdo da Equação 7-13 depende apenas de ϕ e o lado direito depende apenas de θ, ambos devem ser iguais à mesma constante, que vamos chamar, por questões que veremos em seguida, de $-m^2$. Fazendo o lado esquerdo da Equação 7-13 igual a $-m^2$ e resolvendo a equação diferencial resultante, obtemos:

$$g_m(\phi) = e^{im\phi} \qquad \textbf{7-14}$$

Para que a função de onda total Ψ seja unívoca, é preciso que $g(\phi + 2\pi) = g(\phi)$ e, portanto, que o número m que aparece na Equação 7-14 seja 0 ou um número inteiro positivo ou negativo.

Fazendo o lado direito da Equação 7-13 igual a $-m^2$ e resolvendo a equação diferencial resultante, temos (uma solução detalhada pode ser encontrada em Weber e Arfken, Capítulo 11):

$$f_{\ell m}(\theta) = \frac{(\operatorname{sen}\theta)^{|m|}}{2^\ell \ell!}\left[\frac{d}{d(\cos\theta)}\right]^{\ell+|m|}(\cos^2\theta - 1)^\ell \qquad \textbf{7-15}$$

Para que Ψ seja finita, é preciso que $f(\theta)$ seja finita em $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, o que, por sua vez, exige que ℓ seja zero ou um número inteiro positivo e que, para um dado valor de ℓ, $|m| \leq \ell$. As funções $f_{\ell m}(\theta)$ dadas pela Equação 7-15 são conhecidas como *funções de Legendre associadas*. As funções de Legendre associadas com $m = 0$ recebem o nome especial de *polinômios de Legendre.*

O produto de $f_{\ell m}(\theta)$ por $g_m(\phi)$, que descreve a variação angular de $\Psi(r,\theta,\phi)$ para *qualquer* potencial com simetria esférica, constitui uma família de funções $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ que aparecem com frequência em problemas de física,

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = f_{\ell m}(\theta)g_m(\phi) \qquad \textbf{7-16}$$

chamadas *harmônicos esféricos*. A Tabela 7-1 mostra algumas dessas funções. É fácil obter o valor das funções de Legendre associadas e dos polinômios de Legendre a partir dos harmônicos esféricos. (O livro de Weber e Arfken contém uma lista mais extensa dessas funções.) O significado físico de ℓ e m será discutido na próxima seção.

Tabela 7-1 Harmônicos esféricos

$\ell = 0$	$m = 0$	$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
$\ell = 1$	$m = 1$	$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta\, e^{i\phi}$
	$m = 0$	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
	$m = -1$	$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta\, e^{-i\phi}$
$\ell = 2$	$m = 2$	$Y_{22} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \operatorname{sen}^2\theta\, e^{2i\phi}$
	$m = 1$	$Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, e^{i\phi}$
	$m = 0$	$Y_{20} = -\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1)$
	$m = -1$	$Y_{2-1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, e^{-i\phi}$
	$m = -2$	$Y_{2-2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \operatorname{sen}^2\theta\, e^{-2i\phi}$

Quantização do Momento Angular

O momento angular **L** de um corpo de massa m cuja posição é especificada por um vetor posição **r** em relação à origem do sistema de coordenadas é dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

em que $\mathbf{p} = m(d\mathbf{r}/dt)$ é o momento do corpo. Se o potencial a que o corpo está submetido é função apenas de r (como acontece com o elétron do átomo de hidrogênio), o momento angular **L** é conservado (veja o Problema 7-15) e o movimento clássico do corpo ocorre em um plano fixo perpendicular a **L** passando pela origem. As componentes do momento **p** na direção de r, p_r, e na direção perpendicular a r (e a **L**), p_t, são dadas por

$$p_r = \mu\left(\frac{dr}{dt}\right) \quad \text{e} \quad p_t = \mu r\left(\frac{dA}{dt}\right)$$

e o módulo do vetor constante **L** é dado por

$$L = rp \operatorname{sen} A = rp_t$$

Em termos dessas componentes, a energia cinética pode ser escrita como

$$\frac{p^2}{2\mu} = \frac{p_r^2 + p_t^2}{2\mu} = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

e, portanto, a energia clássica total E é dada por

$$\frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) = E \qquad \textbf{7-17}$$

Reescrevendo a Equação 7-17 em termos do potencial "efetivo" $V_{ef}(r) = L^2/2\mu r^2 + V(r)$, temos:

$$\frac{p_r^2}{2\mu} + V_{ef}(r) = E \qquad \textbf{7-18}$$

que é igual à Equação 6-4, usada na demonstração da equação de Schrödinger.

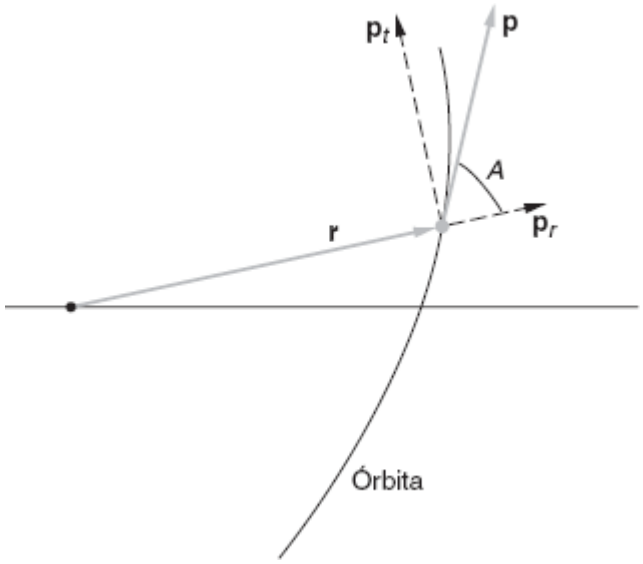


FIGURA 7-3 Para $V = V(r)$, a órbita de uma partícula clássica está em um plano perpendicular a **L**. As componentes do momento **p** nas direções paralela e perpendicular a **r** são $\mathbf{p}_r$ e $\mathbf{p}_t$, respectivamente. O momento **p** faz um ângulo A com o vetor posição **r**.

Como fizemos no Capítulo 6, vamos usar a expressão da energia total da partícula, que no caso que estamos estudando é a Equação 7-17, para chegar à equação de Schrödinger. Para isso, vamos usar a relação de de Broglie e introduzir os operadores diferenciais apropriados (em coordenadas esféricas) para p_r^2 e L^2. Vamos omitir alguns detalhes porque o processo, embora não seja particularmente difícil, é trabalhoso. No caso de p_r^2, o operador é

$$(p_r^2)_{op} = -\hbar^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) \qquad \textbf{7-19}$$

que, dividido por 2μ e operando em Ψ, é o primeiro termo da equação de Schrödinger em coordenadas esféricas (Equação 7-9). O operador L^2 é dado por

$$(L^2)_{op} = -\hbar^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad \textbf{7-20}$$

que, dividido por $2\mu r^2$ e operando em Ψ, é o segundo termo da equação de Schrödinger em coordenadas esféricas (Equação 7-9). O lado direito da Equação 7-12, que é igual a $\ell(\ell + 1)$, pode ser escrito da seguinte forma, depois de multiplicado por $\hbar^2 f(\theta)g(\phi)$ e lembrando que $f_{\ell m}(\theta)g_m(\phi) = Y_{\ell m}(\theta,\phi)$:

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$
$$= \ell(\ell + 1)\hbar^2 Y_{\ell m}(\theta,\phi) \qquad \textbf{7-21}a$$

ou

$$(L^2)_{op}Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \ell(\ell + 1)\hbar Y_{\ell m}(\theta,\phi) \qquad \textbf{7-21}b$$

ou, como $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi)$,

$$(L^2)_{op}\psi(r,\theta,\phi) = \ell(\ell + 1)\hbar^2\psi(r,\theta,\phi) \qquad \textbf{7-21}c$$

Assim, temos o resultado muito importante que, para qualquer potencial da forma $V = V(r)$, *o momento angular é quantizado* e os valores permitidos (autovalores) do módulo do momento angular são dados por

$$|\mathbf{L}| = L = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar \quad \text{para} \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{7-22}$$

em que ℓ é chamado de *número quântico de momento angular* ou *número quântico orbital*.

Podemos usar o mesmo método de substituição para L_z, a componente z de **L**, e mostrar que *a componente z do momento angular é quantizada* e os valores permitidos são dados por

$$L_z = m\hbar \quad \text{para} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell \qquad \textbf{7-23}$$

O significado físico da Equação 7-23 é que o momento angular **L**, cujo módulo é quantizado em valores de $\sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$, pode apontar apenas em direções *no espaço* tais que a projeção de **L** no eixo z seja 0 ou um dos valores dados por $m\hbar$. Assim, **L** é também *espacialmente quantizado*. O número quântico m é chamado de *número quântico magnético*. (Por que "magnético"? Veja a Seção 7-4.)

O diagrama da Figura 7-4, denominado *modelo vetorial* do átomo, mostra as possíveis orientações do vetor momento angular. Observe que, de forma até certo ponto surpreendente, o vetor momento angular não pode ser paralelo ao eixo z, pois a maior componente possível de z, $m\hbar$, é sempre menor do que o módulo do vetor, $\sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$. Isto é consequência do princípio de indeterminação do momento angular (que não vamos demonstrar) segundo o qual é impossível determinar com precisão absoluta duas componentes do momento angular,[4] a não ser no caso trivial em que o momento angular é nulo. Observe que, *para um dado valor de ℓ, existem $2\ell + 1$ valores possíveis de m, que vão de $-\ell$ a $+\ell$ em incrementos de uma unidade.* Operadores para L_x e L_y também podem ser obtidos pelo método de substituição; entretanto, Ψ não é uma autofunção desses operadores, pois especificar uma rotação em torno do eixo x ou do eixo y significaria especificar simultaneamente valores para θ e ϕ, violando o princípio de indeterminação.

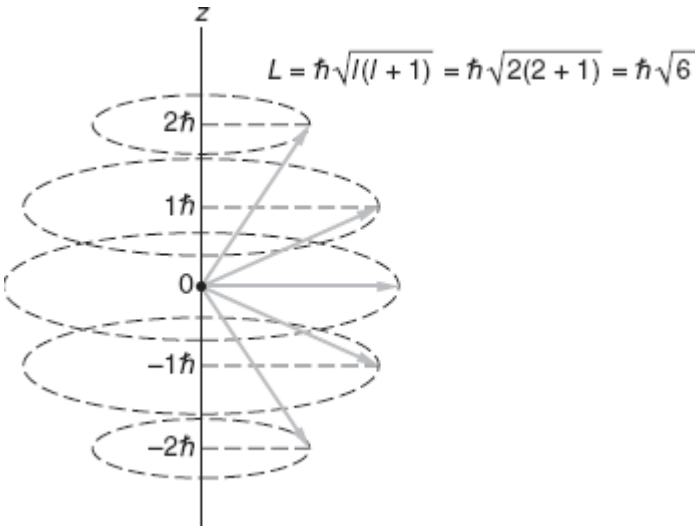


FIGURA 7-4 Modelo vetorial usado para mostrar as orientações possíveis de **L** e os valores possíveis de L_z no caso em que $\ell = 2$.

EXEMPLO 7-1 **Valores Quantizados de L** Se um sistema tem um momento angular caracterizado pelo número quântico $\ell = 2$, quais são os valores possíveis de L_z, qual é o módulo de L e qual é o menor ângulo possível entre L e o eixo z?

SOLUÇÃO

1. Os valores possíveis de L_z são dados pela Equação 7-23: $L_z = mh$
2. Os valores de m para $\ell = 2$ são: $m = 0, \pm 1, \pm 2$
3. Assim, os valores permitidos de L_z são: $L_z = -2\hbar, -1\hbar, 0, 1\hbar, 2\hbar,$

4. O módulo de **L** é dadopela Equação 7-22. Para $\ell = 2$, temos:
$$|\mathbf{L}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{6}\hbar = 2{,}45\hbar$$

5. De acordo com a Figura 7-4, o ângulo θ entre **L** e o eixo *z* é dado por
$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{m\hbar}{\sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar} = \frac{m}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$$

6. O menor ângulo possível entre **L** e o eixo *z* corresponde a $m = \pm\ell$. No caso de $\ell = 2$, temos: ou
$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0{,}816$$
ou
$$\theta = 35{,}5°$$

Quantização da Energia

Os resultados discutidos até agora se aplicam a qualquer sistema que seja esfericamente simétrico, isto é, no qual a energia potencial só dependa de *r*. A solução da equação radial para *R*(*r*), por outro lado, depende da forma detalhada de *V*(*r*). O número quântico associado à coordenada *r* é denominado *número quântico principal* e representado pela letra *n*. Como vamos ver, no átomo de hidrogênio, este número quântico está relacionado à energia. A Figura 7-5 mostra um gráfico da energia potencial, dada pela Equação 7-6, em função da distância radial *r*. Se a energia total é positiva, o elétron não está ligado ao átomo. No momento, estamos interessados apenas em estados ligados, ou seja, em estados para os quais a energia *E* é negativa. Nesse caso, como mostra a figura, a energia potencial se torna maior que *E* para grandes valores de *r*. Acontece que, no caso de sistemas ligados, como já vimos, apenas certos valores de *E* levam a soluções bem comportadas. Esses valores podem ser determinados resolvendo a equação radial, que é obtida igualando o lado esquerdo da Equação 7-12 à constante $\ell(\ell + 1)$. Para o potencial de Coulomb, dado pela Equação 7-6, a equação radial tem a forma

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R(r)}{\partial r}\right) + \left[-\frac{kZe^2}{r} + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2\mu r^2}\right]R(r) = ER(r) \qquad \textbf{7-24}$$

A equação radial pode ser resolvida usando métodos convencionais de solução de equações diferenciais; os detalhes serão omitidos, exceto para observar que (1) esperamos que exista uma ligação entre o número quântico principal *n* e o número quântico de momento angular ℓ, já que o último está presente na Equação 7-24, e (2) para que as soluções da Equação 7-24 sejam bem comportadas, apenas certos valores da energia são permitidos. Os valores permitidos de *E* são dados por

$$E_n = -\left(\frac{kZe^2}{\hbar}\right)^2\frac{\mu}{2n^2} = -\frac{Z^2E_1}{n^2} \qquad \textbf{7-25}$$

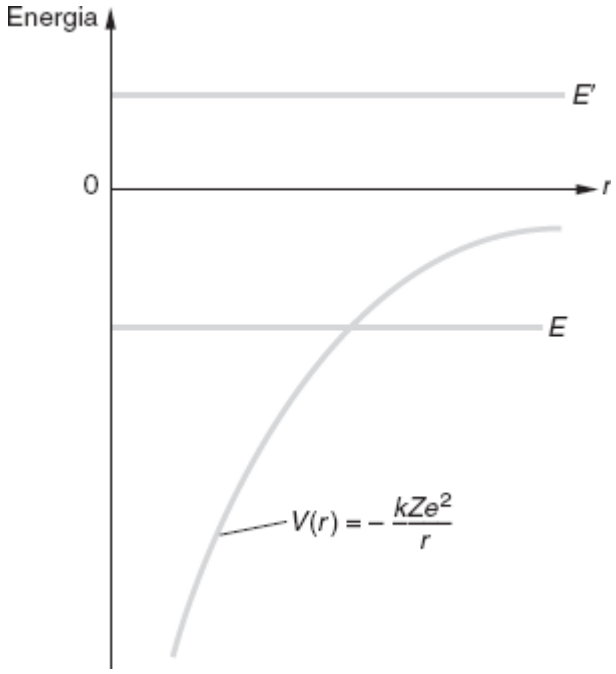


FIGURA 7-5 Energia potencial de um elétron em um átomo de hidrogênio. Se a energia total é positiva, como *E'*, o elétron não está ligado ao átomo e a energia não é quantizada. Se a energia total é negativa, como *E*, o elétron está ligado ao átomo e apenas certos valores discretos da energia total levam a soluções bem comportadas.

Tabela 7-2 Funções radiais do átomo de hidrogênio

$n = 1$	$\ell = 0$	$R_{10} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0}$
$n = 2$	$\ell = 0$	$R_{20} = \frac{1}{\sqrt{2a_0^3}} \left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) e^{-r/2a_0}$
	$\ell = 1$	$R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6a_0^3}} \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0}$
$n = 3$	$\ell = 0$	$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3a_0^3}} \left(1 - \frac{2r}{3a_0} + \frac{2r^2}{27a_0^2}\right) e^{-r/3a_0}$
	$\ell = 1$	$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6a_0^3}} \frac{r}{a_0} \left(1 - \frac{r}{6a_0}\right) e^{-r/3a_0}$
	$\ell = 2$	$R_{32} = \frac{4}{8\sqrt{30a_0^3}} \frac{r^2}{a_0^2} e^{-r/3a_0}$

em que $E_1 = \mu k^2 e^4/2\hbar^2 \approx 13{,}6$ eV e o número quântico principal n pode assumir os valores 1, 2, 3, ..., com a restrição adicional de que n deve ser maior que ℓ. *Esses valores de energia são iguais aos do modelo de Bohr e estão de acordo com os resultados experimentais.* As funções radiais obtidas resolvendo a Equação 7-24 para o caso do átomo de hidrogênio são dadas por

$$R_{n\ell}(r) = A_{n\ell} e^{-r/a_0 n} r^{\ell} \mathcal{L}_{n\ell}(r/a_0) \qquad \textbf{7-26}$$

na qual $\mathcal{L}_{n\ell}(r/a_0)$ são funções especiais, conhecidas como polinômios de Laguerre, e $a_0 = \hbar^2/\mu k e^2$ é o raio de Bohr. A Tabela 7-2 mostra as funções radiais $R_{n\ell}(r)$ para $n = 1$, 2 e 3. (Para uma solução detalhada da Equação 7-24 e uma tabela maior de

polinômios de Laguerre, veja Weber e Arfken, Capítulo 13.)

Resumo dos Números Quânticos

Os valores permitidos dos números quânticos n, ℓ e m associados às variáveis r, θ e ϕ são os seguintes:

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \ldots \\ \ell &= 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \\ m &= -\ell, (-\ell+1), \ldots, 0, 1, 2, \ldots, +\ell \end{aligned} \qquad \textbf{7-27}$$

O fato de que a energia do átomo de hidrogênio não depende de ℓ está de acordo com a teoria clássica, já que, de acordo com a mecânica clássica, a energia de uma partícula que se move em uma órbita elíptica sob a ação de uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância não depende da excentricidade da órbita. A órbita de menor excentricidade (isto é, a mais próxima de um círculo) está associada ao maior valor possível do momento angular ($\ell = n - 1$), enquanto um valor de ℓ pequeno corresponde a uma órbita altamente excêntrica. (Quando o momento angular é nulo, isto é, quando $\ell = 0$, o elétron se limita a executar oscilações ao longo de uma linha reta que passa pelo núcleo.) Tanto na teoria clássica como na teoria quântica, quando a força central que não varia com o quadrado do inverso da distância, a energia depende do momento angular. Nesse caso, a energia é função tanto de n como de ℓ.

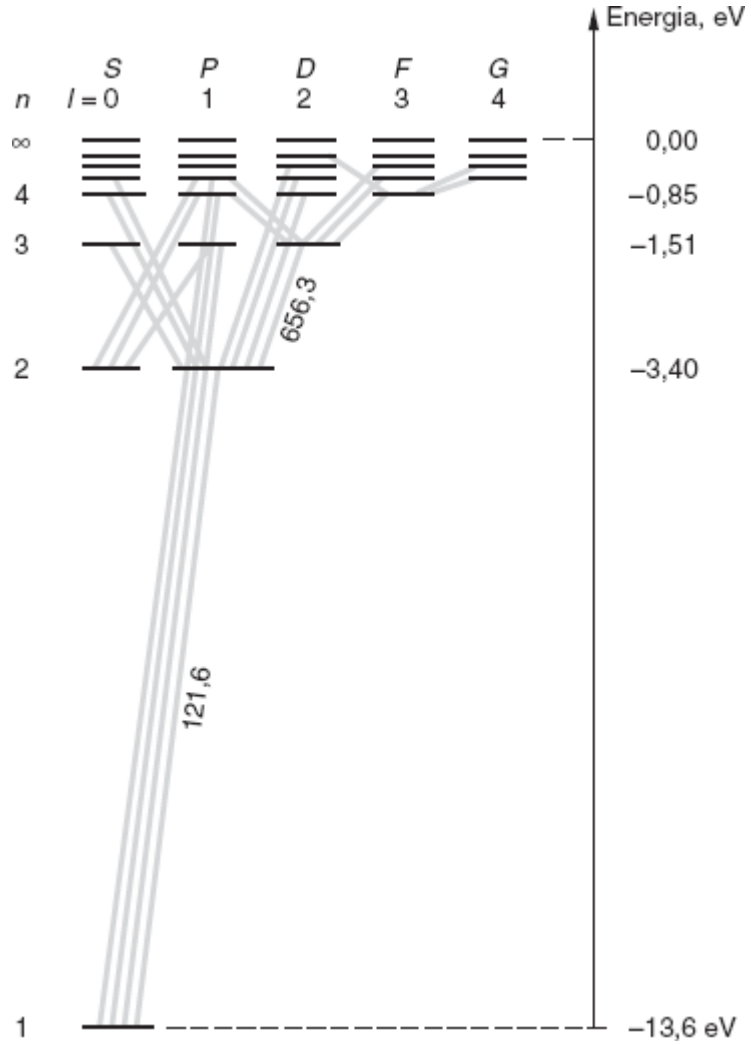


FIGURA 7-6 Diagrama de níveis de energia do átomo de hidrogênio, mostrando as transições que obedecem à regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$. Os estados com o mesmo valor de n e valores diferentes de ℓ têm a mesma energia, $-E_1/n^2$, em que $E_1 = 13{,}6$ eV, como na teoria de Bohr. Os comprimentos de onda da linha α da série de Lyman ($n = 2 \rightarrow n = 1$) e da linha α da série de Balmer ($n = 3 \rightarrow n = 2$) estão indicados em nm. Observe que, no segundo caso, existem três transições distintas com o mesmo comprimento de onda (de $n = 3$, $\ell = 0$ para $n = 2$, $\ell = 1$; de $n = 3$, $\ell = 1$ para $n = 2$, $\ell = 0$; de $n = 3$, $\ell = 2$ para $n = 2$, $\ell = 1$).

O número quântico m está relacionado à componente z do momento angular. No caso de uma força central, como não existe uma direção preferencial para o eixo z, a energia não pode depender de m. Como vamos ver mais adiante, quando o átomo é submetido a um campo magnético externo, passa a existir uma direção preferencial (a direção do campo magnético) e a energia

passa a depender de m. (Este fenômeno, conhecido como *efeito Zeeman*, é discutido em uma Leitura Suplementar disponível no site da LTC Editora deste livro na Internet.)

A Figura 7-6 mostra o diagrama de níveis de energia do átomo de hidrogênio. O diagrama é semelhante ao da Figura 4-16*a*, exceto pelo fato de que os estados com o mesmo valor de n e valores diferentes de ℓ estão indicados separadamente. Esses estados são identificados pelo valor de n e por uma letra maiúscula: S para $\ell = 0$, P para $\ell = 1$, D para $\ell = 2$ e F para $\ell = 3$. As letras são as iniciais das palavras usadas pelos espectroscopistas para descrever as linhas das quatro primeiras séries espectrais: *S*harp, *P*rincipal, *D*iffuse e *F*undamental.* (Para valores de ℓ maiores que 3, as letras são usadas em ordem alfabética; G corresponde a $\ell = 4$, e assim por diante.) As transições do tipo dipolo elétrico entre os níveis de energia obedecem às *regras de seleção*

$$\Delta m = 0 \quad \text{ou} \quad \pm 1$$
$$\Delta \ell = \pm 1 \qquad \textbf{7-28}$$

O fato de que o número quântico ℓ deve variar de ±1 quando o átomo emite ou absorve um fóton está relacionado à conservação do momento angular, já que o fóton possui um momento angular intrínseco igual a $1\hbar$. Por outro lado, não existem restrições quanto à variação do número quântico principal, Δn.

Exercícios

1. Por que a quantização do momento angular não foi observada na física clássica?
2. Quais são as semelhanças e as diferenças entre a quantização do momento angular na teoria de Schrödinger e a quantização no modelo de Bohr?
3. Por que a energia do átomo de hidrogênio não depende de ℓ? Por que a energia não depende de m?

Uma Oportunidade PARA VOCÊ As investigações dos espectros atômicos foram fundamentais para a determinação da estrutura dos átomos e moléculas. Na busca de planetas habitáveis em outros sistemas estelares, investigações espectroscópicas astronômicas, teóricas e de laboratório, baseadas em métodos modernos ou que ainda não foram inventados, desempenharão um papel importante na interpretação dos dados usados para identificar e classificar esses planetas. Serão necessários novos métodos para a detecção espectroscópica de planetas extrassolares, particularmente aqueles com características semelhantes às da Terra. Serão necessários, também, modelos de atmosferas planetárias capazes de prever corretamente as condições locais a partir de espectros de baixa resolução, na faixa de luz visível e do infravermelho, obtidos por telescópios em órbita. A validação desses modelos por meio de dados obtidos nas atmosferas da Terra, de Vênus e de Marte será essencial.

7-3 As Funções de Onda do Átomo de Hidrogênio

As funções de onda $\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi)$ que satisfazem a equação de Schrödinger do átomo de hidrogênio são funções complicadas de r, θ e ϕ. Nesta seção, vamos escrever por extenso algumas dessas funções e representá-las graficamente, chamando atenção para certas propriedades importantes.

Como vimos, a variação com ϕ da função de onda (Equação 7-14) é dada simplesmente por $e^{im\phi}$. A variação com θ (Equação 7-15) é dada pelas funções de Legendre associadas $f_{\ell m}(\theta)$. A variação angular completa é dada pelos harmônicos esféricos $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$, o produto de $f_{\ell m}(\theta)$ por $g_m(\phi)$ (Equação 7-16); os valores dos harmônicos esféricos para $\ell = 0$, 1 e 2 aparecem na Tabela 7-1. As soluções da equação radial $R_{n\ell}(r)$ são da forma indicada na Equação 7-26; os valores para $n = 1$, 2 e 3 aparecem na Tabela 7-2. De acordo com a Equação 7-10, a função de onda completa do átomo de hidrogênio é dada por

$$\psi_{n\ell m}(r,\theta,\phi) = C_{n\ell m} R_{n\ell}(r) f_{\ell m}(\theta) g_m(\phi) \qquad \textbf{7-29}$$

em que $C_{n\ell m}$ é uma constante de normalização.

Podemos ver pela forma da Equação 7-29 que a função de onda completa depende dos números quânticos n, ℓ e m, que, por sua vez, resultam das condições de contorno impostas às funções $R(r)$, $f(\theta)$ e $g(\phi)$. A energia, por outro lado, depende apenas do valor de n. De acordo com a Equação 7-27, para cada valor de n existem n valores possíveis de ℓ ($\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) e para cada valor de ℓ existem $2\ell + 1$ valores possíveis de m ($m = -\ell, -\ell + 1, \ldots, +\ell$). Exceto no caso do estado fundamental (para o qual $n = 1$ e, portanto, $\ell = m = 0$), existem várias funções de onda correspondentes à mesma energia. Como vimos na seção anterior, esta degeneração acontece porque a energia potencial depende apenas de r e não existem orientações privilegiadas no espaço.

O Estado Fundamental

Vamos examinar mais de perto as funções de onda de alguns estados, começando pelo estado de menor energia, ou estado

fundamental, para o qual $n = 1$, $\ell = 0$ e $m = 0$. Como, nesse caso, o polinômio de Laguerre da Equação 7-26 é $\mathcal{L}_{10} = 1$, a função de onda é dada por

$$\psi_{100} = C_{100} e^{-Zr/a_0} \qquad \textbf{7-30}$$

A constante C_{100} é determinada por normalização:

$$\int \psi^* \psi d\tau = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \psi^* \psi \, r^2 \operatorname{sen}\theta \, d\phi \, d\theta \, dr = 1$$

em que usamos o elemento de volume em coordenadas esféricas (Figura 7-7)

$$d\tau = (r \operatorname{sen}\theta d\phi)(r d\theta)(dr)$$

Como $\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi}$ é esfericamente simétrica para este estado, o resultado das integrações em θ e ϕ é 4π. Integrando em r, temos:[5]

$$C_{100} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} \quad \text{para} \quad Z - 1 \qquad \textbf{7-31}$$

A probabilidade de encontrar um elétron no volume $d\tau$ é $\mathbf{\Psi}^*\mathbf{\Psi}d\tau$.

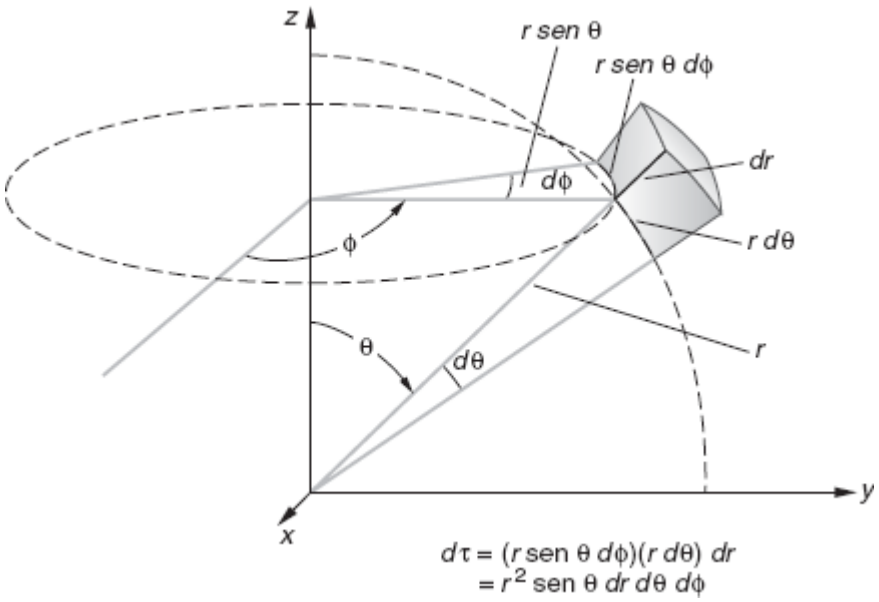


FIGURA 7-7 Elemento de volume $d\tau$ em coordenadas esféricas.

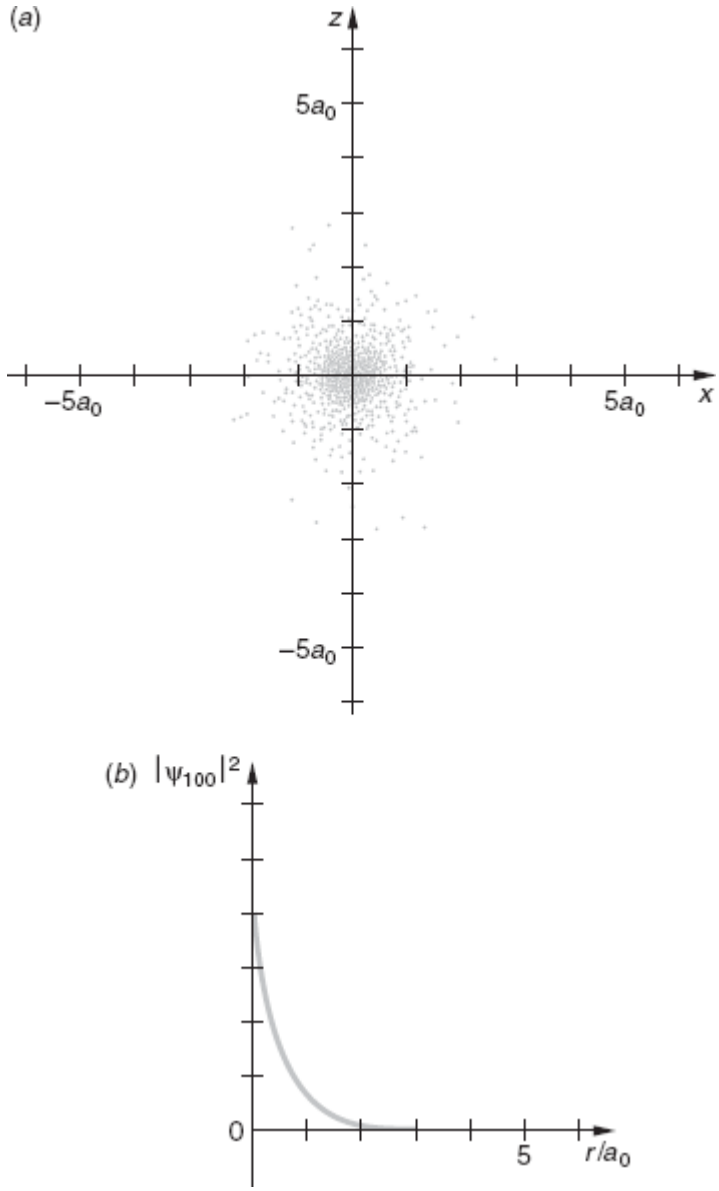


FIGURA 7-8 Densidade de probabilidade $\Psi^*\Psi$ para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. A grandeza $e\Psi^*\Psi$ pode ser encarada como a densidade de carga associada ao elétron. (*a*) A densidade de probabilidade tem simetria esférica, é máxima na origem e diminui exponencialmente com *r*. Para gerar este gráfico, um programa de computador realizou centenas de "observações" do elétron no plano *xz* (ou seja, com $\phi = 0$) e assinalou com um ponto as posições em que o elétron foi "observado". (*b*) Gráfico mais convencional da densidade de probabilidade $|\Psi_{100}|^2$ em função de r/a_0. Compare os dois gráficos. (*O gráfico gerado em computador é cortesia de Paul Doherty*, *The Exploratorium*.)

A densidade de probabilidade $\Psi^*\Psi$ está ilustrada na Figura 7-8. No caso do estado fundamental, a densidade de probabilidade é máxima na origem. Muitas vezes é mais interessante calcular a probabilidade de encontrar o elétron em uma casca esférica entre *r* e *r* + *dr*. Esta probabilidade, $P(r)dr$, conhecida como *densidade de probabilidade radial*, é igual à densidade de probabilidade $\Psi^*\Psi$ multiplicada pelo volume de uma casca esférica de espessura *dr*:

$$P(r)dr = \psi^*\psi\, 4\pi r^2 dr = 4\pi r^2 C_{100}^2 e^{-2Zr/a_0} dr \qquad \textbf{7-32}$$

A Figura 7-9 mostra um gráfico de $P(r)$ em função de r/a_0. Fica a cargo do leitor (Problema 7-22) mostrar que o valor de $P(r)$ é máximo para $r = a_0/Z$. Ao contrário do que ocorre no modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, em que o elétron possui uma órbita bem definida com $r = a_0$, no modelo de Schrödinger o elétron *pode ser encontrado* a qualquer distância do núcleo; entretanto, a distância mais provável é a_0 e a probabilidade de que o elétron seja encontrado a uma distância muito diferente desse valor é extremamente pequena. É possível imaginar o elétron como uma nuvem de carga negativa de densidade $\rho = e\Psi^*\Psi$, sem esquecer, porém, que o elétron é sempre *observado* como uma carga isolada. Note que o momento angular do elétron no estado fundamental é zero e não $\hbar$, como na teoria de Bohr.

A variação angular das distribuições de probabilidade dos elétrons é importante para as ligações químicas responsáveis pela formação de moléculas e sólidos (veja os Capítulos 9 e 10).

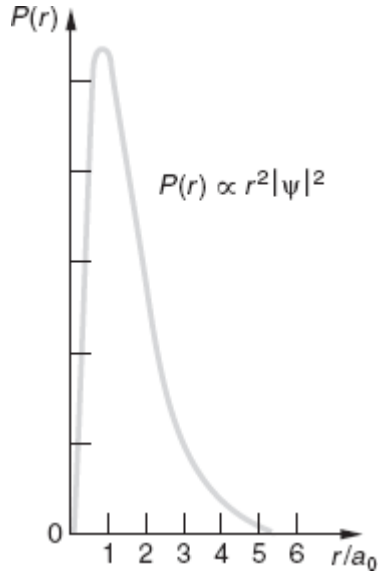


FIGURA 7-9 Densidade de probabilidade radial $P(r)$ em função de r/a_0 para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. $P(r)$ é proporcional a $r^2|\Psi_{100}|^2$. A distância mais provável é igual a a_0, o raio de Bohr.

Estados Excitados

No primeiro estado excitado, $n = 2$ e $\ell = 0$ ou 1. Para $\ell = 0$, $m = 0$ e novamente temos uma função de onda com simetria esférica, dada por

$$\psi_{200} = C_{200}\left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0} \qquad \textbf{7-33}$$

Para $\ell = 1$, $m = +1$, 0 ou -1. As funções de onda correspondentes (veja as Tabelas 7-1 e 7-2) são

$$\psi_{210} = C_{210}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\cos\theta \qquad \textbf{7-34}$$

$$\psi_{21\pm1} = C_{21\pm1}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\,\text{sen}\,\theta\, e^{\pm i\phi} \qquad \textbf{7-35}$$

A Figura 7-10*a* mostra $P(r)$ em função de r/a_0 para essas funções de onda. Para $n = 2$, $\ell = 1$, o valor de $P(r)$ é máximo quando a distância radial é igual ao raio da segunda órbita de Bohr,

$$r_{\text{max}} = 2^2 a_0$$

enquanto, para $n = 2$ e $\ell = 0$, $P(r)$ tem dois máximos, o maior dos quais ocorre para uma distância um pouco maior que o raio da segunda órbita de Bohr.

A densidade de probabilidade radial para os outros estados excitados do hidrogênio pode ser calculada da mesma forma. A Figura 7-10*b*, por exemplo, mostra a função $P(r)$ para o segundo estado excitado, $n = 3$. A não ser nas vizinhanças da origem, a principal variação radial de $P(r)$ está contida no fator e^{-Zr/na_0}. Uma análise detalhada dos polinômios de Laguerre mostra que $\Psi \rightarrow r^{\ell}$ para $r \rightarrow 0$; assim, *para um dado n, $\psi_{n\ell m}$ é maior nas proximidades da origem quando ℓ é pequeno.*

Uma propriedade importante dessas funções de onda é que as densidades de probabilidade apresentam simetria esférica para $\ell = 0$, mas dependem de θ para $\ell \neq 0$. Os gráficos de densidade de probabilidade da Figura 7-11 ilustram esse fato para o primeiro estado excitado, $n = 2$. Essas distribuições angulares de densidade de carga do elétron dependem do valor de ℓ, mas não da parte radial da função de onda. Distribuições de carga semelhantes para os elétrons de valência de átomos mais complexos desempenham um papel importante na formação de ligações químicas.

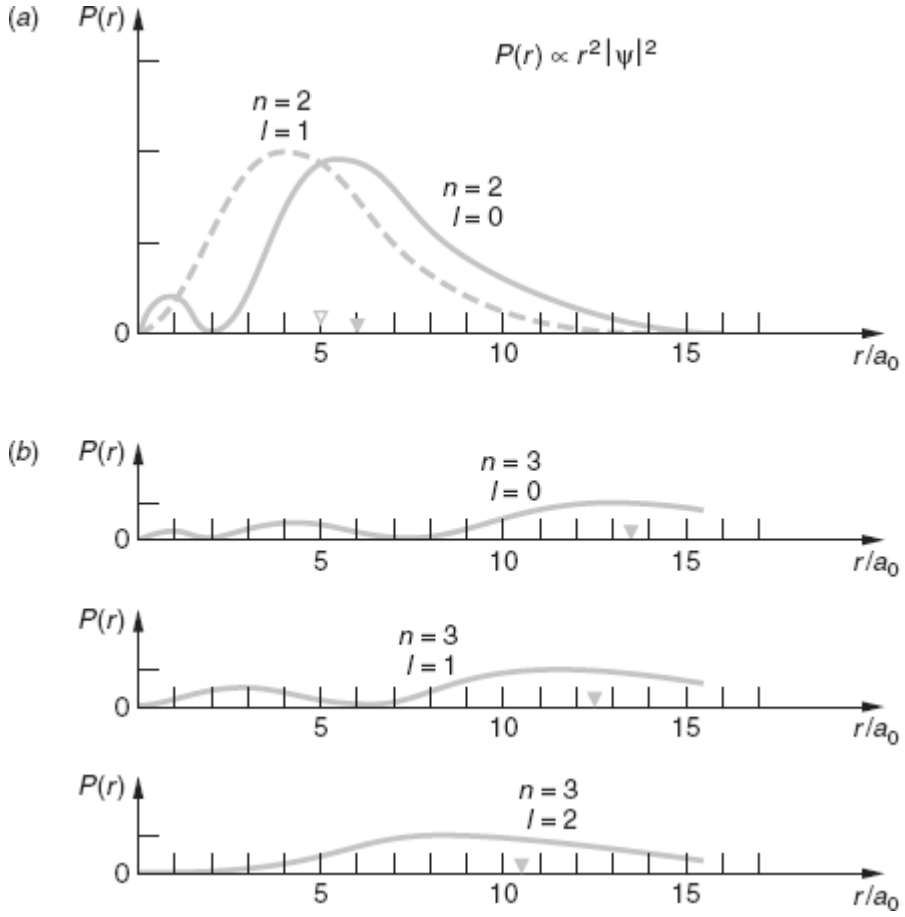


FIGURA 7-10 (*a*) Densidade de probabilidade radial $P(r)$ em função de r/a_0 para os estados $n = 2$ do átomo de hidrogênio. No caso de $\ell = 1$, $P(r)$ é máxima para o valor de Bohr, 2^2a_0. No caso de $\ell = 0$, há um máximo nas vizinhanças deste valor e um máximo secundário perto da origem. As marcas no eixo x mostram os valores correspondentes de $\langle r/a_0 \rangle$. (*b*) $P(r)$ em função de r/a_0 para os estados $n = 3$ do átomo de hidrogênio.

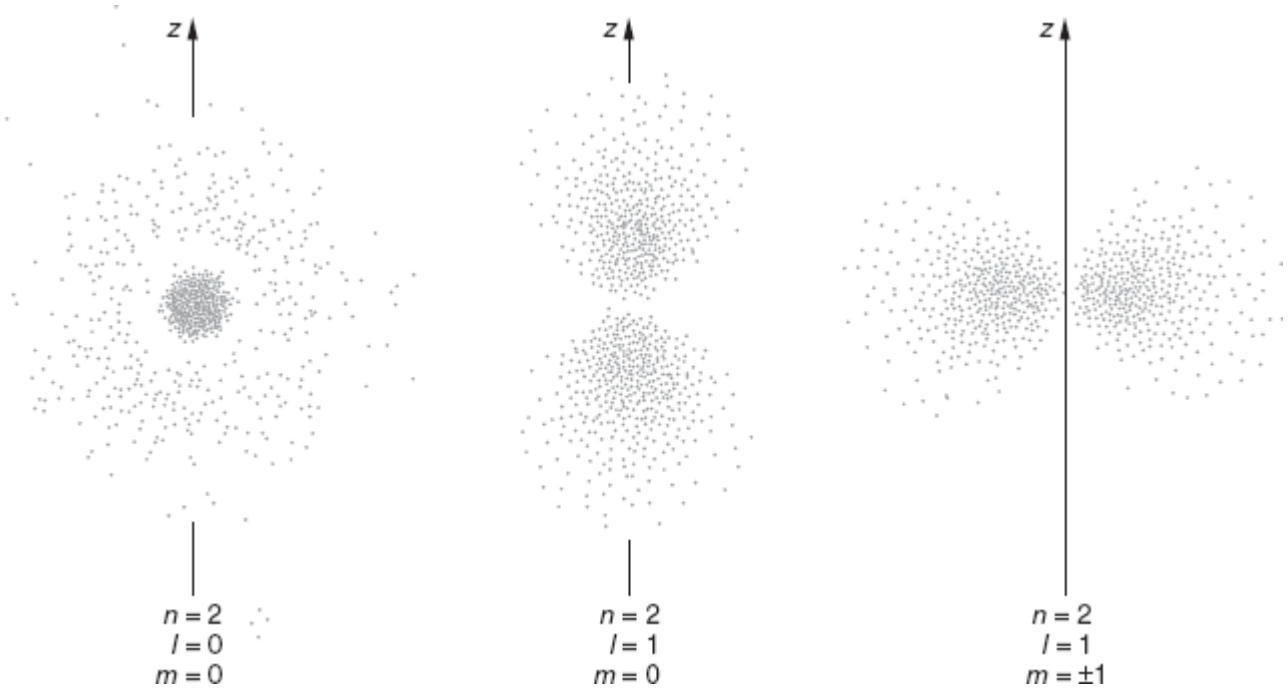


FIGURA 7-11 Densidade de probabilidade $\Psi^*\Psi$ para os estados $n = 2$ do hidrogênio. A probabilidade tem simetria esférica para $\ell = 0$, é proporcional a $\cos^2 \theta$ para $\ell = 1$, $m = 0$ e é proporcional a $\text{sen}^2 \theta$ para $\ell = 1$, $m = \pm 1$. Como as densidades de probabilidade são simétricas em relação ao eixo z, a densidade de carga tridimensional tem a forma de uma esfera para o estado $\ell = 0$, $m = 0$, a forma de um haltere para o estado $\ell = 1$, $m = 0$ e a forma de um pneu para o estado $\ell = 1$, $m = \pm 1$. As formas dessas distribuições são semelhantes para todos os átomos em estados S ($\ell = 0$) e P ($\ell = 1$) e desempenham um papel importante nas ligações moleculares. (*Estes gráficos gerados em computador são cortesia de Paul Doherty, The Exploratorium.*)

Exercícios

4. No caso do estado fundamental do hidrogênio, para que valor de r a densidade de probabilidade $\Psi^*\Psi$ é máxima? Por que a densidade de probabilidade radial $P(r)$ é máxima para um valor diferente de r?

7-4 O Spin do Elétron

Como foi dito no Capítulo 4, quando uma linha espectral do hidrogênio ou de outros átomos é observada com alta resolução, nota-se que existe uma *estrutura fina*, ou seja, que a suposta linha é constituída, na verdade, por duas ou mais linhas muito próximas. Comentamos na ocasião que os cálculos relativísticos de Sommerfeld, baseados no modelo de Bohr, estavam de acordo com os resultados experimentais para a estrutura fina do hidrogênio, mas essa concordância revelou-se fortuita: o número de linhas observadas em outros átomos era maior que o previsto por Sommerfeld. Para explicar a estrutura fina e, ao mesmo tempo, conciliar a tabela periódica com o princípio de exclusão (veja a Seção 7-6), W. Pauli[6] sugeriu em 1925 que, além dos números quânticos n, ℓ e m, o elétron possuía um quarto número quântico, que podia assumir apenas dois valores.

Como vimos, os números quânticos resultam das condições de contorno para alguma coordenada (veja as Equações 7-14 e 7-15). Pauli esperava inicialmente que o quarto número quântico estivesse associado à coordenada temporal em uma teoria relativística, mas a ideia não se revelou frutífera. No mesmo ano, S. Goudsmit e G. Uhlenbeck,[7] alunos de doutorado em Leiden, propuseram que o quarto número quântico era a componente z, m_s, de um momento angular intrínseco do elétron que chamaram de *spin*. Eles atribuíram ao módulo de **S** (o vetor spin) a mesma forma que o módulo de **L** (o vetor momento angular orbital) possui na mecânica ondulatória de Schrödinger:

$$|\mathbf{S}| = S = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar \qquad \textbf{7-36}$$

Como este momento angular intrínseco é descrito por um número quântico s semelhante ao número quântico ℓ usado para descrever o momento angular orbital, esperamos que existam $2s + 1$ valores possíveis para a componente z de **S**, assim como existem $2\ell + 1$ valores possíveis para a componente z de **L**. Para que m_s tenha apenas dois valores, como foi sugerido por Pauli, é preciso que s seja igual a 1/2, caso em que m_s pode ter os valores +1/2 e −1/2. Além de explicar a estrutura fina e a tabela periódica, a hipótese do spin eletrônico também explicou o resultado inesperado de um interessante experimento realizado por O. Stern e W. Gerlach em 1922 e que será descrito mais adiante em uma Seção Exploratória. Para compreender por que o spin do elétron produz o desdobramento dos níveis de energia conhecido como estrutura fina, precisamos examinar a relação entre o momento angular e o momento magnético de um sistema de partículas carregadas. A relação clássica é descrita em uma Revisão de Conceitos Clássicos. A extensão para a mecânica quântica será discutida a seguir.

Momento Magnético



27

Uma partícula de massa M e carga q que descreve um movimento circular, como na Figura 7-12, possui um *momento magnético* $\boldsymbol{\mu}$ proporcional ao momento angular **L**, dado pela Equação 7-37:[8]

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2M}\mathbf{L} \qquad \textbf{7-37}$$

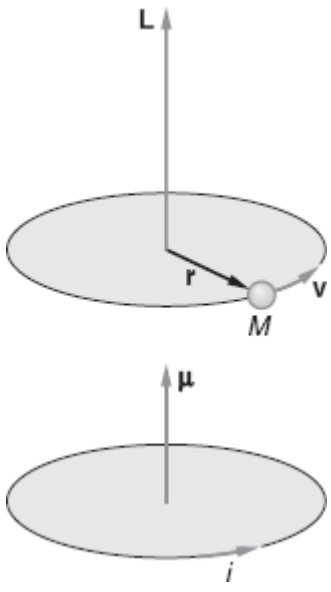


FIGURA 7-12 Uma partícula que descreve um movimento circular tem um momento angular **L**. Se partícula possui uma carga positiva, o momento magnético **μ** associado ao movimento da partícula é paralelo a **L**.

Aplicando a Equação 7-37 ao movimento *orbital* do elétron no átomo de hidrogênio e substituindo o módulo de **L** pelo seu valor, dado pela Equação 7-22, temos:

$$\mu = \frac{e}{2m_e}L = \frac{e\hbar}{2m_e}\sqrt{\ell(\ell+1)} = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\mu_B \quad \textbf{7-38}$$

Além disso, de acordo com a Equação 7-23, a componente z do momento magnético é dada por

$$\mu_z = -\frac{e\hbar}{2m_e}m = -m\mu_B \quad \textbf{7-39}$$

em que m_e é a massa do elétron, $m\hbar$ é a componente z do momento angular e μ_B é uma unidade natural de momento magnético conhecida como *magnéton de Bohr*, cujo valor é

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9{,}27 \times 10^{-24}\,\text{joule/tesla}$$
$$= 5{,}79 \times 10^{-9}\,\text{eV/gauss} = 5{,}79 \times 10^{-5}\,\text{eV/tesla} \quad \textbf{7-40}$$

Embora a proporcionalidade entre **μ** e **L** seja uma propriedade geral de distribuições de carga animadas de um movimento de rotação, a relação expressa pela Equação 7-37 se aplica apenas a uma carga isolada q descrevendo um movimento circular. Em situações mais complexas, costuma-se expressar a constante de proporcionalidade em termos de μ_B, $\hbar$ e um fator adimensional denominado *razão giromagnética* ou *fator g*, representado pela letra g, cujo valor depende, entre outras coisas, da geometria da distribuição de cargas. No caso do momento angular orbital **L** do elétron, a Equação 7-37 pode ser escrita na forma

A magnetização espontânea de elementos como o ferro, o cobalto e o níquel se deve ao momento magnético orbital e de spin dos elétrons (veja o Capítulo 10). Essas propriedades quânticas dos elétrons são usadas em aplicações que vão desde os gigantescos transformadores de eletricidade das usinas elétricas até os ímãs de geladeira.

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{-g_L\mu_B\mathbf{L}}{\hbar} \quad \textbf{7-41}$$

e as Equações 7-38 e 7-39 na forma

$$\mu = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,g_L\mu_B \quad \textbf{7-42}$$
$$\mu_z = -mg_L\mu_B \quad \textbf{7-43}$$

na qual $g_L = 1$ é o fator g orbital do elétron.

O sinal negativo nas Equações 7-41 e 7-43 se deve ao fato de que a carga do elétron é negativa. Os vetores momento magnético e momento angular associados ao movimento orbital do elétron têm, portanto, sentidos opostos. As Equações 7-42 e 7-43 mostram que *a quantização do momento angular leva à quantização do momento magnético.* Outros momentos magnéticos e fatores g que vamos encontrar mais adiante terão a mesma forma.

O comportamento de um sistema com um momento magnético diferente de zero na presença de um campo magnético pode ser visualizado imaginando o que acontece com um pequeno ímã em forma de barra (Figura 7-13). Quando o ímã é submetido a um campo magnético uniforme **B**, surge um torque $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}$ que tende a alinhar o ímã com o campo **B**. Se o ímã está girando em torno do próprio eixo, o efeito do torque é fazer com que o eixo do ímã execute um movimento de precessão em torno da direção do campo magnético, da mesma forma como o eixo de rotação de um pião ou de um giroscópio executa um movimento de precessão em torno da direção do campo gravitacional. A energia potencial do momento magnético **μ** na presença do campo magnético **B** é dada pela Equação 7-44:

$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} \quad \textbf{7-44}$$

Tomando a direção do campo **B** como eixo z, temos:

$$U = -\mu_z B \quad \textbf{7-45}$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao caso do *momento angular intrínseco* (*spin*) *de elétron*, temos (para $s = 1/2$):

$$\mu = \sqrt{s(s+1)}\mu_B = \sqrt{\frac{3}{4}}\mu_B \quad \text{e} \quad \mu_z = m_s\mu_B = \pm\frac{1}{2}\mu_B \quad \textbf{7-46}$$

Em um átomo, os elétrons estão submetidos ao campo magnético **B** resultante do movimento relativo entre os elétrons e o núcleo. De acordo com a Equação 7-45, a interação entre o spin eletrônico e este campo magnético tem valores diferentes para elétrons com $m_s = +1/2$ e para elétrons com $m_s = -1/2$. *Este desdobramento dos níveis de energia é responsável pela estrutura fina das linhas espectrais.*

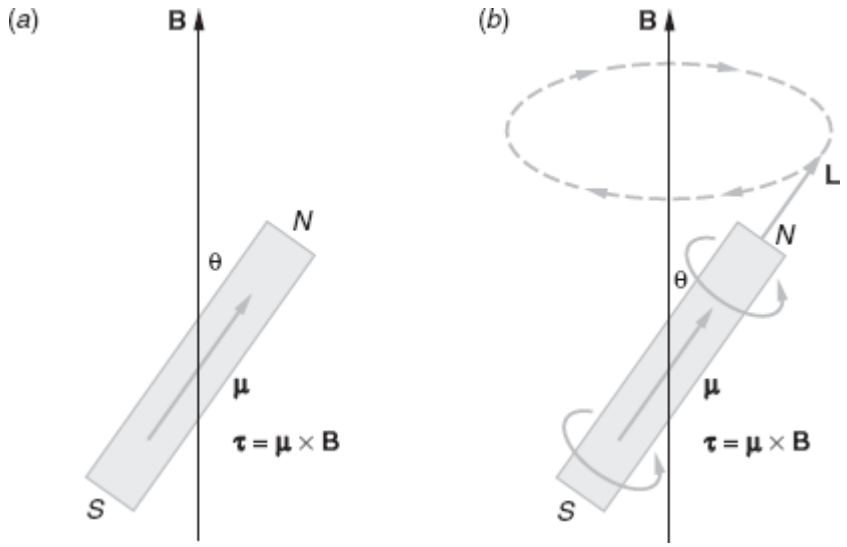


FIGURA 7-13 Representação de um momento magnético por um ímã em forma de barra. (*a*) Em um campo magnético externo, o ímã experimenta um torque que tende a alinhá-lo com o campo. (*b*) Se o ímã está girando em torno do próprio eixo, o torque faz com que o ímã execute um movimento de precessão em torno da direção do campo magnético.

A restrição do spin **S** e do momento magnético intrínseco **μ** do elétron a duas orientações no espaço, com $m_s = \pm 1/2$, é mais um exemplo de quantização espacial. O módulo do momento magnético associado ao momento angular de spin pode ser determinado a partir da deflexão do feixe de partículas em um experimento de Stern-Gerlach (veja a Seção Exploratória a seguir). Surpreendentemente (na época), o resultado *não é* $\mu_B/2$, o valor calculado usando a Equação 7-39 com $m = m_s = 1/2$, mas duas vezes esse valor. (Este tipo de experimento não é uma forma precisa de medir momentos magnéticos, embora a medida do momento angular seja muito precisa, porque envolve a simples contagem do número de linhas produzidas por um feixe de partículas.) Medidas mais precisas revelam que o momento magnético intrínseco do elétron é dado por

$$\mu_z = m_s g_s \mu_B \qquad \textbf{7-47}$$

em que $g_s = 2{,}002319$ é o fator *g* do elétron.

Este resultado, e o fato de que *s* não é um número inteiro como o número quântico de momento angular orbital ℓ, sugere que o modelo clássico do elétron como uma esfera carregada girando em torno de si mesma não deve ser tomado literalmente. Como o modelo de Bohr para o átomo, o modelo clássico é útil para descrever os resultados dos cálculos da mecânica quântica e frequentemente oferece algumas indicações quanto ao que se deve esperar de um experimento. O spin não é levado em conta na mecânica ondulatória de Schrödinger, mas está incluído na mecânica ondulatória relativística formulada por Dirac. No limite não relativístico, a teoria de Dirac prevê que $g_s = 2$, um valor aproximadamente correto. O valor exato de g_s é previsto corretamente pela *eletrodinâmica quântica* (QED),* a teoria quântica relativística que descreve a interação de elétrons com campos eletromagnéticos. A QED, que foge ao escopo deste livro, é considerada a teoria mais bem-sucedida de toda a física.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
O Experimento de Stern-Gerlach

Quando uma partícula de momento magnético **μ** é submetida a um campo magnético *não uniforme* **B**, a partícula sofre o efeito de uma força proporcional a **μ** e ao divergente de **B**. Isso acontece porque a força **F** é igual ao negativo do gradiente da energia potencial e, portanto, de acordo com a Equação 7-44,

$$F = -\Delta U = -\Delta(-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) \qquad \textbf{7-48}$$

Se o campo magnético **B** é uniforme nas direções *x* e *y*, apenas a derivada dB/dz é diferente de zero e **F** possui apenas uma

componente diferente de zero, a componente z, dada por

$$F_z = \mu_z(dB/dz) = -mg_L\mu_B(dB/dz) \qquad \textbf{7-49}$$

Este efeito foi usado por Stern e Gerlach[9] em 1922 (antes da descoberta do spin) para investigar as orientações no espaço, ou seja, a quantização espacial, dos momentos magnéticos de átomos de prata. O experimento foi repetido em 1927 (depois da descoberta do spin) por Phipps e Taylor, usando átomos de hidrogênio.

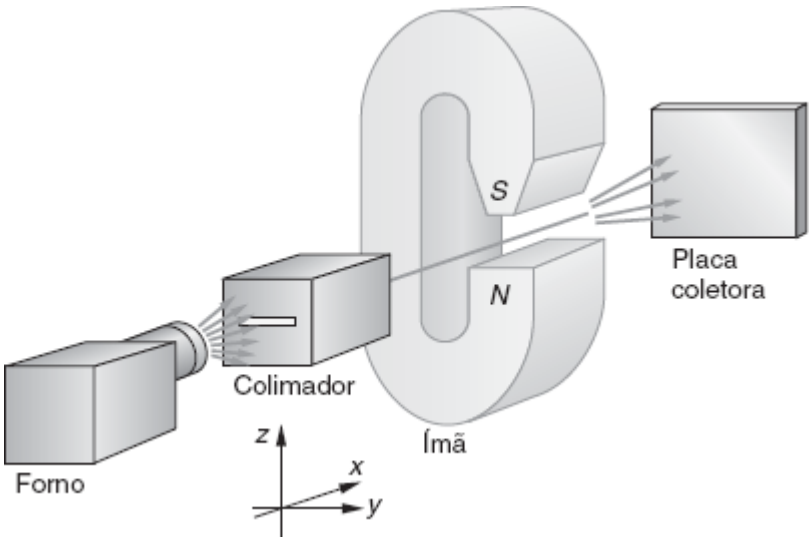


FIGURA 7-14 No experimento de Stern-Gerlach, os átomos provenientes de um forno são colimados, passam por um campo magnético não uniforme e incidem em uma placa coletora.

A Figura 7-14 mostra o arranjo experimental usado por Stern e Gerlach. Os átomos provenientes de um forno são colimados e passam por um ímã cujos polos possuem uma forma tal que a componente B_z do campo magnético aumenta gradualmente com z, enquanto as componentes B_x e B_y permanecem constantes. Depois de passar pelo ímã, os átomos incidem em uma placa coletora. A Figura 7-15 mostra o efeito de dB/dz sobre momentos magnéticos com diferentes orientações. Além do torque, que produz apenas uma precessão do momento magnético em torno da direção do campo, existe uma força F_z ao longo do eixo z cujo sentido depende apenas do sinal de μ_z, já que a derivada dB/dz é sempre positiva. Essa força desvia os átomos para cima ou para baixo; a deflexão é diretamente proporcional a dB/dz e à componente μ_z do momento magnético. Classicamente, os momentos magnéticos dos átomos podem ter qualquer orientação; entretanto, como o momento magnético é proporcional ao momento angular **L**, que é quantizado, a mecânica quântica estabelece que μ_z pode assumir apenas os $2\ell + 1$ valores correspondentes aos $2\ell + 1$ valores possíveis de m. Esperamos, portanto, $2\ell + 1$ deflexões diferentes (considerando uma deflexão nula como deflexão). Assim, por exemplo, para $\ell = 0$ deve ser observada uma linha na placa coletora, correspondente a uma deflexão nula, e para $\ell = 1$ devem ser observadas três linhas, correspondentes aos três valores possíveis do número quântico m: −1, 0 e 1. O caso em que $\ell = 1$ está ilustrado nas Figuras 7-15*a* e 7-15*b*.

Quando usaram átomos neutros de prata, Stern e Gerlach esperavam observar uma única linha, a linha do meio da Figura 7-15*b*, já que outras observações indicavam que o estado fundamental dos átomos de prata era um estado com $\ell = 0$ e, portanto, $m = 0$ e $\mu = 0$; assim, a força F_z seria nula e não haveria deflexão. Entretanto, quando o experimento foi executado com átomos de prata e depois repetido com átomos de hidrogênio, foram observadas *duas* linhas, como mostrado na Figura 7-15*c*. O estado fundamental do hidrogênio também é um estado com $\ell = 0$, de modo que seria observada uma única linha se não existisse o spin eletrônico. Na verdade, o elétron possui um spin intrínseco cujo módulo é $|\mathbf{S}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$, em que $s = 1/2$, e, portanto, a componente z pode ter os valores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$. Como o momento angular orbital é nulo, o momento angular total do átomo é igual ao spin[10] e são observadas duas linhas. Stern e Gerlach foram os primeiros a observar diretamente o spin eletrônico e a quantização espacial.

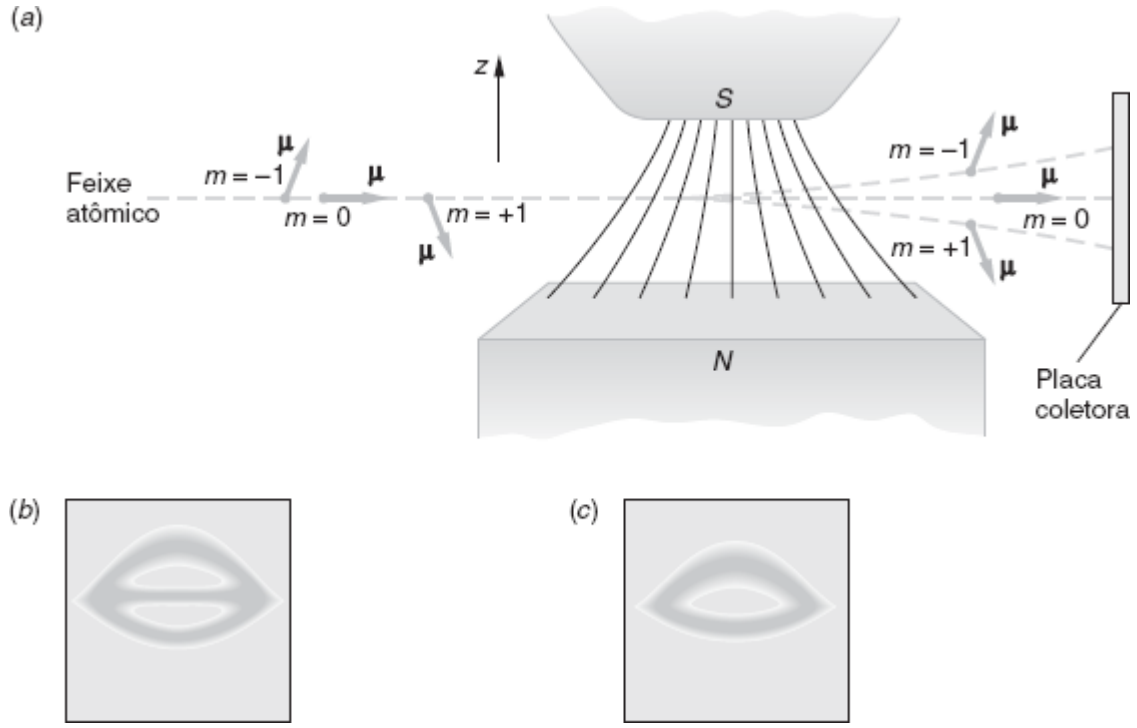


FIGURA 7-15 (*a*) Na presença de um campo magnético não uniforme, um momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ experimenta uma força F_z cujo sentido depende do sinal da componente μ_z de $\boldsymbol{\mu}$ e cujo módulo depende dos valores absolutos de $\boldsymbol{\mu}_z$ e de dB_z/dz. O feixe de átomos provenientes de um forno (que não aparece na ilustração) é colimado, atravessa a região onde existe o campo magnético não uniforme e incide em uma placa coletora. (*b*) Figura observada na placa coletora para o caso em que $\ell = 1$, ilustrado em (*a*). As três linhas convergem nas extremidades e têm formas diferentes no centro por causa de pequenas diferenças no gradiente do campo. (*c*) Figura observada na placa coletora quando o feixe é constituído por átomos de prata ou hidrogênio.

As Funções de Ondas Completas do Átomo de Hidrogênio

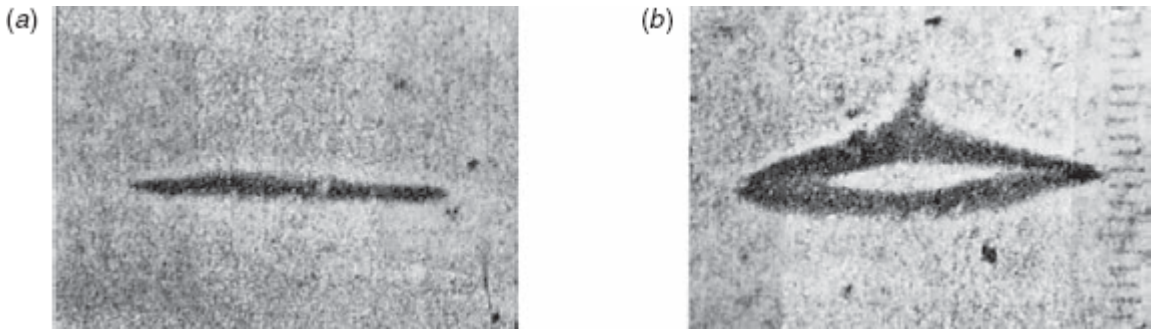
Nossa descrição das funções de onda do átomo de hidrogênio na Seção 7-3 não está completa porque não leva em conta o spin do elétron. As funções de onda do átomo de hidrogênio também dependem do valor da componente *z* do spin, m_s, que pode ser +1/2 ou −1/2. (Não é necessário especificar o valor do número quântico de spin *s* porque é sempre igual a 1/2.) A função de onda completa pode, portanto, ser escrita na forma $\psi_{n\ell m_\ell m_s}$, em que m_ℓ é a componente *z* do momento angular orbital. Temos agora duas funções de onda para o estado fundamental do átomo de hidrogênio, $\psi_{100+1/2}$ e $\psi_{100-1/2}$, que correspondem a um átomo no qual o spin do elétron está "paralelo" ou "antiparalelo" ao eixo *z* (definido, por exemplo, por um campo magnético externo). No caso geral, o estado fundamental do átomo de hidrogênio é uma combinação linear dessas funções de onda.

$$\psi = C_1\psi_{100+1/2} + C_2\psi_{100-1/2}$$

A probabilidade de observar um átomo com $m_s = +1/2$ (verificando, por exemplo, em que ponto o átomo atinge a placa coletora no experimento de Stern-Gerlach) é dada por $|C_1|^2$. A menos que os átomos tenham sido selecionados previamente de alguma forma (fazendo-os passar por um campo magnético não uniforme, por exemplo), $|C_1|^2 = |C_2|^2 = 1/2$ e, portanto, as probabilidades de observarmos um átomo com o spin do elétron apontando "para cima" ($m_s = +1/2$) e "para baixo" ($m_s = -1/2$) são iguais.

Exercícios

5. Um sistema tem que possuir uma carga elétrica total diferente de zero para possuir um momento magnético?
6. Considere dois feixes de átomos de hidrogênio emergindo da região em que existe campo magnético no experimento de Stern-Gerlach. Qual é a diferença entre as funções de onda dos átomos de um dos feixes e as funções de onda dos átomos do outro feixe? Qual é a diferença entre essas funções de onda e a função de onda dos átomos do feixe original, antes de passar pela região em que existe campo magnético?



Imagens obtidas por Stern e Gerlach usando um feixe de átomos de prata. (*a*) Na ausência de campo magnético, todos os átomos atingem a placa coletora em uma linha localizada na região central. (*b*) Na presença de um campo magnético não uniforme, a linha se divide em duas. [*Fonte*: O. Stern e W. Gerlach, *Zeitschr. f. Physik* **9**, 349 (1922).]

7-5 Momento Angular Total e Interação Spin-Órbita

No caso geral, um elétron em um átomo possui um momento angular orbital, caracterizado pelo número quântico ℓ, e um momento angular intrínseco, ou spin, caracterizado pelo número quântico s. Muitos sistemas clássicos também possuem dois tipos de momento angular. A Terra, por exemplo, apresenta um movimento de rotação em torno do próprio eixo e um movimento de translação em volta do Sol; o giroscópio, além de girar em torno de si mesmo, apresenta um movimento de precessão. Classicamente, o momento angular total

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \qquad \textbf{7-50}$$

é uma grandeza importante porque, em qualquer sistema, o torque resultante é igual à taxa de variação do momento angular total; além disso, no caso de forças centrais, o momento angular total é constante. Na mecânica clássica, o momento angular total **J** é a soma vetorial de **L** e **S** e o módulo J do momento angular total pode ter qualquer valor entre $L + S$ e $|L - S|$. Na mecânica quântica, a situação é diferente: **L** e **S** são quantizados e podem assumir apenas algumas orientações relativas. As regras da mecânica quântica para combinar o momento angular orbital com o spin (ou dois momentos angulares diferentes, como os momentos de duas partículas) são um pouco mais difíceis de demonstrar, mas não são difíceis de compreender. No caso da soma do momento angular orbital com o spin, o módulo do momento angular total **J** é dado por

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{j(j+1)}\,\hbar \qquad \textbf{7-51}$$

em que j, o *número quântico do momento angular total*, pode ser

$$j = \ell + s \quad \text{ou} \quad j = |\ell - s| \qquad \textbf{7-52}$$

e a componente z de **J** é dada por

$$J_z = m_j\hbar \quad \text{onde} \quad m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j \qquad \textbf{7-53}$$

(Se $\ell = 0$, o momento angular é igual ao spin e $j = s$.) O modelo vetorial simplificado da Figura 7-16*a* mostra as duas combinações possíveis, $j = \ell + 1/2 = 3/2$ e $j = \ell - 1/2 = 1/2$, para o caso de um elétron com $\ell = 1$. Os módulos dos vetores são proporcionais a $[\ell(\ell+1)]^{1/2}$, $[s(s+1)]^{1/2}$ e $[j(j+1)]^{1/2}$. Dizemos que os vetores associados ao spin e ao momento angular orbital estão "paralelos", se $j = \ell + s$, e "antiparalelos", se $j = |\ell - s|$. A Figura 7-16*b* mostra um modelo mais realista da soma vetorial. De acordo com a Equação 7-53, o número quântico m_j pode assumir $2j + 1$ valores, em intervalos inteiros, de $-j$ a $+j$. A Equação 7-53 também permite concluir que $m_j = m_\ell + m_s$, já que $J_z = L_z + S_z$.

A Equação 7-52 é um caso especial de uma regra geral para combinar momentos angulares, que pode ser usada no caso de duas ou mais partículas (o átomo de hélio, por exemplo, possui dois elétrons, cada um com um momento angular orbital, um spin e um momento angular total). A regra é a seguinte:

> Se $\mathbf{J_1}$ e $\mathbf{J_2}$ são dois momentos angulares quaisquer (orbitais, de spin ou uma combinação dos dois), o módulo do momento angular resultante $\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2}$ é dado por $[j(j+1)]^{1/2}\hbar$, em que j pode ter qualquer um dos seguintes valores:
>
> $$j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \ldots, |j_1 - j_2|$$

EXEMPLO 7-2 **Soma de Momentos Angulares** I Dois elétrons possuem momento angular orbital nulo. Quais são os números quânticos possíveis para o momento angular total de um sistema formado pelos dois elétrons? (Esse sistema poderia ser, por

exemplo, o sistema formado pelos dois elétrons do átomo de hélio.)

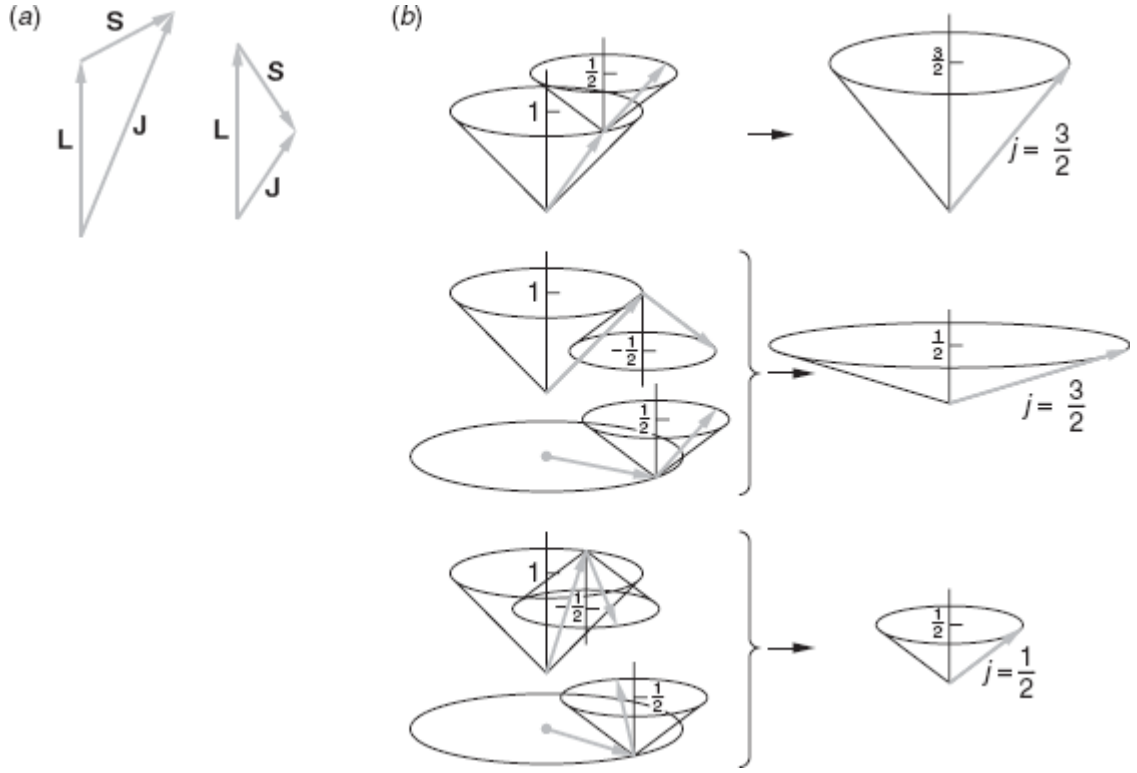


FIGURA 7-16 (*a*) Modelo vetorial simplificado ilustrando a adição dos momentos angulares orbital e de spin para o caso em que $\ell = 1$ e $s = 1/2$. Existem dois valores possíveis para o número quântico do momento angular total, $j = \ell + s = 3/2$ e $j = \ell - s = 1/2$. (*b*) Soma vetorial dos momentos angulares orbital e de spin, também para o caso em que $\ell = 1$ e $s = 1/2$. De acordo com o princípio de indeterminação, os vetores podem ser encontrados em qualquer lugar dos cones, que correspondem a valores definidos das componentes *z*. Note que existem dois modos possíveis de formar os estados $j = 3/2$, $m_j = 1/2$ e $j = 1/2$, $m_j = 1/2$.

SOLUÇÃO

Neste caso, $j_1 = j_2 = 1/2$. De acordo com a regra geral, existem dois valores possíveis para j, $j = 1$ e $j = 0$. No primeiro caso, dizemos que os spins dos elétrons estão paralelos; no segundo, que os spins estão antiparalelos.

EXEMPLO 7-3 **Soma de Momentos Angulares II** Um elétron em um átomo tem um momento angular orbital $\mathbf{L_1}$ com $\ell_1 = 2$ e um segundo elétron tem um momento angular orbital $\mathbf{L_2}$ com $\ell_2 = 3$. Quais são os números quânticos possíveis para o momento angular orbital total $\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2}$?

SOLUÇÃO

Como $\ell_1 + \ell_2 = 5$ e $|\ell_1 - \ell_2| = 1$, os valores possíveis de ℓ são 5, 4, 3, 2 e 1.

Notação Espectroscópica



19

A notação espectroscópica, uma espécie de código desenvolvido nos primórdios da espectroscopia para condensar as informações e simplificar a descrição das transições entre estados, foi mais tarde adotada para uso geral na física atômica, molecular, nuclear e de partículas elementares. A notação parece arbitrária,[11] mas é fácil de aprender e, como o leitor terá oportunidade de constatar, fácil de usar. No caso de elétrons isolados, temos:

1. As letras *s*, *p*, *d*, *f*, *g*, *h* … são usadas para designar estados com $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ … Assim, por exemplo, dizemos que um elétron com $\ell = 2$ se encontra em um estado *d*.
2. Os níveis de energia principais do elétron são chamados de *camadas*, e designados pelas letras *K*, *L*, *M*, *N*, *O*, *P*… que representam estados com $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ … Assim, por exemplo, dizemos que um elétron com $n = 3$ se encontra na camada *M*. (Esta notação é menos usada que a anterior.)

No caso de camadas atômicas, a notação consiste no número quântico principal da camada seguido de uma letra maiúscula que indica o número quântico de momento angular total da camada, na mesma convenção usada para elétrons isolados, ou seja, as

letras *S*, *P*, *D*, *F* ... correspondem a estados com $\ell = 0, 1, 2, 3\ldots$ O valor do número quântico de momento angular total *j*, é indicado como índice inferior, à direita da letra maiúscula, e o valor do spin total aparece como índice superior, à esquerda da letra maiúscula, na forma $2s + 1$.[12] Os estados com $\ell = 1$ são representados, portanto, por símbolos cuja forma genérica é

$$n^{2s+1}P_j$$

Assim, por exemplo, o estado fundamental do átomo de hidrogênio é o estado $1^2S_{1/2}$, que se lê da seguinte forma: "um dubleto *S* meio." No caso de um elétron com $n = 2$, o momento angular orbital ℓ pode ser igual a 0 ou 1, de modo que existem três estados possíveis: $2^2S_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$ e $2^2P_{1/2}$. (Alguns autores omitem o número quântico principal e o índice que indica o spin total quando essas informações estão implícitas ou são desnecessárias.)

Interação Spin-Órbita

Estados atômicos com os mesmos valores de *n* e ℓ e diferentes valores de *j* possuem energias ligeiramente diferentes por causa da interação do spin dos elétrons com o movimento dos elétrons em torno do núcleo. Este fenômeno é conhecido como *interação spin-órbita*. O desdobramento resultante das linhas espectrais, como, por exemplo, o desdobramento das linhas associadas à transição $2P \rightarrow 1S$ do hidrogênio, é conhecido como *desdobramento fino*. Podemos compreender qualitativamente a interação spin-órbita a partir do modelo simples de Bohr (Figura 7-17*a*). Na figura, o elétron está se movendo em uma órbita circular, com velocidade *v*, no sentido anti-horário, em torno de um próton estacionário; o momento angular **L** aponta para cima. No referencial do elétron (Figura 7-17*b*), é o próton que se move em uma órbita circular, comportando-se, portanto, como uma espira percorrida por corrente que produz um campo magnético **B** na posição do elétron. O campo **B** também aponta para cima, sendo, portanto, paralelo a **L**. A energia potencial de um momento magnético na presença de um campo magnético depende da orientação relativa entre o momento e o campo magnético e é dada por:

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B \qquad 7.54$$



27

A energia potencial é mínima quando o momento magnético é paralelo a **B** e máxima quando o momento e o campo são antiparalelos. Como o momento magnético do elétron tem o sentido oposto ao do spin (já que o elétron tem carga negativa), a energia da interação spin-órbita é máxima quando o spin está paralelo a **B** e, portanto, a **L**. Assim, a energia do estado $2P_{3/2}$ do hidrogênio, no qual **L** e **S** são paralelos, é ligeiramente maior que a do estado $2P_{1/2}$, no qual **L** e **S** são antiparalelos (Figura 7-18).[13] O desdobramento observado é de aproximadamente $4{,}5 \times 10^{-5}$ eV para os estados $2P_{1/2}$ e $2P_{3/2}$ do hidrogênio. No caso de outros átomos, o desdobramento fino pode ser bem maior. No sódio, por exemplo, esse desdobramento, como veremos na Seção 7-7, é da ordem de 2×10^{-3} eV. Mesmo assim, é bem menor que a diferença de energia entre estados com diferentes números quânticos principais, que é da ordem de 1,5 a 3,0 eV no caso dos estados envolvidos em transições que produzem linhas espectrais na faixa da luz visível.

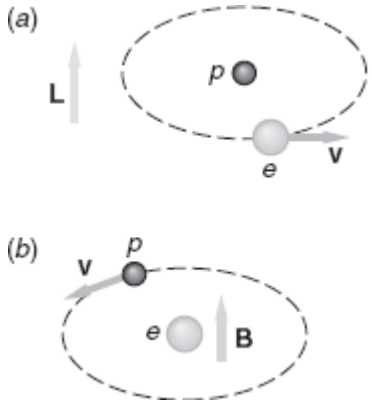


FIGURA 7-17 (*a*) Elétron girando em torno de um próton com o momento angular **L** apontando para cima. (*b*) O campo magnético **B** a que o elétron está submetido devido ao movimento aparente (relativo) do próton também aponta para cima. Quando o spin do elétron está paralelo a **L**, o momento magnético tem a orientação oposta à de **L** e **B** e, portanto, a energia da interação spin-órbita tem o maior valor possível.

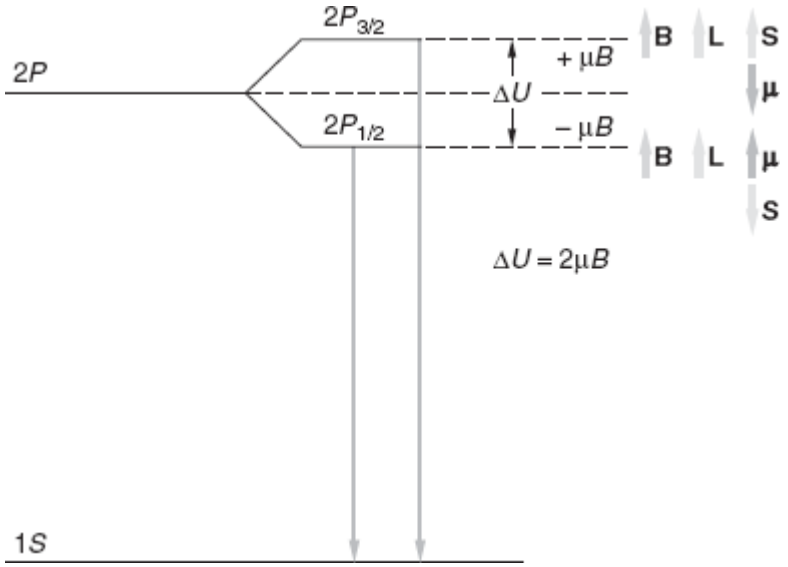


FIGURA 7-18 Diagrama de níveis de energia mostrando o desdobramento fino. À esquerda aparecem os níveis na ausência de um campo magnético; à direita, os mesmos níveis na presença do campo magnético produzido pelo movimento relativo do núcleo. A interação spin-órbita faz com que o nível $2P$ se desdobre em dois, sendo que o nível $j = 3/2$ tem uma energia ligeiramente maior que o nível $j = 1/2$. Em consequência, a linha espectral associada à transição $2P \rightarrow 1S$ também se desdobra em duas linhas de comprimentos de onda ligeiramente diferentes. (O diagrama não está em escala.)

EXEMPLO 7-4 **Desdobramento Fino** O desdobramento fino dos estados $2P_{3/2}$ e $2P_{1/2}$ do hidrogênio é $4{,}5 \times 10^{-5}$ eV. A partir desta informação, estime o valor do campo magnético experimentado por um elétron $2p$ em um átomo de hidrogênio. Suponha que o campo **B** é paralelo ao eixo z.

SOLUÇÃO

1. A contribuição do campo magnético para a energia do elétron é dada pela Equação 7-54: $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -\mu_z B$

2. A energia U pode ser positiva ou negativa, dependendo da orientação relativa entre $\boldsymbol{\mu}$ e **B**; a diferença de energia entre as duas orientações possíveis é dada por $\Delta E = 2U = 2\mu_z B$

3. Como o momento magnético do elétron é μ_B, $\mu_z \approx \mu_B$ e, portanto, $\Delta E \approx 2\mu_z B$

4. Explicitando B e substituindo λ_B e ΔE por seus valores, temos
$$\begin{aligned} B &\approx \frac{\Delta E}{2\mu_B} \\ &\approx \frac{4{,}5 \times 10^{-5}\,\text{eV}}{(2)(5{,}79 \times 10^{-5}\,\text{eV/T})} \\ &\approx 0{,}39\,\text{T} \end{aligned}$$

Observação: *Trata-se de um campo magnético bastante elevado, aproximadamente 10.000 vezes maior que o campo magnético terrestre.*

Quando um átomo é submetido a um campo magnético *externo* **B**, o momento angular total **J** é quantizado no espaço em relação à direção de **B** e o estado atômico caracterizado pelo número quântico de momento angular j é desdobrado em $2j + 1$ níveis, que correspondem aos $2j + 1$ valores possíveis da componente z de **J** e, portanto, aos $2j + 1$ valores possíveis da componente z do momento magnético total. Este desdobramento dos níveis de energia dá origem a um desdobramento das linhas do espectro de emissão do átomo. O desdobramento das linhas espectrais de um átomo quando este é submetido a um campo magnético externo foi descoberto por P. Zeeman e é conhecido como *efeito Zeeman*. (Veja a Leitura Suplementar intitulada "O Efeito Zeeman" e a Seção 3-1.) Zeeman e Lorentz receberam o Prêmio Nobel de Física de 1902 pela descoberta e explicação do efeito Zeeman.

Deslocamento de Lamb

Embora não seja mostrado na Figura 7-18, o nível $n = 2$, $\ell = 0$, $j = 1/2$ ($2^2S_{1/2}$) deveria ter a mesma energia que o nível $n = 2$, $\ell = 1$, $j = 1/2$ ($2^2P_{1/2}$), já que as energias da estrutura fina do hidrogênio dependem de n e j, mas não de ℓ. O único nível situado abaixo desses estados é o nível fundamental, $1^2S_{1/2}$, e transições do nível $2^2S_{1/2}$ para esse nível são proibidas pela regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$, o que torna o nível $2^2S_{1/2}$ um *estado metaestável*. Em 1947, porém, Willis Lamb mostrou experimentalmente que os dois estados com $n = 2$ e $j = 1/2$ têm energias diferentes, com o estado para o qual $\ell = 1$ ligeiramente abaixo do estado para o qual $\ell = 0$. Isso permite a existência da transição $2^2S_{1/2} \rightarrow 2^2P_{1/2}$. Lamb mediu a energia dos fótons emitidos nessa transição e encontrou o valor de $4{,}372 \times 10^{-6}$ eV (o que corresponde a uma frequência na faixa das micro-ondas). De acordo com a eletrodinâmica quântica, este fenômeno, que recebeu o nome de *deslocamento de Lamb*, se deve a flutuações dos níveis de energia no vácuo, um assunto que foge ao escopo deste livro, mas é alvo até hoje de importantes pesquisas. Por essa descoberta, Lamb recebeu (com Polykarp Kusch) o Prêmio Nobel de Física de 1955.

7-6 A Equação de Schrödinger para Duas (ou Mais) Partículas

Nossas discussões de mecânica quântica se limitaram até agora a situações nas quais uma única partícula estava sujeita a um campo de força descrito por uma energia potencial V. O problema físico mais importante desse tipo é o do átomo de hidrogênio, no qual um elétron se move na presença do potencial elétrico produzido por um próton. Trata-se, na verdade, de um problema de dois corpos, pois o próton também está sujeito ao potencial elétrico produzido pelo elétron, mas, como na mecânica clássica, a situação pode ser reduzida a um problema de um único corpo supondo que o próton está em repouso e substituindo a massa real do elétron por uma massa reduzida. No caso de átomos mais complexos, porém, temos que aplicar os métodos da mecânica quântica a um sistema constituído por dois ou mais elétrons sujeitos ao potencial produzido pelo núcleo. Este problema é complicado pela interação dos elétrons entre si e também pelo fato de que os elétrons não podem ser distinguidos.

A interação dos elétrons é de natureza eletromagnética e não difere muito da interação clássica entre partículas dotadas de carga elétrica. A equação de Schrödinger para um átomo com dois ou mais elétrons não tem solução analítica e deve ser resolvida por métodos de aproximação, mas isso também é comum nos problemas clássicos que envolvem três ou mais partículas. A complicação causada pela falta de identidade dos elétrons, por outro lado, é uma peculiaridade da mecânica quântica para a qual não existe equivalente na mecânica clássica.

Partículas Idênticas na Mecânica Quântica

O fato de ser impossível distinguir partículas do mesmo tipo tem importantes consequências na mecânica quântica, entre elas o *princípio de exclusão de Pauli*. Nesta seção, vamos ilustrar a origem deste princípio considerando o caso muito simples de duas partículas iguais em um poço quadrado unidimensional infinito.

A equação de Schrödinger independente do tempo para duas partículas iguais de massa m é

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} + V\psi(x_1, x_2) = E\psi(x_1, x_2) \qquad \textbf{7-55}$$

na qual x_1 e x_2 são as coordenadas das duas partículas. No caso de um poço de potencial quadrado infinito, precisamos resolver a equação de Schrödinger apenas no interior do poço e exigir que a função de onda se anule nas paredes do poço. Se as partículas interagem, a energia potencial V não pode ser escrita como a soma de uma função apenas de x_1 e uma função apenas de x_2. Isso acontece, por exemplo, se as duas partículas possuem carga elétrica, caso em que a energia potencial eletrostática mútua (em uma dimensão) é dada por $+ke^2/|x_2 - x_1|$. Por outro lado, se as partículas não interagem ou se a interação é desprezada em primeira aproximação, $V = V_1(x_1) + V_2(x_2)$ e as soluções da Equação 7-55 podem ser escritas em termos de produtos de soluções que envolvem apenas uma das partículas. Essas soluções são da forma

$$\psi_{nm}(x_1, x_2) = \psi_n(x_1)\psi_m(x_2) \qquad \textbf{7-56}$$

na qual $\Psi_n(x_1)$ e $\Psi_m(x_2)$ são as soluções para uma partícula isolada em um poço quadrado infinito (Equação 6-32). Assim, por exemplo, para $n = 1$ e $m = 2$, temos:

$$\psi_{12} = C \operatorname{sen}\frac{\pi x_1}{L}\operatorname{sen}\frac{2\pi x_2}{L} \qquad \textbf{7-57}$$

A probabilidade de encontrarmos a partícula 1 no intervalo dx_1 e a partícula 2 no intervalo dx_2 é $|\Psi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2$, que, aparentemente, seria simplesmente o produto das probabilidades individuais $|\Psi(x_1)|^2\, dx_1$ e $|\Psi(x_2)|^2\, dx_2$. Entretanto, embora

tenhamos rotulado as partículas através dos índices 1 e 2, não podemos saber qual das duas está no intervalo dx_1 e qual está no intervalo dx_2. No caso de partículas iguais, portanto, devemos encontrar uma função de onda tal que a densidade de probabilidade continue a mesma se permutarmos os índices:

$$|\psi(x_1,x_2)|^2 = |\psi(x_2,x_1)|^2 \qquad \textbf{7-58}$$

Para que a Equação 7-58 seja verdadeira, é preciso que a função $\Psi(x_1, x_2)$ seja simétrica ou antissimétrica em relação à troca das partículas, isto é, que

$$\psi(x_2,x_1) = +\psi(x_1,x_2) \quad \text{simétrica}$$
$$\psi(x_2,x_1) = -\psi(x_1,x_2) \quad \text{antissimétrica}$$

Observe que a função de onda genérica da Equação 7-56 e o exemplo da Equação 7-57 não são simétricos nem antissimétricos; ao permutarmos x_1 e x_2, obtemos uma função de onda diferente, o que equivale a dizer que é possível distinguir as duas partículas. Assim, essas funções de onda *não são* compatíveis com o princípio de que as partículas não podem ser distinguidas. Existem duas combinações lineares de produtos como os da Equação 7-56 que formam uma função simétrica e uma função antissimétrica; portanto, além de constituírem soluções da equação de Schrödinger para duas partículas, Equação 7-55 (lembre-se de que, se duas funções são soluções da equação de Schrödinger, qualquer combinação linear dessas funções também é uma solução), também respeitam o princípio de indistinguibilidade:

$$\psi_S = C[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] \quad \text{simétrica}$$
$$\psi_A = C[\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\psi_m(x_1)] \quad \text{antissimétrica}$$

O Princípio de Exclusão de Pauli

Existe uma importante diferença entre as funções simétricas e as funções antissimétricas: as funções de onda antissimétricas se anulam para $n = m$, o que não acontece com as funções simétricas. Observa-se experimentalmente que a função de onda *total* de um sistema formado por elétrons é sempre antissimétrica. (Isto também se aplica a muitas outras partículas, como, por exemplo, os prótons e os nêutrons.) Isso significa que as funções de onda das partículas individuais, como $\Psi_n(x_1)$ e $\Psi_m(x_2)$, não podem ter os mesmos números quânticos; caso contrário, a função de onda total se anularia. Este é um exemplo do *princípio de exclusão de Pauli*. No caso dos elétrons de um átomo, a função de onda depende de quatro números quânticos:

$$\Psi_{n\ell m_\ell m_s} = R_{n\ell}Y_{\ell m_\ell}X_{m_s} \qquad \textbf{7-59}$$

na qual $R_{n\ell}$ e a função de onda radial, $Y_{\ell m_\ell}$ é a função de onda orbital e X_{ms} é a função de onda de spin.

De acordo com o princípio de exclusão de Pauli,

dois elétrons de um mesmo átomo não podem ter os quatro números quânticos iguais.

O princípio de exclusão faz com que certos estados de um sistema com mais de um elétron não possam ser ocupados; trata-se de uma condição adicional imposta às soluções da equação de Schrödinger, que será usada na próxima seção para explicar as regularidades da tabela periódica. Muitas partículas, como a partícula α, o dêuteron, o fóton e os mésons, possuem funções de onda simétricas e não estão sujeitas ao princípio de exclusão de Pauli.

7-7 Estados Fundamentais dos Átomos: A Tabela Periódica

Vamos agora examinar qualitativamente as funções de onda e os níveis de energia de átomos mais complexos que o de hidrogênio. Como já dissemos, a equação de Schrödinger não pode ser resolvida exatamente para átomos com mais de um elétron por causa das interações entre os elétrons, de modo que se torna necessário recorrer a métodos aproximados. Vamos discutir nesta seção as energias e funções de onda dos estados fundamentais dos átomos dos elementos; os estados excitados e os espectros de alguns elementos serão discutidos na próxima seção. Desprezando as interações entre os elétrons, a função de onda de um átomo complexo pode ser escrita como uma soma de produtos das funções de onda de elétrons individuais, semelhantes às do átomo de hidrogênio, caracterizadas pelos números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s. A energia de um elétron é determinada principalmente pelos números quânticos n (que está relacionado à parte radial da função de onda) e ℓ (que caracteriza o momento angular orbital). Em geral, quanto menores os valores de n e de ℓ, menor a energia do estado (veja a Figura 7-19). A especificação de n e ℓ para todos os elétrons de um átomo recebe o nome de *configuração eletrônica*. A notação é a mesma que foi apresentada na Seção 7-5. As configurações eletrônicas dos átomos dos elementos no estado fundamental

estão listadas no Apêndice C.

Hélio (Z = 2)

A energia dos dois elétrons do átomo de hélio é a soma das energias cinéticas dos dois elétrons, das energias potenciais dos dois elétrons em consequência da atração do núcleo, ambas da forma $-kZe^2/r_i$, e da energia potencial de interação V_{int} associada à repulsão mútua dos dois elétrons, que é dada por

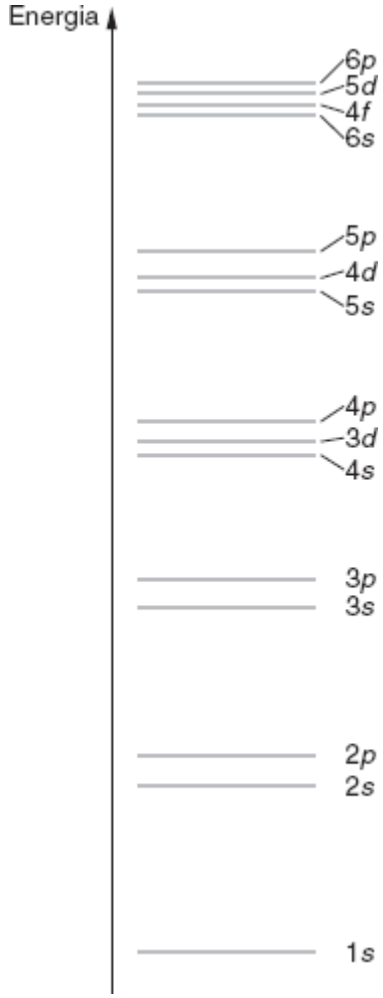


FIGURA 7-19 Energias relativas das camadas e subcamadas atômicas.

$$V_{\text{int}} = +\frac{ke^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \qquad \textbf{7-60}$$

na qual $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ são os vetores posição dos dois elétrons.

Como o termo de interação V_{int} envolve as coordenadas dos dois elétrons, a presença desse termo impede que a equação de Schrödinger seja separada em duas equações, uma para cada elétron. Desprezando o termo de interação, podemos separar a equação de Schrödinger e obter soluções exatas para os dois elétrons. Essas soluções são iguais às do elétron do átomo de hidrogênio, exceto pelo fato de que $Z = 2$. As energias permitidas são dadas por

$$E = -\frac{4E_0}{n_1^2} - \frac{4E_0}{n_2^2} \quad \text{na qual } E_0 = 13{,}6 \text{ eV} \qquad \textbf{7-61}$$

A menor energia, $E_1 = -8E_0 = -108{,}8$ eV, corresponde a $n_1 = n_2 = 1$. Nesse caso, $\ell_1 = \ell_2 = 0$. A função de onda total, ignorando o spin dos elétrons, é da forma

$$\psi = \psi_{100}(r_1, \theta_1, \phi_1)\psi_{100}(r_2, \theta_2, \phi_2) \qquad \textbf{7-62}$$

Os números quânticos n, ℓ m_ℓ podem ser iguais para os dois elétrons apenas se o quarto número quântico, m_s, for diferente, isto é, se $m_s = +1/2$ para um dos elétrons e $m_s = -1/2$ para o outro elétron. O spin resultante dos dois elétrons deve, portanto, ser nulo.

Podemos obter uma correção de primeira ordem para a energia do estado fundamental usando a função de onda aproximada da Equação 7-62 para calcular o valor médio da energia de interação V_{int}, que é simplesmente o valor esperado $\langle V_{int} \rangle$. O resultado do cálculo é o seguinte:

$$\langle V_{int} \rangle = +34 \text{ eV} \qquad \textbf{7-63}$$

Com esta correção, a energia do estado fundamental se torna

$$E \approx -108{,}8 + 34 = -74{,}8 \text{ eV} \qquad \textbf{7-64}$$

Este método aproximado, no qual desprezamos a interação dos elétrons para encontrar uma função de onda aproximada e usamos em seguida esta função de onda para calcular a energia de interação, é conhecido como *teoria das perturbações de primeira ordem*. O processo pode ser estendido a ordens mais elevadas; o passo seguinte consiste em usar a nova energia do estado fundamental para encontrar uma aproximação melhor para a função de onda do estado fundamental. Este método de aproximação é semelhante ao que é usado na mecânica clássica para calcular as órbitas dos planetas em torno do Sol. Em primeira aproximação, a interação dos planetas é ignorada e é calculada a órbita elíptica de cada planeta. Em seguida, as órbitas são usadas para estimar a influência exercida pelos planetas sobre os planetas vizinhos.

O valor experimental da energia necessária para remover os dois elétrons do átomo de hélio é aproximadamente 79 eV. A discrepância entre este valor e o valor calculado de 74,8 eV se deve à imprecisão das aproximações usadas para calcular $\langle V_{int} \rangle$. (Convém observar que existem métodos melhores para calcular a energia de interação entre os elétrons do átomo de hélio, que fornecem resultados muito mais próximos do valor experimental.) O *íon* He^+, que contém apenas um elétron, é muito parecido com o átomo de hidrogênio, exceto pelo fato de que $Z = 2$; a energia do estado fundamental é

$$E = -4(13{,}6) = -54{,}4 \text{ eV}$$

A energia necessária para remover o primeiro elétron do átomo de hélio é 24,6 eV. O potencial elétrico correspondente, 24,6 V, é conhecido como *primeiro potencial de ionização* do átomo. As energias de ionização dos átomos dos diferentes elementos aparecem no Apêndice C.

A configuração do estado fundamental do átomo de hélio é representada como $1s^2$. O 1 significa que $n = 1$, o s significa que $\ell = 0$, e o 2, que existem dois elétrons nesse estado. Como ℓ só pode ser zero para $n = 1$, os dois elétrons preenchem totalmente a camada K ($n = 1$).

Lítio ($Z = 3$)

O lítio possui três elétrons. Dois estão na camada K ($n = 1$), mas o terceiro não pode ocupar a mesma camada por causa do princípio de exclusão. O nível de mais baixa energia que o terceiro elétron pode ocupar é o nível $n = 2$; os valores possíveis de ℓ são $\ell = 1$ e $\ell = 0$.

No átomo de hidrogênio, os estados com esses dois valores de ℓ têm a mesma energia por causa da degeneração associada às forças que variam com o inverso do quadrado da distância. O mesmo não acontece com o átomo de lítio e outros átomos porque a carga que o elétron de maior energia "enxerga" não é uma carga pontual.[14] A carga positiva do núcleo, $+Ze$, pode ser considerada aproximadamente como uma carga pontual, mas a carga negativa dos elétrons da camada K, $-2e$, está distribuída no espaço em um volume cujo raio é da ordem de a_0/Z. Podemos supor que a densidade de carga de cada um dos elétrons internos é dada por $\rho = -e|\Psi|^2$, em que Ψ é uma função de onda semelhante à função de onda $1s$ do hidrogênio (desprezando a interação entre os dois elétrons da camada K). A distribuição de probabilidade correspondente aos estados $2s$ e $2p$ é a que aparece na Figura 7-10. Vemos que, nos dois casos, a distribuição de probabilidade apresenta um máximo principal do lado de fora da camada K, mas a distribuição do estado $2s$ também apresenta um máximo secundário nas vizinhanças da origem. Podemos interpretar este fato dizendo que o elétron no estado $2p$ passa quase todo o tempo isolado do núcleo pelos dois elétrons $1s$ da camada K e, portanto, "enxerga" uma carga central efetiva $Z_{ef} \approx e$, enquanto o elétron no estado $2s$ penetra com maior frequência nessa blindagem e, portanto, "enxerga" uma carga central um pouco maior. A energia do terceiro elétron é, portanto, menor no estado $2s$ do que no estado $2p$ e a configuração do estado fundamental do átomo de lítio é $1s^2 2s$.



George Gamow e Wolfgang Pauli na Suíça, em 1930. [*Cortesia de George Gamow*.]

Como os três elétrons têm momento angular orbital nulo e o spin total dos dois elétrons da camada *K* também é nulo, o momento angular total do átomo de lítio é igual a $\hbar/2$, o spin do terceiro elétron. O primeiro potencial de ionização do lítio é apenas 5,39 eV. Podemos usar este dado para calcular a carga central efetiva do ponto de vista do elétron 2*s*. Para $Z = Z_{ef}$ e $n = 2$, temos:

$$E = \frac{Z^2 E_0}{n^2} = \frac{Z_{ef}^2 (13{,}6\text{ eV})}{2^2} = 5{,}39\text{ eV}$$

o que nos dá $Z_{ef} \approx 1{,}3$.

Quanto menor o valor de ℓ, maior a probabilidade de que o elétron se aproxime do núcleo; assim, *para um dado n*, *quanto maior o valor de* ℓ, *maior a energia do elétron*. (Veja a Figura 7-19.)

Berílio (*Z* = 4)

O quarto elétron ocupa a segunda vaga disponível no estado 2*s*. De acordo com o princípio de exclusão, os spins dos dois elétrons 2*s* devem ser antiparalelos e, portanto, o momento angular total dos quatro elétrons é nulo. A configuração eletrônica do berílio é $1s^2 2s^2$. O primeiro potencial de ionização é 9,32 V, maior que o do lítio por causa do maior valor de *Z*.

Boro a Neônio (*Z* = 5 a *Z* = 10)

Como a subcamada 2*s* está completa, o quinto elétron do boro vai para a subcamada 2*p*, com $n = 2$ e $\ell = 1$. Como existem três valores possíveis de m_ℓ(+1, 0 e −1) e dois valores possíveis de m_s (+1/2 e −1/2), esta subcamada comporta seis elétrons. A configuração eletrônica do boro é $1s^2 2s^2 2p$. Apesar do aumento do valor de *Z*, o potencial de ionização do boro, 8,3 V, é menor que o do berílio porque um elétron 2*p* se aproxima muito menos do núcleo que um elétron 2*s*. A configuração eletrônica dos elementos carbono ($Z = 6$) até neônio ($Z = 10$) difere da do boro apenas quanto ao número de elétrons na subcamada 2*p*. Nesses elementos, o potencial de ionização aumenta gradualmente com *Z*, chegando a 21,6 V para o último elemento do grupo, o neônio. O neônio possui o maior número possível de elétrons na camada $n = 2$; a configuração eletrônica é $1s^2 2s^2 2p^6$. Graças ao potencial de ionização extremamente elevado, o neônio, como o hélio, é quimicamente inerte. O elemento imediatamente anterior na tabela periódica, o flúor, apresenta um "buraco" na camada $n = 2$, isto é, tem espaço na camada para mais um elétron. Por essa razão, o flúor se combina facilmente com elementos como o lítio, que possuem um elétron a mais que o necessário para completar uma camada; o resultado é um par de íons, como F^- e Li^+, que são mantidos juntos pela atração eletrostática. Este é um exemplo de um tipo de ligação química conhecido como ligação iônica, que será discutido no Capítulo 9.

Sódio a Argônio (*Z* = 11 a *Z* = 18)

O décimo primeiro elétron vai para a camada $n = 3$. Como este elétron está fracamente ligado ao átomo de sódio (o potencial de

ionização do sódio é apenas 5,14 V), o átomo de sódio se combina facilmente com átomos como o de flúor. Graças ao maior efeito de blindagem exercido pelos outros 10 elétrons sobre os estados com $\ell \neq 0$, o estado 3*s* tem uma energia menor que os estados 3*p* e 3*d*. (Para $n = 3$, ℓ pode ter o valor 0, 1 ou 2.) A configuração eletrônica do Na é, portanto, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$. Quando passamos para elementos com maiores valores de *Z*, a subcamada 3*s* é completada primeiro; em seguida, é a vez da subcamada 3*p*. As duas subcamadas podem acomodar 2 + 6 = 8 elétrons. A configuração do argônio ($Z = 18$) é $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. Existe outra grande diferença de energia entre o 18º e o 19º elétrons, e o argônio, com a subcamada 3*p* completa, é estável e inerte.

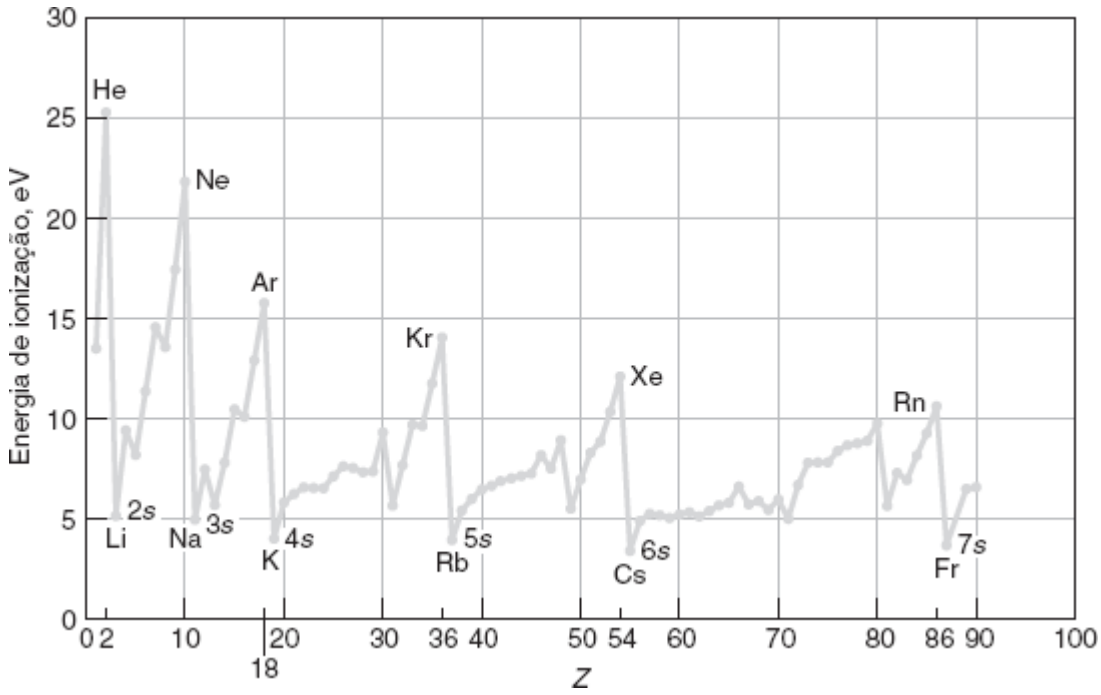


FIGURA 7-20 Primeira energia de ionização em função de *Z*, entre $Z = 1$ e $Z = 90$. Esta energia, que é a energia de ligação do elétron mais externo do átomo, aumenta com *Z* até que uma camada ou subcamada seja completada com $Z = 2$, 10, 18, 36, 54 e 86. O elétron seguinte vai para uma camada ou subcamada mais externa e, portanto, está preso mais fracamente ao núcleo. O potencial de ionização (em volts) é numericamente igual à energia de ionização (em elétrons-volts).

Átomos com $Z > 18$

Seria de se esperar que o décimo nono elétron fosse para a subcamada 3*d*; entretanto, o efeito de blindagem dos primeiros dezoito elétrons é tão grande que a energia do estado 4*s* é menor que a do estado 3*d*. O décimo nono elétron do potássio ($Z = 19$) e o vigésimo elétron do cálcio ($Z = 20$) vão para a subcamada 4*s* e não para a subcamada 3*d*. As configurações eletrônicas dos 10 elementos seguintes, do escândio ($Z = 21$) ao zinco ($Z = 30$), diferem apenas quanto ao número de elétrons na subcamada 3*d*, exceto no caso do cromo ($Z = 24$) e do cobre ($Z = 29$), que possuem apenas um elétron 4*s*. Os elementos com $Z = 21$ a 29 são conhecidos como *metais de transição* e apresentam propriedades químicas muito semelhantes, devido ao fato de seus elétrons mais externos serem elétrons 4*s*.

A ideia de que os elétrons estão distribuídos em camadas em torno do núcleo atômico é fundamental para a compreensão das ligações químicas (veja o Capítulo 9) e foi usada como modelo para a estrutura interna dos núcleos (veja o Capítulo 11).

A Figura 7-20 mostra um gráfico da primeira energia de ionização dos átomos em função de *Z* entre $Z = 1$ e $Z = 90$. As quedas bruscas da energia de ionização para $Z = 3$, 11, 19, 37 e 55 indicam que uma camada ou subcamada foi completada em $Z = 2$, 10, 18, 36 e 54. Ao mesmo tempo, ocorre um aumento brusco do raio atômico, como se pode ver na Figura 7-21. As configurações eletrônicas dos átomos dos elementos no estado fundamental são mostradas no Apêndice C.

Exercícios

7. Para um certo estado excitado do átomo de hidrogênio, $j = 1/2$. O que se pode dizer a respeito dos valores possíveis de ℓ?

8. Por que a energia do estado 3*s* é bem menor que a do estado 3*p* no sódio, enquanto no hidrogênio esses estados têm praticamente a mesma energia?

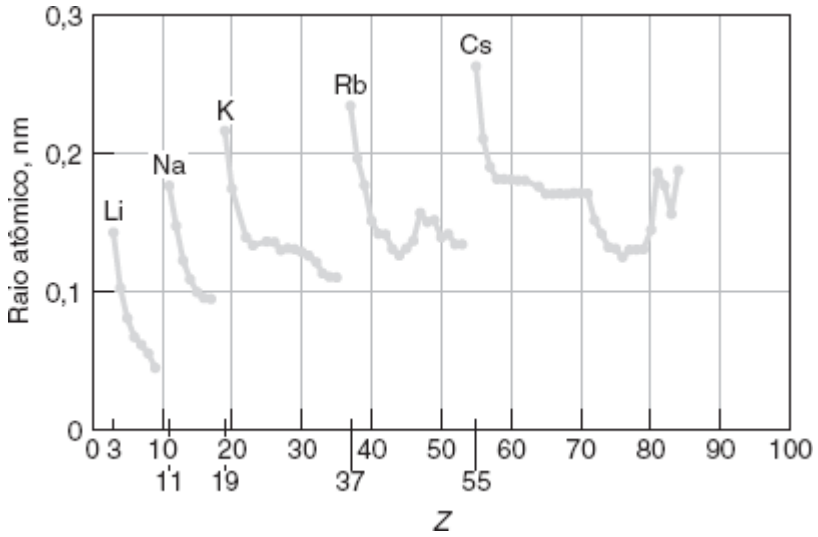


FIGURA 7-21 O gráfico do raio atômico em função de Z mostra um aumento brusco depois que cada camada ou subcamada é completada. Em seguida, o raio passa a diminuir com Z por causa da penetração das funções de onda dos elétrons que vão sendo acrescentados à camada incompleta. É por causa de padrões repetitivos com os que aparecem nesta figura e na Figura 7-20 que a tabela dos elementos é chamada de tabela periódica.

9. Discuta os indícios existentes na tabela periódica de que é necessário um quarto número quântico para especificar os estados possíveis de um elétron em um átomo. Quais seriam as propriedades do hélio se houvesse apenas os números quânticos n, ℓ e m?

7-8 Estados Excitados e Espectros dos Metais Alcalinos

Para entender os espectros dos elementos, é preciso conhecer os estados excitados dos átomos. No caso de átomos com muitos elétrons, a situação é, em geral, muito mais complicada que no caso do hidrogênio. O estado excitado de um átomo pode envolver a mudança de estado de qualquer dos elétrons ou mesmo mudanças de estado de dois ou mais elétrons. Mesmo nos casos em que apenas um elétron é excitado, a mudança de estado desse elétron altera a energia de outros elétrons. Felizmente, em muitos casos, o efeito é pequeno e os níveis de energia podem ser calculados com boa precisão a partir de um modelo relativamente simples, no qual o átomo é composto por um elétron externo e um caroço estável formado pelo núcleo mais os elétrons restantes. Este modelo funciona particularmente bem no caso dos metais alcalinos: Li, Na, K, Rb e Cs. Sob vários aspectos, o espectro destes elementos, que pertencem à primeira coluna da tabela periódica, é semelhante ao do hidrogênio.

Outra simplificação é possível graças à grande diferença que existe entre a energia de excitação de um elétron do caroço e a energia de excitação do elétron externo. Considere o caso do sódio, que possui um caroço semelhante ao neônio (exceto pelo fato de que Z é 11 em vez de 10) e um elétron externo no nível 3s. Se este elétron não penetrasse no caroço, enxergaria uma carga central efetiva $Z_{ef} = 1$ resultante da soma da carga nuclear $+11e$ com a carga $-10e$ dos elétrons do caroço. A energia de ionização seria, portanto, igual à energia de ionização do nível $n = 3$ do hidrogênio, cerca de 1,5 eV. A penetração no caroço faz com que o valor de Z_{ef} aumente e, portanto, que o elétron seja atraído mais fortemente pelo núcleo, o que aumenta a energia de ionização; o valor experimental da energia de ionização do sódio é aproximadamente 5 V. A energia necessária para remover um dos elétrons externos do caroço, ou seja, um dos elétrons 2p, é cerca de 31 eV, enquanto a energia necessária para remover um dos elétrons 1s é aproximadamente 1041 eV. Um elétron do caroço não pode ser excitado para nenhum dos níveis $n = 2$ por causa do princípio de exclusão; assim, a excitação de um elétron com $n = 2$ exige que o elétron seja transferido para a camada $n = 3$, o que envolve uma energia apenas ligeiramente menor que a energia necessária para removê-lo totalmente do átomo. Como as energias dos fótons do espectro visível (com comprimentos de onda de 400 a 800 nm) estão na faixa de 1,5 a 3 eV, *o espectro ótico* (*isto é*, *visível*) *do sódio se deve exclusivamente a transições envolvendo o elétron externo.* As transições que envolvem os elétrons do caroço produzem linhas na região do ultravioleta e dos raios X do espectro eletromagnético.

Entre as muitas aplicações dos espectros atômicos estão o estudo da composição das estrelas e a análise da evolução do universo (veja o Capítulo 13).

A Figura 7-22 mostra o diagrama de níveis de energia para as transições óticas do sódio. Como o spin total do caroço é nulo, o spin de todos os estados excitados é 1/2. Por causa da interação spin-órbita, os estados com $j = \ell - 1/2$ têm uma energia ligeiramente menor que os estados com $j = \ell + 1/2$. Todos esses estados, portanto, são dubletos, exceto, naturalmente, os estados S. O desdobramento é muito pequeno e não é visível na escala de energias usada para desenhar a Figura 7-22, mas está indicado

na Figura 7-18. Na Figura 7-22, os estados foram rotulados de acordo com a notação espectroscópica, com o índice superior 2 indicando que o estado é um dubleto. Assim, $^2P_{3/2}$, que se lê "dubleto P três meios", indica um estado no qual $\ell = 1$ e $j = 3/2$. (Costuma-se representar os estados S como se fossem dubletos, embora, na verdade, sejam estados duplamente degenerados. Isto é feito porque pertencem ao conjunto de estados com $S = 1/2$, embora, ao contrário dos outros, possuam $\ell = 0$ e, portanto, não possam ser desdobrados pela interação spin-órbita. O número que indica o valor de n quase sempre é omitido.) No primeiro estado excitado, o elétron externo é transferido do nível 3s para o nível 3p, que se encontra aproximadamente 2,1 eV acima do estado fundamental. A diferença de energia entre os estados $P_{3/2}$ e $P_{1/2}$ em consequência da interação spin-órbita é aproximadamente 0,002 eV. As transições desses estados para o estado fundamental dão origem ao conhecido dubleto amarelo do sódio

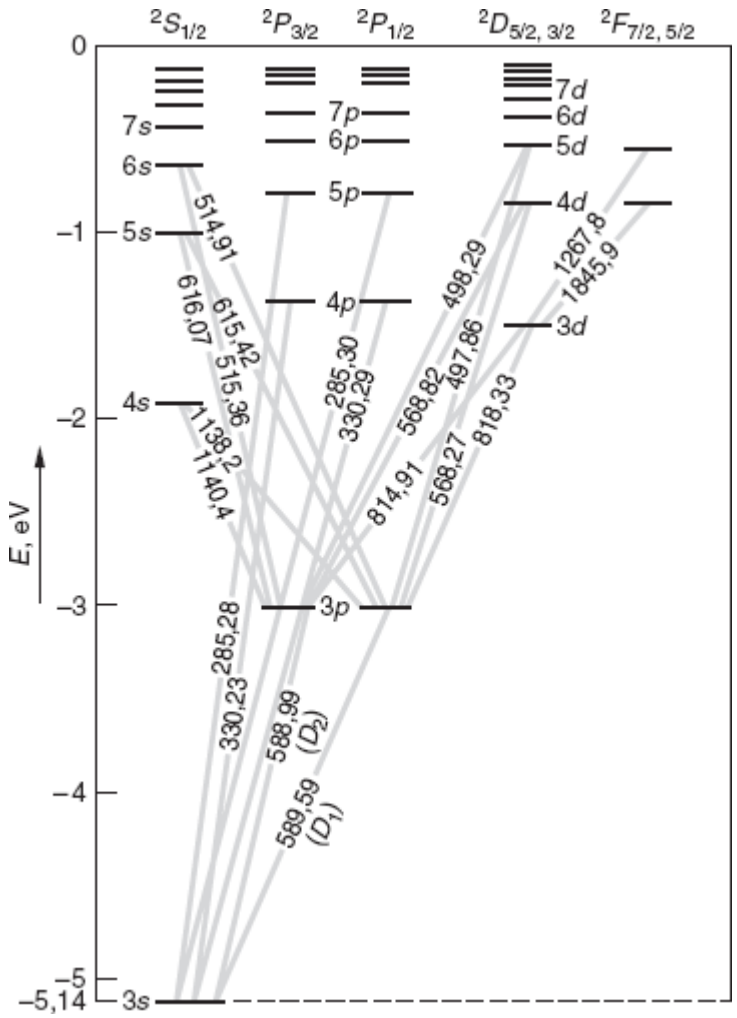


FIGURA 7-22 Diagrama de níveis de energia do átomo de sódio (Na) com algumas transições indicadas. Os comprimentos de onda estão em nanômetros. As linhas espectrais D_1 e D_2, particularmente intensas, são responsáveis pela cor amarela das lâmpadas de vapor de sódio. Os desdobramentos dos níveis D e F, que também são dubletos, não aparecem na figura.

$$3p\,(^2P_{1/2}) \rightarrow 3s\,(^2S_{1/2}) \quad \lambda = 589{,}6\ \text{nm}$$
$$3p\,(^2P_{3/2}) \rightarrow 3s\,(^2S_{1/2}) \quad \lambda = 589{,}0\ \text{nm}$$

Os níveis de energia e espectros dos outros metais alcalinos são semelhantes aos do sódio.

É importante distinguir os estados dubletos dos dubletos de linhas espectrais. Todas as transições que começam ou terminam em um estado S dão origem a linhas duplas porque envolvem um estado dubleto (um estado P) e um estado singleto (o estado S). (A regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$ proíbe transições entre estados S.) Existem quatro transições possíveis entre dois estados do tipo dubleto. Uma é proibida pela regra de seleção de j, segundo a qual[15]

$$\Delta j = \pm 1 \text{ ou } 0 \quad (\text{exceto no caso de } j = 0 \rightarrow j = 0) \qquad \textbf{7-65}$$

As transições entre dois dubletos resultam, portanto, em três linhas espectrais, ou seja, em um tripleto. Quando observadas com baixa resolução, as três linhas podem parecer um dubleto, como mostra a Figura 7-23, já que duas dessas linhas estão sempre muito próximas. Por essa razão, alguns cientistas as chamam de *dubleto composto* para ressaltar o fato de que envolvem estados do tipo dubleto.

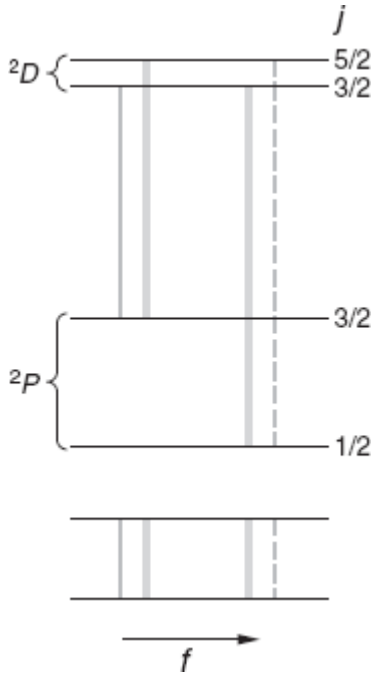


FIGURA 7-23 Transições entre dois dubletos em um átomo de cálcio monoionizado. A transição indicada pela linha tracejada é proibida pela regra de seleção $\Delta j = \pm 1$ ou 0. A espessura das linhas mostra a intensidade relativa. Quando a resolução não é muito grande, a linha mais fraca na extremidade esquerda do espectro se confunde com a linha vizinha, e o dubleto composto (ou tripleto) se parece com um dubleto.

Exercícios

10. Por que os estados *S* da Figura 7-22 não são também dubletos ?



Leitura Suplementar

Os átomos com mais de um elétron na última camada possuem uma estrutura de níveis de energia muito complicada. O spin total do átomo pode assumir mais de um valor, o que resulta em vários conjuntos de estados quase independentes, que dão origem a vários conjuntos de linhas espectrais. Este é o tema da Leitura Suplementar *Átomos com Mais de um Elétron Externo*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 7-66 e 7-67 e as Figuras 7-24 a 7-27.



Leitura Suplementar

Dizem que a esposa de Niels Bohr, ao passar por Wolfgang Pauli no jardim do Instituto de Física Teórica de Copenhague, reparando no ar de consternação do rapaz, perguntou, solícita, se estava preocupado com alguma coisa. Pauli respondeu: "Claro que estou preocupado! Não consigo entender o efeito Zeeman anômalo!" Para que o leitor não fique também preocupado, explicamos o efeito Zeeman anômalo na Leitura Suplementar *O Efeito Zeeman*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 7-68 a 7-72 e as Figuras 7-28 a 7-31.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Luz Congelada

Usando as propriedades quânticas dos estados de energia do átomo, lasers sintonizáveis e um condensado de Bose-Einstein de átomos de sódio (veja o Capítulo 8), os cientistas conseguiram frear um pulso luminoso até que ficasse imóvel e, algum tempo depois, regenerá-lo e colocá-lo de novo em movimento. Vamos explicar como isso foi possível.

Considere os níveis de energia 3*s* e 3*p* do sódio na Figura 7-22. A interação spin-órbita não desdobra o estado 3*s* porque o momento angular orbital desse estado é zero; entretanto, como vamos estudar com detalhes no Capítulo 11 (veja também o Problema

7-76), muitos *núcleos atômicos*, entre eles do sódio, possuem um spin e um momento magnético diferentes de zero. Embora seja mais de 1.000 vezes menor que o momento magnético eletrônico, o momento magnético nuclear produz um desdobramento dos estados *s* análogo ao que é produzido pela interação spin-órbita nos estados com momento angular orbital diferente de zero. Este efeito, conhecido como *desdobramento hiperfino* porque é muito menor que o desdobramento fino causado pela interação spin-órbita, faz com que o nível 3*s* do sódio seja desdobrado em dois níveis cuja diferença de energia é aproximadamente 7×10^{-6} eV.

O condensado de Bose-Einstein é uma "nuvem" em forma de charuto, com cerca de um centímetro de comprimento, suspensa por um campo magnético no interior de uma câmara de vácuo. A nuvem contém milhões de átomos de sódio*, todos com o spin alinhado na mesma direção e todos no mais baixo dos dois níveis 3s*, que é o estado fundamental (veja a Figura 7-32*a*). O pulso luminoso que se deseja "congelar" (o pulso de teste) é produzido por um laser sintonizado para a diferença de energia entre o mais baixo dos dois níveis 3*s* e o mais baixo dos níveis 3*p*. Um segundo laser é sintonizado para a diferença de energia entre o mais alto dos dois níveis 3*s* e o mais baixo dos níveis 3*p* e usado para produzir um segundo pulso (o pulso de acoplamento) que é aplicado ao condensado de Bose-Einstein na direção perpendicular à direção de propagação do pulso de teste.

Se apenas o pulso de teste é aplicado ao condensado, todos os átomos são excitados para o nível 3*p* e o pulso é totalmente absorvido. Quando os átomos voltam ao estado fundamental, a luz amarela do sódio é emitida aleatoriamente em todas as direções. Quando apenas o pulso de acoplamento é aplicado ao condensado, nenhum átomo é excitado para o nível 3*p*, já que a energia do pulso de acoplamento não é igual à diferença de energia entre o estado fundamental e o nível 3*p*. Quando, porém, o pulso de acoplamento está iluminando a amostra com todos os átomos no estado fundamental e o pulso de teste é aplicado, quando a borda dianteira do pulso penetra na amostra (Figura 7-32*b*), os dois pulsos em conjunto excitam os átomos de sódio para uma superposição quântica dos dois estados, ou seja, nessa região da amostra *cada* átomo passa a estar nos *dois* estados hiperfinos (Figura 7-32*c*). Em vez de os dois pulsos serem capazes de excitar os átomos para o estado 3*p*, os dois processos se cancelam, em um fenômeno conhecido como *interferência quântica*, e o condensado de Bose-Einstein se torna transparente ao pulso de teste, como na Figura 7-32*c*. O cancelamento faz com que o índice de refração da amostra sofra uma variação abrupta, diminuindo a velocidade da borda dianteira do pulso de 3×10^8 m/s para cerca de 15 m/s. Como o resto do pulso leva um certo tempo para penetrar na amostra e diminuir de velocidade, o pulso é comprimido drasticamente, passando a ter uma largura de 0,05 mm, muito menor que a largura da amostra. Na região ocupada pelo pulso os spins atômicos ficam sincronizados com a superposição dos dois estados quânticos, como mostra a Figura 7-32*d*.

Neste ponto do experimento, o pulso de acoplamento é desligado. O condensado de Bose-Einstein se torna imediatamente opaco ao pulso de prova e o pulso deixa de se propagar. A luz está "congelada"! A informação contida no pulso agora está impressa como um holograma nos átomos que se encontram na superposição de estados (Figura 7-32*e*). Quando o pulso de acoplamento é ligado novamente, a amostra volta a ser transparente ao pulso de prova, o pulso "congelado" é regenerado e se move lentamente até a extremidade da amostra, de onde é lançado no espaço a uma velocidade de 3×10^8 m/s. (Veja a Figura 7-32*f*.)

A capacidade de retardar e congelar pulsos luminosos oferece novas oportunidades em muitas áreas. Talvez torne possível, por exemplo, a criação de sistemas de comunicações quânticas à prova de escutas clandestinas. A construção de computadores quânticos pode depender da possibilidade de manipular superposições quânticas em sistemas de luz lenta. Os astrofísicos podem usar condensados de Bose-Einstein em estados de vórtice, já obtidos experimentalmente, para simular o comportamento da luz nas vizinhanças de buracos negros. Não percam o próximo episódio!

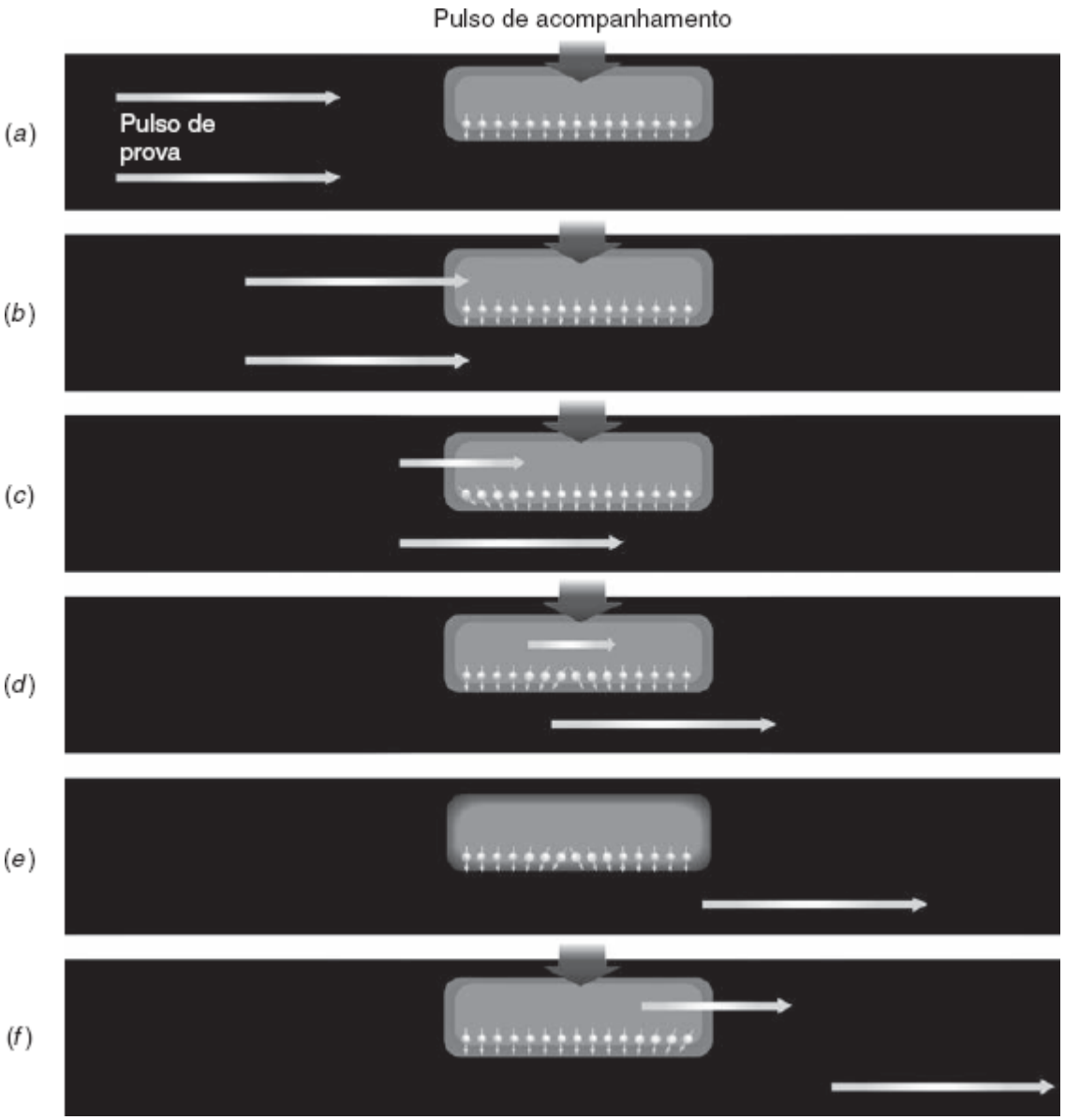


FIGURA 7-32 (*a*) O pulso de acoplamento ilumina o condensado de Bose-Einstein, cujos átomos estão no estado fundamental, com os spins todos alinhados. (*b*) A borda anterior do pulso de prova penetra na amostra. (*c*) Uma superposição quântica muda a orientação dos spins, e a rápida variação do índice de refração diminui a largura e a velocidade do pulso. (*d*) Agora inteiramente contido na amostra, o pulso tem a velocidade reduzida para cerca de 15 m/s. (*e*) O pulso de acoplamento é desligado e o pulso de prova se imobiliza; a informação que contém fica armazenada nas orientações dos spins dos átomos do condensado. (*f*) O pulso de acoplamento é novamente ligado; o pulso de prova é regenerado e se move lentamente até a extremidade da amostra, de onde é lançado no espaço a uma velocidade de 3×10^8 m/s.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Equação de Schrödinger em três dimensões	No caso do átomo de hidrogênio, a equação pode ser separada em três equações diferenciais ordinárias, uma para a coordenada r, outra para a coordenada θ e outra para a coordenada ϕ. Os números quânticos n, ℓ e m resultam das condições de contorno impostas às soluções das equações.
2. Quantização	

Momento angular	$\|\mathbf{L}\| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \quad \text{para} \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$ **7-22**
Componente *z* de **L**	$L_z = m\hbar \quad \text{para} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$ **7-23**
Energia	$E_n = -\left(\frac{kZe^2}{\hbar}\right)^2 \frac{\mu}{2n^2} = -13{,}6\frac{Z^2}{n^2}\text{eV}$ **7-25**
3. Funções de Onda do Átomo de Hidrogênio	$\Psi_{n\ell m} = C_{n\ell m} R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ Na qual $C_{n\ell m}$ são constantes de normalização, $R_{n\ell}$ são as funções radiais e $Y_{\ell m}$ são os harmônicos esféricos.
4. Spin do elétron	O spin eletrônico não está incluído na equação de Schrödinger.
Módulo de **S**	$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{s(s+1)}\hbar \quad s = \frac{1}{2}$ **7-36**
Componente *z* de **S**	$S_z = m_s\hbar \quad m_s = \pm\frac{1}{2}$
Experimento de Stern-Gerlach	Esta foi a primeira observação direta do spin eletrônico.
5. Interação spin-órbita	A resultante de **L** e **S** é o momento angular total **J** = **L** + **S**, cujo módulo é dado por $\|\mathbf{J}\| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ **7-51** Na qual $j = \ell + s$ ou $\|\ell - s\|$. Esta interação leva ao desdobramento fino dos níveis de energia.
6. Princípio de exclusão	Um estado atômico especificado por um conjunto de números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s não pode ser ocupado por mais de um elétron.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Brehm J. J. e W. J. Mullin, *Introduction to the Structure of Matter*, Wiley, New York, 1989.
Eisberg, R. e R. Resnick, *Quantum Physics*, 2d ed., Wiley, New York, 1985.
Herzberg, G., *Atomic Spectra and Atomic Structure*, Dover, New York, 1944.
Kuhn, H. G., *Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1962.
Mehra, J. e H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982.
Pauling, L. e S. Goudsmit, *The Structure of Line Spectra*, McGraw-Hill, New York, 1930.
Weber, H. J. e G. B. Arfken, *Essential Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, New York, 2004.

Notas

1. A degeneração pode estar associada a uma simetria do sistema, como no caso que estamos discutindo. Entretanto, também pode existir por causas totalmente diversas e certamente pode ocorrer em casos nos quais, ao contrário do que acontece no problema da caixa tridimensional, a função de onda não pode ser descrita como o produto de funções associadas a diferentes

números quânticos. Essas últimas degenerações às vezes são chamadas de degenerações acidentais; os dois tipos de degeneração podem estar presentes no mesmo sistema.

2. "Suficiente", no caso, significa um conjunto completo no sentido matemático da palavra.

3. Potenciais desse tipo são conhecidos como *conservativos*; os exemplos mais comuns são o potencial eletrostático ou potencial de Coulomb e o potencial gravitacional.

4. Se $L_z = |\mathbf{L}|$, então, necessariamente, $L_x = L_y = 0$. Nesse caso, as três componentes de L seriam conhecidas com precisão absoluta, o que seria uma violação do princípio de indeterminação.

5. As funções $Y_{\ell m}$ e $R_{n\ell}$ que aparecem nas Tabelas 7-1 e 7-2 são funções normalizadas; os valores de $C_{n\ell m}$ são os produtos das constantes de normalização correspondentes.

6. Wolfgang Pauli (1900-1958), físico austríaco naturalizado americano. Uma verdadeira criança-prodígio, com apenas dezoito anos, quando fazia o curso de doutorado em física em Munique, escreveu um artigo sobre relatividade geral que foi elogiado pelo próprio Einstein. Teórico brilhante, tornou-se a consciência da física quântica, combatendo a "má física" com comentários frequentemente ferinos, como um que se tornou famoso, ao referir-se a um artigo particularmente ruim: "Não está nem sequer errado." Ganhou tardiamente o Prêmio Nobel de Física de 1945 pela descoberta do princípio de exclusão.

7. Samuel Abraham Goudsmit (1902-1978) e George Eugene Uhlenbeck (1900-1988), físicos holandeses naturalizados americanos. Quando eram alunos de doutorado em Leiden, expuseram a ideia do spin eletrônico ao orientador de ambos, Paul Ehrenfest, que os aconselhou a ouvir a opinião de H. A. Lorentz. Depois de alguma demora, Lorentz observou que um spin eletrônico com o valor necessário para explicar a estrutura fina era incompatível com a relatividade restrita. Quando os estudantes voltaram a procurar Ehrenfest com a má notícia, descobriram que este já havia enviado o artigo escrito pelos dois à revista *Naturwissenschaften*, onde foi publicado.

8. Como o símbolo μ é usado para representar tanto a massa reduzida como o momento magnético, é preciso tomar certo cuidado para não interpretá-lo erroneamente ao usar as equações da mecânica quântica. Alguns autores preferem usar o símbolo *m* para representar momento magnético, mas, nesse caso, existe o perigo de confusão com o número quântico *m*.

9. Otto Stern (1888-1969), físico alemão naturalizado americano, e Walther Gerlach (1889-1979), físico alemão. Depois de trabalhar como assistente de Einstein durante dois anos, Stern desenvolveu as técnicas de produção de feixes atômicos e moleculares que lhe permitiram demonstrar, juntamente com Gerlach, um excelente físico experimental, a existência da quantização espacial. Stern recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1943 pelo desenvolvimento do método dos feixes moleculares e a descoberta do momento magnético do próton.

10. O núcleo atômico também possui um momento angular e, portanto, um momento magnético; entretanto, como a massa do núcleo é pelo menos 2000 vezes maior que a massa do elétron, o momento magnético do núcleo, de acordo com a Equação 7-37, é pelo menos 2000 vezes menor que o momento magnético do elétron. O experimento de Stern-Gerlach não tinha precisão suficiente para detectar este pequeno efeito.

11. Como já foi dito na Seção 7-2, as primeiras letras da notação usada para indicar os valores de momento angular orbital, *s*, *p*, *d* e *f*, foram escolhidas porque descreviam a aparência de certos grupos de linhas espectrais: *s*harp (estreitas), *p*rincipal (principais), *d*iffuse (difusas) e *f*undamental (fundamentais). A notação das camadas (K, L, ...) foi usada pela primeira vez por Barkla. (Veja a nota 17 do Capítulo 4.)

12. Esta forma de representar o spin total foi escolhida porque corresponde ao número de linhas da estrutura fina do espectro; assim, por exemplo, no caso do hidrogênio, $s = 1/2$, $2s + 1 = 2$ e as linhas são dubletos.

13. Outra forma de interpretar o fenômeno é dizer que o elétron, por possuir um spin e, portanto, um momento magnético intrínseco, produz à sua volta um campo magnético dipolar. Este campo varia no tempo em virtude do movimento orbital do elétron, produzindo assim um campo elétrico na posição do próton (suposto estacionário), que interage com a carga elétrica do próton. Como o sentido deste campo depende da orientação relativa dos momentos **L** e **S**, as linhas são desdobradas.

14. Na verdade, esses níveis não são exatamente degenerados nem mesmo no hidrogênio. Como foi visto no final da Seção 7-5, W. Lamb mostrou que existe uma pequena diferença de energia entre os estados $2S$ e $2P$ do átomo de hidrogênio. Esta diferença, juntamente com o desdobramento fino do estado $2P$, faz com que o estado $2^2P_{1/2}$ esteja $4{,}4 \times 10^{-6}$ eV abaixo do estado $2^2S_{1/2}$, uma diferença de energia conhecida como *deslocamento de Lamb*. Este deslocamento permite que o estado $2^2S_{1/2}$, que de outra forma seria metaestável, por causa da regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$, decaia para o estado fundamental $1^2S_{1/2}$ através de uma transição para o estado $2^2P_{1/2}$.

15. Podemos pensar nesta regra em termos da conservação do momento angular. O fóton tem um spin $s = 1$. Em uma transição do tipo dipolo elétrico, o spin do fóton é somado vetorialmente ao spin do átomo. Se o número quântico de momento angular total do átomo é j_1 antes da transição e j_2 após a transição, as regras para a soma vetorial de momentos angulares exigem que $j_2 = j_1 + 1$, j_1 ou $j_1 - 1$, contanto que $j_1 \neq 0$. Se $j_1 = 0$, j_2 deve ser necessariamente igual a 1.

16. Isto é verdade para quase todos os átomos com dois elétrons na última subcamada, como o He, o Be, o Mg e o Ca. Uma exceção são os estados *P* do Hg, nos quais o desdobramento fino é da mesma ordem que o desdobramento entre os singletos e

os tripletos.

17. Pieter Zeeman (1865-1943), físico holandês. A descoberta do efeito Zeeman, que tanto contribuiu para o nosso conhecimento da estrutura atômica, foi praticamente ignorada até que sua importância foi apontada por Lorde Kelvin. Pela descoberta, Zeeman compartilhou o Prêmio Nobel de Física de 1902 com seu professor H. A. Lorentz.

18. Esta terminologia resultou do fato de que o efeito de um campo magnético sobre as transições entre estados do tipo singleto podia ser explicado pela teoria clássica de Lorentz para o elétron e, portanto, era "normal", enquanto o efeito sobre outras transições não podia ser explicado e, portanto, era "anômalo".

19. Este cálculo pode ser encontrado, por exemplo, em Herzberg, G., *Atomic Spectra and Atomic Structure*, Dover, New York, 1944.

20. Em homenagem a Alfred Landé (1888-1975), físico alemão, cujo trabalho com Born e Heisenberg levou à interpretação correta do efeito Zeeman anômalo.

Problemas

NÍVEL 1

Seção 7-1 A Equação de Schrödinger em Três Dimensões

7-1. Determine as energias E_{311}, E_{222} e E_{321} e construa um diagrama de níveis de energia para o poço cúbico tridimensional que inclua as energias do terceiro, quarto e quinto estados excitados. Quais dos estados que aparecem no diagrama são degenerados?

7-2. Uma partícula é confinada a uma caixa tridimensional de lados L_1, $L_2 = 2L_1$ e $L_3 = 3L_1$. Determine os números quânticos n_1, n_2 e n_3 para os 10 estados de menor energia da partícula.

7-3. Uma partícula é submetida a um potencial dado por $V(x, y, z) = 0$ para $-L/2 < x < L/2$, $0 < y < L$ e $0 < z < L$. Fora desses limites, $V = \infty$. (*a*) Escreva uma expressão para a função de onda desta partícula no estado fundamental. (*b*) Como se comparam as energias permitidas com as de uma partícula em uma caixa na qual $V = 0$ para $0 < x < L$ em vez de para $-L/2 < x < L/2$?

7-4. Determine as funções de onda para os cinco estados de menor energia da partícula do Problema 7-2.

7-5. (*a*) Repita o Problema 7-2 supondo que $L_2 = 2L_1$ e $L_3 = 4L_1$. (*b*) Quais desses estados são degenerados?

7-6. Determine as funções de onda para os 10 estados de menor energia da partícula do Problema 7-5.

7-7. Suponha que a partícula do Problema 7-1 seja um elétron e $L = 0{,}10$ nm. Determine as energias das transições do terceiro, quarto e quinto estados excitados para o estado fundamental.

7-8. Considere uma partícula que esteja se movendo em um espaço bidimensional definido por $V = 0$ para $0 < x < L$ e $0 < y < L$ e $V = \infty$ para qualquer outro valor de x e y. (*a*) Escreva as funções de onda da partícula neste poço de potencial. (*b*) Escreva uma expressão para as energias correspondentes. (*c*) Quais são os conjuntos de números quânticos do estado degenerado de menor energia?

Seção 7-2 Quantização do Momento Angular e da Energia do Átomo de Hidrogênio

7-9. Se $n = 3$, (*a*) quais são os valores possíveis de ℓ? (*b*) Quais são os valores possíveis de m para cada valor de ℓ? (*c*) Levando em conta o fato de que existem dois estados quânticos para cada combinação de valores de ℓ e m por causa do spin do elétron, determine o número total de estados na camada $n = 3$.

7-10. Determine o menor ângulo que **L** pode fazer com o eixo z se o número quântico de momento angular é (*a*) $\ell = 4$ e (*b*) $\ell = 2$.

7-11. O momento de inércia de um CD é aproximadamente 10^{-5} kg·m^2. (*a*) Determine o momento angular $L = I\omega$ quando o disco está girando com uma velocidade angular $\omega/2\pi = 735$ rpm; (*b*) determine o valor aproximado do número quântico ℓ.

7-12. Desenhe um diagrama vetorial que mostre as possíveis orientações do vetor momento angular **L** (*a*) para $\ell = 1$; (*b*) para $\ell = 2$; (*c*) para $\ell = 4$. (*d*) Calcule o módulo de **L** em cada caso.

7-13. Para $\ell = 2$, (*a*) qual é o menor valor possível de $L^2_x = L^2_y$? (*b*) Qual é o maior valor possível de $L^2_x = L^2_y$? (*c*) Qual é o valor de $L^2_x = L^2_y$ para $\ell = 2$ e $m = 1$? É possível determinar o valor de L_x ou L_y a partir destes dados? (*d*) Qual é o menor valor de n que este estado pode ter?

7-14. Para $\ell = 1$, determine (*a*) o módulo do momento angular **L**; (*b*) os valores possíveis de m. (*c*) Desenhe em escala um diagrama vetorial mostrando as possíveis orientações de **L** em relação ao eixo z. (*d*) Repita os itens (*a*), (*b*) e (*c*) para $\ell = 3$.

7-15. Mostre que, se V é função apenas de r, $d\mathbf{L}/dt = 0$, ou seja, **L** é conservado.

7-16. Quais são os valores possíveis de n e m (*a*) para $\ell = 3$; (*b*) para $\ell = 4$; (*c*) para $\ell = 0$? (*d*) Determine os menores valores

possíveis da energia para cada caso.

7-17. O elétron de um átomo de hidrogênio se encontra no estado 6*f*. (*a*) Quais são os valores de n e ℓ? (*b*) Calcule a energia do elétron. (*c*) Calcule o módulo de **L**. (*d*) Determine todos os valores possíveis de L_z.

7-18. Para que valores de r/a_0 a função radial R_{30} se anula? (*Sugestão*: Consulte a Tabela 7-2.)

7-19. Use a análise dimensional para mostrar que a expressão dos níveis de energia dada pela Equação 7-25 tem unidades de energia.

Seção 7-3 As Funções de Onda do Átomo de Hidrogênio

7-20. Para o estado fundamental do átomo de hidrogênio, determine (*a*) o valor de Ψ; (*b*) o valor de Ψ^2; (*c*) a densidade de probabilidade radial $P(r)$ no ponto $r = a_0$. A resposta deve ser dada em unidades de a_0.

7-21. Para o estado fundamental do átomo de hidrogênio, determine a probabilidade de encontrar o elétron em um intervalo $\Delta r = 0{,}03a_0$ (*a*) com centro em $r = a_0$; (*b*) com centro em $r = 2a_0$.

7-22. A densidade de probabilidade radial do átomo de hidrogênio no estado fundamental pode ser escrita na forma $P(r) = Cr^2e^{-2Zr/a_0}$, na qual C é uma constante. Mostre que o valor de $P(r)$ é máximo para $r = a_0/Z$.

7-23. Calcule a constante de normalização C_{200} da Equação 7-34.

7-24. Determine a probabilidade de encontrar o elétron em um intervalo $\Delta r = 0{,}02a_0$ com centro (*a*) em $r = a_0$ e (*b*) em $r = 2a_0$ para o estado $n = 2$, $\ell = 0$, $m = 0$ do átomo de hidrogênio. (O valor da constante C_{200} é dado no Problema 7-26.)

7-25. Mostre que a densidade de probabilidade radial para o estado $n = 2$, $\ell = 1$, $m = 0$ de um átomo de um elétron pode ser escrita na forma

$$P(r) = A\cos^2\theta\, r^4e^{-Zr/a_0}$$

em que A é uma constante.

7-26. O valor da constante C_{200} na Equação 7-33 é

$$C_{200} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}$$

Determine os valores (*a*) de Ψ; (*b*) de Ψ^2; (*c*) da densidade de probabilidade radial $P(r)$ no ponto $r = a_0$ para o estado $n = 2$, $\ell = 0$, $m = 0$ do átomo de hidrogênio. A resposta deve ser dada em unidades de a_0.

7-27. Mostre que a distância mais provável entre um elétron e o núcleo no estado $n = 2$, $\ell = 1$ do hidrogênio é $r = 4a_0$.

7-28. Escreva a função de onda do átomo de hidrogênio se os números quânticos do elétron são $n = 3$, $\ell = 2$ e $m_\ell = -1$. A função de onda deve estar normalizada.

7-29. Mostre que a função de onda do hidrogênio obtida no Problema 7-28 satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo, Equação 7-9.

Seção 7-4 O Spin do Elétron

7-30. Se a relação entre carga e massa em um sistema clássico não é constante, o momento magnético pode ser escrito na forma

$$\mu = g\frac{Q}{2M}L$$

na qual Q é a carga total, M é a massa total e $g \neq 1$. (*a*) Mostre que $g = 2$ para um cilindro maciço ($I = MR^2/2$) que gira em torno do próprio eixo e possui uma distribuição de carga uniforme na superfície cilíndrica. (*b*) Mostre que $g = 2{,}5$ para uma esfera maciça ($I = 2MR^2/5$) que possui uma distribuição de carga uniforme em um anel estreito localizado no equador (Figura 7-33).

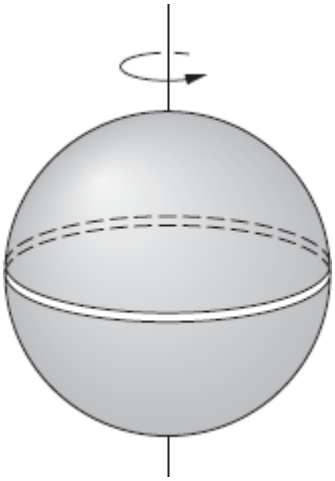


FIGURA 7-33 Esfera maciça com uma distribuição de carga uniforme em um anel estreito localizado no equador.

7-31. Supondo que o elétron se comporte como uma partícula clássica, uma esfera homogênea com 10^{-15} m de raio, use o módulo do spin, $|S| = [s(s + 1)]^{1/2}\hbar = (3/4)^{1/2}\hbar$ para calcular a velocidade tangencial de um ponto situado no equador do elétron. Compare esta velocidade com a velocidade da luz.

7-32. Quantas linhas serão observadas na placa detectora em um experimento de Stern-Gerlach (veja a Figura 7-15) se for usado um feixe (*a*) de átomos de potássio; (*b*) de átomos de cálcio; (*c*) de átomos de oxigênio; (*d*) de átomos de estanho?

7-33. A força exercida por um campo magnético não homogêneo sobre um momento magnético cuja componente z é μ_z é dada pela Equação 7-51. Se os átomos de prata em um experimento de Stern-Gerlach percorrem 1 m na região onde existe campo magnético e mais 1 m em uma região onde o campo é zero com uma velocidade de 250 m/s, qual deve ser o gradiente de B_z, dB_z/dz, para que a deflexão máxima de cada feixe seja de 0,5 mm em relação ao centro do detector?

7-34. (*a*) O momento angular do átomo de ítrio no estado fundamental é caracterizado pelo número quântico $j = 3/2$. Quantas linhas são observadas em um experimento de Stern-Gerlach com átomos de ítrio? (*b*) Quantas linhas são observadas se o feixe é constituído por átomos com spin nulo e $\ell = 1$?

Seção 7-5 Momento Angular Total e Interação Spin-Órbita

7-35. A interação spin-órbita quebra a simetria do potencial do átomo de hidrogênio, desdobrando os níveis de energia. (*a*) Escreva em notação espectroscópica a especificação de todos os estados com $n = 4$ e coloque esses estados em ordem crescente de energia. (*b*) Se um campo magnético fraco é aplicado aos átomos, em quantos níveis cada estado do item (*a*) é desdobrado?

7-36. O elétron externo de um átomo de potássio se encontra em um estado com $\ell = 2$. Calcule o módulo de **L**. Quais são os valores possíveis de j e os valores possíveis do módulo de **J**?

7-37. Um átomo de hidrogênio se encontra no estado 3*d* ($n = 3$, $\ell = 2$). (*a*) Quais são os valores possíveis de j? (*b*) Quais são os valores possíveis do módulo do momento angular total? (*c*) Quais são os valores possíveis da componente z do momento angular total?

7-38. Calcule o ângulo entre **L** e **S** (*a*) no estado $d_{5/2}$ e (*b*) no estado $d_{3/2}$ do hidrogênio atômico.

7-39. Escreva todos os conjuntos possíveis de números quânticos para um elétron (*a*) na subcamada 4*f*; (*b*) na subcamada 3*d*; (*c*) na subcamada 2*p*.

7-40. Considere um sistema de dois elétrons, ambos com $\ell = 1$ e $s = 1/2$. (*a*) Quais são os possíveis números quânticos do momento angular orbital total $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$? (*b*) Quais são os possíveis valores do número quântico S para o spin total $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$? (*c*) Usando os resultados dos itens (*a*) e (*b*), determine os possíveis números quânticos j para a combinação $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. (*d*) Quais são os possíveis números quânticos j_1 e j_2 do momento angular total de cada partícula? (*e*) Use os resultados do item (*d*) para calcular os possíveis valores de j a partir da combinação de j_1 e j_2. O resultado é o mesmo do item (*c*)?

7-41. A diferença de energia entre os níveis $2^2S_{1/2}$ e $2^2P_{1/2}$ do hidrogênio atômico devido ao deslocamento de Lamb é $4{,}372 \times 10^{-6}$ eV. (*a*) Qual é a frequência do fóton emitido em uma transição entre os dois níveis? (*b*) Qual é o comprimento de onda do fóton? (*c*) Em que região do espectro eletromagnético está este fóton?

7-42. O conhecido dubleto de linhas amarelas do espectro do sódio, constituído por linhas com comprimentos de onda de 589,0 nm e 589,6 nm, é causado por transições dos estados $3P_{3/2}$ e $3P_{1/2}$ para o estado fundamental. (*a*) Calcule as energias em eV dos fótons correspondentes a esses comprimentos de onda. (*b*) A diferença de energia desses fótons é igual à diferença de energia, ΔE, entre os estados $3P_{3/2}$ e $3P_{1/2}$, que se deve à interação spin-órbita. Calcule o valor de ΔE. (*c*) Se o elétron 3*p* do sódio estiver submetido a um campo magnético interno B, o desdobramento causado pela interação spin-órbita será da ordem de $\Delta E = 2\mu_B B$,

em que λ_B é o magnéton de Bohr. Estime o valor de B a partir do valor de ΔE encontrado no item (*b*).

Seção 7-6 A Equação de Schrödinger para Duas (ou Mais) Partículas

7-43. Mostre que a função de onda da Equação 7-57 satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo para duas partículas (Equação 7-55) com $V = 0$ e determine a energia deste estado.

7-44. Dois nêutrons se encontram em um poço quadrado infinito de largura L = 2,0 fm. Qual é a energia total mínima que o sistema pode possuir? (A função de onda dos nêutrons, como a dos elétrons, é antissimétrica. Ignore o spin.)

7-45. Cinco partículas iguais, que não interagem, são colocadas em um poço quadrado infinito de largura L = 1,0 nm. Determine a energia mínima do sistema se as partículas forem (*a*) elétrons e (*b*) píons. Os píons têm uma massa de 264 m_e e uma função de onda simétrica.

Seção 7-7 Estados Fundamentais dos Átomos: A Tabela Periódica

7-46. Determine a configuração eletrônica no estado fundamental (*a*) do carbono; (*b*) do oxigênio e (*c*) do argônio.

7-47. Use a Figura 7-34 para determinar a configuração eletrônica no estado fundamental do estanho (Sn, Z = 50), do neodímio (Nd, Z = 60) e do itérbio (Yb, Z = 70). Compare as respostas com os dados do Apêndice C. Existem divergências? Se existem, quais são?

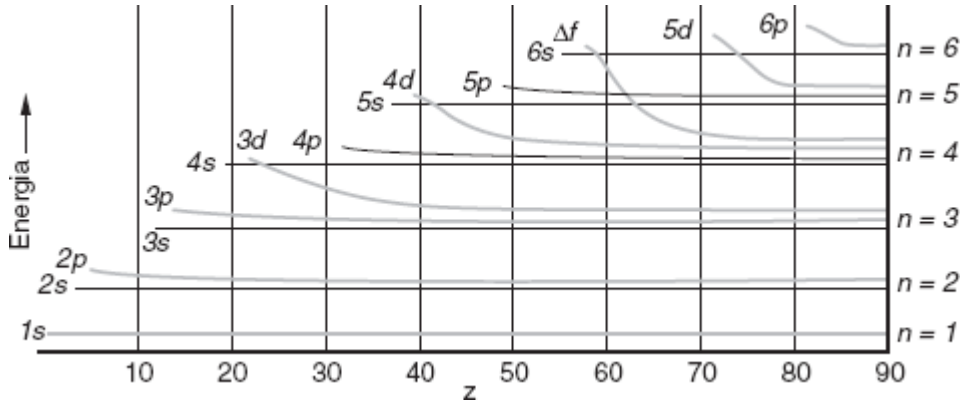


FIGURA 7-34 Energia das configurações eletrônicas no estado fundamental em função de Z.

7-48. Na curva da energia de ionização em função do número atômico (Figura 7-20), são observadas pequenas quedas em Z = 31 (gálio), Z = 49 (índio) e Z = 81 (tálio) que não estão assinaladas na figura. Explique as quedas, depois de examinar as configurações eletrônicas desses átomos no Apêndice C.

7-49. Em quais dos átomos a seguir o estado fundamental é desdobrado pela interação spin-órbita: Li, B, Na, Al, K, Ag, Cu, Ga? (*Sugestão*: Use o Apêndice C para verificar quais são os elementos para os quais $\ell \neq 0$.)

7-50. Se o elétron 3*s* do sódio não penetrasse na região interna do átomo, sua energia seria $-13{,}6/n^2 = -1{,}51$ eV. A penetração na região interna faz com que o elétron enxergue uma carga efetiva maior e, portanto, sua energia seja menor. Use o valor experimental do potencial de ionização, 5,14 V, para calcular o valor de Z_{ef} para o elétron 3*s* do sódio.

7-51. Qual é o elemento que possui a configuração eletrônica no estado fundamental (*a*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$ e (*b*) $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2$?

7-52. Determine os valores possíveis da componente z do momento angular orbital (*a*) de um elétron *d*; (*b*) de um elétron *f*; (*c*) de um elétron *s*.

Seção 7-8 Estados Excitados e Espectros dos Metais Alcalinos

7-53. Quais dos elementos a seguir apresentam um diagrama de níveis de energia semelhante ao do sódio e quais apresentam um diagrama semelhante ao do mercúrio: Li, He, Ca, Ti, Rb, Ag, Cd, Mg, Cs, Ba, Fr, Ra?

7-54. Os espectros óticos de átomos com dois elétrons na última camada são semelhantes entre si, mas muito diferentes dos espectros de átomos com apenas um elétron na última camada, por causa da interação entre os dois elétrons. Separe os elementos a seguir em dois grupos, de tal forma que os elementos de cada grupo tenham espectros semelhantes: lítio, berílio, sódio, magnésio, potássio, cálcio, cromo, níquel, césio, bário.

7-55. Quais dos elementos a seguir possuem um espectro ótico semelhante ao do hidrogênio e quais possuem um espectro ótico semelhante ao do hélio: Li, Ca, Ti, Rb, Ag, Cd, Ba, Hg, Fr, Ra?

7-56. Os números quânticos n, ℓ e j do elétron externo do potássio têm os valores 4, 0 e 1/2, respectivamente, no estado

fundamental; 4, 1 e 1/2 no primeiro estado excitado; 4, 1 e 3/2 no segundo estado excitado. Faça uma tabela com os valores de n, ℓ e j para os 12 primeiros estados do potássio (veja a Figura 7-24).

7-57. Quais das transições do sódio a seguir não são do tipo dipolo elétrico? (Informe qual é a regra de seleção que está sendo violada.)

$$4S_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2} \quad 4S_{1/2} \rightarrow 3P_{3/2} \quad 4P_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2} \quad 4D_{5/2} \rightarrow 3P_{1/2}$$
$$4D_{3/2} \rightarrow 3P_{1/2} \quad 4D_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2} \quad 5D_{3/2} \rightarrow 4S_{1/2} \quad 5P_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2}$$

7-58. As transições entre os níveis eletrônicos internos de átomos pesados resultam na emissão de raios X característicos, que foram discutidos na Seção 4-4. (*a*) Calcule a energia de um elétron da camada *K* do tungstênio, supondo que a carga nuclear efetiva é $Z - 1$. (*b*) O valor experimental desta energia é 69,5 keV. Suponha que a carga nuclear efetiva é $(Z - \sigma)$, na qual σ é a chamada *constante de blindagem*, e calcule σ a partir do valor experimental da energia.

7-59. Como o estado *P* e o estado *D* do sódio são dubletos, existem quatro transições possíveis entre esses estados, com diferentes energias. Indique quais são as três transições permitidas e qual é a transição proibida, de acordo com a regra de seleção da Equação 7-65.

7.60. A penetração relativa da região interna do átomo pelo elétron externo do sódio pode ser levada em conta usando um número atômico efetivo Z_{ef} na equação $E = -13{,}6Z^2_{ef}/n^2 = -1{,}51Z^2_{ef}$ eV em vez do valor $E = -13{,}6/n^2 = -1{,}51$ eV que seria medido se não houvesse penetração (veja o Problema 7-47). (*a*) Use a Figura 7-22 para determinar a energia do elétron externo nos estados 3*s*, 3*p* e 3*d* do sódio. (*Sugestão*: Para obter resultados mais precisos, tome −5,14 eV como sendo a energia do estado fundamental e use as energias dos fótons associados às transições $3s \rightarrow 3p$ e $3p \rightarrow 3d$ para calcular as energias dos outros estados.) (*b*) Calcule o valor de Z_{ef} para os estados 3*p* e 3*d*. (*c*) A aproximação $E = -13{,}6/n^2$ eV é razoável para algum desses estados?

7-61. Um átomo de hidrogênio no estado fundamental é submetido a um campo magnético $B_z = 0{,}55$ T. (*a*) Calcule o desdobramento dos estados de spin. (*b*) Qual dos estados tem maior energia? (*c*) Qual é a frequência da radiação necessária para excitar o átomo do estado de spin de menor energia para o de maior energia? Em que região do espectro eletromagnético está esta radiação?

7-62. Mostre que a variação de comprimento de onda Δλ de uma transição devido a uma pequena variação de energia é dada por

$$\Delta\lambda \approx -\frac{\lambda^2}{hc}\Delta E$$

(*Sugestão*: Calcule o valor de $dE/d\lambda$, para a qual $E = hc/\lambda$.)

7-63. (*a*) Determine o deslocamento normal de Zeeman $\Delta E = e\hbar B/2m_e$ para um campo magnético $B = 0{,}05$ T. (*b*) Use o resultado do item (*a*) e o resultado do Problema 7-62 para calcular a variação do comprimento de onda da transição singleto do mercúrio, que é observada para $\lambda = 579{,}07$ nm, causada pela aplicação de um campo magnético. (*c*) Se a menor variação de comprimento de onda que pode ser medida em um espectrômetro é 0,01 nm, qual é o menor valor de campo magnético para o qual é observado o efeito Zeeman nessa transição?

NÍVEL II

7-64. Se o elétron externo do lítio se movesse na órbita de Bohr correspondente a $n = 2$, a carga central efetiva seria $Z_{ef} = 1e$ e a energia do elétron seria $-13{,}6/2^2 = -3{,}4$ eV. Entretanto, a energia de ionização do lítio é 5,39 eV e não 3,4 eV. Use este fato para calcular a carga central efetiva Z_{ef} do ponto de vista do elétron externo do lítio. Suponha que o elétron externo se move em uma órbita de raio $r = 4a_0$.

7-65. Mostre que o valor esperado de r para um elétron no estado fundamental de um átomo de um elétron é dado por $\langle r \rangle = 3a_0/2Z$.

7-66. Se um corpo rígido tem momento de inércia I e está girando com velocidade angular ω, a energia cinética é dada por

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$

em que L é o momento angular. A solução da equação de Schrödinger para este problema leva a níveis de energia quantizados dados por

$$E_\ell = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I}$$

(*a*) Faça um diagrama de níveis de energia para esta situação e indique as transições que obedecem à regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$. (*b*) Mostre que as energias das transições permitidas são E_1, $2E_1$, $3E_1$, $4E_1$ etc., em que $E_1 = \hbar^2/I$. (*c*) O momento de inércia da molécula de hidrogênio é dado por $I = m_p r^2/2$, em que m_p é a massa do próton e $r \approx 0{,}074$ nm é a distância entre os prótons. Determine a energia do primeiro estado excitado ($\ell = 1$) da molécula de hidrogênio, supondo que a molécula se comporta como um rotor rígido. (*d*) Qual é o comprimento de onda da radiação emitida na transição do estado $\ell = 1$ para o estado $\ell = 0$ da molécula de hidrogênio?

7-67. Em um experimento de Stern-Gerlach, são usados átomos de hidrogênio no estado fundamental com uma velocidade $v_x = 14{,}5$ km/s. O campo magnético é paralelo ao eixo z e o gradiente máximo é $dB_z/dz = 600$ T/m. (*a*) Determine a aceleração máxima dos átomos de hidrogênio. (*b*) Se a largura da região onde existe campo magnético é $\Delta x = 75$ cm e os átomos percorrem uma distância adicional de 1,25 m até chegarem ao detector, determine a distância máxima entre as duas linhas observadas no detector.

7-68. Determine o menor ângulo entre o momento angular **L** e o eixo z em função do número quântico ℓ e mostre que para grandes valores de ℓ, $\theta_{min} \approx 1/\sqrt{\ell}$.

7-69. Os comprimentos de onda dos fótons emitidos pelo potássio correspondentes a transições dos estados $4P_{3/2}$ e $4P_{1/2}$ para o estado fundamental são 766,41 e 769,90 nm. (*a*) Calcule as energias dos fótons em elétrons-volts. (*b*) A diferença entre as energias dos fótons é igual à diferença ΔE entre os estados $4P_{3/2}$ e $4P_{1/2}$ no átomo de potássio. Calcule o valor de ΔE. (*c*) Estime o valor do campo magnético a que está submetido o elétron $4p$ no átomo de potássio.

7-70. O raio do próton, R_0, é aproximadamente igual a 10^{-15} m. A probabilidade de que um elétron seja encontrado no interior do volume ocupado pelo próton é dada por

$$P = \int_0^{R_0} P(r)\,dr$$

em que $P(r)$ é a densidade de probabilidade radial. Calcule o valor de P para o estado fundamental do átomo de hidrogênio. (*Sugestão*: Use a aproximação $e^{-2r/a_0} \approx 1$ já que $r << a_0$ em todo o intervalo de integração.)

7-71. (*a*) Calcule o fator g de Landé (Equação 7-72) para os estados $^2P_{1/2}$ e $^2S_{1/2}$ de um átomo de um elétron e mostre que existem quatro energias diferentes para as transições entre esses níveis na presença de um campo magnético externo. (*b*) Calcule o fator g de Landé para o estado $^2P_{3/2}$ e mostre que existem seis energias diferentes para as transições $^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ na presença de um campo magnético externo.

7-72. (*a*) Mostre que a função

$$\psi = A\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}\cos\theta$$

em que A é uma constante e a_0 é o raio de Bohr é uma solução da Equação 7-9. (*b*) Determine o valor da constante A.

NÍVEL III

7-73. Considere um átomo semelhante ao do hidrogênio no qual o elétron é substituído por uma partícula K^-. A partícula K^- tem spin 0 e, portanto, não possui momento magnético; assim, o único momento magnético desse átomo é o momento angular orbital, dado pela Equação 7-41. Se esse átomo for submetido a um campo magnético $B_z = 1{,}0$ T, (*a*) como serão afetados os níveis $1s$ e $2p$? (*b*) Em quantas linhas será desdobrada a linha correspondente à transição $2p \rightarrow 1s$? (*c*) Qual será a distância relativa $\Delta\lambda/\lambda$ entre linhas vizinhas? (Veja o Problema 7-59.) A massa da partícula K^- é 493,7 MeV/c^2.

7-74. Ignorando os efeitos relativísticos, a camada $n = 3$ dos átomos de um elétron possui cinco níveis de energia, correspondentes aos estados $3^2S_{1/2}$, $3^2P_{1/2}$, $3^2P_{3/2}$, $3^2D_{3/2}$ e $3^2D_{5/2}$. Determine os desdobramentos causados pela interação spin-órbita nos níveis $3P$ e $3D$ do hidrogênio.

7-75. No efeito Zeeman anômalo, o campo magnético externo é muito menor que o campo interno a que o elétron está submetido devido ao movimento orbital. No modelo vetorial (Figura 7-29), os vetores **L** e **S** precessam rapidamente em torno de **J** por causa do campo interno e **J** precessa lentamente em torno do campo externo. Para determinar o desdobramento dos níveis de energia, é preciso calcular primeiro a componente do momento magnético na direção de **J**, μ_J, e depois a componente μ_z na direção de **B**. (*a*) Mostre que a componente $\mu_J = \mu \cdot J/J$ pode ser escrita na forma

$$\mu_J = -\frac{\mu_B}{\hbar J}(L^2 + 2S^2 + 3\mathbf{S}\cdot\mathbf{L})$$

(*b*) A partir da identidade $J^2 \equiv (\mathbf{L} + \mathbf{S})\cdot(\mathbf{L} + \mathbf{S})$ mostre que $\mathbf{S}\cdot\mathbf{L} = (J^2 - L^2 - S^2)/2$. (*c*) Combine os resultados dos itens (*a*) e (*b*) para obter a relação

$$\mu_J = -\frac{\mu_B}{2\hbar J}(3J^2 + S^2 - L^2)$$

(*d*) Multiplique o resultado por J_z/J para obter a seguinte relação:

$$\mu_z = -\mu_B\left(1 + \frac{J^2 + S^2 - L^2}{2J^2}\right)\frac{J_z}{\hbar}$$

7-76. Se o momento angular do núcleo de um átomo é **I** e o dos elétrons é **J**, o momento angular total do átomo é **F** = **I** + **J** e, portanto, o número quântico *f* correspondente ao momento angular total varia de $I + J$ a $|I - J|$. Mostre que o número de valores possíveis de *f* é $2I + 1$ se $I < J$ e $2J + 1$ se $J < I$. (Se não conseguir encontrar uma prova geral, repita a demonstração para vários casos especiais, até se convencer de que as expressões são válidas em todos os casos.) (A interação do momento magnético do núcleo com o momento magnético dos elétrons produz um pequeno desdobramento das linhas espectrais, conhecido como *desdobramento hiperfino*. Se $I < J$, a contagem do número de linhas permite determinar o valor de *I*.)

7-77. Como o próton possui um spin e um momento magnético, o estado fundamental do átomo de hidrogênio apresenta um pequeno desdobramento, conhecido como *desdobramento hiperfino* (veja o Problema 7-76). Este desdobramento pode ser imaginado como causado pela interação do momento magnético do elétron com o campo magnético produzido pelo momento magnético do próton ou vice-versa. O momento magnético do próton é paralelo ao spin e tem um valor de aproximadamente $2{,}8\mu_N$, em que $\mu_N = e\hbar/2m_p$ é o chamado *magnéton nuclear*. (*a*) O campo magnético a uma distância *r* de um momento magnético varia com o ângulo, mas é da ordem de $2k_m\mu/r^3$, para a qual $k_m = 10^{-7}$ em unidades do SI. Determine o valor de *B* a uma distância $r = a_0$ do núcleo, supondo que $\mu = 2{,}8\mu_N$. (*b*) Estime a energia de desdobramento hiperfino $\Delta E \approx 2\mu_B B$, para a qual μ_B é o magnéton de Bohr e *B* é o valor do campo magnético obtido no item (*a*). (*c*) Estime o comprimento de onda da radiação emitida quando um átomo de hidrogênio sofre uma transição do tipo "spin flip" entre os níveis hiperfinos do estado fundamental. (O valor estimado é maior do que o valor experimental, 21,22 cm, porque $\langle r^{-3}\rangle$ é bem menor do que a_0^{-3}, o que reduz o valor de ΔE. Os átomos de hidrogênio do espaço interestelar emitem este tipo de radiação, que é um dos mais estudados pelos radioastrônomos.)

***Ou seja, Estreitas, Principais, Difusas e Fundamentais, respectivamente. (N.T.)**

***Do inglês *q*uantum *e*lectro*d*ynamics. (N.T.)**

CAPÍTULO 8

Física Estatística

8-1 Estatística Clássica: Uma Revisão
8-2 Estatística Quântica
8-3 A Condensação de Bose-Einstein
8-4 O Gás de Fótons: Uma Aplicação da Estatística de Bose-Einstein
8-5 Propriedades de um Gás de Férmions

O mundo que experimentamos através dos sentidos é constituído por objetos *macroscópicos*, ou seja, sistemas muito maiores que as dimensões atômicas e que, por isso mesmo, contêm um grande número de átomos. Quando tentamos descrever as propriedades desses objetos a partir do comportamento dos átomos, encontramos grandes dificuldades. Classicamente, o comportamento de qualquer sistema macroscópico pode, em princípio, ser analisado com detalhes a partir da solução das equações de movimento das partículas que o compõem e do conhecimento do estado de movimento das partículas em um determinado instante; na prática, porém, esta abordagem é totalmente inviável. Considere, por exemplo, como seria difícil estudar as propriedades de um litro de um gás nas CNTPs resolvendo simultaneamente as equações de movimento das 10^{22} moléculas que a amostra contém. Felizmente, podemos estimar os valores de muitas propriedades mensuráveis de um sistema macroscópico sem necessidade de estudar os movimentos de cada partícula. Para conseguir esse feito notável, aplicamos princípios gerais da física, como as leis de conservação da energia e do momento, a conjuntos formados por um grande número de partículas, ignorando os movimentos individuais dessas partículas, e determinamos o comportamento *provável* do sistema a partir de considerações *estatísticas*. A seguir, lançamos mão do fato de que existe uma relação entre o comportamento previsto e as propriedades mensuráveis do sistema. Esta forma de estudar o comportamento de sistemas macroscópicos é conhecida como *mecânica estatística* e normalmente surte bons resultados apenas se o sistema contém um número suficiente de partículas para que a teoria estatística clássica possa ser empregada.[1]



8

Neste capítulo, vamos discutir o uso desta abordagem estatística para determinar de que forma a energia disponível se distribui pelas partículas de um sistema quântico. O leitor provavelmente já ouviu falar da teoria cinética dos gases, a primeira aplicação bem-sucedida da mecânica estatística a um problema prático. Como as hipóteses, definições e resultados da teoria cinética dos gases servem de modelo para a resolução de muitos outros problemas de mecânica estatística, apresentamos uma breve discussão da teoria cinética dos gases em uma Revisão de Conceitos Clássicos, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet. Em um sistema isolado de partículas em equilíbrio térmico, as partículas estão constantemente trocando energia e, em consequência, a energia de uma partícula em um determinado instante pode ser maior ou menor que a energia média por partícula. De acordo com a mecânica estatística clássica, os valores de energia assumidos por uma determinada partícula ao longo do tempo e os valores de energia assumidos por todas as partículas do sistema em um determinado instante obedecem a uma distribuição estatística conhecida como *distribuição de Boltzmann*. Na primeira seção deste capítulo, vamos rever os conceitos principais da física estatística clássica e mencionar alguns dos maiores sucessos e fracassos dessa teoria. Em seguida, veremos quais são as modificações que devem ser introduzidas na distribuição de Boltzmann para levar em conta as propriedades quânticas das partículas, obtendo no

processo a *distribuição de Fermi-Dirac*, que se aplica a sistemas quânticos constituídos por partículas com funções de onda antissimétricas, como os elétrons, e a *distribuição de Bose-Einstein*, que se aplica a sistemas quânticos constituídos por partículas com funções de onda simétricas, como os átomos de hélio. Finalmente, vamos aplicar as distribuições quânticas a vários sistemas concretos, comparar as previsões com os resultados experimentais e discutir fenômenos importantes, como a superfluidez e o calor específico dos sólidos.

8-1 Estatística Clássica: Uma Revisão

Um dos objetivos principais da física estatística, clássica ou quântica, é determinar de que forma uma quantidade fixa de energia se distribui entre as partículas que compõem um sistema, pois, a partir dessa informação, é possível calcular muitas das propriedades mensuráveis do sistema. Classicamente, um sistema é formado por um conjunto de partículas iguais, mas distintas. Em outras palavras, as partículas são todas exatamente iguais, mas, em princípio, podem ser acompanhadas individualmente durante as interações. Boltzmann[2] propôs uma função de distribuição que permite calcular o número provável de partículas que ocuparão os estados de energia disponíveis de um sistema clássico constituído por um número muito grande de partículas iguais em equilíbrio térmico.

A Distribuição de Boltzmann

A *distribuição de Boltzmann* $f_B(E)$, que é considerada a função de distribuição mais importante da física estatística clássica, é dada pela seguinte equação:

$$f_B(E) = Ae^{-E/kT} \qquad \textbf{8-1}$$

na qual A é uma constante de normalização cujo valor depende do sistema que está sendo estudado, $e^{-E/kT}$ é chamado de *fator de Boltzmann*, e k *é a constante de Boltzmann*:

$$k = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\text{J/K} = 8{,}617 \times 10^{-5}\,\text{eV/K}$$



7

Os cálculos de Boltzmann tinham por objetivo investigar as propriedades de uma função de distribuição das velocidades das moléculas de um gás em equilíbrio térmico que tinha sido obtida por Maxwell alguns anos antes e mostrar que a distribuição de velocidades em um gás fora do equilíbrio térmico tendia, com o passar do tempo, para a distribuição de Maxwell. A demonstração original de Boltzmann é excessivamente complexa para ser reproduzida neste livro; na Revisão de Conceitos Clássicos, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, apresentamos uma demonstração numérica simplificada e mostramos em seguida, através de um argumento matemático, que a forma obtida é exata e a única possível. Aqui, vamos ilustrar a aplicação da distribuição de Boltzmann com alguns exemplos, estabelecendo assim uma base para compararmos a distribuição clássica com as distribuições quânticas na Seção 8-2.

O número de partículas de energia E é dado por

$$n(E) = g(E)f_B(E) = Ag(E)e^{-E/kT} \qquad \textbf{8-2}$$

na qual $g(E)$ é o peso estatístico (degeneração) do estado de energia E. Classicamente, E e $n(E)$ são funções contínuas (veja a Figura 8-1). Em consequência, $g(E)$ e $f_B(E)$ também são funções contínuas. A função de peso (ou degeneração) $g(E)$ da Equação 8-2 é conhecida como *densidade de estados*, já que $g(E)dE$ é o número de estados com energias entre E e $E + dE$. Os dois exemplos a seguir ilustram o uso da distribuição de Boltzmann e mostram que os resultados explicam os resultados experimentais obtidos em dois sistemas bem diferentes.

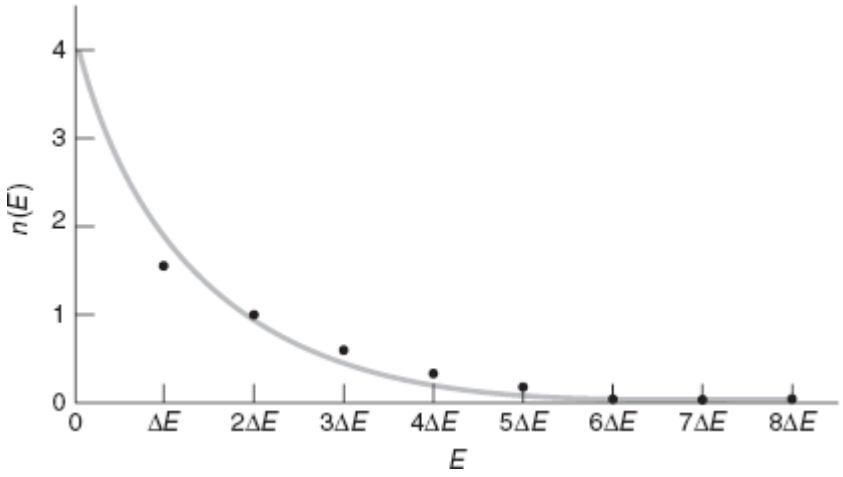


FIGURA 8-1 $n(E)$ em função de E para os dados da Tabela 1 da Revisão de Conceitos Clássicos 7. A curva contínua é a exponencial $n(E) = Be^{-E/E_c}$, onde as constantes B e E_c foram ajustadas para a melhor concordância possível com os pontos da tabela.

EXEMPLO 8-1 **A Lei das Atmosferas** Considere um gás ideal em um campo gravitacional uniforme. (*a*) Calcule a massa específica do gás em função da altitude. (*b*) Supondo que o ar se comporta como um gás ideal de massa molecular 28,6, determine a massa específica do ar 1 km acima do nível do mar, a uma temperatura de 300 K. (A massa específica do ar a 300 K ao nível do mar é 1,292 kg/m^3.)

SOLUÇÃO

(*a*) Suponha que a força da gravidade está orientada no sentido negativo do eixo z e considere uma coluna de gás cuja área da seção reta é A. A energia de uma molécula do gás é dada por

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + mgz = \frac{p^2}{2m} + mgz$$

na qual $p^2 = p^2_x + p^2_y + p^2_z$ e mgz é a energia potencial de uma molécula a uma altitude z. A massa específica ρ do gás é proporcional a f_B; como ρ também é proporcional a N, o número de moléculas por unidade de volume a uma altitude z, e N é proporcional a f_B.

De acordo com a Equação 8-1, temos:

$$f_B = Ae^{-p^2/2mkT}e^{-mgz/kT}$$

Como estamos interessados apenas na variação com z, podemos integrar a expressão de f_B em relação às variáveis p_x, p_y e p_z. A integração leva a uma nova constante de normalização A', ou seja, o resultado equivale a ignorar essas variáveis. A fração de moléculas entre z e $z + dz$ é, portanto,

$$f_B(z)dz = A'e^{-mgz/kT}dz \qquad \textbf{8-3}$$

e a massa específica diminui exponencialmente com a altitude. Este resultado é conhecido como *lei das atmosferas*. A constante A' pode ser obtida a partir da condição de normalização $\int_0^\infty f_B(z)dz = 1$; o resultado é $A' = mg/kT$.

(*b*) A razão entre a massa específica em z = 1000 m e a massa específica em z = 0 m é igual a $f_B(1000)/f_B(0)$, na qual $f_B(z)$ é dada pela Equação 8-3. Assim, temos:

$$\frac{\rho(1000)}{\rho(0)} = \frac{f_B(1000)}{f_B(0)} = \frac{e^{-mg(1000)/k(300)}}{e^{-mg(0)/k(300)}} = e^{-mg(1000)/k(300)}$$

Fazendo $m = 28{,}6 \times 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg e g = 9,8 m/s^2, temos:

$$\rho(1000) = \rho(0)e^{-0{,}113} = 1{,}292 \times 0{,}893 = 1{,}154\ \text{kg/m}^3$$

EXEMPLO 8-2 **Átomos de H no Primeiro Estado Excitado** O primeiro estado excitado do átomo de hidrogênio, E_2, está 10,2 eV acima do estado fundamental, E_1. Qual é a razão entre o número de átomos no primeiro estado excitado e o número de átomos no estado fundamental (*a*) à temperatura ambiente, $T = 300$ K; (*b*) à temperatura da superfície do Sol, $T = 5.800$ K?

SOLUÇÃO

1. O número de átomos em um estado de energia E é dado pela Equação 8-2:

$$n(E) = g(E)f_B(E) = Ag(E)e^{-E/kT}$$

2. A razão entre o número de átomos no primeiro estado excitado e o número de átomos no estado fundamental é, portanto,

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{Ag_2e^{-E_2/kT}}{Ag_1e^{-E_1/kT}} = \frac{g_2}{g_1}e^{-(E_2-E_1)/kT}$$

3. O peso estatístico (ou degeneração) do estado g_1, levando em conta o spin, é 2; a degeneração do primeiro estado excitado, g_2, é 8 (um estado com $\ell = 0$ e três estados com $\ell = 1$, ambos com dois estados de spin). Assim, temos:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{8}{2} = 4$$

e

$$\frac{n_2}{n_1} = 4e^{-(E_2-E_1)/kT}$$

4. (*a*) Para $T = 300$ K, $kT \approx 0{,}026$ eV. Fazendo $E_2 - E_1 = 10{,}2$ eV e $kT = 0{,}026$ na equação obtida no item 3, obtemos:

$$\frac{n_2}{n_1} = 4e^{-(10{,}2)/(0{,}026)} = 4e^{-392} \approx 10^{-171} \approx 0$$

5. (*b*) Para $T = 5.800$ K, $kT \approx 0{,}5$. Fazendo $E_2 - E_1 = 10{,}2$ eV e $kT = 0{,}500$ na equação obtida no item 3, obtemos:

$$\frac{n_2}{n_1} = 4e^{-(10{,}2)/(0{,}500)} = 4e^{-20{,}4} \approx e^{-19} \approx 10^{-8}$$

Observação: *O resultado obtido no item 4 mostra que, devido à grande diferença de energia entre os dois estados em comparação com a energia térmica kT, existem muito poucos átomos no primeiro estado excitado. O número de átomos nos outros estados excitados é ainda menor, o que explica por que o hidrogênio à temperatura ambiente não emite radiação. Na superfície do Sol (item 5), aproximadamente 10^{15} átomos em cada mol de hidrogênio atômico se encontram no primeiro estado excitado.*



Leitura Suplementar

Para poder discutir as propriedades de sistemas que contêm um grande número de partículas, é preciso definir com rigor os conceitos de *temperatura* e *entropia*. Este é o tema da Leitura Suplementar *Temperatura e Entropia*, no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 8-4*a*, 8-4*b*, 8-4*c* e 8-4*d*.

Distribuição de Maxwell de Velocidades das Moléculas



8

É possível deduzir muitas propriedades das substâncias, tanto no estado gasoso como nos estados líquido e sólido, a partir de considerações estatísticas como as que envolvem a distribuição de Boltzmann. Vamos nos limitar a discutir duas propriedades importantes, começando pela distribuição das velocidades escalares das moléculas de um gás. Maxwell calculou a distribuição das velocidades das moléculas de um gás em 1859, ou seja, cinco anos antes de Boltzmann deduzir a Equação 8-1. Como no caso da distribuição de Boltzmann, vamos complementar os resultados e aplicações apresentados no livro com textos de Revisão de Conceitos Clássicos disponíveis no site da LTC Editora para este livro na Internet. Maxwell chegou à função densidade de probabilidade da distribuição de velocidades,

$F(v_x, v_y, v_z)$, que também pode ser usada para obter a distribuição de velocidades escalares, supondo que as componentes v_x, v_y e v_z da velocidade eram independentes e que, portanto, a probabilidade de que a velocidade de uma molécula tivesse componentes v_x, v_y e v_z era igual ao produto das probabilidades isoladas de que as componentes da velocidade fossem v_x, v_y e v_z. Maxwell também supôs que a distribuição era função apenas da velocidade escalar, isto é, que as componentes da velocidade apareciam apenas na expressão $v^2_x + v^2_y + v^2_z$. Assim, ele escreveu para a função densidade de probabilidade da distribuição de velocidades da componente v_x uma expressão da forma

$$f(v_x) = Ce^{-mv_x^2/2kT} \qquad \textbf{8-5}$$

na qual $f(v_x)$ é a função densidade de probabilidade da distribuição de v_x, ou seja, $f(v_x)dv_x$ é a fração do número total de moléculas cuja componente x da velocidade está entre v_x e $v_x + dv_x$.[3] Expressões semelhantes podem ser escritas para $f(v_y)$ e $f(v_z)$; a constante C é determinada pela condição de normalização. A densidade de probabilidade da distribuição de velocidades completa e normalizada é

$$F(v_x, v_y, v_z) = f(v_x)f(v_y)f(v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT} \qquad \textbf{8-6}$$



9

A utilidade das funções de distribuição está no fato de que permitem calcular os valores médios ou valores esperados de grandezas físicas, ou seja, permitem fazer previsões quanto às propriedades dos sistemas macroscópicos. Assim, por exemplo, a observação na Figura 8-2 de que o valor médio de v_x é zero pode ser confirmada calculando $\langle v_x \rangle$ da seguinte forma:

$$\langle v_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x f(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2kT} dv_x \qquad \textbf{8-7}$$

Fazendo $\lambda = m/2kT$, obtemos:

$$\langle v_x \rangle = (\lambda/\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} v_x e^{-\lambda v_x^2} dv_x$$



7, 8, 9

De acordo com a Tabela B1-1, o valor da integral é zero e, portanto, $\langle v_x \rangle = 0$, como era esperado.

A função de distribuição de velocidades escalares das moléculas de um gás ideal clássico pode ser obtida a partir da Equação 8-6 fazendo $v^2_x + v^2_y + v^2_z = v^2$ e multiplicando F pelo elemento de volume de uma casca esférica entre v de $v + dv$ e pelo número N de moléculas por unidade de volume. O resultado é a conhecida *distribuição de Maxwell de velocidades das moléculas*:

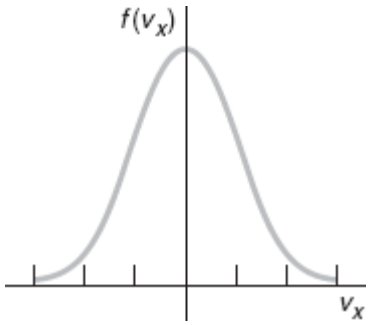


FIGURA 8-2 Função distribuição $f(v_x)$ para a componente x da velocidade. A função é uma curva gaussiana simétrica em relação à origem.

$$n(v)dv = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv \qquad \textbf{8-8}$$

Um dos métodos usados para separar o ^{235}U do isótopo ^{238}U, muito mais abundante, consiste em primeiro reagir o urânio metálico com flúor para formar o composto UF_6, um sólido que passa diretamente para o estado gasoso a uma temperatura relativamente baixa (56,5 °C). Como as moléculas de $^{235}UF_6$ e as moléculas de $^{238}UF_6$ estão em equilíbrio térmico e, portanto, possuem a mesma energia cinética média, o gás de $^{235}UF_6$ se difunde através de uma membrana um pouco mais depressa que o gás de $^{238}UF_6$. Depois de vários estágios de difusão, a concentração de ^{235}U atinge

valores suficientes para que o urânio possa ser usado com combustível em reatores nucleares (veja o Capítulo 11).

A distribuição de velocidades da Equação 8-8 está representada graficamente na Figura 8-3. A velocidade mais provável v_m, a velocidade média $\langle v \rangle$ e a velocidade média quadrática v_{rms} estão indicadas na figura. Embora a função densidade de probabilidade da distribuição de velocidades $F(v_x, v_y, v_z)$ seja máxima na origem (veja a Equação 8-6 e as Figuras 8-4 e 8-5), a função de distribuição de velocidades escalares, $n(v)$, tende a zero para $v \rightarrow 0$ porque $n(v)$ é proporcional ao volume da casca esférica, $4\pi v^2 dv$, que tende a zero para $v \rightarrow 0$.* Em velocidades muito altas, a função de distribuição da velocidade escalar também tende a zero por causa do fator exponencial $e^{-mv^2/2kt}$.

A velocidade mais provável v_m é aquela para a qual a função $n(v)$ é máxima. Fica a cargo do leitor (Problema 8-9) mostrar que a velocidade mais provável é dada por

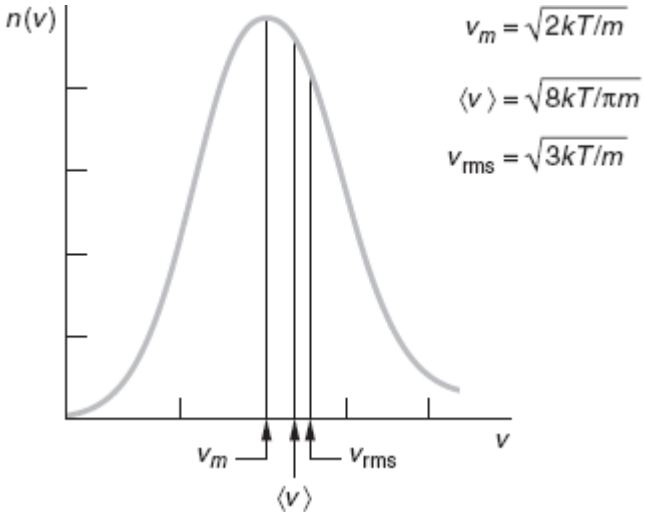


FIGURA 8-3 Distribuição de velocidades de Maxwell, $n(v)$. A velocidade mais provável v_m, a velocidade média $\langle v \rangle$ e a velocidade média quadrática v_{rms} estão indicadas na figura.

$$v_m = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2} \qquad \textbf{8-9}$$

A velocidade média $\langle v \rangle$ será calculada no Exemplo 8-3.

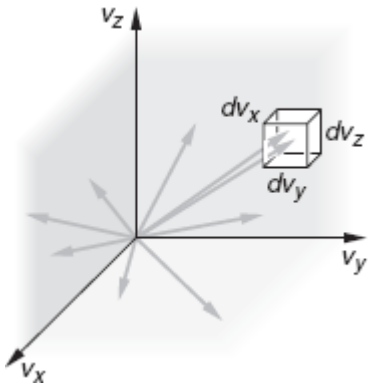


FIGURA 8-4 Vetores velocidade no espaço de velocidades. A função distribuição de velocidade fornece a fração de velocidades moleculares cujos vetores terminam em um elemento de volume $dv_x dv_y dv_z$.

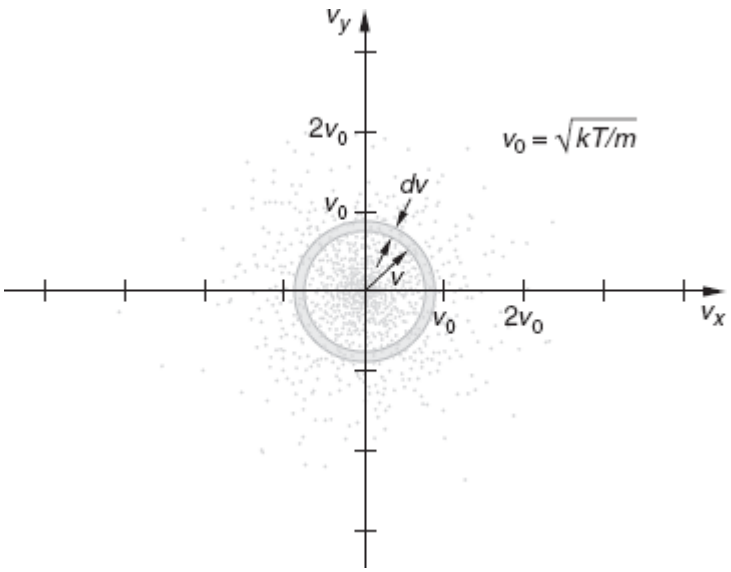


FIGURA 8-5 Representação bidimensional da densidade de probabilidade da distribuição de velocidades no espaço de velocidades. A velocidade de uma molécula com componentes v_x, v_y, v_z é representada por um ponto no espaço de velocidades. A função densidade de probabilidade da distribuição de velocidades é a densidade de pontos neste espaço. A densidade é máxima na origem. Para determinar a distribuição de velocidades, é preciso multiplicar a densidade pelo volume de uma casca esférica de raio v, $4\pi v^2 dv$. [*Este gráfico gerado em computador é cortesia de Paul Doherty, The Exploratorium*.]

EXEMPLO 8-3 **Velocidade Média das Moléculas de N_2** Determine a velocidade média $\langle v \rangle$ da distribuição de Maxwell e use o resultado para calcular a velocidade média das moléculas de nitrogênio a 300 K. A massa da molécula de N_2 é $4{,}68 \times 10^{-26}$ kg.

SOLUÇÃO

1. A velocidade média (v) pode ser obtida multiplicando a distribuição de velocidades escalares (Equação 8-8) por v, integrando para todas as velocidades possíveis e dividindo por N, o número total de moléculas:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty v n(v)\,dv = \int_0^\infty A v^3 e^{-\lambda v^2} dv$$

   em que $A = 4\pi(m/2kT)^{3/2}$ e $\lambda = m/2kT$.
2. Esta equação pode ser escrita na forma

$$\langle v \rangle = A I_3$$

   em que

$$I_3 = \int_0^\infty v^3 e^{-\lambda v^2} dv$$

3. Usando a Tabela B1-1 para calcular o valor de I_3, temos:

$$\begin{aligned} \langle v \rangle &= A\lambda^{-2}/2 \\ &= \frac{4\pi}{2}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(\frac{2kT}{m}\right)^2 \\ &= \left(\frac{8kT}{\pi m}\right)^{1/2} \end{aligned} \qquad \textbf{8-10}$$

4. Podemos usar a Equação 8-10 para calcular a velocidade média das moléculas de nitrogênio a 300 K. Fazendo $k = 1{,}38 \times 10^{23}$ J/K, $T = 300$ K e $m = 4{,}68 \times 10^{-26}$ kg, obtemos:

$$\langle v \rangle = \left[\frac{8 \times 1{,}38 \times 10^{-23} \times 300}{\pi \times 4{,}68 \times 10^{-26}} \right]^{1/2}$$
$$= 475 \text{ m/s}$$
$$= 1700 \text{ km/h}$$



18

Como se pode ver na Figura 8-3, a velocidade média é aproximadamente 8% menor que $v_{rms} = (3kT/m)^{1/2}$. A velocidade média quadrática pode ser calculada a partir da distribuição de velocidades escalares (usando o mesmo método do Exemplo 8-3) ou, como na Revisão de Conceitos Clássicos 18, aplicando o teorema da equipartição. A Figura 8-6, um gráfico da Equação 8-8 para moléculas de H_2 e O_2 a 300 K, ilustra o efeito da massa sobre a distribuição de velocidades.

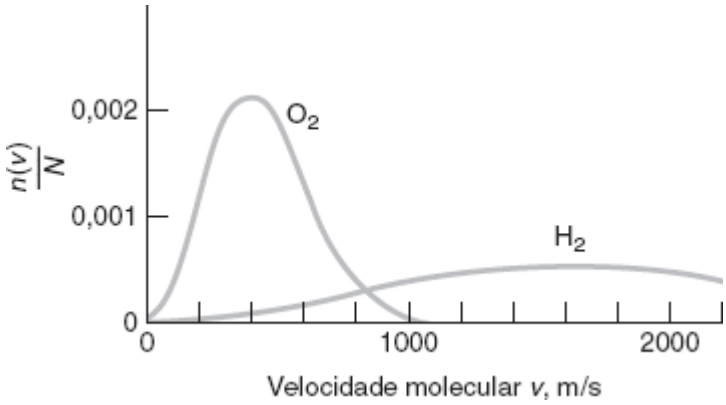


FIGURA 8-6 Gráfico de $n(v)/N$ em função de v (Equação 8-8) para moléculas de O_2 e H_2 a uma temperatura de 300 K.

A evaporação é um processo que provoca resfriamento, mesmo em temperaturas muito baixas! Para formar um condensado de Bose-Einstein, uma amostra a uma temperatura da ordem de 1 mK é resfriada ainda mais, permitindo que os átomos da "cauda" da alta energia da distribuição de Maxwell "vazem" para fora da amostra, o que resulta na perda de energia cinética (e consequente resfriamento) da amostra. (Veja a Seção 8-3.)

A distribuição de velocidades de Maxwell foi sobejamente comprovada pelos resultados experimentais, de modo que não existe muito interesse em realizar novas medidas. Uma das verificações mais recentes, a de R. C. Miller e P. Kusch, ilustrada nas Figuras 8-7 e 8-8, pode ser usada para medir outras distribuições de velocidades; uma variante do método é empregada, por exemplo, para medir a distribuição de velocidades em feixes moleculares produzidos por bocais e tubeiras.

Exercício

1. Qual é a razão entre as velocidades médias quadráticas das moléculas de hidrogênio e oxigênio à temperatura ambiente?

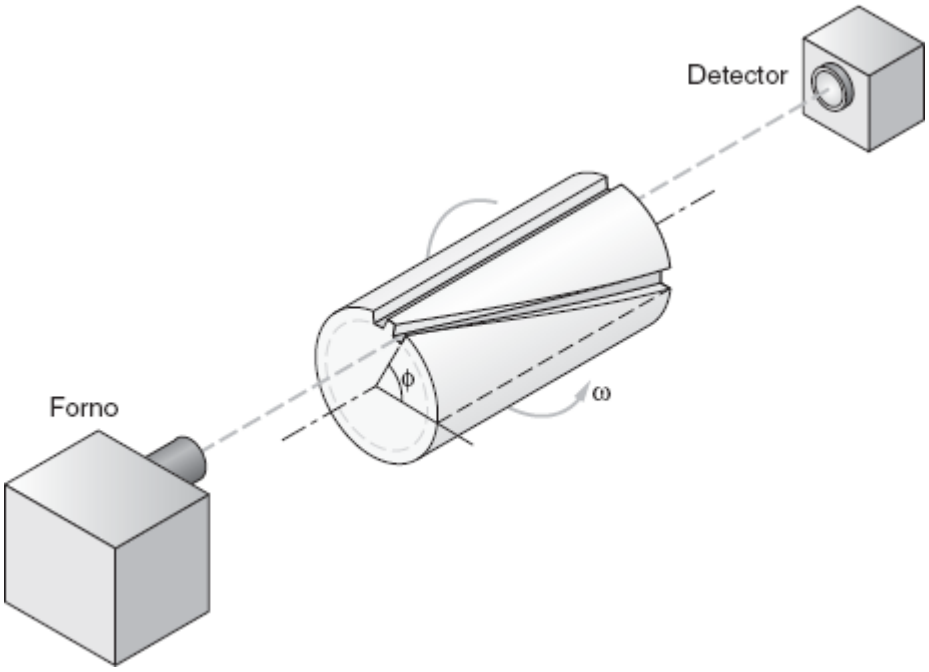


FIGURA 8-7 Diagrama esquemático do equipamento usado por Miller e Kusch para medir a distribuição de velocidades de moléculas. O cilindro possui, na realidade, 720 fendas helicoidais como a que aparece na figura. Para uma dada velocidade angular ω, apenas as moléculas com uma certa velocidade conseguem chegar ao detector. A fenda reta é usada para calibrar o instrumento. [*Fonte*: R. C. Miller e P. Kusch, *Physical Review*, **99**, 1314 (1955).]

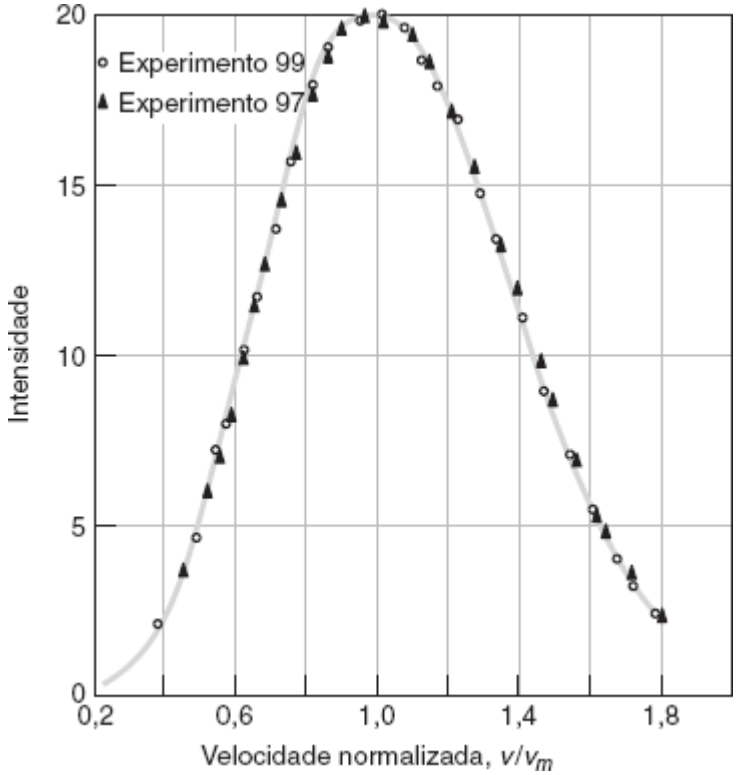


FIGURA 8-8 Resultados experimentais obtidos por Miller e Kusch para a distribuição de velocidade de átomos de tálio ejetados de um forno a 870 K. Os dados foram corrigidos de modo a refletirem a distribuição no interior do forno, já que as moléculas mais velozes tendem a escapar do forno com maior frequência, o que distorce ligeiramente a distribuição. O valor experimental de v_m a 870 K é 376 m/s. A curva contínua é a prevista pela distribuição de Maxwell. [*Fonte*: R. C. Miller e P. Kusch, *Physical Review*, **99**, 1314 (1955).]

Distribuição de Maxwell de Energias Cinéticas

A distribuição das energias cinéticas de translação e a energia cinética média das moléculas podem ser obtidas a partir da Equação 8-8, mas também podem ser calculadas usando a distribuição de Boltzmann. Como $v^2 = 2E/m$ e $dv = (2mE)^{-1/2}dE$, temos:

$$g(E)\,dE = 4\pi C(2E/m)(2mE)^{-1/2}\,dE \qquad \textbf{8-11}$$

RCC

7, 8, 9

Substituindo a Equação 8-11 na Equação 8-2, obtemos:

$$n(E)\,dE = 4\pi A'(2/m^3)^{1/2}E^{1/2}e^{E/kT}dE \qquad \textbf{8-12}$$

A constante A' pode ser determinada a partir da condição de que $\int_0^\infty n(E)\,dE = N$, o número total de partículas. Substituindo o resultado,[4] $A' = N(m/2\pi kT)^{3/2}$, na Equação 8-12, obtemos a *distribuição de Maxwell de energias cinéticas*:

$$n(E)\,dE = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}}E^{1/2}e^{-E/kT}dE \qquad \textbf{8-13}$$

A Figura 8-9 mostra o gráfico da distribuição de Maxwell de energias cinéticas em função de kT. A energia cinética média pode ser determinada da mesma forma que a velocidade média, multiplicando a distribuição por E (a grandeza cuja média se deseja calcular), integrando o resultado[4] para todos os valores possíveis de E (de $E = 0$ a $E = \infty$) e dividindo por N, o número total de moléculas:

$$\langle E\rangle = \frac{1}{N}\int_0^\infty En(E)\,dE = \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}}\int_0^\infty E^{3/2}e^{-E/kT}dE = \frac{3}{2}kT \qquad \textbf{8-14}$$

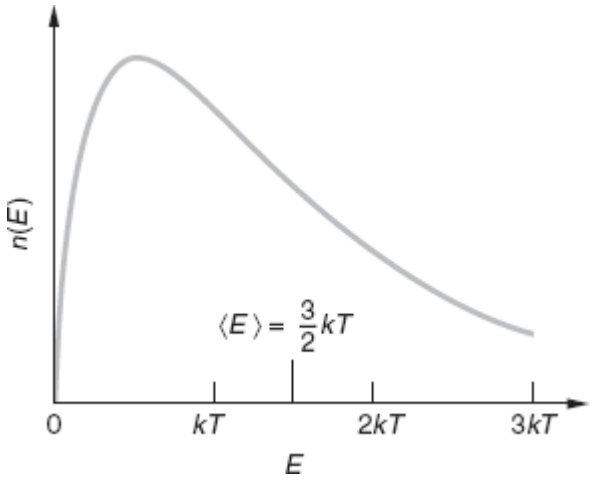


FIGURA 8-9 Distribuição de Maxwell de energias cinéticas das moléculas de um gás ideal. A energia média é $\langle E\rangle = 3kT/2$.

EXEMPLO 8-4 **Escape de H_2 da Atmosfera da Terra** Uma regra de bolso usada pelos astrofísicos é a de que um gás leva 10^8 anos para escapar da atmosfera de um planeta se a velocidade média das moléculas é um sexto da velocidade de escape. Determine a velocidade média de uma molécula de hidrogênio a partir da energia cinética média e mostre que a ausência de hidrogênio na atmosfera da Terra é coerente com o fato de que a Terra se formou há mais de 10^8 anos. (A massa de uma molécula de H_2 é $3{,}34 \times 10^{-27}$ kg.)

SOLUÇÃO

A velocidade de escape na base da atmosfera, isto é, ao nível do mar, é 11,2 km/s. Supondo que $T = 300$ K, a energia média de uma molécula de hidrogênio (ou de qualquer outra molécula, já que $\langle E\rangle$ não depende da massa) é dada por

$$\langle E\rangle = \frac{3}{2}kT = \frac{3 \times 1{,}38 \times 10^{-23} \times 300}{2} = 6{,}21 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

Assim,

$$\left\langle \tfrac{1}{2}mv^2 \right\rangle = 6{,}21 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

No caso das moléculas de hidrogênio,

$$\langle v^2 \rangle = \frac{2 \times 6{,}21 \times 10^{-21}}{3{,}34 \times 10^{-27}} = 3{,}72 \times 10^6$$

e, portanto,

$$v_{\text{rms}} = 1{,}93 \text{ km/s}$$

Observação: *Como $v > v_{esc}/6 = 1{,}86$ km/s, a ausência de hidrogênio na atmosfera da Terra é coerente com o fato de que a Terra se formou há mais de 10^8 anos.*

Exercícios

2. Qual é a razão entre a energia cinética média das moléculas de He e a energia cinética média das moléculas de Kr à mesma temperatura?
3. As moléculas de H_2 podem escapar com tanta facilidade do campo gravitacional da Terra que não existe hidrogênio na atmosfera terrestre (veja o Exemplo 8-4). Entretanto, a velocidade média das moléculas de H_2 nas temperaturas encontradas na atmosfera é muito menor que a velocidade de escape. Como conciliar os dois fatos?
4. Por que não é razoável supor que todas as moléculas de um gás têm a mesma velocidade?

Calor Específico dos Gases e Sólidos

Uma segunda propriedade importante dos sistemas clássicos que pode deduzida a partir da distribuição de Boltzmann é o chamado *teorema da equipartição*, aplicável a gases e sólidos, cujo enunciado é o seguinte:

> Em equilíbrio, cada grau de liberdade contribui com $kT/2$ para a energia média por molécula.

Grau de liberdade é uma coordenada ou componente da velocidade que aparece elevada ao quadrado na expressão da energia total de uma molécula. Assim, por exemplo, o oscilador harmônico unidimensional possui dois graus de liberdade, x e v_x, enquanto uma molécula de um gás monoatômico possui três graus de liberdade, v_x, v_y e v_z.



Leitura Suplementar

Não é óbvio que a contribuição para a energia média por molécula seja a mesma para cada grau de liberdade de um gás ou de um sólido. Este fato é demonstrado para um caso particular, o do oscilador harmônico, na Leitura Suplementar *Demonstração do Teorema da Equipartição para um Caso Particular*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 8-15 a 8-23.

Calor Específico dos Gases

O teorema da equipartição permitiu prever com sucesso o valor do calor específico de muitos gases e sólidos, mas também levou a alguns fracassos notáveis. Considere, por exemplo, uma molécula diatômica rígida (Figura 8-10*a*) capaz de sofrer movimentos de translação ao longo dos eixos x, y e z e movimentos de rotação em torno dos eixos x' e y', que passam pelo centro de massa e são perpendiculares ao eixo z', que coincide com a reta que liga os dois átomos.[5] A energia da molécula é dada por

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \tfrac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2$$

em que $I_{x'}$ e $I_{y'}$ e são os momentos de inércia em relação aos eixos x' e y'. Como esta molécula tem 5 graus de liberdade, 3 de translação e 2 de rotação, o teorema da equipartição prevê uma energia média de $5kT/2$ por molécula. A energia por mol, U, é, portanto, $5N_AkT/2 = 5RT/2$ e o calor específico molar a volume constante $C_V = (\partial U/\partial T)_V$ é $5R/2$. A observação de que C_V é aproximadamente igual a $5R/2$ para o nitrogênio e o oxigênio levou Clausius a especular (por volta de 1880) que os dois gases devem ser compostos por moléculas diatômicas capazes de girar em torno de dois eixos, além de sofrer translações. (Veja a Tabela 8-1.)

Se uma molécula diatômica não é rígida, os átomos podem vibrar ao longo do eixo da molécula (Figura 8-10*b*). Nesse caso, além das energias de translação e rotação, pode existir a energia de vibração. A vibração, um movimento harmônico simples, acrescenta dois graus de liberdade à expressão da energia, um relacionado à energia potencial e outro à energia cinética. No caso de uma molécula diatômica capaz de sofrer movimentos de translação, rotação e vibração, o teorema da equipartição prevê, portanto, um calor específico molar igual a $(3 + 2 + 2)\ R/2 = 7R/2$. Entretanto, os valores experimentais de C_V para moléculas diatômicas (veja a Tabela 8-1) não mostram a contribuição dos graus de liberdade associados às vibrações. O teorema de equipartição não oferece nenhuma explicação para a ausência desses modos.

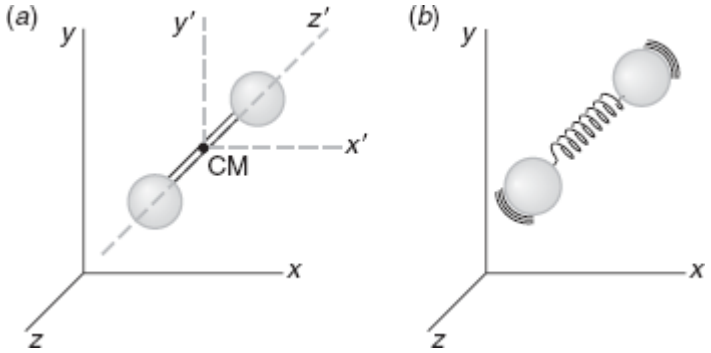


FIGURA 8-10 (*a*) Modelo do haltere rígido para a molécula de um gás diatômico. A molécula está sujeita a translações ao longo dos eixos *x*, *y* e *z* e a rotações em torno dos eixos *x′* e *y′*, que passam pelo centro de massa. Se as esferas são perfeitas ou pontuais, rotações em torno do eixo *z′* podem ser desprezadas. (*b*) Modelo do haltere não rígido para a molécula de um gás diatômico que inclui translações, rotações e vibrações.

A Tabela 8-1 mostra os valores experimentais de C_V para vários gases diatômicos. Para todos esses gases, exceto o Cl_2, os resultados são compatíveis com as previsões do teorema da equipartição para uma molécula rígida. O valor para o Cl_2 está entre o valor para uma molécula rígida e o valor para uma molécula capaz de vibrar ao longo de uma direção. A situação para moléculas com três ou mais átomos, várias das quais aparecem na Tabela 8-1, é mais complicada e não será discutida aqui.

Tabela 8-1 C_V de alguns gases a 15 °C e 1 atm

Gás	C_v (cal/mol-grau)	C_v/R
Ar	2,98	1,50
He	2,98	1,50
CO	4,94	2,49
H_2	4,87	2,45
HCl	5,11	2,57
N_2	4,93	2,49
NO	5,00	2,51
O_2	5,04	2,54
Cl_2	5,93	2,98
CO_2	6,75	3,40
CS_2	9,77	4,92

H_2S	6,08	3,06
N_2O	6,81	3,42
SO_2	7,49	3,76

R = 1,987 cal/mol-grau

Fonte: J. R. Partington e W. G. Shilling, *The Specific Heats of Gases* (London: Ernest Benn, Ltd., 1924).

Como o teorema da equipartição, combinado com o modelo das moléculas como sistemas de átomos pontuais mantidos a distâncias fixas, era capaz de prever corretamente o valor do calor específico para a maioria das moléculas diatômicas, os cientistas tinham dificuldade para compreender por que as previsões não funcionavam em todos os casos. Por que apenas algumas moléculas diatômicas estariam sujeitas a vibrações? Como os átomos possuem dimensões finitas, o momento de inércia em relação ao eixo da molécula, embora pequeno, não pode ser nulo, de modo que devem existir três graus de liberdade associados aos movimentos de rotação, em vez de apenas dois. Na ausência de vibrações, C_V deveria ser, portanto, da ordem de $6R/2 = 3R$. Isso é verdade para o Cl_2, mas não para outros gases diatômicos. Além disso, por causa das dimensões finitas dos átomos, as moléculas dos gases monoatômicos deveriam ter três graus de liberdade associados a rotações e C_V deveria ser também da ordem de $3R$, mas o valor experimental é $1{,}5R$. Como a energia média depende apenas do *número* de graus de liberdade, o tamanho dos átomos não deveria ser importante, contanto que não se comportassem como pontos ideais. Além de todos esses problemas, foi observado experimentalmente que, ao contrário do que prevê o teorema da equipartição, o calor específico molar varia com a temperatura. O caso mais gritante é o do H_2 (Figura 8-11). É como se em temperaturas muito baixas, menores que 60 K, o H_2 se comportasse como uma molécula monoatômica e não estivesse sujeito a rotações. Com o aumento da temperatura, a molécula parece sofrer uma transição e, entre 200 e 700 K, C_V permanece constante com o valor de $2{,}5R$, com o H_2 se comportando como uma molécula rígida sujeita a rotações. Acima de 700 K, C_V volta a aumentar, indicando que os movimentos de vibração começam a aparecer, mas a molécula se dissocia antes que C_V atinja o valor de $3{,}5R$. Outros gases diatômicos apresentam um comportamento semelhante, exceto pelo fato de que, em baixas temperaturas, passam para a fase líquida antes que C_V atinja o valor de $1{,}5R$. O teorema da equipartição não é capaz de explicar essas anomalias porque se baseia na mecânica clássica; como vamos ver em seguida, para explicar perfeitamente o comportamento de sistemas constituídos por pequenas partículas, como átomos e moléculas, é preciso recorrer à mecânica quântica.

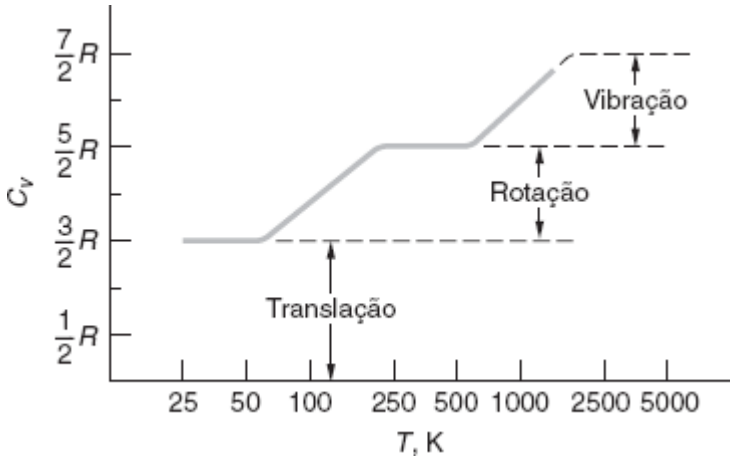


FIGURA 8-11 Variação com a temperatura do calor específico molar da molécula de hidrogênio. Entre 200 e 700 K, o valor de C_V é $5R/2$, como prevê o modelo do haltere rígido. Em baixas temperaturas, o valor de C_V diminui para $3R/2$, como se a molécula não pudesse mais girar. Em altas temperaturas, C_V parece tender para $7R/2$, como se a molécula começasse também a vibrar, mas a molécula se dissocia antes que um novo patamar seja atingido.

Calor Específico dos Sólidos

O teorema da equipartição também pode ser usado para estudar o calor específico dos sólidos. Em 1819, P. Dulong e A. Petit observaram que o calor específico molar da maioria dos sólidos tinha um valor muito próximo de 6 cal/K · mol ≈ $3R$. Este resultado, que mais tarde ficou conhecido como *lei de Dulong e Petit*, foi usado pelos dois pesquisadores para calcular as

massas moleculares de várias moléculas a partir de medidas de calor específico. A lei de Dulong e Petit pode ser demonstrada a partir do teorema da equipartição supondo que a energia interna de um sólido é constituída inteiramente pela energia de vibração dos átomos (Figura 8-12). Chamando de κ_1, κ_2 e κ_3 as constantes de força nas direções x, y e z, a energia de vibração de cada átomo é dada por

$$E = \tfrac{1}{2}mv_x^2 + \tfrac{1}{2}mv_y^2 + \tfrac{1}{2}mv_z^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_2 y^2 + \tfrac{1}{2}\kappa_3 z^2$$

Como a expressão para a energia contém seis termos, a energia média por átomo é $3kT$ e a energia total contida em 1 mol é $3N_Akt = 3RT$; assim, $C_V = 3R$.

Em altas temperaturas, todos os sólidos obedecem à lei de Dulong e Petit; entretanto, quando a temperatura é reduzida abaixo de um certo valor crítico, C_V começa a diminuir, tendendo a zero quando $T \rightarrow 0$. A temperatura crítica varia de substância para substância e é menor em sólidos macios, como o chumbo, do que em sólidos duros, como o diamante. A Figura 8-13 mostra a variação de C_V com a temperatura para vários sólidos.

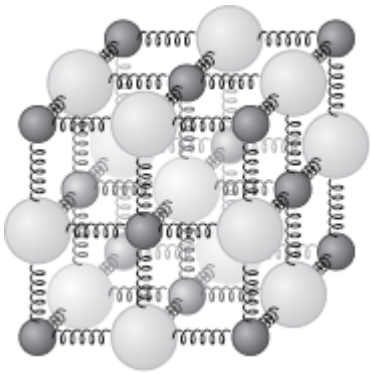


FIGURA 8-12 Modelo simples no qual um sólido é formado por átomos ligados por molas. A energia interna do sólido é a soma da energia cinética com a energia potencial vibracional.

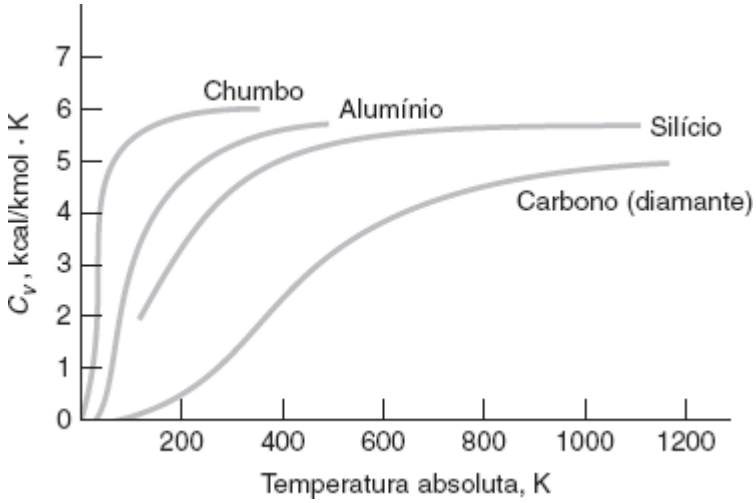


FIGURA 8-13 Variação do calor específico molar de vários sólidos com a temperatura. Em altas temperaturas, C_V é igual a $3R$, como prevê o teorema da equipartição. Em baixas temperaturas, C_V tende a zero. A temperatura crítica na qual C_V se aproxima de $3R$ varia de acordo com o material.

O fato de não existir muita diferença entre o calor específico dos metais e dos isolantes não pode ser explicado pela teoria clássica. O modelo clássico dos metais é capaz de descrever a condução de eletricidade e de calor com precisão razoável. A principal hipótese é a de que aproximadamente um elétron em cada átomo está livre para vagar pelo metal, colidindo com os átomos da mesma forma como as moléculas de um gás colidem entre si. De acordo com o teorema da equipartição, este "gás de elétrons" deveria ter uma energia cinética média de $1{,}5kT$ por elétron; assim, a diferença entre o calor específico dos metais e o calor específico dos isolantes, que não possuem elétrons livres, deveria ser da ordem de $1{,}5R$. Embora o calor específico dos metais seja ligeiramente maior do que $3R$ em temperaturas muito elevadas, a diferença é muito menor do que a contribuição de $1{,}5R$ prevista para o gás de elétrons.

Com base na distribuição de Boltzmann, a mecânica estatística clássica conseguiu explicar muitos aspectos das propriedades térmicas das substâncias; entretanto, a discrepância entre as previsões teóricas e os resultados experimentais no caso do calor específico dos gases e sólidos tornou-se um sério problema para a física clássica e foi interpretada por alguns cientistas como

uma indicação de que havia algo de errado na própria mecânica clássica. A busca de uma explicação para os valores observados do calor específico das substâncias foi um dos fatores que levaram à descoberta da quantização da energia no início do século XX. Nas próximas seções, vamos mostrar de que forma a mecânica quântica oferece uma solução para o problema.

EXEMPLO 8-5 **Alargamento das Linhas Espectrais** Como vimos no Capítulo 5, o princípio de indeterminação faz com que as linhas espectrais emitidas pelos átomos apresentem uma largura intrínseca. Outro fator que contribui para o alargamento das linhas espectrais é o movimento dos átomos devido à agitação térmica. Rayleigh mostrou que o efeito Doppler associado a esse movimento leva a um alargamento Δ das linhas espectrais que é dado pela seguinte expressão:

$$\Delta = 0{,}72 \times 10^{-6} \lambda \sqrt{T/M}$$

na qual λ é o comprimento de onda da linha, T é a temperatura absoluta e M é a massa molecular do átomo. Calcule o alargamento por efeito Doppler da linha H_α emitida por átomos de hidrogênio na superfície do Sol, onde a temperatura é 5800 K.

SOLUÇÃO

O comprimento de onda da linha H_α é 656,3 nm e a massa atômica do H é 1; assim,

$$\Delta = 0{,}72 \times 10^{-6} \times 656{,}3 \sqrt{5800/1} = 0{,}036 \text{ nm}$$

Este valor é muito maior que a largura intrínseca da linha H_α (0,0005 nm). Note que o alargamento das linhas espectrais devido a colisões atômicas também é importante e pode se tornar o fator principal em altas temperaturas ou se o gás estiver muito comprimido. As colisões reduzem o tempo de vida dos estados excitados e com isso, por causa do princípio de indeterminação, aumentam a indeterminação da energia dos estados e a largura das linhas. É por causa das colisões que o espectro visível do Sol é um espectro contínuo.

8-2 Estatística Quântica

Distribuições de Bose-Einstein e Fermi-Dirac



18

Os sistemas clássicos que examinamos na Seção 8-1 eram constituídos por partículas iguais, mas distintas. Em outras palavras, as partículas foram tratadas como bolas de sinuca, que apresentam propriedades mecânicas semelhantes, mas podem ser distinguidas pela cor. Na verdade, como é mencionado na Revisão de Conceitos Clássicos 8, esta foi uma das hipóteses implícitas na formulação da teoria cinética dos gases. Na mecânica quântica, por outro lado, duas partículas do mesmo tipo cujas funções de onda se superpõem não podem ser identificadas. Em outras palavras, se duas partículas iguais 1 e 2 passam uma pela outra a uma distância menor do que o comprimento de onda das funções de onda de de Broglie e depois são detectadas, é impossível dizer qual das partículas é a partícula 1 e qual é a partícula 2, ou seja, não podemos saber qual das quatro possibilidades representadas na Figura 8-14 é a verdadeira. O tratamento das partículas clássicas que leva à distribuição de Boltzmann (veja a Revisão de Conceitos Clássicos 7) pode ser adaptado com relativa facilidade a sistemas constituídos por um grande número de partículas iguais e indistinguíveis.

A primeira dessas análises teóricas, que se aplica a partículas com spin nulo ou inteiro, como átomos de hélio (spin 0) e fótons (spin 1), que não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, foi realizada por Bose[6] em 1924, ao se dar conta de que a distribuição de Boltzmann não explicava adequadamente o comportamento dos fótons. Pouco depois, a nova distribuição proposta por Bose foi aplicada por Einstein a partículas com massa de repouso diferente de zero. Esta distribuição, hoje conhecida como *distribuição de Bose-Einstein*, é dada por

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1} \qquad \textbf{8-24}$$

na qual e^{α} é uma constante de normalização que depende do sistema considerado. As partículas cuja distribuição estatística obedece à Equação 8-24 recebem o nome de *bósons*.

Depois que o spin do elétron foi descoberto e Dirac formulou a mecânica ondulatória relativística para partículas de spin 1/2, Fermi[7] e Dirac[8] completaram a mecânica estatística quântica calculando a função de distribuição para partículas indistinguíveis com spin fracionário, que obedecem ao princípio de

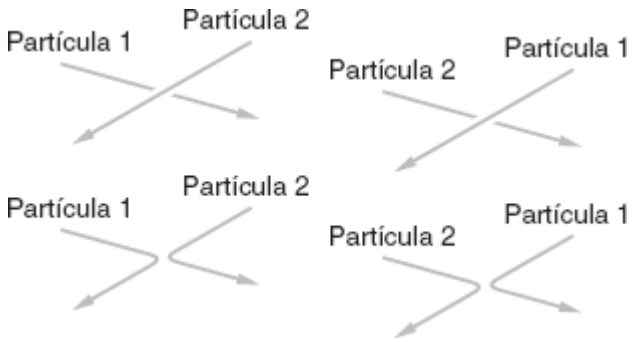


FIGURA 8-14 Por causa da natureza ondulatória das partículas quânticas, é impossível verificar qual das quatro interações representadas na figura realmente ocorreu quando duas partículas iguais se cruzam a uma distância pequena em comparação com o comprimento de onda de de Broglie.

exclusão de Pauli. Esta distribuição, hoje conhecida como *distribuição de Fermi-Dirac*, é dada por

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{E/kT} + 1} \qquad \textbf{8-25}$$

na qual, novamente, e^{α} é uma constante de normalização que depende do sistema considerado. As partículas cuja distribuição estatística obedece à Equação 8-25 recebem o nome de *férmions*.

Comparação das Funções de Distribuição

Podemos escrever a distribuição de Boltzmann (Equação 8-1) na forma

$$f_B(E) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{E/kT}} \qquad \textbf{8-26}$$

em que a constante de normalização A da Equação 8-1 foi substituída por $e^{-\alpha}$. Observe que, quando a distribuição de Boltzmann é escrita nesta forma, as três distribuições (Equações 8-24, 8-25 e 8-26) se tornam muito parecidas; a única diferença entre a distribuição de Boltzmann e as distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein está no termo ±1 que aparece no denominador das Equações (8-24) e (8-25). Somos levados imediatamente a nos indagar quanto ao significado físico dessa diferença aparentemente pequena. Em particular, como as integrais da forma $\int_0^{\infty} F(E) f_{BE}(E)\, dE$ e $\int_0^{\infty} F(E) f_{FD}(E)\, dE$ geralmente exigem o uso de métodos numéricos para serem resolvidas, seria interessante saber se, e em que condições, a distribuição de Boltzmann pode ser aplicada a sistemas quânticos.

Vamos examinar primeiro o significado físico da diferença entre as distribuições. Considere um sistema de duas partículas iguais, 1 e 2, uma das quais se encontra no estado n e a outra no estado m. Como vimos na Seção 7-6, existem duas soluções possíveis para a equação de Schrödinger do sistema baseadas no produto das funções de onda individuais das duas partículas:

$$\psi_{nm}(1,2) = \psi_n(1)\psi_m(2) \qquad \textbf{8-27}a$$

$$\psi_{nm}(2,1) = \psi_n(2)\psi_m(1) \qquad \textbf{8-27}b$$



Enrico Fermi em um piquenique em Michigan, em julho de 1935. O curativo protege um corte na testa que o cientista sofreu ao se golpear com a raquete durante uma partida de tênis.

onde os números 1 e 2 representam as coordenadas espaciais das duas partículas. Se as duas partículas podem ser distinguidas, ou seja, se comportam como partículas clássicas, as Equações 8-27*a* e 8-27*b* representam soluções possíveis. No caso de partículas indistinguíveis, porém, a solução completa deve refletir este fato e, portanto, deve ser uma combinação simétrica ou antissimétrica dos produtos das funções individuais:

$$\psi_S = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_m(2) + \psi_n(2)\psi_m(1)] \qquad \textbf{8-28}a$$

$$\psi_A = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_m(2) - \psi_n(2)\psi_m(1)] \qquad \textbf{8-28}b$$

O fator $1/\sqrt{2}$ é uma constante de normalização. Como vimos na Seção 7-6, a função antissimétrica ψ_A é usada para descrever partículas que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, ou seja, férmions. A função simétrica ψ_S é usada para descrever partículas que não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, ou seja, bósons.

Fazendo $\psi_A \equiv \psi_{FD}$ e $\psi_S \equiv \psi_{BE}$ para lembrar que as funções de onda antissimétrica e simétrica se aplicam a férmions e a bósons, respectivamente, vamos agora considerar a probabilidade de que, ao procurarmos as duas partículas, elas sejam observadas no *mesmo* estado, o estado *n*, por exemplo. No caso de partículas clássicas, temos:

$$\psi_{nn}(1,2) = \psi_{nn}(2,1) = \psi_n(1)\psi_n(2) = \psi_n(2)\psi_n(1) = \psi_B \quad \textbf{8-29}$$

onde fizemos $\psi_{nn}(1, 2) \equiv \psi_B$ para lembrar que as partículas clássicas obedecem à distribuição de Boltzmann. Assim, a densidade de probabilidade de que duas partículas clássicas sejam encontradas no mesmo estado *n* é dada por

$$\psi_B^*\psi_B = \psi_n^*(1)\psi_n^*(2)\psi_n(1)\psi_n(2) \qquad \textbf{8-30}$$

Fazendo $m = n$ na Equação 8-28*a*, vemos que, no caso de dois bósons, a probabilidade de que as duas partículas ocupem o mesmo estado *n* é dada por

$$\psi_{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2) + \psi_n(2)\psi_n(1)] = \frac{2}{\sqrt{2}}\psi_n(1)\psi_n(2) \qquad \textbf{8-31}$$

e, portanto, a densidade de probabilidade é

$$\psi_{BE}^*\psi_{BE} = 2\psi_n^*(1)\psi_n^*(2)\psi_n(1)\psi_n(2) = 2\psi_B^*\psi_B \quad \textbf{8-32}$$

Assim, a probabilidade de que dois bósons sejam encontrados no mesmo estado é *duas vezes maior* que se as partículas fossem clássicas. Esta descoberta surpreendente pode ser generalizada para sistemas com um grande número de partículas:

A presença de um bóson em um estado quântico *aumenta* a probabilidade de que outro bóson do mesmo tipo ocupe o mesmo estado.

É como se um bóson atraísse outros bósons iguais para o mesmo estado. Vemos, portanto, que o termo −1 que aparece no denominador da Equação 8-24 traduz a probabilidade maior de que vários bósons ocupem o mesmo estado, em comparação com a probabilidade para partículas clássicas nas mesmas circunstâncias. O laser, que será discutido no Capítulo 9, é o exemplo mais comum deste fenômeno. Na Seção 8-3 vamos discutir outra consequência deste curioso comportamento dos bósons.

Fazendo $m = n$ na Equação 8-28*b*, vemos que, no caso de dois férmions, a probabilidade de que as duas partículas ocupem o mesmo estado é dada por

$$\psi_{FD} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_n(1)\psi_n(2) - \psi_n(2)\psi_n(1)] = 0 \qquad \textbf{8-33}$$

e, portanto, a densidade de probabilidade é nula. Este resultado também pode ser generalizado para sistemas com um grande número de partículas:

A presença de um férmion em um estado quântico *impede* que um férmion do mesmo tipo ocupe o mesmo estado.

É como se férmions iguais se repelissem. Vemos, portanto, que o termo +1 que aparece no denominador da Equação 8-25 traduz o princípio de exclusão. As consequências desta propriedade peculiar dos férmions serão discutidas no Capítulo 10. A Figura 8-15 mostra uma comparação entre as funções de distribuição de bósons e férmions para um sistema de seis partículas.

A Figura 8-16 mostra uma comparação das três distribuições para $\alpha = 0$, na faixa de energias de 0 a 5 kT. Observe que a curva f_{BE}, que se aplica aos bósons, está acima da curva f_B, que se aplica às partículas clássicas, o que é coerente com o fato de que a probabilidade de ocupação de um estado por mais de uma partícula é maior para bósons do que para partículas clássicas. A curva f_{FD}, por sua vez, que se aplica aos férmions, está abaixo da curva f_B, o que é coerente com o fato de que, no caso dos férmions, a presença de uma partícula em um estado impede que o estado seja ocupado por outras partículas. Observe que as Equações 8-24 e 8-25 tendem para a distribuição de Boltzmann para $e^{\alpha} >> e^{E/kT}$. Nesse caso, $f_{BE}(E) \approx f_B(E) << 1$ e $f_{FD}(E) \approx f_B(E) << 1$. Assim, tanto $f_{BE}(E)$ como $f_{FD}(E)$ tendem para a distribuição clássica de Boltzmann quando a probabilidade de que uma partícula ocupe um estado de energia E é muito menor que 1. Como se pode ver na Figura 8-16, o mesmo acontece se, para um dado valor de α, $E >> kT$.

No começo desta seção, comentamos que o que torna duas partículas quânticas indistinguíveis é a superposição das funções de onda de de Broglie. Este fato leva a um segundo método para verificar se a distribuição de Boltzmann constitui uma boa aproximação para um dado sistema. Pode-se demonstrar que este método é matematicamente equivalente à condição de que $f_B << 1$, mas às vezes é mais fácil de aplicar. Se o comprimento de onda de de Broglie λ é muito menor que a distância média $\langle d \rangle$ entre as partículas, a superposição das funções de onda pode ser desprezada e podemos tratar as partículas como se fossem distintas:

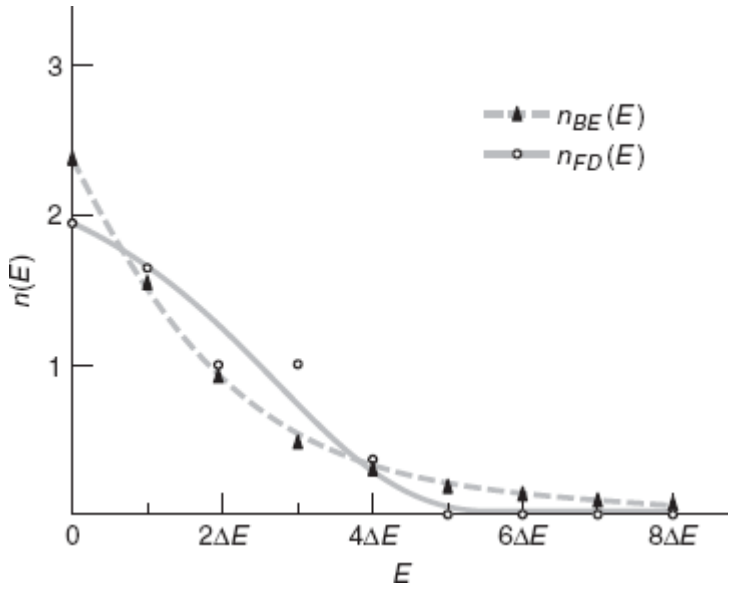


FIGURA 8-15 $n(E)$ em função de E para um sistema de seis partículas quânticas iguais. A função $n_B(E)$ se aplica a partículas com spin nulo ou inteiro (bósons) e a função $n_F(E)$ a partículas com spin fracionário (férmions). Compare com a Figura 8-1.

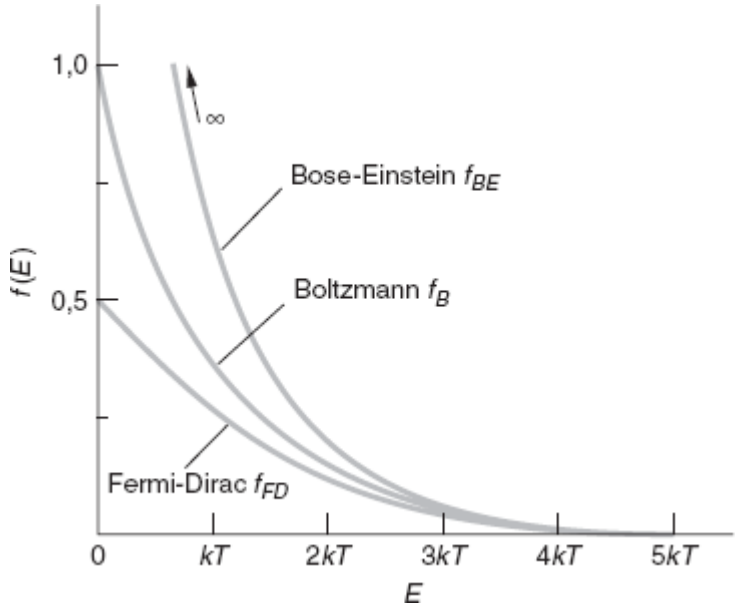


FIGURA 8-16 Gráfico das distribuições f_B, f_{BE} e f_{FD} em função da energia, para $\alpha = 0$. Para a mesma energia, os valores de f_{BE} são sempre maiores que os valores de f_B, que, por sua vez, são sempre maiores que os valores de f_{FD}. As três distribuições são praticamente iguais para energias maiores que $5kT$.

$$\lambda \ll \langle d \rangle \qquad \textbf{8-34}$$

onde

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE_k}} = \frac{h}{\sqrt{2m(3kT/2)}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} \qquad \textbf{8-35}$$

A distância média entre as partículas é dada por $\langle d \rangle = (V/N)^{1/3}$, na qual N/V é o número de partículas por unidade de volume. Assim, a condição expressa pela Equação 8-34 se torna

$$\frac{h}{\sqrt{3mkT}} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

ou

$$\left(\frac{N}{V}\right)\frac{h^3}{(3mkT)^{3/2}} \ll 1 \qquad \textbf{8-36}$$

A Equação 8-36 estabelece as condições nas quais a distribuição de Boltzmann pode ser utilizada. Observe que, em geral, são necessárias altas temperaturas e baixas densidades para que a desigualdade da Equação 8-36 seja obedecida. O exemplo a seguir ilustra a aplicação da Equação 8-36 a uma situação concreta.

EXEMPLO 8-6 **Distribuição Estatística do He na Atmosfera** Os átomos de ^{4}He, que constituem uma fração igual a $5{,}24 \times 10^{-6}$ das partículas presentes na atmosfera, possuem spin 0 e, portanto, são bósons. (*a*) A distribuição de Boltzmann pode ser usada para prever as propriedades térmicas do hélio atmosférico a uma temperatura de 273 K? (*b*) A massa específica do hélio líquido a 4,2 K é 0,124 g/cm^3. A distribuição de Boltzmann pode ser usada para prever as propriedades térmicas do hélio a esta temperatura?

SOLUÇÃO

(*a*) Como N_A átomos de um gás ocupam um volume de $2{,}24 \times 10^{-2}$ m^3 nas CNTP, o número de átomos de ^{4}He por unidade de volume é dado por

$$\frac{N_A}{V} = \frac{6{,}02 \times 10^{23} \times 5{,}24 \times 10^{-6}}{2{,}24 \times 10^{-2}\ \text{m}^3} = \\ = 1{,}41 \times 10^{20}\ \text{moléculas de He/m}^3$$

O lado esquerdo da Equação 8-36 é, portanto,

$$\frac{(1{,}41 \times 10^{20})(6{,}63 \times 10^{-34})^3}{(3 \times 1{,}66 \times 10^{-27} \times 4 \times 1{,}38 \times 10^{-23} \times 273)^{3/2}} = \\ = 6{,}3 \times 10^{-11} \ll 1$$

Este resultado mostra que o comportamento do hélio na atmosfera terrestre pode ser descrito pela distribuição de Boltzmann.

(*b*) Como a massa específica do hélio líquido na temperatura de ebulição, 4,2 K, é 0,124 g/cm^3, o número de átomos de hélio por unidade de volume é dado por

$$\frac{N}{V} = \frac{N_A \text{ moléculas}}{4 \text{ g}} \times (0{,}124 \text{ g/cm}^3) \times (10^2 \text{ cm/m})^3 = \\ = 1{,}87 \times 10^{28} \text{ He átomos/m}^3$$

O lado esquerdo da Equação 8-36 é, portanto,

$$\frac{(1{,}87 \times 10^{28})(6{,}63 \times 10^{-34})^3}{(3 \times 1{,}66 \times 10^{-27} \times 4 \times 1{,}38 \times 10^{-23} \times 4{,}2)^{3/2}} = 4{,}39$$

Como 4,39 *não é* muito menor que 1, a distribuição de Boltzmann não descreve adequadamente o comportamento do hélio líquido e nesse caso, portanto, é necessário usar a distribuição de Bose-Einstein.

Uso das Distribuições Estatísticas: Cálculo de *n*(*E*)

Para obter o número de partículas $n(E)$ com energia E, é preciso multiplicar as funções de distribuição dadas pelas Equações 8-24, 8-25 e 8-26 pela densidade de estados, como na Equação 8-2:

$$n_B(E) = g_B(E) f_B(E) \qquad \textbf{8-37a}$$

$$n_{BE}(E) = g_{BE}(E) f_{BE}(E) \qquad \textbf{8-37b}$$

$$n_{FD}(E) = g_{FD}(E) f_{FD}(E) \qquad \textbf{8-37c}$$

Uma vez conhecida a função $g(E)$, é possível calcular o valor da constante e^{α} através da condição de normalização $N = \int_0^{\infty} n(E)\, dE$, onde N é o número total de partículas.

Densidade de Estados

Como exemplo de determinação de $g(E)$, considere um sistema em equilíbrio constituído por N partículas clássicas confinadas em um recipiente cúbico de lado L. Como vimos no Capítulo 7, se o recipiente for considerado um poço cúbico tridimensional infinito, a energia de uma partícula no interior do recipiente poderá assumir os valores

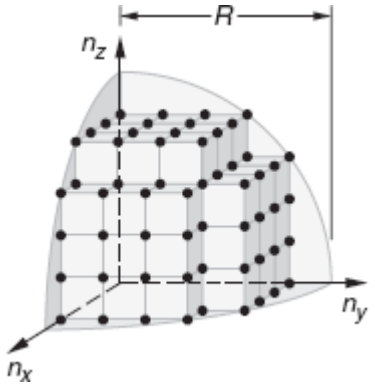


FIGURA 8-17 Representação dos estados quânticos permitidos de um sistema de partículas confinadas a um poço de potencial cúbico

infinito. O raio R é proporcional a $E^{1/2}$.

$$E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) \qquad \textbf{7-4}$$

que, por conveniência, vamos escrever na forma

$$E_n = E_0(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \qquad \textbf{8-38}$$

na qual x, y e z substituem 1, 2 e 3 e $E_0 = \hbar^2\pi^2/2mL^2$. O estado quântico em que se encontra o sistema é especificado pelos números quânticos n_x, n_y e n_z. Como $g(E)$ é o número de estados com energia entre E e $E + dE$, temos que encontrar uma expressão para o número total de estados em função de E e derivar essa expressão para obter o número de estados no intervalo dE. Para isso, basta notar (1) que a Equação 8-38 é a equação de uma esfera de raio $R = (E/E_0)^{1/2}$ no "espaço" $n_x n_y n_z$ e (2) que os números quânticos são números inteiros e cada combinação dos três números quânticos representa um ponto neste "espaço". (Veja a Figura 8-17.) Como, neste caso, os números quânticos são todos positivos, o "espaço" está limitado a um octante da esfera, como mostra a Figura 8-17. O número de estados N situados a uma distância da origem menor ou igual a R (que é igual ao número de diferentes combinações dos números quânticos) é dado por

$$N = \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{4\pi R^3}{3}\right) = \frac{\pi}{6}\left(\frac{E}{E_0}\right)^{3/2} \qquad \textbf{8-39}$$

A densidade de estados no "espaço" $n_x n_y n_z$ é, portanto,

$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{\pi}{4}E_0^{-3/2}E^{1/2} = \frac{(2m)^{3/2}L^3}{4\pi^2\hbar^3}E^{1/2} \qquad \textbf{8-40}$$

ou

$$g(E) = \frac{(2m)^{3/2}V}{4\pi^2\hbar^3}E^{1/2} = \frac{2\pi(2m)^{3/2}V}{h^3}E^{1/2} \qquad \textbf{8-41}$$

onde o fator L^3 foi substituído pelo volume V. Se as partículas são elétrons, cada estado pode acomodar dois elétrons (um com o spin para cima e outro com o spin para baixo) e, portanto, a densidade de estados $g_e(E)$ é duas vezes maior que o valor dado pela Equação 8-41:

$$g_e(E) = \frac{4\pi(2m_e)^{3/2}V}{h^3}E^{1/2} \qquad \textbf{8-42}$$

Nos dois casos, a constante e^{α} que aparece na distribuição de Boltzmann pode ser determinada a partir da condição de normalização

$$N = \int_0^\infty n_B(E)\,dE = \int_0^\infty g_B(E)f_B(E)\,dE = \\ = \int_0^\infty g_B(E)e^{-\alpha}e^{-E/kT}\,dE \qquad \textbf{8-43}$$

Se as partículas são elétrons, $g_B(E) = g_e(E)$ e, portanto,

$$N = e^{-\alpha}\frac{4\pi(2m_e)^{3/2}V}{h^3}\int_0^\infty E^{1/2}e^{-E/kT}\,dE$$

Resolvendo a integral, obtemos:

$$N = \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}V}{h^3}e^{-\alpha}$$

e, portanto,

$$e^{-\alpha} = \frac{Nh^3}{2(2\pi m_e kT)^{3/2}V} \quad \text{ou} \quad e^{\alpha} = \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}V}{Nh^3} \qquad \textbf{8-44}$$

No caso de partículas que não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli, o fator 2 que aparece do lado de fora dos parênteses na Equação 8-44 deve ser omitido. Observe que o valor de $e^{-\alpha}$ depende de N/V, o número de partículas por unidade de volume. Note também que $e^{-\alpha}$ é da mesma ordem de grandeza que a expressão que aparece do lado esquerdo da Equação 8-36; assim, o critério de validade da distribuição de Boltzmann, expresso pela Equação 8-36, equivale à condição de que $e^{-\alpha} << 1$.

Exercícios

5. De que forma duas partículas iguais podem ser distinguidas classicamente?
6. Quais são as condições nas quais as propriedades de um sistema de partículas podem ser descritas através da distribuição de Boltzmann?
7. A diferença entre as orientações dos spins de dois elétrons que se encontram no mesmo estado permite distingui-los?
8. O que é um bóson? O que é um férmion?

8-3 A Condensação de Bose-Einstein

Como vimos na Seção 8-2, no caso de gases em condições normais, a diferença entre a distribuição de Bose-Einstein e a distribuição clássica de Boltzmann é muito pequena, já que, devido à baixa densidade dos gases e à massa elevada das partículas, o número de estados quânticos disponíveis por partícula é muito grande. No caso do hélio líquido, porém, como vimos no Exemplo 8-6, o número de partículas é da mesma ordem que o número de estados quânticos e a distribuição clássica não pode ser usada. A ideia um tanto ousada de que o hélio líquido pode ser tratado como um gás ideal que obedece à distribuição de Bose-Einstein foi sugerida em 1938 por F. London em uma tentativa de compreender o comportamento do hélio em baixas temperaturas. Em 1924, H. Kamerlingh Onnes e J. Boks descobriram que a curva da massa específica do hélio líquido em função da temperatura apresenta uma anomalia em $T = 2{,}17$ K (veja a Figura 8-18). Em 1928, W. H. Keesom e M. Wolfke concluíram que a descontinuidade da derivada da curva nesta temperatura era causada por uma transição de fase. Eles usaram os termos “hélio I”

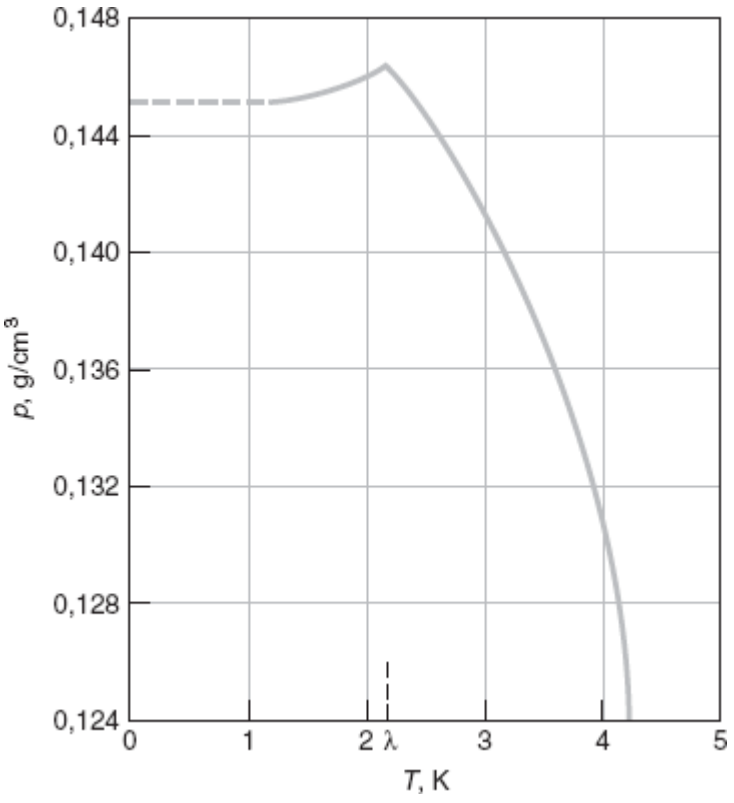


FIGURA 8-18 Gráfico da massa específica do hélio líquido em função da temperatura obtido por Kamerlingh Onnes e Boks. Observe a anomalia a 2,17 K. [Reproduzido de F. London, *Superfluids* (New York: Dover Publications, Inc., 1964), com permissão da editora.]

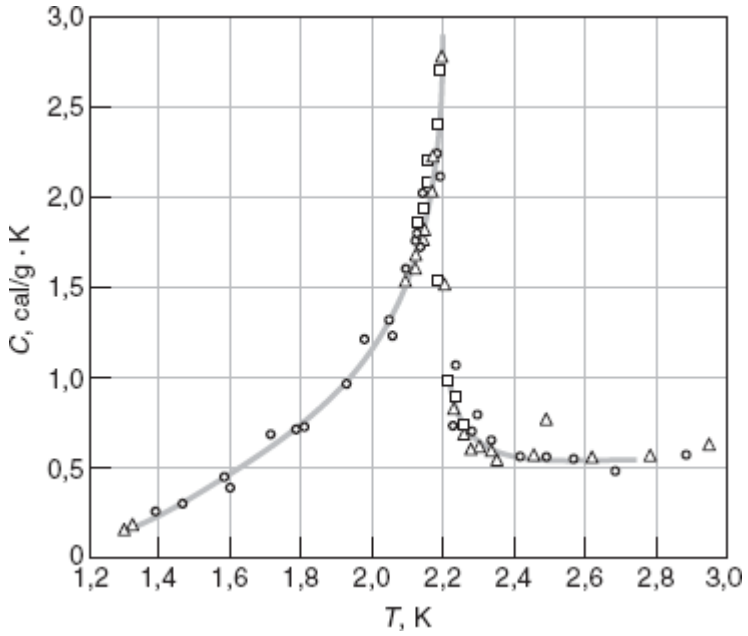


FIGURA 8-19 Calor específico do hélio líquido em função da temperatura. Por causa da semelhança entre a curva e a letra grega λ, o ponto de transição recebeu o nome de ponto lambda. [Reproduzido de F. London, *Superfluids* (New York: Dover Publications, Inc., 1964), com permissão da editora.]

para o líquido acima da temperatura de 2,17, denominada *ponto lambda* (veja a Figura 8-19), e "hélio II" para o líquido abaixo dessa temperatura. Na teoria de London, conhecida como *modelo dos dois fluidos*, o hélio II é imaginado como uma mistura de dois componentes: um fluido normal, com propriedades semelhantes às do hélio I, e um superfluido (ou seja, um fluido de viscosidade nula) com propriedades muito diferentes. A massa específica do hélio II é igual à soma das massas específicas da fase normal e da fase superfluida:

$$\rho = \rho_s + \rho_n \qquad \textbf{8-45}$$

Se a temperatura é reduzida a partir do ponto lambda, a fração da fase superfluida na mistura aumenta e a fração da fase normal diminui, até que, no zero absoluto, resta apenas a fase superfluida. Na fase superfluida, todos os átomos de hélio se encontram no estado de menor energia possível, o estado fundamental. Como esses átomos não podem ser excitados para estados de maior energia, o superfluido não contribui para a viscosidade do líquido. Quando a viscosidade do hélio II é medida pelo método do disco rotativo, apenas a fase normal exerce uma força viscosa sobre o disco. Se a temperatura é reduzida, a fração de fluido normal no hélio II diminui de 100% no ponto lambda para 0% em $T = 0$ K; isso faz com que a viscosidade diminua rapidamente com a temperatura até se tornar pequena demais para ser medida.

Não é óbvio que o hélio líquido deva se comportar como um gás ideal, já que é de se supor que exista uma interação entre os átomos. Entretanto, os átomos de hélio interagem apenas através da força de van der Waals (veja o Capítulo 9), que não é das mais intensas; além disso, o baixo valor da massa específica do hélio líquido (0,145 g/cm^3 nas vizinhanças do ponto lambda) sugere que a distância entre os átomos é relativamente grande. O modelo do gás ideal constitui, portanto, uma aproximação razoável. Na verdade, porém, o modelo é usado principalmente porque é relativamente simples e leva a uma descrição qualitativa do comportamento deste interessante fluido.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Hélio Líquido

Em um experimento clássico, realizado em 1908, H. Kamerlingh Onnes[9] conseguiu liquefazer o hélio, condensando assim o último elemento que insistia em permanecer no estado gasoso e encerrando um trabalho que lhe consumira quase um quarto de século de vida. Ironicamente, o sucesso quase passou despercebido. Depois de várias horas de resfriamento, a temperatura da amostra de hélio, que estava sendo medida com um termômetro de hélio gasoso a volume constante, tinha parado de descer. O hidrogênio líquido usado para resfriar o sistema tinha acabado e Onnes estava a ponto de desistir quando um dos visitantes interessados que se haviam reunido no laboratório aventou a hipótese de que a temperatura se mantinha constante porque o termômetro estava imerso em um líquido em equilíbrio com o hélio gasoso, mas tão transparente que não podia ser visto. Por sugestão do visitante, o recipiente de vidro onde estava sendo realizado o experimento foi iluminado por baixo e a interface gás-líquido se tornou claramente visível! A condensação do líquido transparente, de muito baixa densidade, ocorrera a 4,2 K.



H. Kamerlingh Onnes e J. D. van der Waals ao lado do liquefator de hélio, no Laboratório de Kamerlingh Onnes em Leiden, em 1911. [*Cortesia do Kamerlingh Onnes Laboratory*.]

Os ímãs supercondutores usados nos aparelhos de ressonância magnética e nos aceleradores de partículas (veja o Capítulo 11) são resfriados com hélio líquido.

O hélio líquido devia estar fervendo violentamente. Dias mais tarde, Kamerlingh Onnes conseguiu reduzir a temperatura ainda mais, chegando a 2,17 K, ponto em que a ebulição cessou abruptamente. O cientista deve ter notado a mudança de comportamento do líquido, mas não mencionou o fato em nenhum dos seus artigos. Na verdade, outro quarto de século se passou antes que o fenômeno fosse citado na literatura,[10] embora certamente tenha sido observado por muitos pesquisadores. A 2,17 K, ocorre uma transição de fase na qual o hélio se transforma em um *superfluido*, isto é, em uma substância de viscosidade nula, capaz de se escoar sem resistência. De todos os elementos, apenas os dois isótopos naturais do hélio apresentam esta propriedade. A transição para a fase superfluida do ^{4}He acontece a 2,17 K. No ^{3}He, que constitui apenas $1{,}3 \times 10^{-4}$ % do hélio natural, a transição ocorre a 2 mK. Isto não deve ser interpretado como uma peculiaridade da estrutura do hélio. As fases líquidas dos outros bósons não se transformam em superfluidos porque todos esses outros sistemas se solidificam a temperaturas muito maiores que a temperatura crítica para a condensação de Bose-Einstein; apenas o hélio permanece líquido em equilíbrio com sua pressão de vapor em temperaturas próximas do zero absoluto.[11] A razão pela qual o hélio não se solidifica é que a energia potencial da interação entre os átomos de hélio é muito pequena (veja a Seção 9-3). Como os átomos de hélio têm uma massa pequena, o movimento devido à energia de ponto zero (veja a Seção 5-6) é grande, tão grande, de fato, que a energia cinética é maior que a energia potencial da interação, o que impede que o material se solidifique.

Propriedades do ^{4}He Superfluido

Em 1932, W. Keesom e K. Clusius mediram o calor específico do hélio em função da temperatura e descobriram que apresentava uma anomalia em 2,17 K (Figura 8-19). Por causa da semelhança da curva com a letra grega λ, a temperatura crítica recebeu o nome de *ponto lambda*. A Figura 8-20 mostra a mesma curva medida com várias resoluções. Acima do ponto lambda, o hélio ferve violentamente; abaixo do ponto lambda, para de ferver, embora continue a evaporar. O efeito se deve ao aumento de condutividade térmica que ocorre quando o He ultrapassa o ponto lambda. No hélio líquido normal, como em outros líquidos, o aquecimento desigual leva a uma evaporação localizada, com formação de bolhas. Abaixo do ponto lambda, a condutividade térmica é tão grande que o aquecimento se torna uniforme e a evaporação ocorre apenas na superfície do líquido, sem formação de bolhas. As medidas de condutividade térmica mostram que a condutividade térmica do hélio II é mais de um milhão de vezes maior que a do hélio I. Na verdade, o hélio II conduz melhor o calor do que qualquer metal, já que possui, por exemplo, uma condutividade térmica 2000 vezes maior que a do cobre à temperatura ambiente. O processo de condução é diferente da condução térmica normal, pois a taxa de condução não é proporcional à diferença de temperatura. As bolhas deixam de se formar (embora a evaporação continue) porque todas as partes do fluido se encontram exatamente à mesma temperatura.

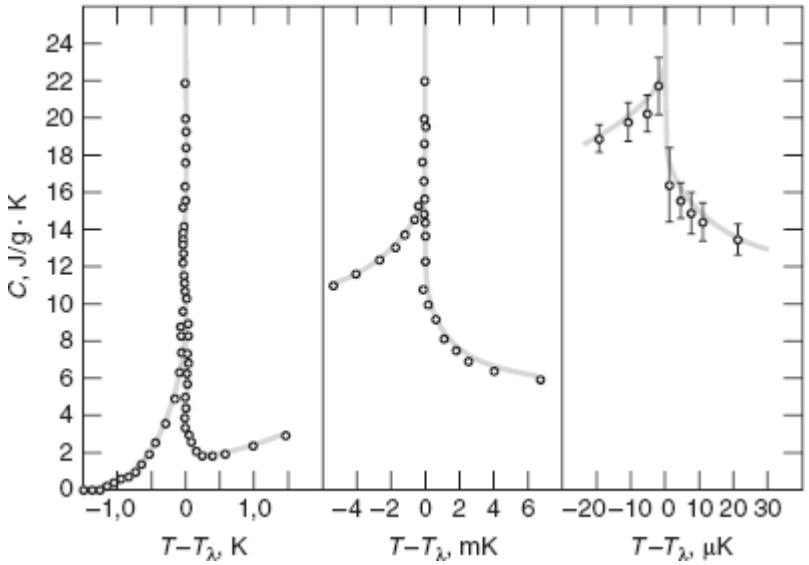


FIGURA 8-20 O ponto lambda com várias resoluções. A curva de calor específico tem sempre a mesma forma, independentemente da escala. [*Fonte*: M. J. Buckingham e W. M. Fairbank, "The Nature of the λ-Transition", *Progress in Low Temperature Physics*, editado por C. J. Gorter, Vol. III. (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1961.)]

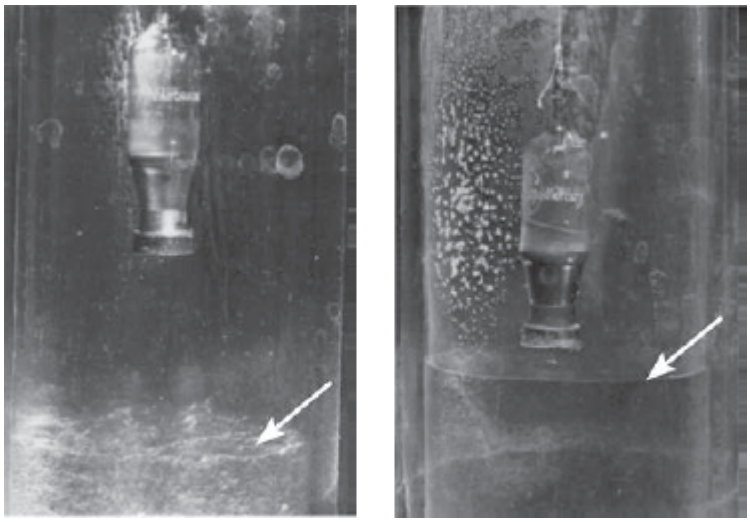


FIGURA 8-21 Hélio líquido sendo resfriado por evaporação. (*a*) Acima do ponto lambda, o hélio ferve violentamente. (*b*) Abaixo do ponto lambda, a fervura cessa e o superfluido consegue passar pelos estreitos canais que existem no fundo do recipiente. [*Cortesia do Clarendon Laboratory. Fonte*: K. Mendelssohn, *The Quest for Absolute Zero*: *The Meaning of Low Temperature Physics*, World University Library (New York: McGraw-Hill Book Company, 1966).]

A transição associada ao ponto lambda é claramente visível na superfície do líquido mostrado nas Figuras 8-21*a* e 8-21*b*. A Figura 8-21*b* também ilustra o fenômeno responsável pelo nome *superfluido*, atribuído ao hélio II. A base do pequeno recipiente de hélio líquido suspenso em um banho de hélio líquido é selada com um pó muito fino. Os canais microscópicos que atravessam o pó são estreitos demais para que o líquido normal consiga atravessá-los; quando a temperatura cai abaixo do ponto lambda, porém, a viscosidade se torna praticamente nula e o hélio superfluido abandona o recipiente sem a menor dificuldade.[12]

As Figuras 8-22*a* e 8-22*b* ilustram o *efeito do filme migrante*. Quando um recipiente com hélio líquido a uma temperatura abaixo do ponto lambda é mergulhado em um banho de hélio líquido à mesma temperatura e depois retirado, como na Figura 8-22*a*, um filme de superfluido sobe pelas paredes internas do recipiente, desce pelas paredes externas e pinga no reservatório abaixo até o nível de líquido no interior se tornar igual ao nível de líquido no exterior ou o recipiente ficar vazio! No *efeito termomecânico*, que envolve dois recipientes com hélio líquido II unidos por um superdreno, quando um dos recipientes é aquecido, como na Figura 8-23*a*, o superfluido migra *do lado mais frio para o lado mais quente*, o que faz com que o nível do líquido suba do lado mais quente (onde o hélio ainda continua no estado superfluido). Em um sistema como o da Figura 8-23*b*, o movimento faz com que o líquido seja ejetado através de um capilar, no chamado *efeito fonte*.[13]

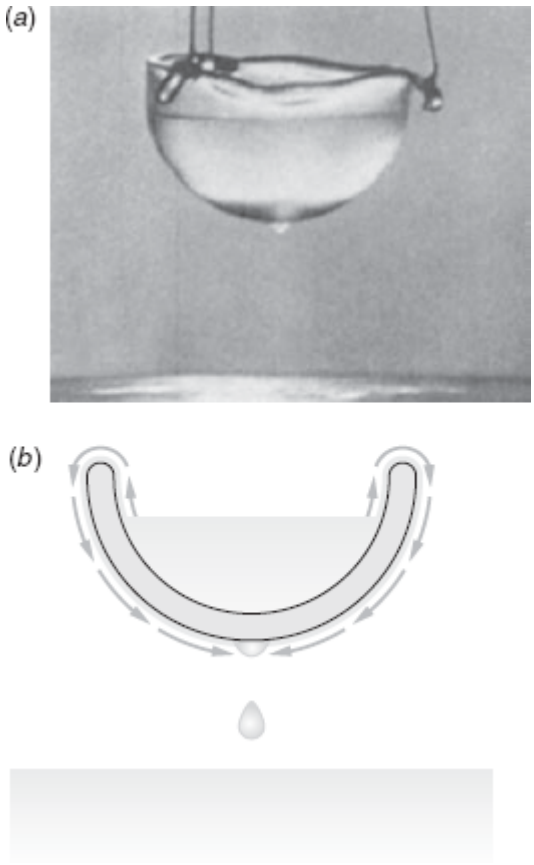


FIGURA 8-22 (*a*) O efeito do filme migrante. O hélio líquido no recipiente está a uma temperatura de aproximadamente 1,6 K. Um filme fino sobe pelos lados do recipiente, passa pela borda e desce pelo lado de fora para formar a gota que aparece na foto, que depois cai no reservatório abaixo. [*Cortesia de A. Leitner, Rensselaer Polytechnic Institute.*] (*b*) Diagrama do fenômeno. Se o recipiente for baixado até ficar parcialmente submerso no reservatório, o superfluido migrará para fora até que os níveis do líquido no recipiente e no reservatório se igualem. Se o nível inicial no interior do recipiente estiver abaixo do nível no reservatório, o líquido migrará para dentro do recipiente.

O ^{3}He Superfluido

Durante muito tempo, os físicos acreditaram que o ^{3}He não podia se tornar um superfluido, já que o núcleo de ^{3}He (e, portanto, o átomo como um todo, pois o spin total dos elétrons é nulo) possui spin 1/2 e deve obedecer ao princípio de exclusão de Pauli, que impede que duas partículas ocupem o mesmo estado. Entretanto, no início da década de 1970, D. M. Lee, D. D. Osheroff e R. C. Richardson mostraram que, a uma temperatura de 2,7 mK, os spins de *pares* de átomos de ^{3}He podem se alinhar paralelamente, criando bósons de spin 1, o que permite ao líquido passar a um estado superfluido. Mais tarde, foram descobertos mais dois estados superfluidos do ^{3}He, um, com spin 0 (pares de átomos com spins antiparalelos), cuja temperatura crítica é 1,8 mK, e o outro, com spin 1, que é criado quando um campo magnético alinha os spins dos pares de átomos. Os três cientistas receberam o Prêmio Nobel de Física de 1996 pela descoberta.

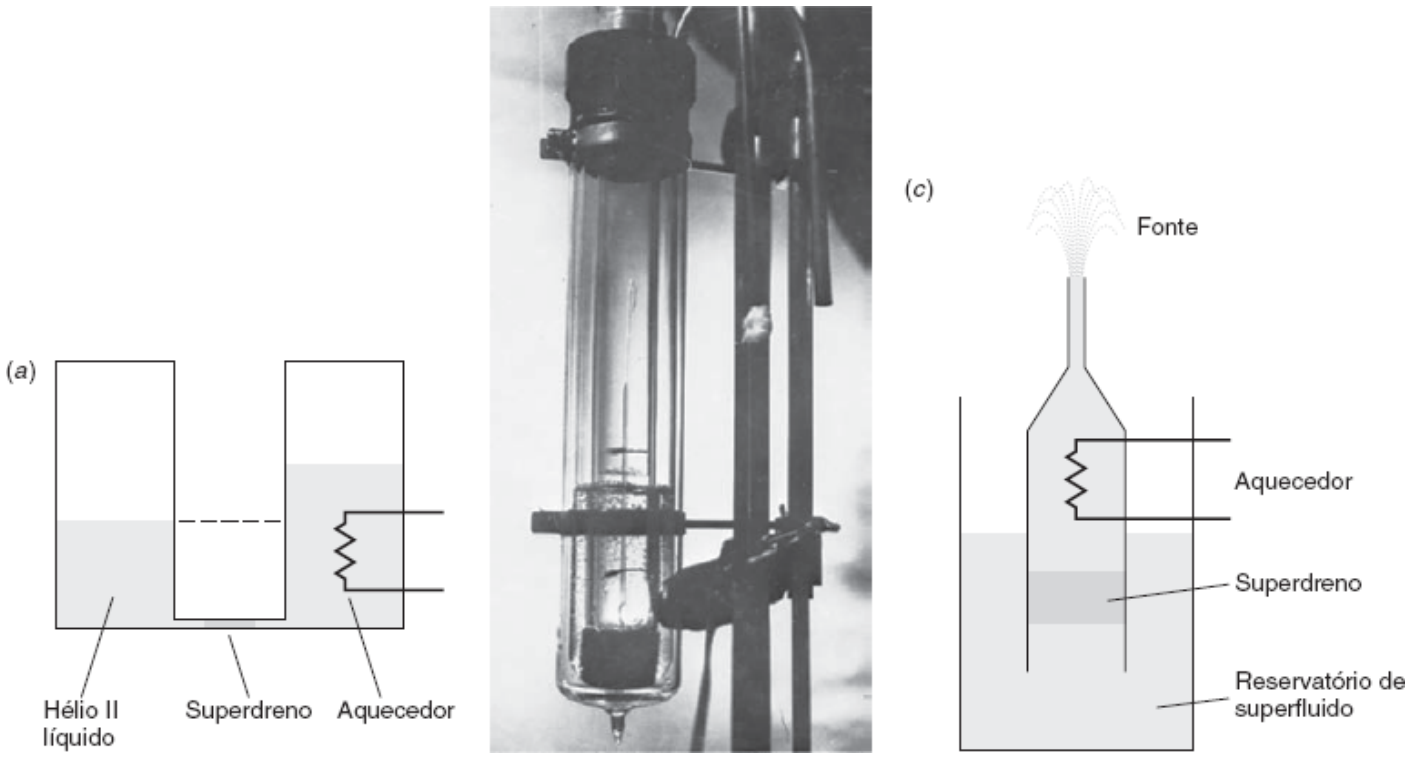


FIGURA 8-23 (*a*) Diagrama do efeito termomecânico. O nível do fluido sobe no recipiente que está sendo aquecido. (*b*) Um recipiente com hélio líquido está imerso em um banho de hélio II a 1,6 K. Quando o recipiente é iluminado, o nível do hélio sobe no interior até uma altura que depende da largura do tubo. Se o fundo do tubo é selado com um pó, formando um superdreno, e a parte de cima é estreita, o superfluido jorra para fora do recipiente, em um fenômeno conhecido como "efeito fonte". (*c*) Diagrama mostrando os componentes do sistema cuja fotografia aparece em (*b*). [*Foto cortesia de Helix Technology Corporation*.]

Na distribuição de Bose-Einstein, o número de partículas no intervalo dE é dado por $n(E)dE$, sendo, de acordo com a Equação 8-37*b*,

$$n(E) = \frac{g(E)}{e^{\alpha}e^{E/kT} - 1} \qquad \textbf{8-46}$$

na qual a função $g(E)$ é dada pela Equação 8-41. A constante α, que é determinada por normalização, não pode ser negativa, pois, nesse caso, $n(E)$ seria negativo para pequenos valores de E e não faz sentido falarmos de um número negativo de partículas. A condição de normalização é a seguinte:

$$N = \int_0^{\infty} n(E)dE = \frac{2\pi V(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^{\infty}\frac{E^{1/2}dE}{e^{\alpha}e^{E/kT} - 1}$$
$$= \frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^{\infty}\frac{x^{1/2}dx}{e^{\alpha+x} - 1} \qquad \textbf{8-47}$$

na qual $x = E/kT$ e a integral é uma função de α.

A justificativa mais comum do uso de uma distribuição contínua de energias para descrever um sistema quântico no qual os níveis de energia são discretos é a de que os níveis de energia são numerosos e estão muito próximos. Neste caso, que corresponde a um gás de N partículas em uma caixa macroscópica de volume V (o recipiente), estas condições são satisfeitas, como o leitor pode verificar calculando o espaçamento entre os níveis com o auxílio da Equação 7-4. Acontece, porém, que, quando substituímos a distribuição discreta de estados por uma distribuição contínua, o estado fundamental desaparece. Isto pode ser visto, por exemplo, na Equação 8-41, segundo a qual $g(E) \propto E^{1/2}$ e, portanto, $g(E) = 0$ para $E = 0$. Este fato não é importante no caso de um gás de férmions, já que cada estado espacial não pode ser ocupado por mais de duas partículas e não há problema em ignorar duas partículas em 10^{22}. Em um gás de bósons, porém, não existem restrições quanto ao número de partículas que podem ocupar o mesmo estado. Quando ignoramos o estado fundamental, como temos feito até agora, a condição de normalização expressa pela Equação 8-47 não pode ser satisfeita abaixo de uma certa temperatura crítica T_c, que corresponde ao menor valor possível de α, $\alpha = 0$. Isso significa que, em temperaturas muito baixas, existe um número significativo de partículas no estado fundamental.

A temperatura crítica T_c pode ser determinada resolvendo numericamente a Equação 8-47. A integral tem um valor máximo de 2,315 quando α tem o valor mínimo de 0. Isso significa que N/V não pode ser maior que um certo valor limite:

$$\frac{N}{V} \leq \frac{2\pi}{h^3}(2mkT)^{3/2}(2{,}315)$$

Como a razão N/V é determinada pela massa específica do hélio líquido, isso significa que a temperatura T deve ser maior que uma certa temperatura crítica:

$$T \geq \frac{h^2}{2mk}\left[\frac{N}{2\pi(2{,}315)V}\right]^{2/3} = T_c \qquad \textbf{8-48}$$

Substituindo a massa específica do hélio e as constantes físicas por seus valores, obtemos o valor da temperatura crítica:

$$T_c = 3{,}1 \text{ K} \qquad \textbf{8-49}$$

Em temperaturas menores que 3,1 K, a condição de normalização (Equação 8-47) não pode ser satisfeita para nenhum valor de α. É evidente que, nessas temperaturas, existe um número significativo de partículas no estado fundamental, que não foi levado em consideração nos cálculos.

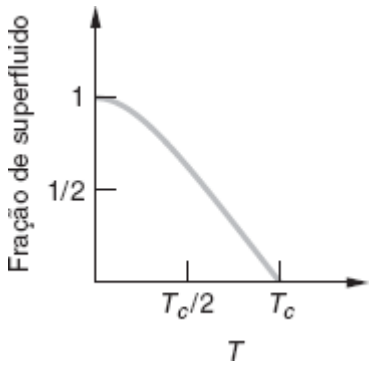


FIGURA 8-24 Gráfico da fração de superfluido em uma amostra de hélio líquido em função da temperatura.

Podemos incluir explicitamente o estado fundamental substituindo a Equação 8-47 por

$$N = N_0 + \frac{2\pi V}{h^3}(2mkT)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}dx}{e^{\alpha+x}-1} \qquad \textbf{8-50}$$

em que N_0 é o número de partículas no estado fundamental. Tomando como referência a energia do estado fundamental, $E_0 = 0$ e, portanto,

$$N_0 = \frac{g_0}{e^\alpha e^{E_0/kT}-1} = \frac{1}{e^\alpha - 1} \qquad \textbf{8-51}$$

em que g_0, a densidade de estados ou peso estatístico, é igual a 1 para um singleto. Vemos que N_0 aumenta quando α diminui. Com a inclusão de N_0, que depende de α, a condição de normalização (Equação 8-50) pode ser satisfeita e o valor de α pode ser calculado para qualquer temperatura e qualquer massa específica. No caso de temperaturas menores que T_c, vemos que, de acordo com a Equação 8-51, $e^\alpha = 1 + 1/N_0$. Usando a expansão de e^α para pequenos valores de α, $e^\alpha = 1 + \alpha + ...$, vemos que α é da ordem de $1/N_0$ e a fração de moléculas no estado fundamental é dada aproximadamente por

$$\frac{N_0}{N} \approx 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \qquad \textbf{8-52}$$

No modelo de dois fluidos de London, os N_0 átomos que acrescentamos à Equação 8-50 se condensaram no estado fundamental. São esses átomos no estado fundamental que constituem o superfluido; os $N - N_0$ átomos restantes constituem o fluido normal. A Figura 8-24 mostra a fração de superfluido na mistura em função da temperatura para $T \leq T_c$.

A concordância do valor teórico da temperatura crítica, T_c = 3,1 K, com o valor experimental da temperatura do ponto lambda, T = 2,17 K, pode ser considerada razoável, especialmente se levarmos em conta que os cálculos teóricos se baseiam na hipótese de que o hélio líquido se comporta como um gás ideal. O processo de acumulação de átomos no estado fundamental em baixas temperaturas é conhecido como *condensação de Bose-Einstein*. O fenômeno foi previsto por Einstein em 1924, mas

levou mais de 70 anos para ser observado.

O Condensado de Bose-Einstein

Como acontece em qualquer átomo, todas as partículas que compõem o ^{4}He (prótons, nêutrons e elétrons) são férmions; entretanto, no caso do ^{4}He, essas partículas estão associadas de tal forma que o spin total do estado fundamental é um número inteiro (zero) e portanto o *átomo* de ^{4}He é um bóson. Na verdade, um exame da tabela periódica mostra que, embora os átomos possam ser férmions ou bósons, o spin do estado fundamental é um número inteiro na maioria dos casos; logo, a maioria dos átomos são bósons no estado de menor energia. Este fato não é importante para a determinação das propriedades de um gás em um recipiente macroscópico, já que o espaçamento dos níveis de energia é extremamente pequeno e, portanto, é também pequena a probabilidade de que um nível qualquer esteja ocupado por um átomo. Assim, por exemplo, o espaçamento entre os níveis de energia em uma caixa cúbica com um volume de 1 cm^3 contendo vapor de sódio é da ordem de 10^{-20} eV (veja a Equação 8-38), de modo que, mesmo em temperaturas relativamente baixas, os átomos de uma amostra com um bilhão de átomos ocupam apenas uma pequena fração dos estados disponíveis, como mostra a Figura 8-25*a*. Além disso, a distância média entre os átomos no interior do recipiente é da ordem de $(10^{-6}\ \text{m}^3/10^9\ \text{átomos})^{1/3} = 10^{-5}$ m, ou seja, dezenas de milhares de diâmetros atômicos; isso significa que os átomos quase não interagem.

O método mais óbvio para formar um condensado de Bose-Einstein (CBE) a partir dos bósons contidos em um recipiente seria reduzir a temperatura e aumentar a pressão, como se costuma fazer para liquefazer um gás. Entretanto, esta abordagem envolve um sério problema: quando o gás se liquefaz, a distância entre os átomos diminui e os átomos passam a interagir através dos elétrons da última camada, o que faz com que passem a se comportar como férmions! [É o que acontece com o hélio II líquido, no qual, mesmo em temperaturas muito baixas, a fração de átomos no estado fundamental (fase superfluida) constitui apenas 10% do total.]

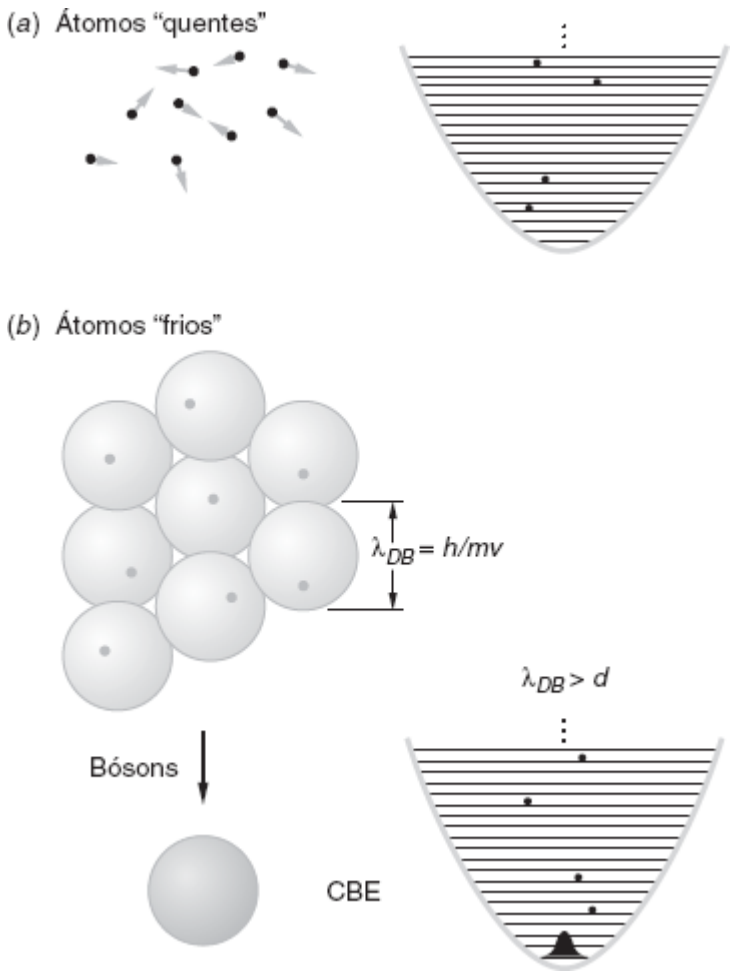


FIGURA 8-25 (*a*) Como os átomos de uma amostra de gás em um recipiente macroscópico estão distribuídos por um número muito grande de níveis, a probabilidade de que um desses níveis esteja ocupado é extremamente pequena. (*b*) Quando o gás é resfriado a tal ponto que o comprimento de onda de de Broglie se torna maior que a distância interatômica, os átomos tendem a se concentrar no estado fundamental e todos ocupam a mesma região do espaço.

O problema foi resolvido por C. E. Wieman e E. Cornell em 1995, mais de 70 anos após a previsão de Einstein. O que os dois pesquisadores fizeram foi formar o CBE diretamente a partir de um vapor supersaturado, resfriando a amostra sem permitir

que atingisse o equilíbrio térmico.[14] Isso foi feito combinando técnicas de resfriamento convencionais com um "truque" muito engenhoso. Em primeiro lugar, uma amostra de vapor de rubídio à temperatura ambiente foi iluminada por seis lasers semicondutores de uma frequência apropriada. As colisões dos fótons dos lasers com os átomos da parte de baixas velocidades de distribuição de Maxwell (veja a Figura 8-3) reduziram ainda mais a velocidade desses átomos; após um ou dois segundos, uma coleção de aproximadamente 10^7 átomos se concentrou em uma região com aproximadamente 1,5 cm de diâmetro, definida pela interseção dos feixes dos lasers. A temperatura dos átomos nesta "nuvem" era da ordem de 1 mK. Em seguida, uma armadilha magnética especial (ou seja, um campo magnético não uniforme) foi usada para "comprimir" os átomos da nuvem, cujos spins atômicos ($J = 2$) tinham sido polarizados no estado $m_J = 2$. [Polarizar os spins foi o "truque" a que nos referimos. No vapor de átomos polarizados, o equilíbrio é atingido rapidamente, muito antes que o verdadeiro estado de equilíbrio (o sólido) possa se formar, o que mantém a nuvem em um estado de vapor supersaturado.] A armadilha magnética contém um "dreno" que permite a passagem dos átomos mais "quentes" da extremidade de altas velocidades da distribuição de Maxwell, levando boa parte da energia cinética do sistema, o que resfria os átomos restantes (alguns milhares) a uma temperatura de menos de 100 nK, da mesma forma como as moléculas de água que evaporam da superfície de uma xícara de café resfriam o líquido que permanece na xícara. Esses átomos restantes passam a ocupar o estado fundamental da armadilha magnética e a temperatura cai a zero. São esses átomos que formam o condensado que aparece na Figura 8-25*b*. O condensado se mantém estável durante 15 a 20 segundos antes de ser destruído por colisões com átomos de impurezas, que também estão colidindo com as paredes quentes do recipiente. O pico que aparece na Figura 8-26 é uma *função de onda macroscópica* do condensado.

Depois da descoberta de Wieman e Cornell, vários outros físicos produziram condensados de Bose-Einstein. Um dos maiores, produzido em 1996 por W. Ketterle e colaboradores, tinha 5×10^6 átomos de sódio, um milímetro de comprimento e durou meio minuto (Figura 8-27). No momento, os maiores condensados são feitos de hidrogênio e contêm cerca de 10^9 átomos.

Este novo estado da matéria tem alguma aplicação prática? Provavelmente a maioria ainda está para ser descoberta, mas existe uma que vale a pena mencionar. O CBE pode ser usado como base para a fabricação de um *laser atômico*. Este fato foi demonstrado no final de 1996, também por Ketterle e colaboradores, e está ilustrado na Figura 8-28. O condensado é um conjunto coerente de átomos, assim como a luz produzida por um laser é um conjunto coerente de fótons. Por essa razão, um laser atômico seria capaz de depositar átomos em substratos com enorme precisão, possivelmente tomando o lugar da microlitografia na produção de microcircuitos. O laser atômico também poderia ser usado em interferômetros, o que permitiria executar medidas mais precisas do que com lasers, já que os comprimentos de onda de de Broglie dos átomos são muito menores que os da luz visível. Ketterle, Cornell e Wieman receberam o Prêmio Nobel de Física de 2001 por suas pesquisas com condensados de Bose-Einstein.

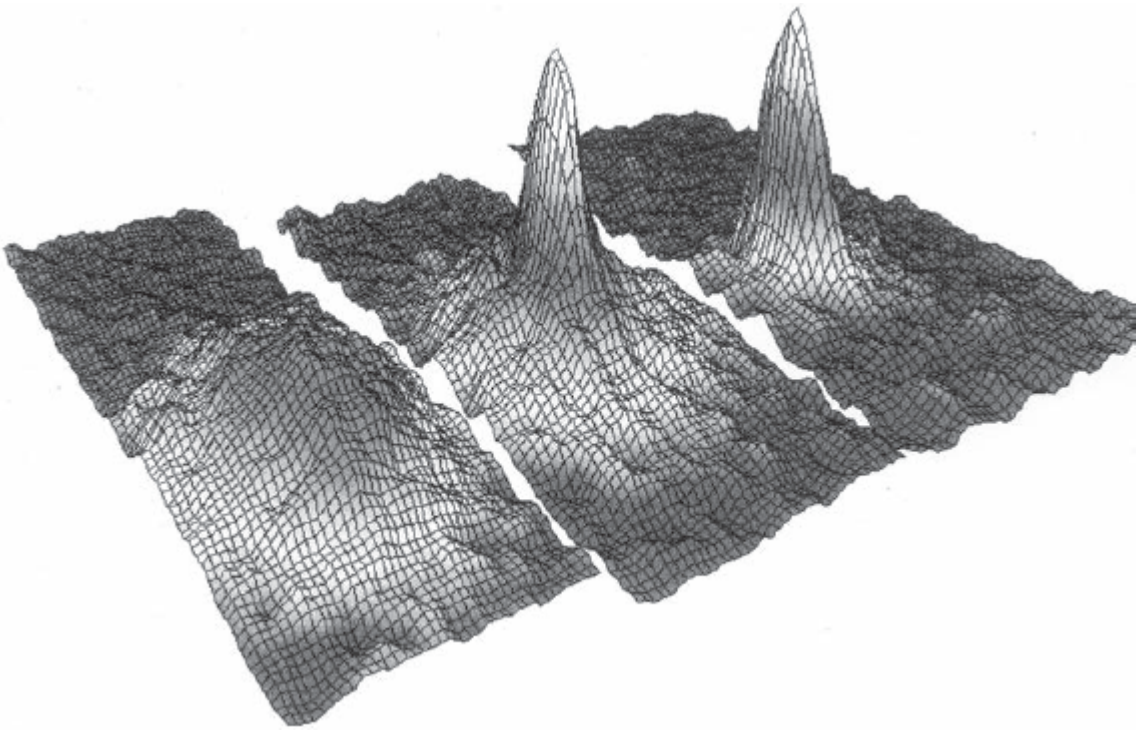


FIGURA 8-26 Distribuição bidimensional de velocidade da nuvem atômica de átomos de Rb para três experimentos nos quais a temperatura final é diferente. Os eixos são as componentes x e z da velocidade; o terceiro eixo é o número de átomos por unidade de velocidade e por unidade de volume, calculado a partir da transparência da nuvem. A distribuição da esquerda apresenta uma pequena elevação e corresponde a uma temperatura de aproximadamente 200 nK. A figura do meio corresponde a uma temperatura de aproximadamente 100 nK e mostra o condensado na forma de um pico central cercado por uma elevação mais suave. Na figura da direita, apenas os átomos do condensado são visíveis, o que indica que a amostra atingiu a temperatura do zero absoluto, dentro do erro

experimental. As faixas cinzentas no meio dos picos surgiram por causa da conversão para preto e branco da figura original, na qual diferentes cores eram usadas para representar diferentes concentrações de partículas. [*Fonte*: C.E. Wieman, *American Journal of Physics* **64** (7), 853 (1996).]

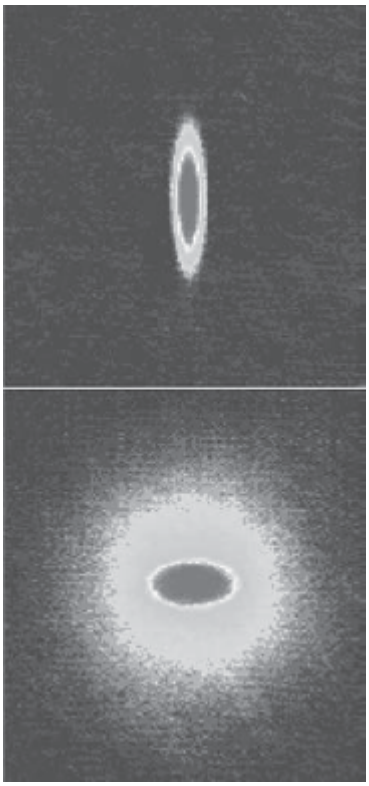


FIGURA 8-27 Duas imagens sucessivas de uma nuvem de átomos de um milímetro de comprimento contendo um condensado de Bose-Einstein. [*Fonte*: M. O. Mewes *et al*., *Phys. Rev. Lett.* **77**, 416 (1996).]

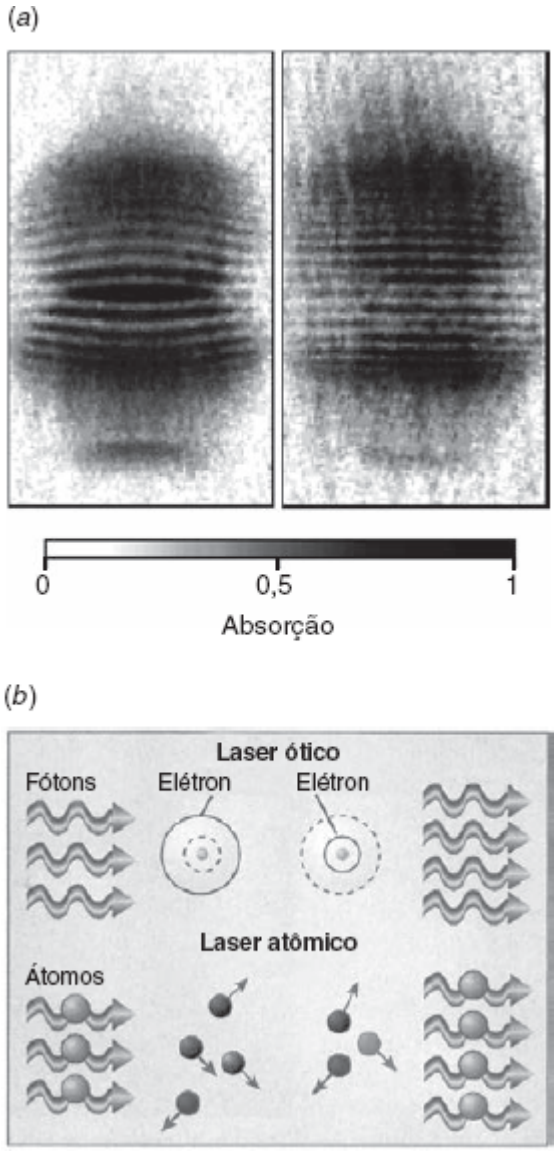


FIGURA 8-28 (*a*) Quando dois condensados iguais de átomos de sódio, cada um contendo cerca de 5×10^6 átomos, expandem e se superpõem, aparecem franjas de interferência, revelando a existência de ondas de matéria coerentes, no que pode ser chamado o primeiro laser atômico. (*b*) Os lasers óticos amplificam a luz estimulando os átomos a emitir fótons; os lasers atômicos amplificam um feixe atômico estimulando novos átomos a se juntarem ao feixe. [(*a*) *Fonte*: M. R. Andrews *et al*., *Science* **275**, 637 (1997). (*b*) *Fonte*: A. Hellemans, *Science* **279**, 986 (1998).]

Exercícios

9. Explique por que a saída de átomos "quentes" de rubídio causa o resfriamento dos átomos restantes.

10. O que é a condensação de Bose-Einstein?

11. Você acha que um gás ou líquido de átomos de ^{3}He deveria ser muito diferente de um gás ou líquido de átomos de ^{4}He? Por quê?

8-4 O Gás de Fótons: Uma Aplicação da Estatística de Bose-Einstein

O Gás de Fótons

É possível demonstrar a expressão empírica proposta por Planck para o espectro da radiação de corpo negro de uma cavidade (Equação 3-18) tratando os fótons que existem no interior da cavidade como um gás de bósons. A distribuição dos fótons é dada por

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1} \qquad \textbf{8-24}$$

Como vimos na Seção 8-2 e, em particular, na discussão da Equação 8-44, o valor de α depende do número total de partículas

do sistema. No caso que estamos examinando, isto parece ser um problema, pois o número total de fótons no interior da cavidade não é constante; fótons estão sendo constantemente criados (emitidos pelos osciladores que existem nas paredes da cavidade) e destruídos (absorvidos pelos osciladores). Na verdade, porém, esta aparente dificuldade ajuda a determinar o valor de α, pois significa que, no caso dos *fótons*, a Equação 8-24 *não pode* conter o fator e^{α}, ou seja, que

$$f_{\text{fot}}(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1} \qquad \textbf{8-53}$$

Em outras palavras, o fato de que o número total de fótons não é constante torna necessário que $\alpha = 0$ para que $e^{\alpha} = 1$. Veremos daqui a pouco que esta conclusão está de acordo com os resultados experimentais.

O número de fótons com energia E pode ser calculado substituindo a Equação 8-53 na Equação 8-37*b*:

$$n_{\text{fot}}(E) = g_{\text{fot}}(E) f_{\text{fot}}(E)$$

ou

$$n_{\text{fot}}(E) = \frac{g_{\text{fot}}(E)}{e^{E/kT} - 1} \qquad \textbf{8-54}$$

A densidade de estados $g_{\text{fot}}(E)$ pode ser calculada da mesma forma que na Seção 8-2. O resultado, que obtivemos como $n(\lambda) = 8\pi\lambda^{-4}$ na Seção 3-2 (Equação 3-8), pode ser expresso, em termos da frequência, da seguinte forma:

$$g_{\text{fot}}(E)\,dE = \frac{8\pi V f^2\,df}{c^3} = \frac{8\pi V E^2\,dE}{c^3 h^3} \qquad \textbf{8-55}$$

em que V é o volume da cavidade. A densidade de energia $u(E)dE$ no intervalo de E a $E + dE$ é, portanto,

$$u(E)\,dE = \frac{E g_{\text{fot}}(E) f_{\text{fot}}(E)\,dE}{V} = \frac{8\pi E^3\,dE}{c^3 h^3 (e^{E/kT} - 1)} \qquad \textbf{8-56}$$

ou, em termos da frequência f dos fótons, usando a relação $E = hf$ para a conversão,

$$u(f)\,df = \frac{8\pi f^2}{c^3} \frac{hf\,df}{e^{hf/kT} - 1} \qquad \textbf{8-57}$$

A Equação 8-57 é equivalente à Equação 3-18, como é fácil verificar convertendo o comprimento de onda λ da Equação 3-18 em frequência f através da relação $\lambda = c/f$. Como vimos no Capítulo 3, a Equação 3-18 concorda perfeitamente com os resultados experimentais. Esta concordância é uma confirmação de que a Equação 8-53, obtida fazendo $\alpha = 0$ na distribuição de Bose-Einstein, é a equação apropriada para representar a distribuição de energia dos fótons. Note que a demonstração apresentada no Capítulo 3, na qual a radiação de corpo negro foi tratada como um conjunto de ondas eletromagnéticas clássicas às quais Planck aplicou (corretamente) a distribuição de Boltzmann, concorda perfeitamente com a demonstração apresentada neste capítulo, no qual a radiação é tratada como um conjunto de partículas quânticas, às quais deve ser aplicada a distribuição de Bose-Einstein. Este é mais um exemplo de dualismo onda-partícula.

EXEMPLO 8-7 **Concentração de Fótons no Universo Atual** A temperatura inicial do universo era extremamente elevada, mas, com o passar do tempo, o universo esfriou até atingir a temperatura que possui hoje em dia, 2,7 K. Assim, deve existir no universo uma radiação de fundo cuja distribuição espectral corresponde a um corpo negro a 2,7 K. Essa radiação foi descoberta em 1965 (veja o Capítulo 13). Determine o número de fótons da radiação cósmica de fundo por unidade de volume no universo de hoje.

SOLUÇÃO

1. O número de fótons com energia E é dado pela Equação 8-54:

$$n_{\text{fot}}(E) = \frac{g_{\text{fot}}(E)}{e^{E/kT} - 1}$$

2. O número total de fótons por unidade de volume é dado por:

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V}\int_0^{\infty} n_{\text{fot}}(E)\,dE = \frac{1}{V}\int_0^{\infty} \frac{g_{\text{fot}}(E)\,dE}{e^{E/kT} - 1}$$

3. Substituindo a densidade de estados $g_{fot}(E)$ por seu valor, dado pela Equação 8-55, temos:

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty \frac{8\pi E^2 dE}{(ch)^3 (e^{E/kT} - 1)}$$
$$= \frac{8\pi (kT)^3}{(ch)^3} \int_0^\infty \frac{(E/kT)^2 (dE/kT)}{e^{E/kT} - 1}$$

4. Fazendo $x = E/kT$, temos:

$$\frac{N}{V} = 8\pi \left(\frac{kT}{ch}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

5. O valor da integral pode ser encontrado em uma tabela de integrais:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 2{,}40$$

6. Substituindo as constantes e a variável T na equação do item (4) por seus valores numéricos, temos:

$$\frac{N}{V} = 8\pi \left(\frac{1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K} \times 2{,}7\ \text{K}}{3{,}00 \times 10^{8}\ \text{m/s} \times 6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}\right)^3 (2{,}40)$$
$$= 3{,}97 \times 10^{8}\ \text{fótons/m}^3$$

Quantização dos Estados de Energia nos Sólidos



23

Já comentamos que, no caso dos sólidos, o calor específico molar C_V apresenta o valor clássico $3R$ dado pela lei de Dulong e Petit apenas em temperaturas elevadas; quando a temperatura cai abaixo de um certo valor, o calor específico começa a diminuir. Em 1908, Einstein mostrou que a discrepância entre as previsões teóricas e os valores experimentais do calor específico em baixas temperaturas poderia ser explicada supondo que a energia dos átomos nos sólidos podia assumir apenas certos valores. O cálculo de Einstein se parece muito com o cálculo da energia média de um oscilador harmônico usado por Planck para analisar o problema da radiação do corpo negro. Como vimos no Capítulo 3, o cálculo em si não apresenta grandes dificuldades; a contribuição mais importante de Einstein foi estender a ideia da quantização a partículas de matéria. Vamos mostrar nesta subseção que a ideia de estados quantizados para a matéria também explica o comportamento anômalo do calor específico dos gases diatômicos, mencionado na Seção 8-1. Em particular, explicaremos por que a molécula de H_2 parece ter apenas 3 graus de liberdade (correspondentes a translações) em baixas temperaturas, 5 graus de liberdade (correspondentes a translações e rotações) em temperaturas intermediárias e 7 graus de liberdade (correspondentes a translações, rotações e vibrações) em altas temperaturas.

Considere os N_A átomos contidos em um mol de um sólido qualquer e imagine que esses átomos estão livres para vibrar em três dimensões em relação a um ponto fixo. Para simplificar o problema, Einstein supôs que todos os átomos estavam vibrando com a mesma frequência f nas três dimensões espaciais. Nesse caso, o problema é equivalente ao de $3N_A$ osciladores clássicos unidimensionais de frequência f. A função de distribuição clássica para um conjunto desse tipo é a distribuição de Boltzmann, dada pela Equação 8-1. Aproveitando as ideias de Planck, Einstein supôs que a energia de cada um desses osciladores só podia assumir os valores dados pela expressão

$$E_n = nhf \qquad \textbf{8-58}$$

na qual $n = 0, 1, 2, \ldots$, em lugar de possuírem o valor médio kT estipulado pelo teorema da equipartição. Em seguida, Einstein usou a distribuição de Boltzmann[15] para calcular a energia média $\langle E \rangle$ dos osciladores clássicos através da equação

$$\langle E \rangle = \int_0^\infty E n_B(E) dE \qquad \textbf{8-59}$$

e obteve

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \qquad \textbf{8-60}$$

que, naturalmente, equivale à Equação 3-17. Em altas temperaturas, a razão hf/kT é pequena e podemos substituir a exponencial pelos dois primeiros termos da expansão $e^x \approx 1 + x + x^2/2 + \ldots$, sendo $x = hf/kT$ (veja o Apêndice B2). Nesse caso, conservando apenas os dois primeiros termos da expansão, obtemos:

$$e^{hf/kT} - 1 \approx \left(1 + \frac{hf}{kT} + \cdots\right) - 1 \approx \frac{hf}{kT}$$

e $\langle E \rangle$ se torna aproximadamente igual a kT, como estabelece o teorema da equipartição (veja a Equação 8-23).

A energia total dos $3N_A$ osciladores é, portanto,

$$U = 3N_A\langle E \rangle = \frac{3N_A hf}{e^{hf/kT} - 1} \qquad \textbf{8-61}$$

e o calor específico é dado por

$$C_V = \frac{dU}{dT} = 3N_A k\left(\frac{hf}{kT}\right)^2 \frac{e^{hf/kT}}{(e^{hf/kT} - 1)^2} \qquad \textbf{8-62}$$

Fica a cargo do leitor (Problema 8-29) mostrar, a partir da Equação 8-62, que $C_V \to 0$ para $T \to 0$ e $C_V \to 3N_A k = 3R$ para $T \to \infty$.

Comparando o resultado obtido por Einstein para a energia média por molécula, Equação 8-60, com o resultado clássico, podemos ter uma ideia da faixa de temperaturas em que o resultado clássico pode ser usado. Vamos definir uma temperatura crítica

$$T_E = \frac{hf}{k} \qquad \textbf{8-63}$$

que é conhecida como *temperatura de Einstein*. Escrevendo a distribuição de energia em termos desta temperatura, temos:

$$f_B(E_n) = Ae^{-E_n/kT} = Ae^{-nhf/kT} = Ae^{-nT_E/T}$$

Em temperaturas muito maiores que T_E, pequenas variações de n têm pouca influência sobre o valor da exponencial e, portanto, sobre o valor da distribuição como um todo, ou seja, $f_B(E_n) \approx f_B(E_{n+1})$. Isso significa que a energia E pode ser tratada como uma variável contínua. Em temperaturas muito menores que T_E, porém, até mesmo a menor variação possível de n, $\Delta n = 1$, resulta em uma mudança significativa de $e^{-nT_E/T}$ e, portanto, a descontinuidade dos valores permitidos de energia se torna relevante. Como as forças de ligação entre os átomos são maiores nos sólidos duros que nos sólidos macios, a frequência de oscilação dos átomos e a temperatura de Einstein são maiores nos sólidos duros. No caso do chumbo e do ouro, T_E é da ordem de 50 a 100 K; a temperatura ambiente (300 K) é "elevada" para esses materiais e eles obedecem à lei clássica de Dulong e Petit à temperatura ambiente. No diamante, por outro lado, T_E é maior que 1000 K; nesse caso, portanto, 300 K é uma temperatura "baixa" e C_V é muito menor que $3R$ à temperatura ambiente.

A concordância entre a Equação 8-62 e os resultados experimentais é uma indicação de que a abordagem proposta por Einstein está correta. A Figura 8-29 mostra uma comparação entre esta equação e os resultados experimentais. A curva se ajusta bem aos resultados experimentais, exceto em temperaturas muito baixas, nas quais os pontos experimentais estão ligeiramente acima da curva. Isto se deve ao fato de que Einstein usou um modelo excessivamente simplificado, no qual todos os átomos oscilavam com a mesma frequência. Um modelo mais realista foi proposto por P. Debye, que tratou o sólido como um sistema de osciladores acoplados, capazes de oscilar com qualquer frequência entre 0 e um valor máximo f_D conhecido como *frequência de Debye* e usado para definir a *temperatura de Debye*, $T_D = hf_D/k$. No caso da radiação de corpo negro (veja, por exemplo, a Equação 3-16), não existe limite superior para as frequências de oscilação; a justificativa de Debye para impor este limite no caso dos sólidos foi que o número de modos de oscilação não pode ser maior que o número de graus de liberdade dos átomos que compõem o sólido. Os cálculos associados ao modelo de Debye são mais trabalhosos e não serão discutidos aqui. A Figura 8-30 mostra uma comparação entre uma curva teórica baseada no modelo de Debye e os resultados experimentais; a concordância é melhor que com o modelo de Einstein. Observe que a mesma curva teórica vale para *todos* os sólidos.

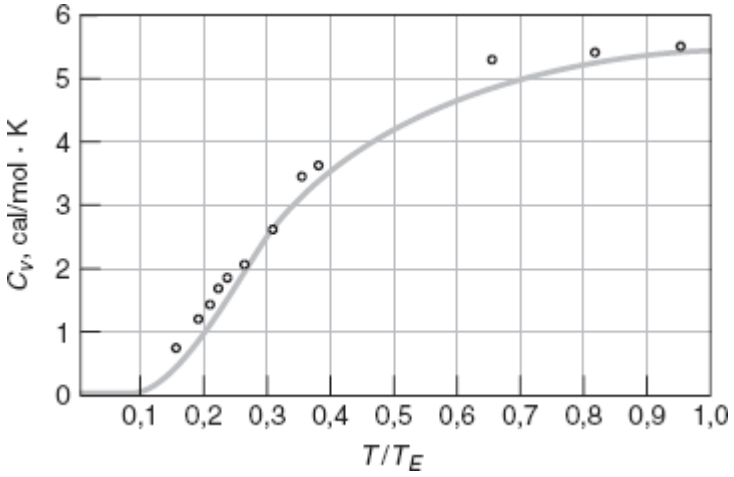


FIGURA 8-29 Calor específico molar do diamante em função da temperatura reduzida T/T_E. A curva contínua é a proposta por Einstein. [*Fonte*: *Artigo original de Einstein*, *publicado em Annalen der Physik* **22**(4), 180 (1907).]

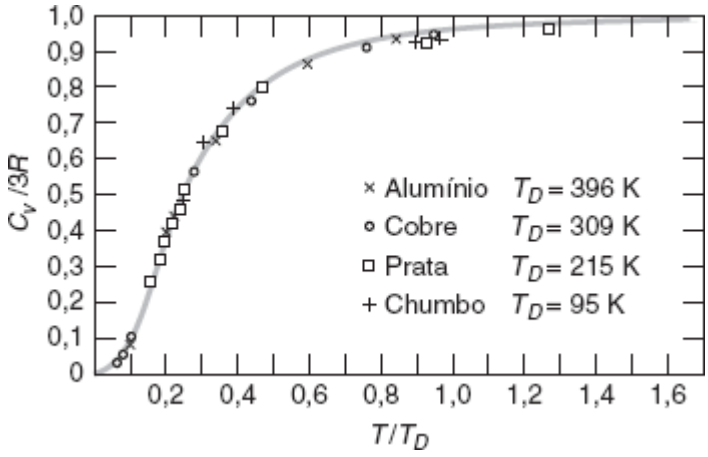


FIGURA 8-30 Calor específico molar de vários sólidos em função da temperatura reduzida T/T_D, para o qual T_D é a temperatura de Debye, definida através da equação $T_D = hf_D/k$. A curva contínua é a proposta por Debye. Os dados foram extraídos do artigo original de Debye. $C_V/3R = 1$ é o valor previsto pela lei de Dulong e Petit. [*Publicado originalmente* em *Annalen der Physik* **39** (4), 789 (1912), e adaptado por David MCDonald, *Introductory Statistical Mechanics for Physicists*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963, com permissão.]

Explicação do Calor Específico dos Gases

Vamos agora verificar se o fato de as energias serem discretas, ou quantizadas, permite explicar os valores experimentais do calor específico dos gases diatômicos. Como vimos na Seção 8-1, a energia de uma molécula diatômica pode ser considerada como a soma das energias de translação, rotação e vibração. Se f é a frequência de vibração e a energia de vibração pode assumir apenas os valores dados por $E_{vib} = nhf$, como no caso dos sólidos, os cálculos anteriores mostram (veja a Equação 8-62) que, em baixas temperaturas, a energia média de vibração tende a zero e as vibrações não contribuem para C_V. Podemos definir uma temperatura crítica de vibração de uma molécula de um gás diatômico através da equação

$$T_v = \frac{hf}{k} \qquad \textbf{8-64}$$

onde f é a frequência de vibração. Os resultados experimentais indicam que $T_v > 15$ºC para todos os gases diatômicos que aparecem na Tabela 8-1, exceto o Cl_2. De acordo com os dados da Figura 8-11, T_v está entre 1000 e 5000 K no caso do H_2.

A energia de rotação de uma molécula diatômica é dada por

$$E_R = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

em que I é o momento de inércia e ω é a velocidade angular de rotação. Para determinar de que forma a energia de rotação é quantizada, vamos fazer uso de um resultado obtido na Seção 7-2, o de que o momento angular é quantizado. Se $L = I\omega$ é o momento angular de uma molécula diatômica, a energia pode ser escrita na forma

$$E_R = \frac{L^2}{2I}$$

De acordo com a Equação 7-22, $L^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$, em que $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ Nesse caso, a energia de rotação se torna

$$E_R = \ell(\ell + 1)\frac{h^2}{8\pi^2 I} \qquad \textbf{8-65}$$

A função de distribuição da energia contém o fator

$$e^{-E_R/kT} = e^{-\ell(\ell+1)h^2/8\pi^2 IkT}$$

e podemos definir uma temperatura crítica para rotações, semelhante à temperatura crítica para vibrações, através de equação

$$T_R = \frac{E_R}{k} = \frac{h^2}{8\pi^2 Ik} \qquad \textbf{8-66}$$

Se nosso raciocínio estiver correto, esperamos que para temperaturas $T >> T_R$, ou seja, para $E_R >> kT$, o teorema da equipartição seja válido para rotações e a energia média de rotação tenda a $kT/2$ para cada eixo de rotação, enquanto, para temperaturas $T << T_R$, a energia média de rotação deve tender a 0. Vamos examinar T_R para alguns casos de interesse:

1. H_2. Para rotações em torno dos eixos x' e y', como na Figura 8-10*a*, tomando o eixo dos z' na direção da reta que liga os dois átomos, os momentos de inércia $I_{x'}$ e $I_{y'}$ são dados por

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{MR^2}{2}$$

A distância entre os átomos, R, é aproximadamente 0,08 nm. A massa do átomo de hidrogênio, M, é aproximadamente 940 $\times 10^6$ eV/c^2. Vamos primeiro calcular kT_R:

$$kT_R = \frac{h^2}{8\pi^2 I} = \frac{(hc)^2}{4\pi^2 Mc^2 R^2} = \\ = \frac{(1{,}24 \times 10^3\,\text{eV}\cdot\text{nm})^2}{4\pi^2(940 \times 10^6\,\text{eV})(0{,}08\,\text{nm})^2} \approx 6{,}4 \times 10^{-3}\,\text{eV}$$

Levando em conta que $k \approx 2{,}6 \times 10^{-2}$ eV/300 K, obtemos:

$$T_R = \frac{6{,}4 \times 10^{-3}}{2{,}6 \times 10^{-2}} 300\,\text{K} \approx 74\,\text{K}$$

Como se pode ver na Figura 8-11, esta é realmente a faixa de temperaturas a partir da qual a energia de rotação passa a contribuir para o calor específico.

2. O_2. Como a massa do átomo de oxigênio é 16 vezes maior que a do átomo de hidrogênio e a distância entre os átomos é aproximadamente a mesma nas duas moléculas, a temperatura crítica para rotações da molécula de oxigênio é $T_R \approx 74/16 \approx 4{,}6$ K. Para todas as temperaturas nas quais o O_2 existe em estado gasoso, $T >> T_R$.

3. Um gás monoatômico ou a rotação de um gás diatômico em torno do eixo z. Vamos fazer o cálculo para o átomo de hidrogênio. O momento de inércia do átomo se deve principalmente ao elétron, já que o raio do núcleo é extremamente pequeno, da ordem de 10^{-15} m. A distância entre o elétron e o núcleo é da mesma ordem que a distância entre os átomos na molécula de H_2. Como a massa do elétron é aproximadamente 2000 vezes menor que a do átomo, temos:

$$I_H \approx \frac{1}{2000} I_{H_2}$$

e, portanto,

$$T_R \approx 2000 \times 74\,\text{K} \approx 1{,}5 \times 10^5\,\text{K}$$

Esta temperatura é muito maior que a temperatura de dissociação de qualquer gás. Assim, $\langle E_R \rangle = 0$ em qualquer temperatura para os gases monoatômicos e para a rotação dos gases diatômicos em torno da reta que liga os dois átomos.

Vemos, portanto, que a quantização da energia explica, pelo menos qualitativamente, a variação do calor específico de gases e sólidos com a temperatura.

EXEMPLO 8-8 **Energia Média de Vibração** Qual é a energia média de vibração das moléculas de um sólido (*a*) para $T = hf/2k$; (*b*) para $T = 4hf/k$?

SOLUÇÃO

(*a*) Como a temperatura dada é menor que a temperatura crítica para vibrações, que é hf/k (Equação 8-64), esperamos um valor bem menor que kT, o valor previsto pelo teorema da equipartição. De acordo com a Equação 8-60, temos:

$$\langle E \rangle = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} = \frac{2kT}{e^2 - 1} = 0{,}31kT$$

(*b*) Como a temperatura é quatro vezes maior que a temperatura crítica, esperamos um valor próximo de kT. Fazendo $hf/kT = 1/4$ na Equação 8-60, obtemos:

$$\langle E \rangle = \frac{0{,}25kT}{e^{0{,}25} - 1} = 0{,}880kT$$

EXEMPLO 8-9 **Número de Osciladores** Determine a razão entre o número de osciladores com energia $E_1 = hf$ e o número de osciladores com energia $E_0 = 0$ para a temperatura "baixa" e a temperatura "alta" do Exemplo 8-8.

SOLUÇÃO

De acordo com a distribuição de Boltzmann, em qualquer temperatura T, a fração de osciladores com energia $E_n = nhf$ é dada por $f_B(E_n) = Ae^{-En/kT} = Ae^{-nhf/kT}$. Para $n = 0$, a fração é $f_0 = Ae^0 = A$. A razão f_n/f_0 é, portanto, $e^{-nhf/kT}$.

(*a*) Para $n = 1$ e $kT = hf/2$, $f_1/f_0 = e{-}hf/kT = e^{-2} = 0{,}135$. Isso significa que a maioria dos osciladores está no estado fundamental $E_0 = 0$.

(*b*) Para $n = 1$ e $kT = 4hf$, $f_1/f_0 = e^{-hf/kT} = e^{-0{,}25} = 0{,}779$. Isso significa que existem muitos osciladores em outros estados que não o fundamental; a energia média é maior que no caso anterior.

EXEMPLO 8-10 **Frequência de Debye** De acordo com a Figura 8-30, a temperatura de Debye da prata é 215 K. Calcule a frequência de Debye da prata e estime a temperatura de Debye do ouro. A prata e o ouro têm a mesma estrutura cristalina e propriedades físicas semelhantes.

SOLUÇÃO

1. Existe uma relação definida entre a temperatura de Debye T_D e a frequência de Debye f_D:

$$T_D = \frac{hf_D}{k}$$

Assim, no caso da prata,

$$f_D = \frac{kT_D}{h} = \frac{1{,}38 \times 10^{-23}\,\text{J/K} \times 215\,\text{K}}{6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J} \cdot \text{S}} = \\ = 4{,}48 \times 10^{12}\,\text{Hz}$$

2. Como as forças interatômicas são da mesma ordem no ouro e na prata, as frequências de vibração variam inversamente com a raiz quadrada das massas atômicas:

$$\frac{f_D(\text{Ag})}{f_D(\text{Au})} = \sqrt{\frac{M(\text{Au})}{M(\text{Ag})}} = \frac{kT_D(\text{Ag})/h}{kT_D(\text{Au})/h} = \frac{T_D(\text{Ag})}{T_D(\text{Au})}$$

3. Explicitando T_D(Au), obtemos:

$$T_D(\text{Au}) = T_D(\text{Ag})\sqrt{\frac{M(\text{Au})}{M(\text{Ag})}} = 215\sqrt{\frac{108}{197}}$$
$$= 159\ \text{K}$$

Observação: *Esta estimativa concorda razoavelmente bem com o valor experimental, que é 164 K.*

8-5 Propriedades de um Gás de Férmions

O fato de que os metais conduzem eletricidade tão bem levou os cientistas a concluir que esse tipo de material contém elétrons livres que se movimentam em meio a uma rede de íons positivos praticamente fixos. Na verdade, menos de três anos depois que Thomson descobriu o elétron, e muito antes que Schrödinger sequer sonhasse em desenvolver a mecânica ondulatória, a teoria dos elétrons livres já estava sendo usada para explicar algumas propriedades dos metais. Como vamos ver no Capítulo 10, a teoria foi bem-sucedida em muitos casos; entretanto, também apresentou alguns fracassos notáveis. Por exemplo, em um sólido à temperatura T, os íons da rede cristalina possuem uma energia média igual a $3kT$, que é a soma de uma energia cinética média $3kT/2$ com uma energia potencial média $3kT/2$ e nos dá um calor específico molar $C_V = 3R$ (lei de Dulong e Petit). Se o sólido é um metal, as interações (colisões) entre os elétrons livres e os íons da rede deveriam transferir aos elétrons uma energia cinética média de translação igual a $3kT/2$; assim, a energia interna total U dos metais deveria ser igual a $3kT + 3kT/2 = 9kT/2$. Nesse caso, o calor específico molar dos metais seria igual a $4{,}5R$. Não é isso, porém, que as medidas revelam; o que se observa é que o calor específico dos metais é praticamente igual ao dos outros sólidos, exceto por um pequeno aumento com a temperatura que é muito menor que $3R/2$. O problema da teoria clássica dos elétrons livres é que os elétrons são férmions e, portanto, suas energias não obedecem à distribuição Boltzmann e sim à distribuição de Fermi-Dirac. Nesta seção, vamos analisar as características gerais de um sistema constituído por férmions; no Capítulo 10, explicaremos por que os elétrons livres não contribuem significativamente para o calor específico dos condutores.

Sistemas de Férmions

Na distribuição de Fermi-Dirac, dada por

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{E/kT} + 1} \qquad \textbf{8-25}$$

é conveniente escrever o parâmetro α na forma

$$\alpha = \frac{-E_F}{kT} \qquad \textbf{8-67}$$

onde E_F é a chamada *energia de Fermi*. Nesse caso, a Equação 8-25 assume a forma

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \qquad \textbf{8-68}$$

A energia de Fermi é um importante parâmetro dos sistemas de férmions, como o gás de elétrons nos metais (que será discutido no Capítulo 10) e o gás de nêutrons nas estrelas de nêutrons (veja o Capítulo 13). Observe, em particular, que, para $E = E_F$, $e^{(E-E_F)/kT} = 1$ e, portanto, $f_{FD}(E_F) = 1/2$ para qualquer valor de $T \neq 0$. No caso especial em que $T = 0$ K, $f_{FD}(E)$ não é definida para $E = E_F$ e, para outros valores de E, pode assumir apenas dois valores:

Para $E < E_F$,

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{-\infty} + 1} = 1$$

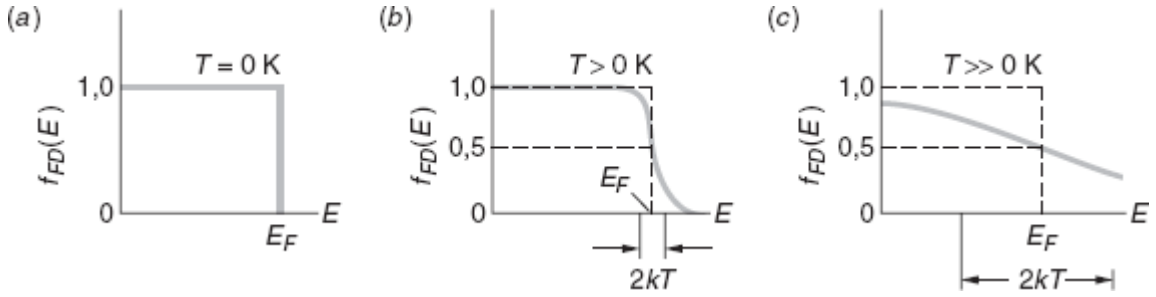


FIGURA 8-31 Distribuição de Fermi-Dirac $f_{FD}(E)$ para três temperaturas diferentes. (*a*) Para $T = 0$ K, todos os níveis acima de E_F estão vazios. (*b*) Para $T > 0$ K e $kT < E_F$, algumas partículas que ocupam níveis um pouco abaixo de E_F podem ser transferidas para níveis um pouco acima de E_F. (*c*) Para $kT > E_F$, até mesmo as partículas que ocupam os níveis de menor energia podem ser transferidas para níveis mais elevados; nesse caso, $f_{FD}(0) < 1$.

Para $E > E_F$,

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\infty} + 1} = 0$$

Assim, no zero absoluto, todos os estados entre o estado fundamental e a energia de Fermi estão ocupados e todos os estados acima da energia de Fermi estão vazios. Isto é muito diferente do que acontece em um sistema de bósons, como o condensado de BE do rubídio, no qual todas as partículas se concentram no estado fundamental em $T = 0$ K. A situação está ilustrada na Figura 8-31*a*. Se o sistema contém N férmions, podemos calcular a energia de Fermi preenchendo os estados em ordem crescente de energia, começando pelo estado fundamental; a energia do estado ocupado pela enésima partícula é a energia de Fermi. A energia total do sistema é simplesmente a soma das energias das N partículas; para calcular a energia média, basta dividir o resultado por N. Exemplos deste tipo de cálculo serão vistos na Seção 10-3.

Se o sistema se encontra a uma temperatura $T > 0$ K, mas $kT < E_F$, os férmions cuja energia é maior ou igual a $E_F - kT$ podem ser transferidos por colisões com os íons da rede cristalina para estados desocupados com energia menor ou igual a $E_F + kT$. Por outro lado, os férmions com energia menor que $E_F - kT$ não podem mudar de nível, já que a energia adquirida em uma colisão não é suficiente para transferi-los para estados desocupados. A Figura 8-31*b* ilustra esta situação. Em temperaturas tão altas que $kT > E_F$, mesmo os elétrons com energia muito pequena podem ser promovidos para estados desocupados. É apenas neste caso que $f_{FD} < 1$, como na Figura 8-31*c*. A curva f_{FD} da Figura 8-16 também foi desenhada para esta situação.

O número $n_{FD}(E)$ de férmions com energia E é dado pela Equação 8-37*c*. Substituindo $g_{FD}(E)$ e $f_{FD}(E)$ por seus valores, dados pelas Equações 8-42 e 8-68, temos:

$$n_{FD}(E) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2} \frac{VE^{1/2}}{e^{(E-E_F)/kT} + 1} \qquad \textbf{8-69}$$

A Figura 8-32 é um gráfico da Equação 8-69 para três temperaturas diferentes. A curva para $T = 0$ pode ser obtida multiplicando $f_{FD}(E)$ da Figura 8-31*a* pela função $g_{FD}(E)$, que é proporcional a $E^{1/2}$. As curvas para $T = 300$ K e $T = 1200$ K podem ser obtidas multiplicando $g_{FD}(E)$ por versões apropriadas da Figura 8-31*b*. A região sombreada entre as curvas para $T = 0$ e $T = 300$ K representa os elétrons próximos da energia de Fermi (um número muito pequeno) que podem ser transferidos para estados desocupados acima de E_F quando $T = 300$ K.

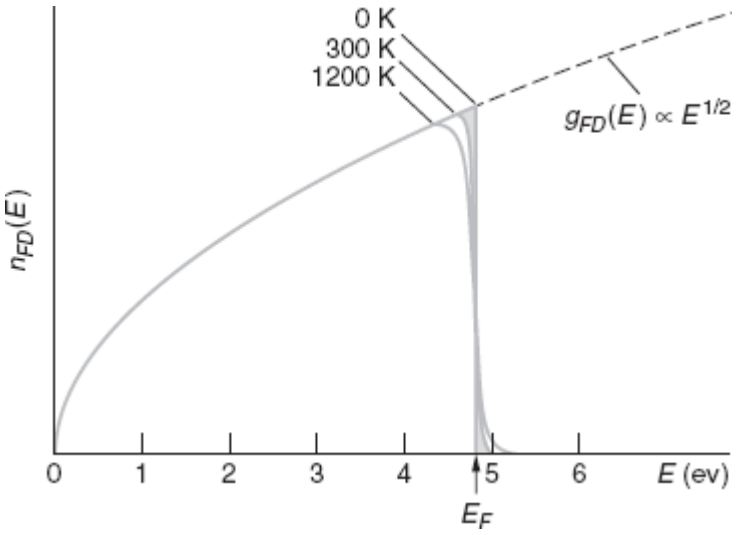


FIGURA 8-32 Número de férmions n_{FD} em função da energia para um material cuja energia de Fermi é 4,8 eV. As curvas são gráficos da Equação 8-69 para três temperaturas diferentes. (A região sombreada está explicada no texto.)

Gás de Férmions Degenerado

Como os átomos de spin fracionário são férmions, o princípio de exclusão de Pauli impede que ocupem o estado fundamental em baixas temperaturas para formar um sistema análogo ao condensado de Bose-Einstein. Quando a temperatura é reduzida a um valor próximo do zero absoluto, o que acontece é que os átomos passam a ocupar apenas os estados entre o estado fundamental e a energia de Fermi. Ao contrário do que acontece na transição de fase associada à condensação de Bose-Einstein, a transição para este *gás de férmions degenerado* é gradual e, portanto, difícil de detectar. Além disso, o resfriamento por evaporação, tão importante para a produção dos condensados de Bose-Einstein, é muito menos eficaz. Em 1999, quatro anos depois da criação do primeiro condensado de Bose-Einstein, esses problemas foram resolvidos por Deborah Jin e Brian DeMarco. Esses pesquisadores carregaram uma armadilha magnética com átomos de ^{40}K, cujo spin é 9/2, e dividiram os átomos em dois subestados magnéticos para resolver o problema do resfriamento por evaporação. Uma das formas usadas para detectar o estado quântico degenerado dos átomos de ^{40}K foi calcular a energia total (a partir da distribuição de momentos) de aproximadamente 8×10^5 átomos (Figura 8-33). Classicamente, a energia total é dada por $3N_AkT/2$ e, portanto, deveria tender a 0 quando T tende a zero. De acordo com a mecânica quântica, por outro lado, a energia deve diminuir mais devagar com a diminuição da temperatura e permanecer finita quando T tende a zero. Foi exatamente o que Jin e DeMarco observaram. A descoberta deve tornar possível, entre outras coisas, o estudo da formação de pares de Cooper (veja a Seção 10-8) nos supercondutores.

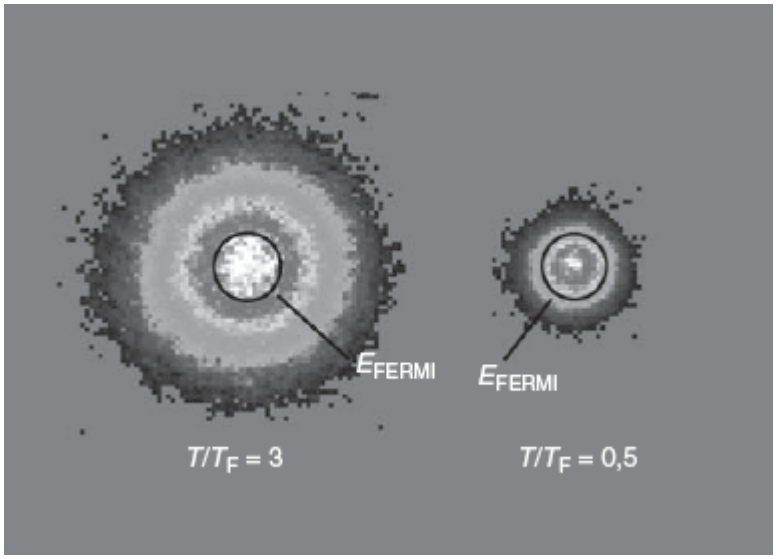


FIGURA 8-33 Gás de férmions degenerado. As imagens mostram que a fração de átomos com energia menor que a energia de Fermi (círculos pretos) é maior na amostra da direita. A amostra da direita contém 0,78 milhão de átomos de ^{40}K a uma temperatura de 0,29 μK, enquanto a amostra da esquerda contém 2,5 milhões de átomos a uma temperatura de 2,4 μK.

Mais recentemente, os cientistas conseguiram formar condensados de Bose-Einstein a partir de pares de férmions como ^{6}Li e

^{40}K. Os pares ^{6}Li-^{6}Li e ^{40}K-^{40}K, mantidos juntos por uma força de atração quase imperceptível, são bósons e se condensam no estado fundamental quando a temperatura cai abaixo de 50×10^{-9} K, aproximadamente.

Exercícios

12. Por que o princípio de exclusão torna o resfriamento por evaporação menos eficaz no caso dos férmions?

13. Por que a energia total de um gás de Fermi permanece finita quando a temperatura tende a zero?

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Distribuição de Boltzmann	$f_B(E) = Ae^{-E/kT}$ **8-1**
Constante de Boltzmann	onde a distribuição $f_B(\xi)$ é a probabilidade de que o estado com energia ξ esteja ocupado.
Distribuição de Maxwell	$k = 1{,}381 \times 10^{-23}\,\text{J/K} = 8{,}617 \times 10^{-5}\,\text{eV/K}$ **8-8** $n(v)dv = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT}\,dv$
Teorema da equipartição	Em equilíbrio, cada grau de liberdade contribui com $kT/2$ para a energia média por molécula.
Energia cinética média	$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT$ **8-9**
Lei de Dulong e Petit	onde $\langle Ek \rangle$ é a energia média de translação por molécula. $C = 3R$
2. Estatística quântica	$f_{BE}(E) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{E/kT} - 1}$ **8-24**
Distribuição de Bose-Einstein	$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{E/kT} + 1}$ **8-25**
Distribuição de Fermi-Dirac	Nas três distribuições, f_B, f_{BE} e f_{FD}, e^{α} é uma constante de normalização que depende da concentração de partículas. A distribuição de Fermi-Dirac se aplica a partículas de spin fracionário e a distribuição de Bose-Einstein a partículas de spin nulo ou inteiro. Em altas energias, f_{BE} e f_{FD} tendem para f_B, a distribuição clássica.
	A distribuição de Boltzmann é uma boa aproximação para f_{BE} e f_{FD} se $e^{\alpha} << 1$.
3. Aplicações	O ^{4}He se torna superfluido à temperatura de 2,17 K, o chamado ponto lambda.
Hélio líquido	

Condensado de Bose-Einstein	O ^{3}He, o único outro isótopo natural que apresenta esta propriedade, se torna superfluido a 2 mK.
Gás de Fermi degenerado	Os bósons condensados no estado fundamental constituem um novo estado da matéria.
	Férmions condensados em estados que vão do estado fundamental à energia de Fermi.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Blatt, F.J., *Modern Physics*, McGraw-Hill, New York, 1992.

Brehm, J.J. e W.J. Mullin, *Introduction to the Structure of Matter*, Wiley, New York, 1989.

Eisberg, R. e R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei and Particles*, 2d ed., Wiley, New York, 1985. O Capítulo 11 deste livro apresenta uma excelente discussão da estatística quântica, embora um pouco avançada.

Ford, K.W., *The Quantum World*, Harvard University Press, Cambridge, MA, 2005.

Kittel, C. e H. Kroemer, *Thermal Physics*, W.H. Freeman and Co, New York, 1995.

Leitner, A., *Liquid Helium II: The Superfluid*, Michigan State University, East Lansing, 1963. Este filme de 39 minutos, que está disponível no You Tube, é uma excelente introdução às propriedades do hélio II.

London, F., *Superfluids*, Vol. II: *Macroscopic Theory of Superfluid Helium*, 2d rev. ed., Dover, New York, 1954.

Mandel, F., *Statistical Physics*, Wiley, New York, 1988.

Mendelssohn, K., *The Quest for Absolute Zero: The Meaning of Low Temperature Physics*, World University Library, McGraw-Hill, New York, 1966.

Notas

1. Em alguns casos especiais, a abordagem estatística pode ser empregada com sucesso, mesmo que o número de partículas envolvidas seja relativamente pequeno. No Capítulo 11, por exemplo, discutiremos sucintamente um modelo estatístico para o núcleo atômico, sistema no qual o número de partículas envolvidas não passa de algumas centenas.

2. Ludwig Boltzmann (1844-1906), físico austríaco. É considerado o fundador da mecânica estatística por ter sido o primeiro a apresentar uma interpretação estatística para a segunda lei da termodinâmica. Explicou teoricamente a observação experimental de Josef Stefan, com quem trabalhou como assistente, de que a intensidade da radiação aumenta com a quarta potência da temperatura. Mais tarde, sucedeu a Stefan na cadeira de física da Universidade de Viena. Fiel defensor da teoria atômica da matéria, seu suicídio foi aparentemente causado, pelo menos em parte, pelas críticas dos colegas a seus trabalhos.

3. Para não termos que repetir várias vezes esta frase, que também ocorre quando nos referimos a E, usaremos daqui em diante a forma simplificada "o número de moléculas no intervalo dv_x".

4. A integral pode ser resolvida consultando uma tabela de integrais.

5. Historicamente, as rotações em torno do eixo z' foram descartadas com o argumento de que os átomos possuem dimensões insignificantes e, portanto, o momento de inércia da molécula em relação a esse eixo pode ser desprezado (o que não é verdade), ou de que os átomos se comportam como esferas rígidas, caso em que as rotações em torno desse eixo não são afetadas por colisões e, portanto, não participam da troca de energia (o que também não é verdade). Qualquer dessas hipóteses também exclui a possibilidade de rotação de uma molécula monoatômica.

6. Satyendra Nath Bose (1894-1974), físico indiano. Depois da publicação de seu artigo a respeito da estatística de partículas indistinguíveis, que foi traduzido pessoalmente por Einstein para ser publicado na revista alemã *Zeitschrift für Physik*, Bose passou dois anos na Europa e, em seguida, voltou à Índia para se dedicar a uma carreira universitária. Como não tinha o título de Ph.D., precisou de uma recomendação de Einstein, escrita em um cartão-postal, para assumir o cargo de Professor Titular na Universidade de Dacca.

7. Enrico Fermi (1901-1954), físico italiano naturalizado americano. Cientista extremamente prolífero e intrépido tenista amador, cujas investigações se estenderam à física do estado sólido, à física nuclear e à física de partículas, é talvez mais conhecido como o "pai" dos reatores nucleares. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1938 por suas pesquisas no campo da

física nuclear.

8. Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), físico inglês. Sua formulação da mecânica quântica relativística para partículas de spin 1/2 o levou a prever, em 1930, a existência de uma nova partícula elementar chamada pósitron, que foi descoberta por Anderson dois anos mais tarde. Recebeu (juntamente com Schrödinger) o Prêmio Nobel de Física de 1933 por suas contribuições para a mecânica quântica. A partir de 1932, e até aposentar-se, ocupou a Cadeira Lucasiana de Matemática da Cambridge University, que 250 anos antes pertencera a Newton e atualmente é ocupada por Stephen Hawking.

9. Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926), físico holandês. Depois de liquefazer o hélio, passou a estudar as propriedades de outros materiais em baixas temperaturas, o que o levou à descoberta da supercondutividade em 1911. O estudo do comportamento dos materiais em baixas temperaturas lhe valeu o Prêmio Nobel de Física de 1913.

10. J.C. McLennan, H.D. Smith e J.O. Wilhelm, *Philosophical Magazine*, **14**, 161 (1932).

11. Em temperaturas muito baixas, o ^{4}He líquido se solidifica a uma pressão de 25 atm e o ^{3}He líquido a uma pressão de 30 atm.

12. Os canais estreitos que só podem ser atravessados por superfluidos são conhecidos pelo nome de *superdrenos*.

13. Essas e outras interessantes demonstrações aparecem no filme *Liquid Helium II*: *The Superfluid*, disponível no You Tube.

14. No estado de equilíbrio termodinâmico, o elemento que usaram nos experimentos, o rubídio, é um metal sólido à temperatura ambiente.

15. Einstein usou a distribuição de Boltzmann na forma discreta, $f_B(E) = \sum_{n=0}^{\infty} Ae^{-E_n/kT}$.

Problemas

NÍVEL I

Seção 8-1 Estatística Clássica: Uma Revisão

8-1. (*a*) Calcule v_{rms} para moléculas de H_2 a uma temperatura T = 300 K. (*b*) Calcule a temperatura T para a qual v_{rms} das moléculas de H_2 é igual à velocidade de escape, 11,2 km/s.

8-2. (*a*) A energia de ionização do átomo de hidrogênio é 13,6 eV. A que temperatura a energia cinética média de translação é igual a 13,6 eV? (*b*) Qual é a energia cinética média de translação dos átomos de hidrogênio para $T = 10^7$ K, uma temperatura típica do interior do Sol?

8-3. A massa molar do oxigênio (O_2) é 32 g/mol e a do hidrogênio (H_2) é 2 g/mol. Calcule (*a*) a velocidade rms das moléculas de O_2 e (*b*) a velocidade rms das moléculas de H_2 a uma temperatura de 0°C.

8-4. Mostre que a unidade de $(3RT/M)^{1/2}$ no SI é o m/s.

8-5. (*a*) Determine a energia cinética total de translação de 1 mol de moléculas de N_2 para T = 273 K. (*b*) A resposta seria igual, maior ou menor para 1 mol de átomos de He à mesma temperatura? Justifique sua resposta.

8-6. Use a distribuição de velocidades de Maxwell para calcular o valor médio de v^2 para as moléculas de um gás.

8-7. Quando estão em equilíbrio térmico, os nêutrons de um reator nuclear apresentam a distribuição de velocidades de Maxwell. Determine $\langle v \rangle$ e v_m para nêutrons em equilíbrio térmico a 300 K. Mostre que a função $n(v)$ (Equação 8-8) é máxima para $v = v_m = (2kT/m)^{1/2}$.

8-8. Um recipiente contém 128 moléculas iguais, cujas velocidades estão distribuídas da seguinte forma:

Nº de moléculas	4	12	20	24	20	16	12	8	6	4
Intervalo de velocidades (m/s)	0,0-1,0	1,0-2,0	2,0-3,0	3,0-4,0	4,0-5,0	5,0-6,0	6,0-7,0	7,0-8,0	8,0-9,0	9,0-10,0

Plote esses dados e assinale as abscissas correspondentes a v_m, $\langle v \rangle$ e v_{rms}.

8-9. Mostre que a velocidade mais provável v_m da distribuição de velocidades de Maxwell é dada pela Equação 8-9.

8-10. Calcule a energia cinética total de translação de um litro de oxigênio mantido a uma pressão de uma atmosfera e a uma temperatura de 20°C.

8-11. A partir do espectro de absorção, foi calculado que um em cada 10^6 átomos de hidrogênio de uma certa estrela se encontra

no primeiro estado excitado, 10,2 eV acima do estado fundamental (os outros estados excitados podem ser ignorados). Qual é a temperatura da estrela? (Tome a razão entre os pesos estatísticos como 4, como no Exemplo 8-2.)

8-12. O primeiro estado excitado de energia de rotação da molécula de H_2 ($g_2 = 3$) está 4×10^{-3} eV acima do estado fundamental ($g_1 = 1$). Qual é a razão entre os números de moléculas nos dois estados à temperatura ambiente (300 K)?

8-13. Um gás monoatômico está confinado a duas dimensões e, portanto, a energia de um átomo é dada por $E_k = mv^2_x/2 + mv^2_y/2$. Quais são os valores de C_V, C_P e γ para este gás? (C_P, o calor específico a pressão constante, é igual a $C_V + nR$ e $\gamma = C_P/C_V$.)

8-14. Use a lei de Dulong e Petit, $C_V = 3R$, para calcular o calor específico $c_v = C_V/M$ em cal/g (*a*) para o alumínio (M = 27,0 g/mol), (*b*) para o cobre (M = 63,5 g/mol) e (*c*) para o chumbo (M = 207 g/mol). Compare os resultados com os valores encontrados em um manual. (Informe qual foi o manual consultado.)

8-15. Calcule a energia cinética mais provável E_m a partir da distribuição de energias cinéticas de Maxwell (Equação 8-13).

8-16. (*a*) Mostre que a função distribuição de velocidades pode ser escrita na forma $n(v) = 4\pi^{-1/2}(v/v_m)^2 v^{-1}{}_m e^{-(v/v_m)^2}$ onde v_m é a velocidade mais provável. Considere 1 mol de moléculas e aproxime dv por $\Delta v = 0{,}01v_m$. Determine o número de moléculas com velocidades no intervalo dv (*b*) para $v = 0$; (*c*) para $v = v_m$; (*d*) para $v = 2v_m$; (*e*) para $v = 8v_m$.

8-17. Considere uma amostra de átomos de hidrogênio a 300 K. (*a*) Calcule a razão entre o número de átomos no primeiro (n = 2) estado excitado e o número de átomos no estado fundamental (n = 1) e a razão entre o segundo (n = 3) estado excitado e o número de átomos no estado fundamental (n = 1). Inclua nos cálculos os efeitos da degeneração. (*b*) A que temperatura 1% dos átomos estão no estado n = 2? (*c*) À temperatura do item (*b*), qual é a razão entre o número de átomos no estado n = 3 e o número total de átomos?

8-18. Considere uma amostra de átomos isolados de lítio (Li, Z = 3), com o terceiro elétron (o elétron da última camada) no estado 3*p*, submetida a um campo magnético uniforme de 4,0 T. (*a*) Determine a fração de átomos nos estados $m_1 = +1$, 0 e −1 a 300 K. (*b*) Quais são as intensidades relativas das três linhas do efeito Zeeman na transição $3p \rightarrow 2s$?

Seção 8-2 Estatística Quântica

8-19. Determine a concentração de elétrons N/V para que (*a*) $e^{-\alpha} = 1$; (*b*) $e^{-\alpha} = 10^{-6}$.

8-20. (*a*) Use a Equação 8-44 para calcular o valor de $e^{-\alpha}$ para o O_2 nas CNTP. (*b*) A que temperatura $e^{-\alpha} = 1$?

8-21. Dados três recipientes à mesma temperatura, o primeiro contendo um gás de moléculas clássicas, o segundo um gás de férmions e o terceiro um gás de bósons, em que recipiente a pressão é maior? Em que recipiente a pressão é menor? Justifique suas respostas.

8-22. (*a*) se T = 5800 K, para que energia a função de distribuição de Bose-Einstein $f_{BE}(E)$ é igual a 1 (supondo que $\alpha = 0$)? (*b*) Ainda com $\alpha = 0$, a que temperatura $f_{BE}(E) = 0{,}5$ para a energia calculada no item (*a*)?

8-23. Um recipiente a 300 K contém H_2 a uma pressão de uma atmosfera. Nesta temperatura, as moléculas de H_2 obedecem à distribuição de Boltzmann. Até que temperatura devemos resfriar o gás para que os efeitos quânticos se tornem importantes e o uso da equação de Boltzmann não seja mais uma boa aproximação? (*Sugestão*: Iguale o comprimento de onda de de Broglie das moléculas para uma energia igual à energia média à distância média entre as moléculas, usando a lei dos gases ideais para calcular a densidade.)

Seção 8-3 A Condensação de Bose-Einstein

8-24. Calcule N_0/N a partir da Equação 8-52 (*a*) para $T = 3T_c/4$; (*b*) para $T = T_c/2$; (*c*) para $T = T_c/4$; (*d*) para $T = T_c/8$.

8-25. Mostre que $N_0 \approx 1/\alpha$ para pequenos valores de α, como é dito no parágrafo que precede a Equação 8-52.

8-26. Como o ^{4}He, o ^{20}Ne é um gás raro e um bóson de spin zero. Ao contrário do ^{4}He, porém, o ^{20}Ne não se torna super-fluido em baixas temperaturas. Mostre que é razoável que isso aconteça calculando a temperatura crítica do ^{20}Ne e comparando-a com a temperatura de solidificação do gás, 24,5 K.

Seção 8-4 O Gás de Fótons: Uma Aplicação da Estatística de Bose-Einstein

8-27. Se o Sol esfriasse (sem mudar de tamanho), a densidade de energia na superfície do astro diminuiria segundo a Equação 8-56. Suponha que a temperatura do Sol tenha diminuído de 5%. Calcule a variação relativa da intensidade da radiação solar na superfície da Terra. (Suponha que a superfície solar esteja em equilíbrio térmico e irradia como um corpo negro.)

8-28. Determine a energia média de um oscilador (*a*) para $T = 10hf/k$; (*b*) para $T = hf/k$; (*c*) para $T = 0{,}1hf/k$. (*d*) Compare esses resultados com os obtidos usando o teorema da equipartição.

8-29. (*a*) Mostre que a lei de Dulong e Petit é o limite da fórmula de Einstein para o calor específico (Equação 8-62) quando $T \rightarrow \infty$. (*b*) Mostre que $C \rightarrow 0$ quando $T \rightarrow 0$.

V

8-30. A partir da Figura 8-13, calcule (aproximadamente) a frequência das oscilações atômicas no silício e no alumínio a 200 K.

8-31. Use a Equação 8-62 para calcular o valor de C_V para um sólido à temperatura de Einstein, $T_E = hf/k$.

Seção 8-5 Propriedades de um Gás de Férmions

8-32. Use a Equação 8-69 para plotar um gráfico de $n_{FD}(E)/V$ em função de E para elétrons a 300 K com uma energia de Fermi E_F = 4,8 eV, entre E = 4,5 eV e E = 5,1 eV. Determine, a partir do gráfico, o número de elétrons por unidade de volume logo abaixo da energia de Fermi que podem ser transferidos para estados logo acima da energia de Fermi.

8-33. Considere um gás de elétrons (férmions) e um gás de fótons (bósons). Qual dos dois sistemas tem um número maior de estados disponíveis em T = 1 K? Justifique sua resposta.

NÍVEL II

8-34. Os dados de calor específico molar que aparecem na Tabela 8-2 foram extraídos do *AIP Handbook*, 2d ed. (McGraw-Hill, New York, 1963.) Plote os dados da tabela em um gráfico e trace as curvas de C_V em função de T. Estime a temperatura de Einstein para cada um dos sólidos usando o resultado do Problema 8-31.

8-35. Lembrando que a função de distribuição de Fermi-Dirac se aplica a todos os férmions, incluindo prótons e nêutrons, que possuem spin 1/2, considere um núcleo de ^{22}Ne, formado por 10 prótons e 12 nêutrons. Como os prótons podem ser distinguidos dos nêutrons, cada estado pode ser ocupado por quatro partículas (um próton e um nêutron com o spin para cima e um próton e um nêutron com o spin para baixo). Supondo que o raio do núcleo de ^{22}Ne é $3{,}1 \times 10^{-5}$ m, estime a energia de Fermi e a energia média do núcleo de ^{22}Ne. Expresse os resultados em MeV. Os resultados parecem razoáveis?

8-36. Qual é a energia do estado fundamental de 10 bósons independentes em uma caixa unidimensional de comprimento L?

Tabela 8-2 Calor específico molar do Au, diamante, Al e Be em cal/mol · K

T, K	Au	Diamante	Al	Be
20	0,77	0,00	0,05	0,003
50	3,41	0,005	0,91	0,04
70	4,39	0,016	1,85	0,12
100	5,12	0,059	3,12	0,43
150	5,62	0,24	4,43	1,36
200	5,84	0,56	5,16	2,41
250	5,96	0,99	5,56	3,30
300	6,07	1,46	5,82	3,93
400	6,18	2,45	6,13	4,77
500	6,28	3,24	6,42	5,26
600	6,40	3,85	6,72	5,59
800	6,65	4,66	7,31	6,07
1000	6,90	5,16	7,00	6,51

8-37. Faça um gráfico de $f_{FD}(E)$ em função de E (*a*) para $T = 0{,}1T_F$; (*b*) para $T = 0{,}5T_F$, na qual $T_F = E_F/k$.

8-38. Calcule a fração de átomos de hélio no estado superfluido (*a*) para $T = T_c/2$; (*b*) para $T = T_c/4$.

8-39. A profundidade do poço de potencial a que os elétrons livres estão submetidos em um metal pode ser determinada com precisão a partir do fato de que a função trabalho do efeito fotelétrico é a energia necessária para remover um elétron do estado de maior energia entre os estados ocupados do metal; isso significa que, à temperatura ambiente, o elétron é removido de um estado com uma energia muito próxima da energia de Fermi. Supondo que cada átomo contribui com um elétron para o gás de Fermi, calcule a profundidade do poço para os elétrons livres do ouro. A função trabalho do ouro é 4,8 eV.

8-40. A Figura 8-34 mostra um método que foi usado para verificar se a distribuição de velocidades das moléculas proposta por Maxwell estava correta. Em 1925, Otto Stern utilizou um forno a 850 K para produzir um feixe de moléculas de Bi_2. Depois de colimado pela fenda S_1, o feixe foi introduzido em um tambor giratório através da fenda S_2 na parede do tambor. Depois de atravessar o tambor, as moléculas do feixe aderiram a uma placa de vidro curva ajustada à superfície interna no tambor. As moléculas mais rápidas atingiram o vidro perto do ponto *A*, diametralmente oposto à fenda S_2, enquanto as mais lentas atingiram o vidro no ponto *B*. Moléculas com velocidades intermediárias atingiram o vidro em pontos situados entre *A* e *B*. A concentração de moléculas ao longo da placa de vidro foi medida com um densímetro. Plotando a densidade (proporcional ao número de moléculas) em função da distância ao longo da placa de vidro (que dependia de v), foi possível determinar a distribuição de velocidades. Se o tambor tem 10 cm de diâmetro e está girando a 6250 rpm, (*a*) calcule a distância entre o ponto *A* e o ponto atingido por moléculas que estão se movendo com velocidade v_m, $\langle v \rangle$ e v_{rms}. (*b*) Por que o gráfico do item (*a*) deve sofrer uma ligeira correção para que os resultados possam ser comparados diretamente com a distribuição de Maxwell? (*c*) Um feixe de moléculas de N_2 seria mais ou menos adequado que o feixe de moléculas de Bi_2 usado no experimento? Justifique sua resposta.

8-41. A distribuição de velocidades das moléculas em um recipiente é a distribuição de Maxwell, $f(v) \propto v^2 e^{-mv^2/2kT}$. O número de moléculas com velocidade v que se chocam com a parede do recipiente em um dado intervalo de tempo é proporcional à velocidade v e a $f(v)$. Assim, se existe um furo pequeno na parede (suficientemente pequeno para não afetar a distribuição de velocidades no interior do recipiente), a distribuição de velocidades das moléculas que escapam do recipiente é $F(v) \propto vf(v) \propto v^3 e^{-mv^2/2kT}$. Mostre que a energia média das moléculas que escapam é $2kT$.

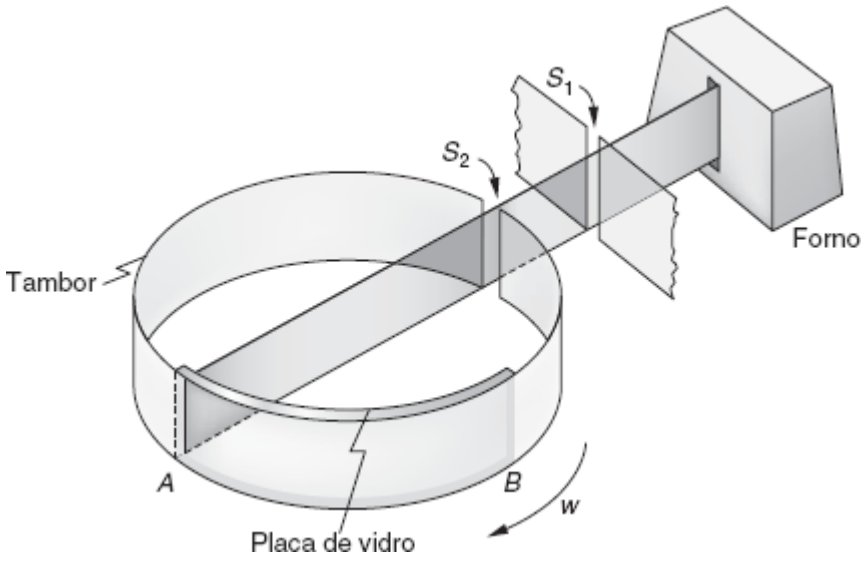


FIGURA 8-34 (Problema 8-40.)

NÍVEL III

8-42. Este problema está relacionado ao teorema da equipartição. Considere um sistema no qual a energia de uma partícula é dada por $E = Au^2$, onde A é uma constante e u é qualquer coordenada ou momento que possa variar de $-\infty$ a $+\infty$. (*a*) Determine a probabilidade de que o valor de u para uma partícula esteja no intervalo du e calcule a constante de normalização C em função de A. (*b*) Calcule a energia média $\langle E \rangle = \langle Au^2 \rangle$ e mostre que $\langle E \rangle = kT/2$.

8-43. Calcule o valor médio do módulo de v_x a partir da distribuição de Maxwell.

8-44. Mostre que $f_{FD}(E) \rightarrow f_B(E)$ para $E >> E_F$.

8-45. Execute a integração indicada na Equação 8-43 para mostrar que e^{α} é dado pela Equação 8-44.

8-46. Considere um sistema de N partículas que possui apenas dois estados possíveis, $E_1 = 0$ e $E_2 = \epsilon$. A função distribuição é f_1

$= Ce^{-E_i/kT}$. (*a*) Qual é o valor de C neste caso? (*b*) Calcule a energia média $\langle E \rangle$ e mostre que $\langle E \rangle \to 0$ para $T \to 0$ e $\langle E \rangle \to \epsilon/2$ para $T \to \infty$. (*c*) Mostre que o calor específico é dado por

$$C_V = Nk\left(\frac{\epsilon}{kT}\right)^2 \frac{e^{-\epsilon/kT}}{(1 + e^{-\epsilon/kT})^2}$$

(*d*) Faça um gráfico de C_V em função de T.

8-47. Se as hipóteses que levam à distribuição de Bose-Einstein são modificadas de tal forma que o número de partículas não se mantenha constante, a distribuição resultante tem $e^{\alpha} = 1$. Esta distribuição pode ser aplicada a um "gás" de fótons. Imagine que os fótons se encontram em uma caixa cúbica de aresta L. As componentes do momento do fóton são quantizadas pelas condições de onda estacionária $k_x = n_1\pi/L$, $k_y = n_2\pi/L$ e $k_z = n_3\pi/L$, onde $p = \hbar(k^2_x + k^2_y + k^2_z)^{1/2}$ é o módulo do momento. (a) Mostre que a energia de um fóton pode ser escrita na forma $E = N(\hbar c\pi/L)$, onde $N^2 = n^2_1 + n^2_2 + n^2_3$. (*b*) Supondo que existem dois fótons por estado por causa das duas polarizações possíveis, mostre que o número de estados entre N e $N + dN$ é $\pi N^2 dN$. (*c*) Calcule a densidade de estados e mostre que o número de fótons no intervalo de energia dE é dado por

$$n(E)\,dE = \frac{8\pi(L/hc)^3 E^2 dE}{e^{E/kT} - 1}$$

(*d*) A densidade de energia em termos de E é $u(E)dE = En(E)dE/L^3$. Use este resultado para demonstrar a fórmula de radiação de corpo negro de Planck para a densidade de energia em termos do comprimento de onda λ:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

***Um raciocínio análogo se aplica ao caso das funções de onda do átomo de hidrogênio; compare, por exemplo, as Figuras 7-8 e 7-9. (N.T.)**

PARTE 2

Aplicações da Mecânica Quântica e da Relatividade

Na Parte 1, apresentamos as teorias da relatividade restrita e da relatividade geral e mostramos que as duas teorias alteraram profundamente nossos conceitos de espaço e de tempo. Em seguida, discutimos as ideias e métodos da mecânica quântica e a forma como foram usados para explicar a estrutura atômica e o espectro dos elementos. Na Parte 2, vamos aplicar a teoria quântica e a teoria da relatividade a vários fenômenos de interesse dos engenheiros, químicos e físicos.

Os tópicos que vamos discutir foram objeto de um grande número de pesquisas teóricas e experimentais por parte dos físicos, químicos e matemáticos, e ajudam a compreender os princípios básicos de funcionamento de muitas máquinas e aparelhos criados pelos engenheiros. Investigações das ligações moleculares e dos espectros das moléculas (Capítulo 9), da estrutura e das propriedades térmicas e elétricas dos sólidos (Capítulo 10), da supercondutividade (Capítulo 10), da composição dos núcleos, da radioatividade e das reações nucleares (Capítulo 11) e das partículas elementares da matéria (Capítulo 12) serviram de base para aplicações como os lasers (Capítulo 9), os dispositivos semicondutores (Capítulo 10), e os reatores nucleares (Capítulo 11). Muitas dessas aplicações revolucionaram a sociedade contemporânea. A Parte 2 termina com uma revisão da astrofísica e cosmologia, tópicos que estimulam a nossa imaginação (Capítulo 13).

CAPÍTULO 9

Propriedades e Espectros das Moléculas

9-1 A Ligação Iônica
9-2 A Ligação Covalente
9-3 Outros Tipos de Ligação
9-4 Níveis de Energia e Espectros de Moléculas Diatômicas
9-5 Espalhamento, Absorção e Emissão Estimulada
9-6 Lasers e Masers

Neste capítulo vamos estudar algumas propriedades das moléculas, sistemas constituídos por dois ou mais átomos. Por definição, molécula é a menor parte que conserva as propriedades químicas de uma substância. O estudo das moléculas constitui a base da química teórica. A aplicação da mecânica quântica à física molecular permitiu explicar com notável exatidão a estrutura e os espectros das moléculas, além de responder a perguntas difíceis, como a razão pela qual dois átomos de hidrogênio se combinam para formar uma molécula, mas o mesmo não acontece com três átomos de hidrogênio. Como na física atômica, os cálculos da mecânica quântica aplicados a moléculas muitas vezes são extremamente trabalhosos. Nos casos em que a matemática tende a dificultar a compreensão dos fenômenos físicos, limitar-nos-emos a uma discussão qualitativa ou semiquantitativa. Nas seções finais, vamos discutir a interação da radiação eletromagnética com moléculas, concluindo com uma discussão dos tipos mais comuns de lasers.

Existem duas formas extremas de encarar uma molécula. Considere, por exemplo, a molécula de H_2. Podemos imaginála como a união de dois átomos de H ou como um sistema constituído por dois prótons e dois elétrons. Neste caso, o segundo modelo é mais interessante, porque os elétrons presentes na molécula não estão associados a um próton em particular; pelo contrário, a função de onda de cada elétron se estende a toda a molécula. Quando estamos estudando moléculas mais complexas, porém, um modelo intermediário pode ser mais útil. Imagine, por exemplo, a molécula de N_2. Não precisamos resolver o problema complicado de 2 núcleos e 14 elétrons. A configuração eletrônica do átomo de nitrogênio no estado fundamental é $1s^2 2s^2 2p^3$. Como a camada $1s$ e a subcamada $2s$ estão completas, os três elétrons da subcamada $2p$ são os únicos que podem participar da ligação entre os átomos que compõem a molécula de N_2. Podemos, portanto, considerar a molécula como composta por dois íons N^{+++} e seis elétrons que pertencem à molécula como um todo. As funções de onda dos elétrons que participam das ligações moleculares são conhecidas como *orbitais moleculares*. Em muitos casos, essas funções de onda podem ser representadas por combinações lineares de funções de onda atômicas.

Outro tipo de ligação química envolve a transferência de um ou mais elétrons de um átomo para outro, seguida por uma atração eletrostática entre os íons resultantes. É o que acontece, por exemplo, no sal de cozinha (NaCl). Nesse caso, como em todos os outros tipos de ligação molecular, o conhecimento das propriedades quânticas dos elétrons é essencial para um estudo aprofundado do sistema.

9-1 A Ligação Iônica

Os dois tipos principais de ligação molecular são a *ligação iônica* e a *ligação covalente*. Outros tipos de ligação importantes para a formação de líquidos e sólidos são a *ligação dipolo-dipolo* e a *ligação metálica*. Em muitos casos, a ligação é uma mistura desses mecanismos. Todas essas ligações serão discutidas neste capítulo e no capítulo seguinte, mas é importante reconhecer que todos os tipos de ligação molecular se devem ao fato de que a energia total da molécula é menor do que a soma das energias dos átomos que a compõem, quando considerados separadamente, o que faz com que exista uma interação atrativa entre os átomos quando a distância é maior que um certo valor de equilíbrio. Os mecanismos associados às ligações moleculares são atrações e repulsões eletrostáticas, as propriedades ondulatórias dos elétrons e o princípio de exclusão. Na maioria dos casos, é extremamente difícil analisar com detalhes uma ligação molecular, já que envolve as interações mútuas de muitos elétrons e núcleos; assim, vamos discutir os diferentes tipos de ligações a partir de modelos simplificados constituídos por um pequeno número de átomos e depois ilustrar qualitativamente a extensão dos resultados a moléculas mais complexas.

O tipo de ligação mais fácil de compreender é a ligação iônica, que normalmente é a mais forte de todas e está presente na maioria dos sais. Considere, por exemplo, o KCl. Para demonstrar que a molécula é estável, temos que mostrar que $E(\text{KCl}) < E(\text{K}) + E(\text{Cl})$ quando os átomos de potássio e cloro estão em repouso e muito distantes um do outro. Vamos definir a energia do sistema como nula quando os átomos estão muito afastados (veja a Figura 9-1). O átomo de potássio tem um elétron 4*s* do lado de fora de um caroço com a configuração eletrônica do argônio, $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$. A energia de ionização do K é relativamente pequena, como a de todos os metais alcalinos; no caso do K, apenas 4,34 eV são necessários para remover o elétron 4*s* (veja a Tabela 9-1). A remoção de um elétron do potássio deixa um íon positivo com uma nuvem eletrônica de simetria esférica, constituída apenas por camadas completas. O cloro, por outro lado, necessita de apenas um elétron para completar a última camada. A energia liberada pela aquisição desse elétron é conhecida como *afinidade eletrônica*; no caso do Cl, o valor é 3,62 eV. A energia é liberada porque a função de onda do elétron adicional penetra parcialmente no caroço (veja a Figura 7-10*b*) e, por isso, "enxerga" uma carga elétrica positiva. Quando o cloro adquire um elétron, a nuvem eletrônica adquire simetria esférica. A formação de um íon de K^+ e um íon de Cl^- pela transferência de um elétron do K para o Cl exige, portanto, que o par de átomos receba uma energia de $4{,}34 - 3{,}62 = 0{,}72$ eV. Se esta fosse a história completa, a molécula de KCl não poderia se formar. Acontece, porém, que a energia potencial eletrostática de dois íons separados por uma distância r é $-ke^2/r$. Quando a distância entre os átomos é menor que 2,8 nm, a energia de atração é maior que a energia necessária para criar os íons, e os íons tendem a se formar.

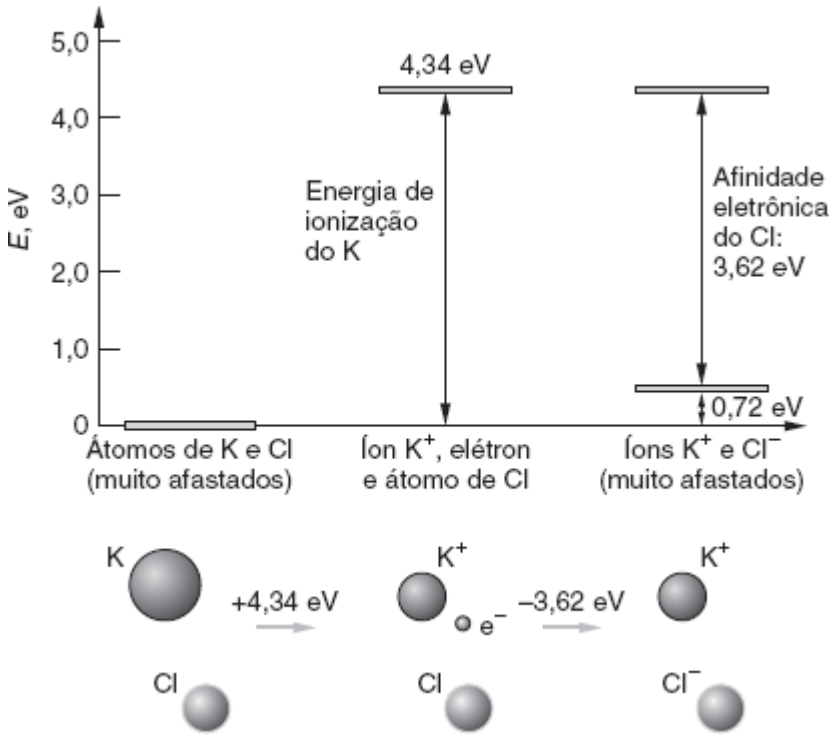


FIGURA 9-1 Energia necessária para ionizar um átomo de K e um átomo de Cl. São necessários 4,34 eV para remover o elétron 4*s* do átomo neutro de potássio, obtendo como resultado um íon K^+ e um elétron livre. Este elétron (ou outro elétron qualquer) pode ocupar a lacuna que existe no orbital 3*p* do átomo neutro de cloro, formando um íon Cl^-. Como a formação deste último íon libera uma energia de 3,62 eV, são necessários $4{,}34 - 3{,}62 = 0{,}72$ eV para formar íons K^+ e Cl^- separados por uma grande distância.

Como a atração eletrostática aumenta à medida que os íons se aproximam, à primeira vista parece impossível que exista uma distância de equilíbrio. Quando a distância é muito pequena, porém, as funções de onda dos elétrons 3*p* do íon K^+ e as funções de onda dos elétrons 3*p* do íon Cl^- começam a se superpor. Como as camadas 3*p* dos dois íons estão completas, o princípio de exclusão de Pauli faz com que exista entre elas uma forte repulsão. Esta "repulsão pelo princípio de exclusão" é a principal

responsável pela repulsão dos átomos de todas as moléculas (exceto a de H_2), qualquer que seja o tipo da ligação. Quando os íons estão afastados, não existe uma superposição da função de onda dos elétrons de um íon com a função de onda dos elétrons do outro íon. Nesse caso, podemos distinguir os elétrons pelo íon a que pertencem e os elétrons de um íon podem ter números quânticos iguais aos dos elétrons do outro íon. Quando os íons estão muito próximos, por outro lado, as funções de onda dos elétrons se superpõem e alguns precisam passar para níveis mais altos de energia por causa do princípio de exclusão, o que aumenta a energia total do sistema. Não se trata de um processo abrupto: os níveis de energia dos elétrons mudam gradualmente enquanto os íons se aproximam. A energia potencial total *U* da molécula de KCl pode ser expressa como a soma do potencial eletrostático, da energia de repulsão pelo princípio de exclusão e da energia de ionização líquida:

Tabela 9-1 Energias de ionização de metais alcalinos e afinidades eletrônicas de halogênios

Metal alcalino	Energia de ionização (eV)	Halogênio	Afinidade eletrônica (eV)
Li	5,39	F	3,40
Na	5,14	Cl	3,62
K	4,34	Br	6,36
Rb	4,18	I	3,06
Cs	3,89	At	2,8
Fr	4,07		

Fonte: Handbook of Chemistry and Physics, 90th ed. (New York: Chemical Rubber Co., 2009.)

$$U(r) = -\frac{ke^2}{r} + E_{ex} + E_{ion} \qquad \textbf{9-1}$$

em que E_{ion} = 0,72 eV no caso do KCl. A energia de repulsão pelo princípio de exclusão E_{ex} pode ser escrita na forma

$$E_{ex} = \frac{A}{r^n} \qquad \textbf{9-2}$$

em que *A* e *n* são constantes que dependem da molécula. A Figura 9-2*a* mostra a energia potencial da molécula de KCl em função da distância entre os dois íons. A energia é mínima para a distância de equilíbrio r_0 = 0,27 nm. Para distâncias menores, a energia aumenta rapidamente por causa do princípio de exclusão. A energia E_d necessária para separar os íons e formar *átomos* de K e Cl, conhecida como energia de *dissociação*, é aproximadamente 4,40 eV. A Figura 9-2*b* mostra a energia potencial total de outra molécula iônica, o NaCl. As diferenças entre as duas curvas se devem ao fato de que o Na apresenta um potencial de ionização maior e um raio iônico menor que o K. Os cálculos necessários para obter curvas como as que aparecem na Figura 9-2 estão ilustrados no Exemplo 9-1. O Exemplo 9-2 mostra como calcular as constantes *A* e *n* da Equação 9-2.

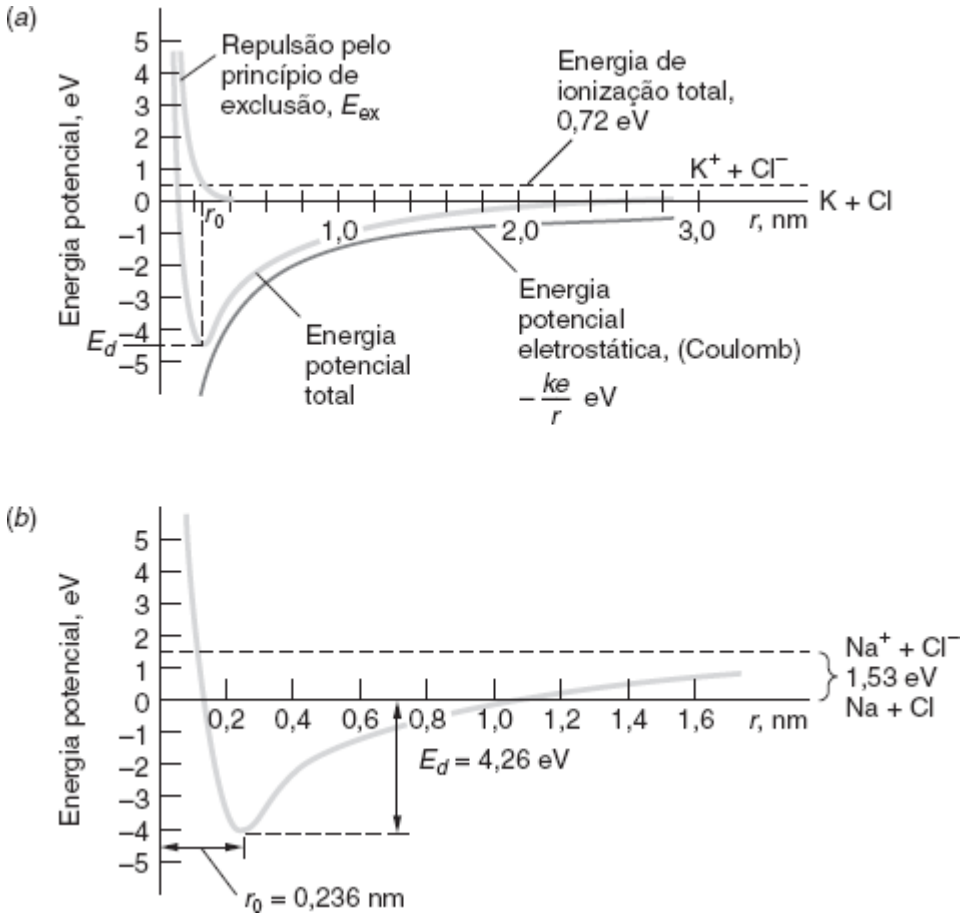


FIGURA 9-2 (*a*) Energia potencial dos íons K^+ e Cl^- em função da distância *r*. A energia para uma distância infinita foi tomada como igual a 0,72 eV, a energia necessária para formar os dois íons a partir de átomos neutros. A energia é mínima para a distância de equilíbrio r_0 = 0,27 nm. (*b*) Energia potencial dos íons Na^+ e Cl^- em função de *r*. As diferenças entre as duas moléculas se devem ao fato de que o sódio possui um potencial de ionização maior e um raio iônico menor que o potássio.

EXEMPLO 9-1 **Ligação Iônica do NaF** O potencial de ionização do sódio é 5,14 eV, a afinidade eletrônica do flúor é 3,40 eV e a distância de equilíbrio do fluoreto de sódio (NaF) é 0,193 nm. (*a*) Qual é a energia necessária para formar os íons Na^+ e F^- a partir de átomos neutros de sódio e flúor? (*b*) Qual é a energia potencial eletrostática dos íons Na^+ e F^- na distância de equilíbrio? (*c*) A energia de dissociação do NaF é 4,99 eV. Qual é a energia de repulsão dos íons na distância de equilíbrio?

SOLUÇÃO

(*a*) Como a energia necessária para ionizar o sódio é 5,14 eV e a afinidade eletrônica do F é 3,40 eV, a energia necessária para formar os íons Na^+ e F^- a partir de átomos neutros de sódio e flúor é 5,14 eV − 3,40 eV = 1,74 eV = E_{ion}.

(*b*) A energia potencial eletrostática dos íons Na^+ e F^- na distância de equilíbrio (tomando esta energia como nula quando os íons estão a uma distância infinita um do outro) é dada por

$$-\frac{ke^2}{r_0} = -\frac{(8{,}99 \times 10^9\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2})\,(1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{1{,}93 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}}$$
$$= -1{,}19 \times 10^{-18}\ \mathrm{J} = -7{,}45\ \mathrm{eV}$$

(*c*) Tomando a energia potencial total da molécula quando os íons estão separados por uma distância infinita como igual a 1,74 eV (a energia necessária para formar os íons a partir dos respectivos átomos neutros), o potencial eletrostático total (potencial de Coulomb) é dado por

$$U_C = -\frac{ke^2}{r} + 1{,}74\ \mathrm{eV}$$

Na distância de equilíbrio r_0, essa energia é U_C = −7,45 eV + 1,74 eV = −5,71 eV. Como o valor experimental da energia de dissociação é 4,99 eV, a energia de repulsão dos íons devido ao princípio de exclusão, de acordo com a Equação 9-1, é 5,71 eV − 4,99 eV = 0,72 eV.

EXEMPLO 9-2 **Repulsão pelo Princípio de Exclusão** Determine os valores de A e n na Equação 9-2 para o NaF.

SOLUÇÃO

De acordo com o Exemplo 9-1, na distância de equilíbrio entre os íons a energia de repulsão devido ao princípio de exclusão é dada por

$$E_{ex}(r_0) = \frac{A}{r_0^n} = \frac{A}{(0{,}193\ \text{nm})^n} = 0{,}72\ \text{eV}$$

As forças experimentadas pelos dois íons em $r = r_0$ devem ser nulas, já que, nesse ponto, a energia potencial é mínima. Isso significa que, quando a distância entre os íons é r_0, a força de Coulomb F_C e a força de repulsão pelo princípio de exclusão têm o mesmo módulo e sentidos opostos:

$$F_C = -\left(\frac{dU_C}{dr}\right)_{r=r_0} = \left(\frac{nA}{r^{n+1}}\right)_{r=r_0}$$

o que nos dá

$$F_C = \frac{U_C(r_0)}{r_0} = \frac{ke^2}{r_0^2} = 38{,}7\ \text{eV/nm}$$

Assim, temos:

$$\frac{nA}{r_0^{n+1}} = \frac{n}{r_0}\frac{A}{r_0^n} = \frac{n}{r_0}(0{,}72\ \text{eV}) = 38{,}7\ \text{eV/nm}$$

e, portanto,

$$n = \frac{38{,}7\ \text{eV/nm}}{0{,}72\ \text{eV}} \times (0{,}193\ \text{nm}) = 10{,}4 \approx 10$$

o que nos dá $A = 5{,}4 \times 10^{-8}\ \text{eV}\cdot\text{nm}^{10}$. Finalmente, para NaF, a energia E_{ex} é dada por

$$E_{ex} = \frac{(5{,}4 \times 10^{-8}\ \text{eV}\cdot\text{nm}^{10})}{r^{10}}$$

É preciso notar que nossa discussão da ligação iônica e, em particular, os gráficos de energia potencial da Figura 9-2 se aplicam apenas ao *estado fundamental* das moléculas. Como no caso dos átomos, os elétrons da última camada (elétrons de valência) das moléculas podem ocupar estados excitados. Como as funções de onda dos elétrons nos estados excitados tendem a se afastar mais dos íons que as do estado fundamental, a curva de energia potencial é mais larga e mais rasa que no estado fundamental, o que resulta em ligações mais fracas e distâncias maiores entre os íons. Em nossa análise, ignoramos duas contribuições para a energia total da molécula: (1) a energia de ponto zero (veja a Seção 5-6), que faz diminuir o valor absoluto de E_d, e (2) a atração de van der Waals, que faz aumentar o valor absoluto de E_d. As duas contribuições são pequenas e tendem a se cancelar parcialmente. A última, que resulta de dipolos induzidos, é a única forma de ligação em certas moléculas e será discutida mais adiante.

A distância de equilíbrio de 0,27 nm é para o KCl no estado gasoso (que pode ser obtido por evaporação do KCl no estado sólido). Normalmente, o KCl é um sólido cristalino de estrutura cúbica no qual os íons K^+ e Cl^- ocupam vértices alternados de um cubo. A distância entre os íons no cristal é um pouco maior, da ordem de 0,32 nm. Devido à presença dos íons vizinhos de carga oposta, a energia eletrostática por par de íons é menor no cristal. Esta energia em geral é expressa na forma $\alpha ke^2/r_0$, em que r_0 é a distância de equilíbrio ou *comprimento da ligação* e α, a chamada *constante de Madelung*, depende da estrutura do cristal, como será discutido no Capítulo 10. No caso do KCl, $\alpha = 1{,}75$. A Tabela 9-2 mostra os valores de E_d e r_0 para várias moléculas iônicas no estado gasoso.

Um comentário final a respeito da ligação iônica: para a maioria das moléculas da Tabela 9-2, a ligação não é exclusivamente iônica. Como veremos na próxima seção, uma ligação pode ser parcialmente iônica e parcialmente covalente.

Tabela 9-2 Energia de dissociação E_d e distância de equilíbrio r_0 para várias moléculas iônicas* no estado gasoso

Molécula	Energia de dissociação (eV)	Distância de equilíbrio (nm)
NaCl	4,27	0,236
NaF	5,34	0,193
NaH	1,92	0,189
NaBr	3,81	0,250
LiCl	4,86	0,202
LiH	2,47	0,159
LiI	3,58	0,239
KCl	4,49	0,267
KBr	3,94	0,282
RbF	5,12	0,227
RbCl	4,43	0,279
CsI	3,50	0,332

*As duas moléculas formadas por um átomo de metal alcalino e um átomo de hidrogênio podem parecer estranhas, mas o hidrogênio, como alguns outros elementos, pode formar tanto íons positivos como íons negativos. A energia de ionização do H é 13,6 eV; a afinidade eletrônica é 0,75 eV.

Fonte: *Handbook of Chemistry and Physics*, 90th ed. (New York: Chemical Rubber Co., 2009.)

9-2 A Ligação Covalente

Um mecanismo totalmente diferente é responsável pela formação de moléculas como H_2, N_2, H_2O e CO e também contribui para a energia de ligação de muitas das moléculas da Tabela 9-2. Se calcularmos a energia necessária para formar os íons H^+ e H^- pela transferência de um elétron de um átomo de hidrogênio para outro, veremos que essa energia é de mais de 12 eV. Somando esta energia à energia eletrostática (que deve incluir a repulsão dos núcleos), constatamos que não existe nenhuma distância para a qual a energia total seja negativa. A conclusão é que a ligação entre os átomos na molécula de H_2 não pode ser de natureza iônica. Na verdade, a atração entre os átomos de hidrogênio se deve a um efeito quântico. A redução de energia que ocorre quando dois átomos de hidrogênio se aproximam resulta do compartilhamento dos elétrons pelos dois núcleos e está intimamente ligada às propriedades de simetria das funções de onda dos elétrons. Podemos compreender melhor o fenômeno examinando primeiro um problema mais simples da mecânica quântica: o de dois poços finitos quadrados unidimensionais.

Considere primeiro um único elétron que pode ser encontrado nos dois poços com a mesma probabilidade. Se os poços são exatamente iguais, a função $|\Psi|^2$ é simétrica em relação ao ponto médio do sistema. Isso significa que a função Ψ é simétrica ou antissimétrica em relação ao mesmo ponto. As duas possibilidades estão ilustradas na Figura 9-3, supondo que o elétron se encontra no estado fundamental. Anteriormente, não fizemos nenhuma distinção entre as duas possibilidades ao somarmos funções de onda porque as energias e as densidades de probabilidade $|\Psi|^2$ são iguais para as funções simétrica e antissimétrica quando os poços estão muito afastados um do outro. A Figura 9-4 mostra o que acontece quando os dois poços estão próximos:

as funções de onda dos dois poços se superpõem parcialmente e as funções de onda totais são bem diferentes nos dois casos.

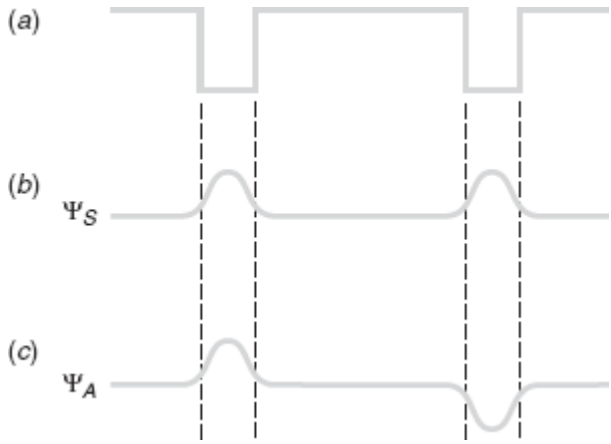


FIGURA 9-3 (*a*) Dois poços quadrados muito afastados um do outro. A função de onda do elétron pode ser (*b*) simétrica ou (*c*) antissimétrica. As densidades de probabilidade e energias são iguais para as duas funções de onda.

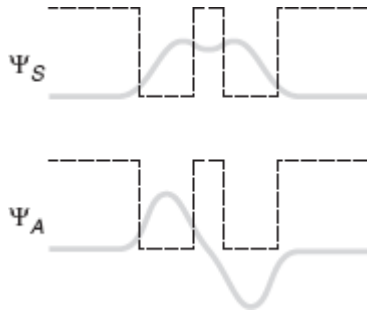


FIGURA 9-4 Funções de onda simétrica e antissimétrica para dois poços quadrados próximos um do outro. Nesse caso, as densidades de probabilidade e energias são diferentes para as duas funções de onda. A amplitude da função de onda (e a densidade de probabilidade) na região entre os poços é maior para a função de onda simétrica que para a função de onda antissimétrica.

Observe que a probabilidade de encontrar o elétron na região entre os poços é muito maior para a função simétrica do que para a função antissimétrica. No caso limite de uma distância nula entre os poços, a função de onda simétrica Ψ_S tende para a função de onda do estado fundamental de uma partícula em um poço de largura dupla e a função de onda antissimétrica Ψ_A tende para a função de onda do primeiro estado excitado do mesmo poço; assim, a energia de Ψ_S é menor que a de Ψ_A. Existem duas conclusões importantes a tirar desta discussão:

1. As energias dos estados Ψ_A e Ψ_S, que inicialmente eram iguais, tornam-se diferentes quando a distância entre os poços diminui.
2. A função de onda do estado simétrico tem valores maiores na região entre os poços do que a função de onda do estado antissimétrico.

Considere agora o que acontece quando acrescentamos ao sistema um segundo elétron. A função de onda *total* dos dois elétrons deve ser antissimétrica em relação à permuta dos elétrons, já que os elétrons são férmions e, portanto, obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Observe que permutar os elétrons equivale a permutar os poços, ou seja, para um sistema de duas partículas, a simetria de câmbio é equivalente à simetria espacial. Os dois elétrons ocupam, portanto, o estado espacialmente simétrico se os spins estiverem antiparalelos ($S = 0$) e o estado espacialmente antissimétrico se os spins estiverem paralelos ($S = 1$).

O Íon H^+_2

Vamos considerar agora um sistema real com um elétron, o íon da molécula de hidrogênio H^+_2. O poço de potencial duplo formado pelos dois prótons está ilustrado (em uma dimensão) na Figura 9-5. O operador hamiltoniano (usado para calcular a energia total) do sistema é dado por (veja a Equação 6-51 e a Figura 9-5*b*):

$$H_{\text{op}} = \frac{p^2_{\text{op}}}{2m} + ke^2\left(-\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_0}\right)$$

No estado fundamental, a função de onda do átomo de hidrogênio é proporcional a e^{-r/a_0}. Em nosso modelo unidimensional, essa expressão assume a forma $e^{-|x|/a_0}$. A Figura 9-6 mostra as combinações simétrica e antissimétrica para dois valores da distância entre os prótons. No caso geral,

$$\Psi_S = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\Psi_{100}(r_1) + \Psi_{100}(r_2))$$

e

$$\Psi_A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\Psi_{100}(r_1) - \Psi_{100}(r_2))$$

Os resultados são semelhantes ao caso dos poços quadrados: Ψ_S tem valores maiores do que Ψ_A na região entre os prótons. Apenas no caso em que a função de onda (e, portanto, a densidade de probabilidade) tem valores elevados perto do centro da molécula é que esperamos que se forme uma ligação molecular estável. É a concentração de cargas negativas entre os prótons, no caso de Ψ_S, que mantém os prótons unidos. Sendo assim, não esperamos que existam moléculas estáveis com elétrons no estado Ψ_A. Esta conclusão pode ser demonstrada matematicamente resolvendo a equação de Schrödinger para o H^+_2 e calculando as energias dos dois estados.

Como o cálculo é complicado, vamos nos limitar a descrever como a energia da molécula varia com a distância r entre os prótons. Na situação da Figura 9-6*a*, com os prótons muito afastados, a energia dos elétrons é −13,6 eV. A energia potencial U_p (repulsão) dos prótons pode ser desprezada para grandes valores de r; além disso, como existe apenas um elétron, a repulsão pelo princípio de exclusão é nula. Quando os prótons estão próximos, como na Figura 9-6*b*, U_p aumenta e a energia do elétron diminui, já que o elétron é atraído mais fortemente pelos prótons. Considere o que acontece com a energia do elétron quando a distância entre os prótons continua a diminuir. Quando $r \rightarrow 0$, a função de onda do elétron tende para a função de onda de um átomo com $Z = 2$. O valor da função de onda simétrica Ψ_S é máximo em $r = 0$ e, portanto, a função corresponde ao estado 1*s* (o estado fundamental) do átomo. Como vimos (Equação 7-25), a energia correspondente é dada por $E_1 = -13{,}6Z^2/n^2 = -54{,}4$ eV. Chamando de E_S a energia associada à função de onda Ψ_S, temos: $E_S = -13{,}6$ eV para $r \rightarrow \infty$ e $E_S = -54{,}4$ eV para $r \rightarrow 0$. A função antissimétrica Ψ_A é nula para $r = 0$, que corresponde ao estado 2*p* (primeiro estado excitado) do átomo com $Z = 2$, já que este é o estado de menor energia com uma função de onda que se anula em $r = 0$ (veja a Equação 7-26 e a Tabela 7-2). A energia deste estado é $E_2 = -13{,}6Z^2/n^2 = -13{,}6$ eV. Chamando de E_A a energia associada à função de onda Ψ_A, temos: $E_A = -13{,}6$ eV para $r - \infty$ (neste limite, $|\Psi_S|^2$ e $|\Psi_A|^2$ são iguais) e $E_A = -13{,}6$ para $r - 0$. A Figura 9-7 mostra a variação de E_S e E_A com a distância r entre os dois prótons.

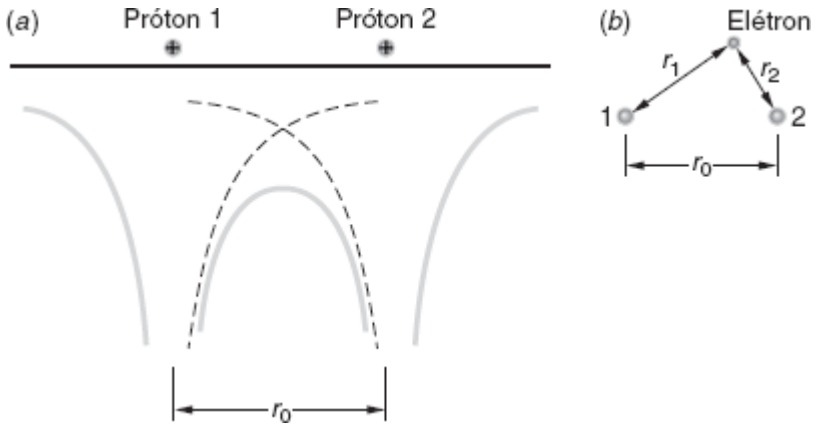


FIGURA 9-5 (*a*) Potencial eletrostático a que é submetido um elétron na presença de dois prótons separados por uma distância r_0. A curva cheia representa o potencial total em um modelo unidimensional. Os círculos com um sinal positivo mostram as posições dos prótons. (*b*) Definição de r_1 e r_2.

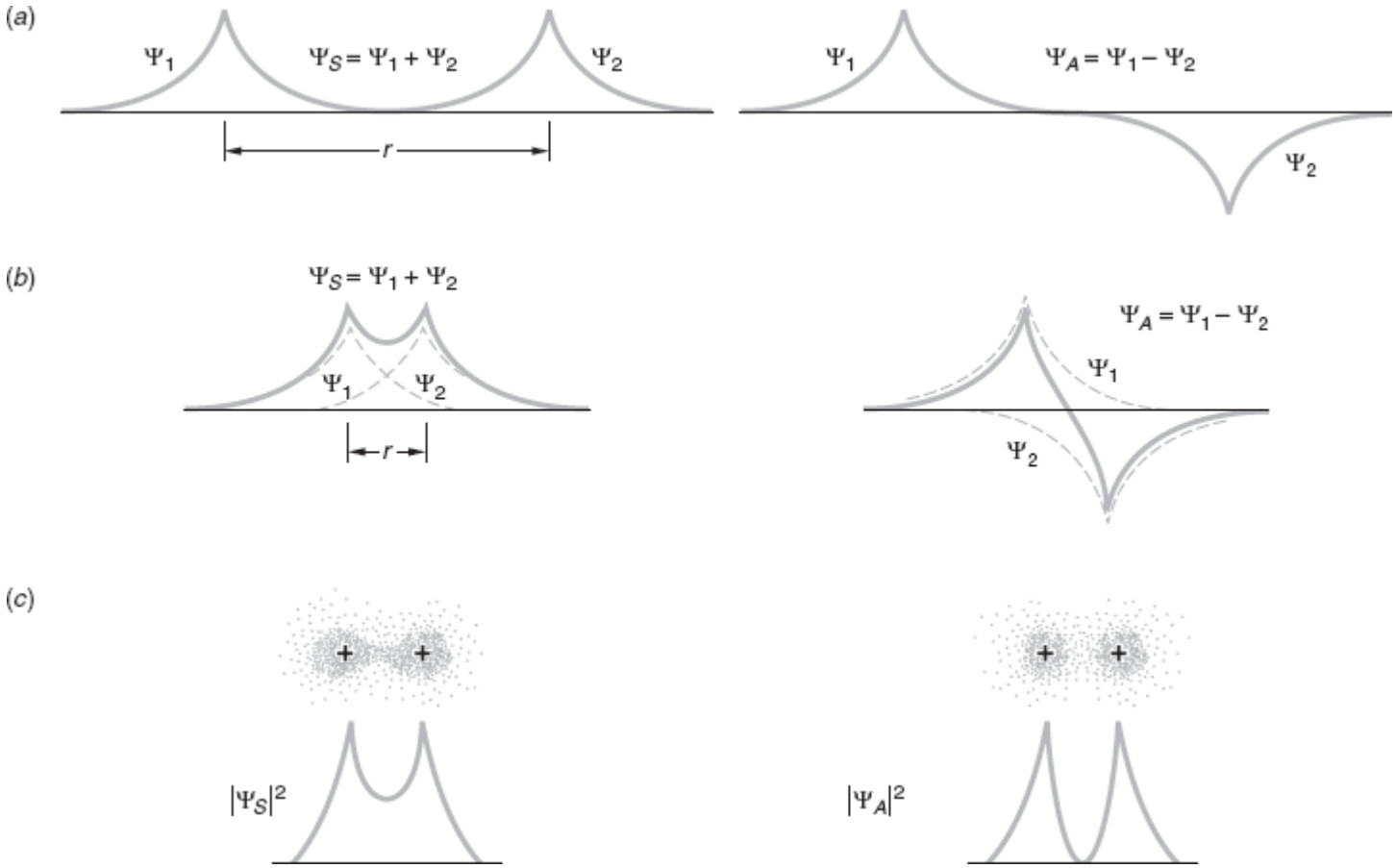


FIGURA 9-6 Funções de onda unidimensionais simétrica e antissimétrica do elétron (*a*) para dois prótons relativamente distantes e (*b*) para dois prótons relativamente próximos. (*c*) Densidades de probabilidade para o caso (*b*). O número de pontos em torno dos prótons é proporcional à densidade de probabilidade.

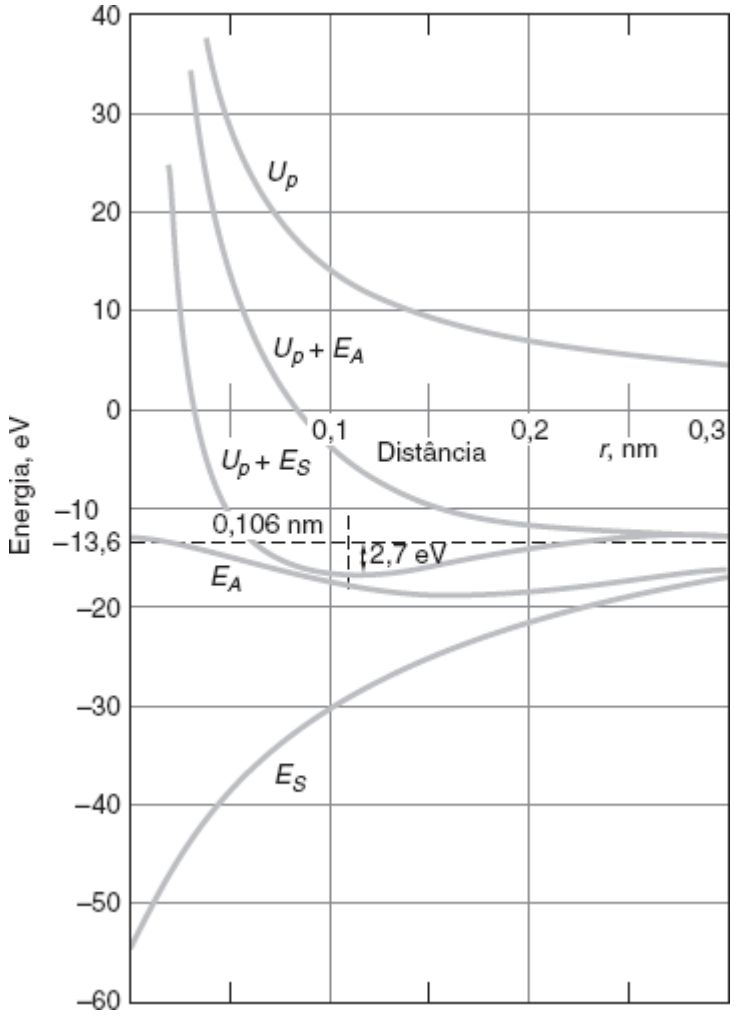


FIGURA 9-7 Variação da energia potencial do íon H^+_2 com a distância entre os prótons, para duas simetrias da função de onda do elétron.

A energia potencial U_p associada à repulsão entre os prótons é dada, naturalmente, por $U_p = ke^2/r$. A energia total do íon H^+_2 é, portanto, $U_p + E_S$ ou $U_p + E_A$, dependendo do estado ocupado pelo elétron. Como se pode ver na Figura 9-7, apenas uma dessas funções possui um mínimo e pode, portanto, estar associada a uma molécula estável. A função energia potencial $E_{total} = U_p + E_S$ tem um mínimo em $r = 0{,}106$ nm. Isso significa que o íon H^+_2 é estável, com uma distância de equilíbrio $r_0 = 0{,}106$ nm e uma energia de ligação $E_{total}(r \rightarrow \infty) - E_{total}(r_0) = -13{,}6 - (-16{,}3) = 2{,}7$ eV. Por outro lado, a função energia potencial $E_{total} = U_p + E_A$ não possui um mínimo; assim, a função antissimétrica, como já esperávamos, não pode estar associada a uma molécula estável. Uma ligação do tipo que existe no íon H^+_2 tende a ser instável, a menos que os núcleos tenham a mesma carga elétrica.

A Molécula de H_2

A formação da molécula de H_2 é muito semelhante à do íon H^+_2. Podemos pensar na molécula como constituída por dois átomos de hidrogênio no estado fundamental. Os elétrons desses átomos estão em *orbitais*[1] do tipo 1*s*, isto é, estados cuja função de onda espacial é Ψ_{100}, com uma energia de −13,6 eV; assim, a energia total do sistema para grandes distâncias entre os átomos (isto é, para $r \rightarrow \infty$) é −27,2 eV. Quando os átomos se aproximam, as funções de onda começam a se superpor, como mostram as Figuras 9-6*a* e 9-6*b*, e os dois elétrons passam a ser compartilhados pelos dois átomos (prótons). Como vimos, as duas funções de onda podem se combinar para produzir uma função de onda simétrica Ψ_S, que pode estar associada a uma molécula estável de H_2, ou uma função de onda antissimétrica Ψ_A, que não pode estar associada a uma molécula estável. Como a função de onda *total* Ψ deve ser antissimétrica em relação à permuta dos elétrons, a função de onda *espacial* Ψ_S ($= RY_{n\ell}Y_{\ell m}$) deve estar associada a uma função de onda *de spin* χ_A (veja a Seção 7-6). Assim, Ψ_S está em um estado singleto ($S = 0$) e Ψ_A está em um estado tripleto ($S = 1$).

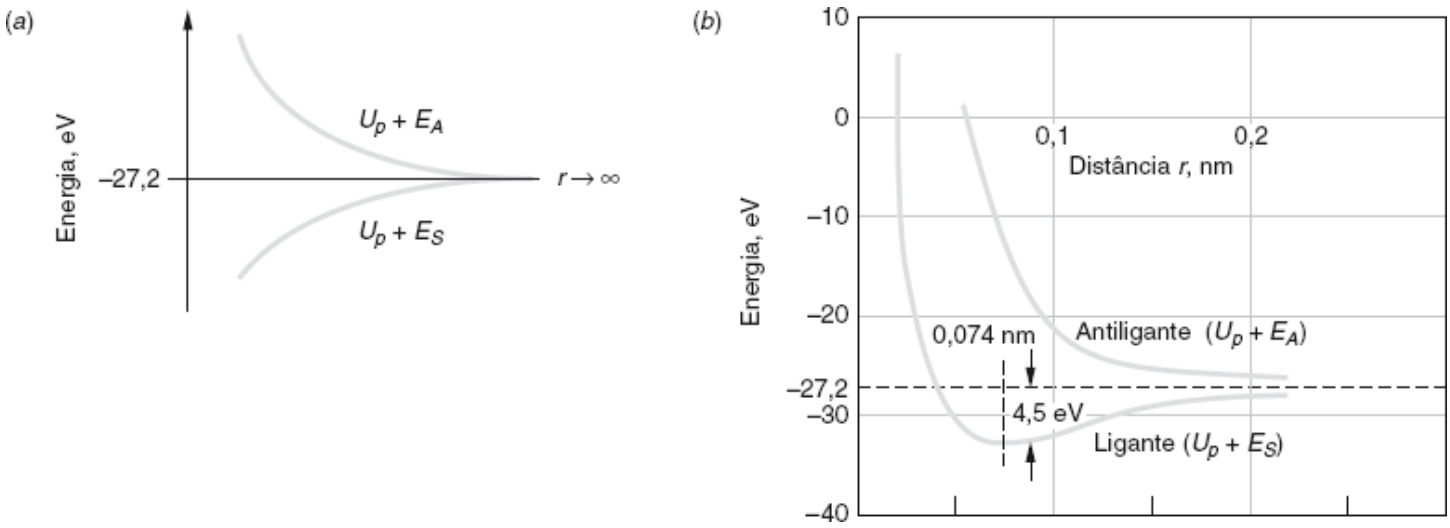


FIGURA 9-8 (*a*) A diferença de energia entre os dois níveis de um sistema formado por dois átomos de hidrogênio é praticamente nula quando os átomos estão muito distantes, mas passa a ser significativa quando os átomos estão próximos. (*b*) Energia potencial de dois átomos de hidrogênio em função da distância entre os átomos. A energia é $U_p + E_S$ para a função de onda simétrica (orbital ligante) e $U_p + E_A$ para a função de onda antissimétrica (orbital antiligante). As duas energias tendem a $+\infty$ quando a distância entre os átomos tende a 0.

Existe uma diferença entre a molécula de H_2 e o íon H^+_2 que precisa ser explicada. Da mesma forma que o H^+_2, a molécula de H_2 possui dois estados *moleculares* cuja energia para grandes valores de *r*, como vimos, é −27,2 eV. Quando *r* é pequeno, a molécula continua a ter dois estados, mas existe uma diferença de energia entre eles, como mostra a Figura 9-8*a*. Como no caso anterior, o estado de menor energia, E_S, está associado a Ψ_S, a função de onda da molécula estável, também conhecida como *orbital ligante*. O estado de maior energia, E_A, está associado à função de onda Ψ_A, que não produz uma molécula estável e também é conhecida como *orbital antiligante*. A diferença é que agora existem dois elétrons cuja densidade de probabilidade é elevada na região entre os prótons, ambos no orbital Ψ_S. Como os elétrons obedecem ao princípio de exclusão, os spins dos dois elétrons devem estar antiparalelos ($S = 0$). Assim, um orbital molecular, como um orbital atômico, não pode ser ocupado por mais de dois elétrons. No caso do H_2, os dois elétrons ocupam o orbital ligante. Como os dois elétrons estão em estados *s*, dizemos que na molécula de H_2 existe uma *ligação s*.

A Figura 9-8*b* mostra a variação das energias da função de onda ligante e da função de onda antiligante com a distância *r* entre os dois prótons. A energia correspondente a Ψ_S, o orbital ligante, tem um mínimo de $E = -31{,}7$ eV para $r = 0{,}074$ nm, ou

seja, a distância de equilíbrio neste caso é r_0 = 0,074 nm, e a energia de ligação é $E(r \to \infty) - E(r_0) = -27{,}2 - (-31{,}7) = 4{,}5$ eV. O efeito da adição do segundo elétron ao íon H^+_2 para formar uma molécula de H_2 se torna evidente quando comparamos as Figuras 9-7 e 9-8*b*. O aumento da concentração de cargas negativas entre os íons torna a ligação mais forte, fazendo com que a energia de ligação aumente de 2,7 eV para 4,5 eV e a distância de equilíbrio diminua em 30%. É o compartilhamento dos elétrons externos, ou de valência, como no exemplo da molécula de H_2, que caracteriza uma ligação do tipo *covalente*. O requisito básico para que uma ligação covalente se forme é que exista uma grande superposição entre as funções de onda dos átomos participantes. Ao contrário do que acontece no caso do íon H^+_2, a ligação covalente de uma molécula não se torna mais fraca quando os núcleos não são iguais.[2]

Podemos compreender agora por que três átomos de H não se unem para formar uma molécula de H_3. Se um terceiro átomo de H se aproxima de uma molécula de H_2, como o terceiro elétron não pode ocupar o estado 1*s* e ficar com o spin antiparalelo aos outros dois elétrons, tem que ocupar um orbital de maior energia, do tipo antiligante. Em outras palavras, quando o terceiro átomo se aproxima, o terceiro elétron é forçado para um estado de energia mais alta pelo princípio de exclusão. A ligação entre os átomos de hidrogênio na molécula de H_2 é chamada de *ligação saturada* porque não há lugar para mais um elétron. Os dois elétrons que estão sendo compartilhados ocupam os estados 1*s* dos dois átomos. Esta é a razão pela qual ligações covalentes que envolvem três (ou mais) elétrons são normalmente instáveis. Entretanto, convém chamar a atenção para o fato de que o íon H^+_3 (que contém apenas dois elétrons) *é* estável. Descoberto por J. J. Thomson em 1911, este, o mais simples dos íons poliatômicos, é responsável por importantes linhas espectrais estudadas pelos astrofísicos e serve de referência para os cálculos teóricos de química quântica.

Embora a "molécula" H_3 não seja estável, o íon H^+_3 *é* estável! Descoberto por J. J. Thomson em 1911 e desprovido de um estado excitado estável, o H^+_3 já foi usado para estudar a atmosfera de Júpiter e serve de referência para os cálculos teóricos de química quântica.

Agora deve estar claro por que dois átomos de He não se unem para formar uma molécula de He_2: os átomos de hélio não possuem elétrons de valência para compartilhar. Quando dois átomos de He se aproximam um do outro, os orbitais moleculares ligante e antiligante se formam, como na molécula de H_2; entretanto, como cada orbital pode acomodar apenas dois elétrons (com spins antiparalelos), dois dos quatro elétrons do sistema He_2 não podem permanecer no estado 1*s*, mas devem passar para um orbital de maior energia, do tipo antiligante. O resultado é que os dois átomos de He não formam uma ligação estável. Em baixas temperaturas e altas pressões, os átomos de He se unem, mas a ligação não é do tipo covalente e sim do tipo dipolo-dipolo, que será assunto da Seção 9-3. Essa ligação é tão fraca que o He ferve a 4,2 K à pressão atmosférica; além disso, para que se solidifique, mesmo a temperaturas próximas do zero absoluto, é preciso que a pressão seja maior do que 20 atm.

Covalente ou iônica?

Quando uma molécula é formada por dois átomos iguais, como as moléculas de H_2, N_2 e O_2, a ligação é puramente covalente. Como as funções de onda dos dois átomos são exatamente iguais, nenhum dos átomos assume uma posição dominante e os elétrons são compartilhados igualmente. Por outro lado, quase todas as ligações entre átomos diferentes são misturas de ligação iônica e ligação covalente. Mesmo no NaCl, existe uma probabilidade finita de que o elétron doado pelo átomo de sódio ao átomo de cloro seja encontrado nas proximidades do átomo de sódio, já que a função de onda não se anula totalmente nessa região. Assim, este elétron é compartilhado e forma uma ligação covalente, embora esta ligação constitua apenas uma pequena parte da ligação total, que é predominantemente iônica.

Moléculas de fullereno com ligações covalentes podem formar nanotubos, ou seja, tubos com um diâmetro da ordem de nanômetros. Esses tubos, quando dopados com uma pequena concentração de impurezas, podem se tornar supercondutores (veja a Seção 10-8).

O grau de ionicidade de uma ligação pode ser determinado a partir do valor do momento dipolar elétrico da molécula. Por exemplo, se a ligação no NaCl fosse puramente iônica, o centro das cargas positivas estaria no íon Na^+ e o centro das cargas negativas estaria no íon Cl^-. Nesse caso, o módulo do momento dipolar elétrico seria dado por

$$p_{\text{iônico}} = er_0 \qquad \textbf{9-3}$$

em que r_0 é a distância de equilíbrio entre os íons. Assim, o momento dipolar do NaCl seria

$$p_{\text{iônico}} = er_0 = (1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(2{,}36 \times 10^{-10}\ \text{m}) = 3{,}78 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

O valor experimental do momento dipolar elétrico do NaCl é

$$p_{exp} = 3{,}00 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m}$$

Quando a ligação é puramente covalente, o momento dipolar elétrico da molécula é zero; assim, podemos definir o grau de ionicidade de uma ligação como a razão entre p_{exp} e p_{ion}. No caso do NaCl, a razão é 3,00/3,78 = 0,79. A ligação do NaCl é, portanto, 79% iônica e 21% covalente.

EXEMPLO 9-3 **Tipo de Ligação do LiH** O valor experimental do momento dipolar elétrico do LiH é $1{,}96 \times 10^{-29}$ C · m. De acordo com a Tabela 9-3 (veja a Leitura Suplementar *Outras Ligações Covalentes*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet), a molécula é parcialmente covalente. Qual é o grau de covalência da ligação do LiH?

SOLUÇÃO

De acordo com a Tabela 9-3, a distância de equilíbrio do LiH é 0,159 nm. Se a ligação fosse puramente iônica, o momento dipolar elétrico p_{ion} seria

$$\begin{aligned} p_{\text{iônico}} &= (1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}159 \times 10^{-9}\ \text{m}) \\ &= 2{,}54 \times 10^{-29}\ \text{C} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

O grau de ionicidade da ligação é 1,96/2,54 = 0,77; assim, a molécula de LiH é apenas 23% covalente.



Leitura Suplementar

Além da molécula de H_2, existem muitas outras moléculas com ligações covalentes nas quais são compartilhados pares de elétrons *s*, elétrons *s* e *p* e pares de elétrons *p*. Uma classe importante é a das ligações *sp* híbridas, que estão presentes nas ligações que envolvem átomos de carbono com outros átomos. Vários outros exemplos, como o dos fullerenos, são apresentados na Leitura Suplementar *Outras Ligações Covalentes*, disponível no site deste livro na Internet, onde também se encontram as Equações 9-4 e 9-5, as Tabelas 9-3 a 9-6 e as Figuras 9-9 a 9-17.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
9-3 Outros Tipos de Ligação

Os dois tipos de ligação que discutimos até agora, iônica e covalente, são responsáveis pela formação da maioria das moléculas. Como veremos no Capítulo 10, os mesmos mecanismos são frequentemente responsáveis pela combinação de átomos em maior escala para formar sólidos. Dois outros tipos de ligações são observados nos sólidos. Um desses tipos, a *ligação molecular* ou *ligação dipolo-dipolo*, também é responsável pela formação de grandes moléculas a partir de moléculas menores, e será discutido nesta seção. O segundo tipo, a *ligação metálica*, está presente nos sólidos metálicos e não é observado em moléculas. Por esse motivo, vamos adiar a discussão da ligação metálica para o Capítulo 10.

Ligação Dipolo-Dipolo

Em 1873, J. D. van der Waals[5] sugeriu que duas moléculas próximas uma da outra estariam sempre sujeitas a uma força atrativa de natureza eletrostática. Átomos que não formam ligações iônicas ou covalentes também sofrem este tipo de interação eletrostática. O resultado é que, em temperaturas suficientemente baixas para que os efeitos da agitação térmica possam ser desprezados, todas as substâncias passam para a fase líquida e depois para a fase sólida. (A única exceção, como já dissemos, é o hélio, que não se solidifica quando submetido a sua própria pressão de vapor, seja qual for a temperatura.) Esta interação intermolecular resulta da atração eletrostática de dipolos elétricos.

As ligações dipolo-dipolo são responsáveis pela ação da maioria dos adesivos. As patas das lagartixas possuem milhares de pequenos pelos, com menos de 0,5 micrômetro de diâmetro, que aderem a superfícies através de forças do tipo dipolo-dipolo, permitindo que os animais caminhem em tetos e paredes. Os asteroides com menos de 100 m de diâmetro, formados de poeira, são pequenos demais para serem mantidos coesos pela força gravitacional; o que evita que os grãos de poeira se dispersem é a interação dipolo-dipolo.

A Figura 9-18*a* mostra o campo elétrico produzido por um dipolo elétrico. O campo elétrico $\mathbf{E}_d$ produzido pelo dipolo no ponto *A* é dado por

$$\mathbf{E}_d = k\left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}\right] \qquad \textbf{9-6}$$

cujo módulo para $r >> a$ é

$$E_d = \frac{kqa}{r^3} = \frac{kp_1}{r^3} \qquad \textbf{9-7}$$

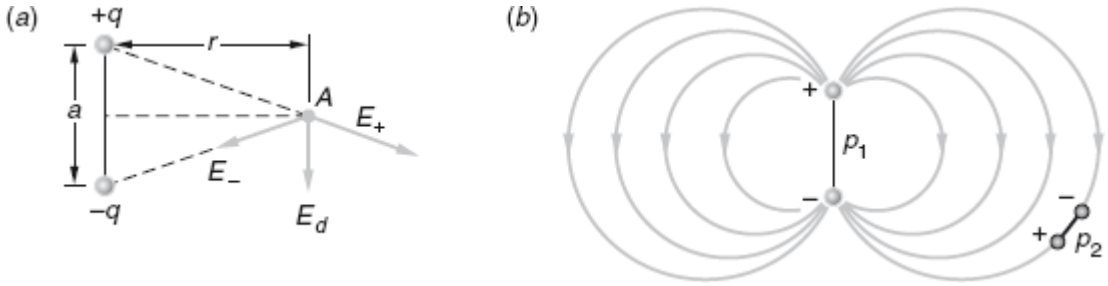


FIGURA 9-18 (*a*) Campo elétrico $\mathbf{E}_d$ em um ponto A sobre uma reta perpendicular ao eixo de um dipolo elétrico $p_1 = qa$. (*b*) O campo $\mathbf{E}_d$ age sobre um segundo dipolo p_2, orientando-o ao longo das linhas de campo. A força exercida por p_1 sobre uma carga isolada é proporcional a $1/r^3$.

no qual $p_1 = qa$ é o módulo do momento dipolar elétrico.[6] Assim, o campo elétrico produzido pelo dipolo e a força exercida por este sobre uma carga elétrica diminuem com o cubo da distância, mais rapidamente, portanto, que a força eletrostática associada às ligações iônicas e covalentes, que diminui com o quadrado da distância. Em outras palavras, a força exercida por um dipolo qa em uma carga de teste é menor que a força exercida por uma carga q situada à mesma distância. A força exercida pelo dipolo $\mathbf{p}_1$ sobre as cargas de um segundo dipolo $\mathbf{p}_2$ que esteja nas vizinhanças de $\mathbf{p}_1$ faz com que $\mathbf{p}_2$ se oriente ao longo das linhas de força de $\mathbf{p}_1$, como mostra a Figura 9-18*b*.

A energia potencial do segundo dipolo $\mathbf{p}_2$ no campo de $\mathbf{p}_1$ é dada por

$$U = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_d \qquad \textbf{9-8}$$

e, como $\mathbf{E}_d$ é proporcional a $1/r^3$, a força elétrica $\mathbf{F}$ ($= -\partial U/\partial \mathbf{r}$) entre dois dipolos *permanentes* é proporcional a $1/r^4$. Assim, a força é atrativa ($\mathbf{F}$ é negativa), relativamente fraca e de curto alcance.

Moléculas Polares

Não é difícil compreender por que as moléculas que possuem momentos dipolares elétricos permanentes (as chamadas *moléculas polares*, como H_2O e NaCl) atraem outras moléculas polares. Considere, por exemplo, a molécula de H_2O. Embora a molécula seja eletricamente neutra, as ligações entre o átomo de oxigênio e os átomos de hidrogênio são parcialmente iônicas e os elétrons tendem a se concentrar nas vizinhanças do átomo de oxigênio, que se comporta como a extremidade negativa de um dipolo; os dois prótons se comportam como a extremidade positiva. Existe, portanto, uma atração elétrica entre a molécula e outras moléculas próximas que resulta em uma energia potencial dada pela Equação 9-8 (veja a Figura 9-19). Assim, pares de moléculas polares tendem a se aproximar, diminuindo a energia potencial do sistema, até que os efeitos combinados da repulsão dos núcleos e do princípio de exclusão produzem um mínimo da energia potencial total semelhante ao que aparece nas Figuras 9-2 e 9-8*b*. No caso de H_2O, a energia de ligação resultante é aproximadamente 0,5 eV por molécula. Embora este valor corresponda a apenas 10% da energia da ligação H−OH em uma molécula de água, é a força dipolo-dipolo que faz com que as moléculas de H_2O se condensem para formar gelo e é responsável em parte pela bela simetria hexagonal dos flocos de neve (Figura 9-19*c*).

Quando as ligações dipolo-dipolo entre moléculas que possuem momentos dipolares permanentes envolvem o hidrogênio, como no caso da água, a ligação é conhecida como *ponte de hidrogênio*. A ponte de hidrogênio tem uma grande importância na biologia, já que é responsável pelas ligações que dão forma às proteínas e outras moléculas orgânicas de grande porte. As duas cadeias da molécula de DNA, por exemplo, são mantidas unidas por pontes de hidrogênio. O fato de que as pontes de hidrogênio são mais fracas que as ligações iônicas e covalentes que existem ao longo de cada cadeia permite que as duas cadeias se separem durante o processo de replicação do DNA. Note que a ponte de hidrogênio pode ser vista como o compartilhamento de um próton por dois átomos negativamente carregados, que, no caso da água, são átomos de oxigênio (veja a Figura 9-19). De certa forma, este processo é semelhante ao compartilhamento de elétrons que dá origem à ligação covalente. A formação de ligações através do mecanismo da ponte de hidrogênio é facilitada pela pequena massa do próton e pela ausência de elétrons em torno do núcleo além do elétron de valência.

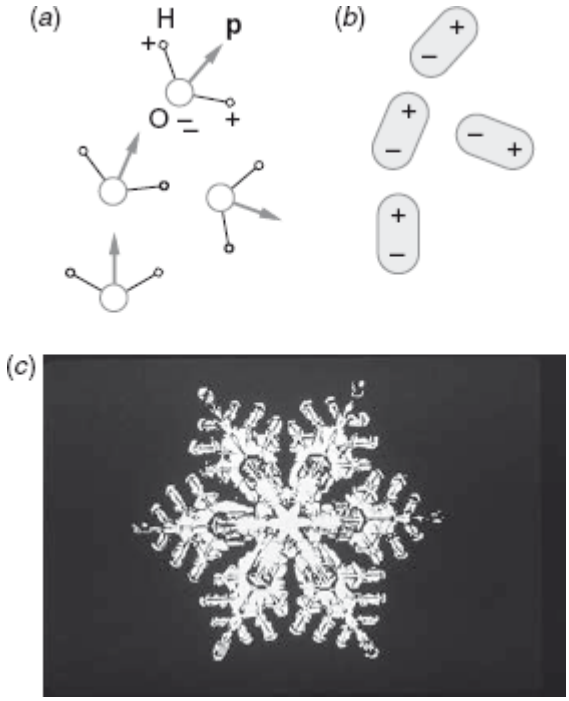


FIGURA 9-19 (*a*) Representação esquemática de quatro moléculas de H_2O. Os momentos dipolares permanentes das moléculas de água estão indicados pelos vetores **p**. (*b*) As quatro moléculas de água representadas na forma de dipolos elétricos. Observe que a força atrativa dipolo-dipolo tende a alinhar os dipolos de tal forma que os vizinhos mais próximos de uma carga elétrica são cargas do sinal oposto. (*c*) A ligação dipolo-dipolo é responsável pela formação de flocos de neve como o que aparece na ilustração.

Moléculas Apolares

Uma molécula apolar pode ser polarizada pelo campo de uma molécula polar e adquirir um momento dipolar induzido, que faz com que seja atraída pela molécula polar. Se $\mathbf{p}_2$ da Figura 9-18*b* é um dipolo induzido,

$$\mathbf{p}_2 = \alpha \mathbf{E}_d \qquad \textbf{9-9}$$

em que α é uma constante característica da molécula apolar, conhecida pelo nome de *polarizabilidade*. Neste caso, esperamos que a energia potencial da interação seja proporcional a $1/r^6$, já que, de acordo com as Equações 9-8 e 9-9,

$$U = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_d = -\alpha E_d^2 = -\alpha k^2 p_1^2 / r^6 \qquad \textbf{9-10}$$

Mais uma vez, a energia é negativa e, portanto, a força entre os dipolos é atrativa. A força $F = -\partial U/\partial r$ é, portanto, proporcional a $1/r^7$, ou seja, tem um alcance muito limitado, pois diminui rapidamente com a distância *r*. Assim, por exemplo, quando a distância entre duas moléculas é multiplicada por 2, a força de atração cai para 0,8% do valor original.

A princípio talvez pareça estranho, mas duas moléculas apolares podem se atrair através do mecanismo que acabamos de descrever. Isso acontece porque, embora o *valor médio* do momento dipolar de uma molécula apolar, $\overline{\mathbf{p}}$, seja nulo, o *valor médio do quadrado* do momento dipolar, $\overline{p}^2$ é diferente de zero, já que os elétrons estão em movimento e a cada instante existe um pequeno excesso ou deficiência de elétrons em uma parte ou outra da molécula. As medidas que realizamos em laboratório fornecem o valor médio (zero) e não o valor instantâneo do momento. Quase sempre, o valor instantâneo do momento dipolar de uma molécula apolar tem um valor diferente de zero. Quando duas moléculas apolares se aproximam uma da outra, as flutuações dos momentos dipolares das duas moléculas tendem a se sincronizar, o que produz uma força atrativa, como mostra a Figura 9-20. A energia potencial é dada pela Equação 9-10; portanto, a energia potencial é proporcional a $1/r^6$ e a força de atração é proporcional a $1/r^7$. Esta força de atração entre moléculas apolares é conhecida como *força de van der Waals*[7] ou, ocasionalmente, como *força de dispersão de London*, em homenagem a Fritz London, o físico alemão que explicou o mecanismo desta interação em 1930.

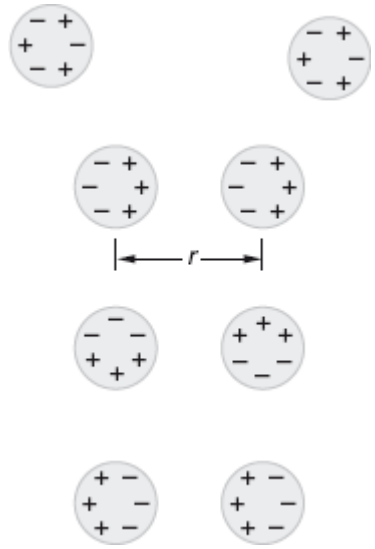


FIGURA 9-20 A distribuição média de carga nas moléculas apolares é simétrica, como no par de moléculas que aparece no alto da figura. Entretanto, flutuações da distribuição de elétrons são assimétricas e tendem a estar correlacionadas à distribuição de carga nas moléculas próximas, como nos outros três exemplos. Esta correlação dá origem a uma força atrativa proporcional a $1/r^7$ que tende a aproximar as moléculas.

Como foi sugerido por van der Waals, todas as moléculas estão sujeitas às forças dipolo-dipolo (na verdade, pode-se dizer o mesmo dos átomos). São as únicas forças presentes no caso dos gases raros, sem as quais os átomos desses elementos não poderiam se condensar para formar líquidos e sólidos. (A única exceção é o He, cuja energia de ponto zero é maior que o mínimo da energia potencial resultante da força dipolo-dipolo e da repulsão dos núcleos.) As forças dipolo-dipolo, embora relativamente fracas, são também responsáveis pelos fenômenos do atrito e da tensão superficial.

EXEMPLO 9-4 **Cálculo de Pontos de Ebulição Relativos** Os químicos e biólogos calculam os pontos de ebulição relativos dos compostos com base nas interações dipolo-dipolo. A Figura 9-21*a* mostra três formas estruturais da molécula de diclorobenzeno (DCB), $C_6H_4Cl_2$. A forma *o*-DCB é um cupinicida; *m*-DCB é um solvente orgânico; *p*-DCB é um pesticida e serve de base para alguns desodorantes. (*a*) Dos compostos *o*-DCB e *m*-DCB, qual possui o maior ponto de ebulição? (*b*) Dos compostos *o*-DCB e *p*-DCB, qual possui o maior ponto de ebulição?

SOLUÇÃO

As moléculas que possuem momentos dipolares permanentes interagem através de forças dipolo-dipolo; quanto maiores os momentos dipolares, mais forte é a interação (veja as Equações 9-7 e 9-8). Na Figura 9-21*b*, os momentos dipolares das ligações C−Cl estão representados por setas.

(*a*) Os momentos dipolares das moléculas de *o*-DCB e *m*-DCB aparecem nos diagramas vetoriais da Figura 9-21*b*. Como o módulo do momento dipolar do *o*-DCB é maior que o momento dipolar do *m*-DCB, o ponto de ebulição do *o*-DCB é maior que o ponto de ebulição do *m*-DCB. (A Tabela 9-7 mostra os valores experimentais dos pontos de ebulição das três formas estruturais do DCB.)

(*b*) Os momentos dipolares das moléculas de *o*-DCB e *p*-DCB aparecem nos diagramas vetoriais da Figura 9-21*b*. No caso do *p*-DCB, os momentos dipolares das ligações C−Cl se cancelam e o momento total é zero, ou seja, o *p*-DCB é uma molécula apolar. Como o momento dipolar do *o*-DCB é diferente de zero e o momento dipolar do *p*-DCB é zero, o ponto de ebulição do *o*-DCB é maior que o ponto de ebulição do *p*-DCB.

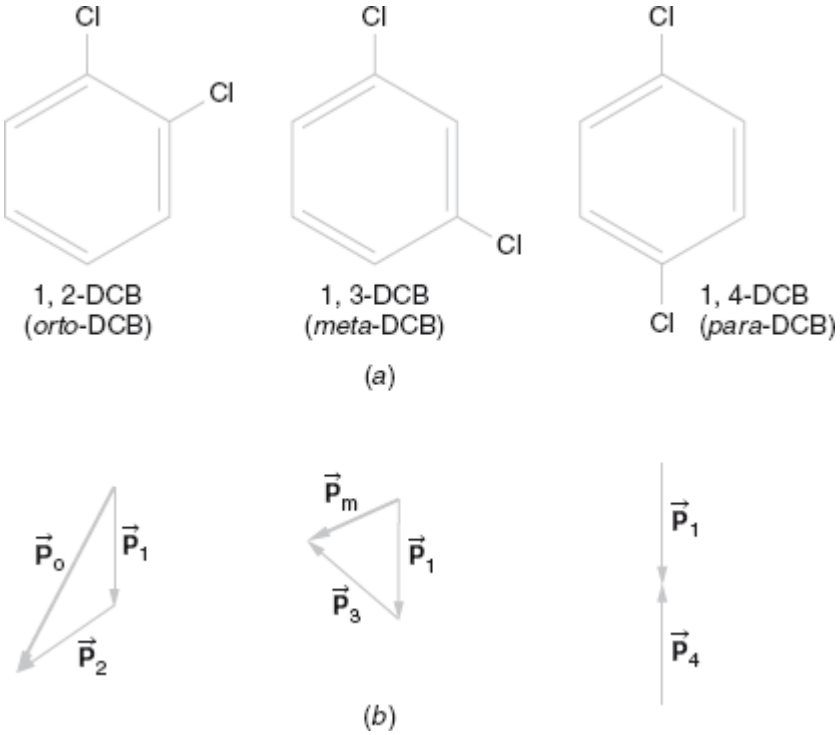


FIGURA 9-21 (*a*) Formas estruturais do diclorobenzeno, $C_6H_4Cl_2$. (*b*) Momentos dipolares das ligações C−Cl.

Tabela 9-7 Momentos Dipolares do DCB

Composto	Momento dipolar C · m	Ponto de ebulição (°C)	Ponto de fusão (°C)
orto-DCB	$8{,}35 \times 10^{-30}$	180	−17
meta-DCB	$5{,}74 \times 10^{-30}$	173	−25
para-DCB	0	174	53

Fonte: *Handbook of Chemistry and Physics*, 90th ed. (New York: Chemical Rubber Co., 2009.)

Exercícios

1. Por que a distância entre dois prótons é maior no íon H^+_2 que na molécula de H_2?
2. A molécula de NaCl é polar ou apolar?
3. A molécula de N_2 é polar ou apolar?
4. Por que uma ligação do tipo que existe entre dois íons H^+_2 tende a ser instável, a menos que os dois núcleos tenham a mesma carga positiva?
5. O neônio existe na natureza como Ne ou como Ne_2? Por quê?

9-4 Níveis de Energia e Espectros de Moléculas Diatômicas

Como os átomos, as moléculas emitem radiação eletromagnética ao sofrerem transições de estados excitados para estados de menor energia. As moléculas também são capazes de absorver radiação e passar para estados de maior energia. O estudo dos espectros de emissão e absorção fornece informações importantes a respeito dos níveis de energia das moléculas. Neste livro estudaremos apenas os espectros de moléculas diatômicas, que são os mais fáceis de analisar, mas os espectros de moléculas maiores podem ser analisados usando técnicas semelhantes.

Como seria de se esperar, os níveis de energia das moléculas são ainda mais complexos que os dos átomos. A energia de uma molécula pode ser dividida em três partes: a eletrônica, associada à excitação dos elétrons; a vibratória, associada às

oscilações dos átomos; e a rotacional, associada à rotação da molécula em torno de um eixo passando pelo centro de massa. Felizmente, as ordens de grandeza dessas energias são tão diferentes que podemos tratá-las separadamente. Como acontece nos átomos, os elétrons que fazem parte das moléculas podem ser excitados para estados de maior energia. Assim, por exemplo, o elétron 1*s* de uma molécula de H_2 pode ser excitado para o estado 2*p*, emitindo um fóton ao voltar para o estado fundamental. As energias associadas às excitações eletrônicas de uma molécula são da ordem de 1 eV, como nos átomos. Já discutimos essas transições e não há necessidade de voltarmos ao assunto; por isso, concentraremos a atenção nas energias de vibração e rotação, que são 100 a 1000 vezes menores.

Estados Rotacionais

Classicamente, a energia de rotação de uma molécula é dada por

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I} \qquad \textbf{9-11}$$

em que I é o momento de inércia, ω é a velocidade angular de rotação e $L = I\omega$ é o momento angular. A solução da equação de Schrödinger para a rotação de um corpo rígido leva à quantização do momento angular, com valores dados por

$$L^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \qquad \ell = 0, 1, 2,\ldots \qquad \textbf{9-12}$$

sendo ℓ o *número quântico rotacional*. Trata-se da mesma condição de quantização do momento angular que é aplicada ao momento angular orbital do elétron em um átomo. Observe, porém, que a grandeza L que aparece na Equação 9-11 é o momento angular da molécula inteira em relação a um eixo passando pelo centro de massa. Os níveis de energia rotacionais de uma molécula são dados por

$$E = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell+1)E_{0r} \quad \ell = 0, 1, 2,\ldots \qquad \textbf{9-13}$$

em que E_{0r} é a *energia rotacional característica* da molécula, que é inversamente proporcional ao momento de inércia:

$$E_{0r} = \frac{\hbar^2}{2I} \qquad \textbf{9-14}$$

A Figura 9-22 mostra os níveis de energia rotacionais de uma molécula típica. Transições entre esses níveis dão origem ao *espectro rotacional puro* de uma molécula. Embora todas as moléculas diatômicas possuam níveis de energia rotacionais, aquelas que não possuem momentos dipolares permanentes (moléculas simétricas como o H_2, o Cl_2 e o CO_2) não podem emitir ou absorver radiação do tipo dipolo elétrico apenas mudando de estado rotacional e, portanto, não apresentam um espectro rotacional puro. No caso das moléculas que possuem um dipolo elétrico permanente e apresentam um espectro rotacional puro, o número quântico ℓ está sujeito à regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$, como acontece com os elétrons de um átomo. A diferença de energia entre estados rotacionais vizinhos é dada por

$$\Delta E_{\ell,\ell+1} = \frac{[(\ell+1)(\ell+2) - \ell(\ell+1)]\hbar^2}{2I} = \frac{(\ell+1)\hbar^2}{I} \qquad \textbf{9-15}$$

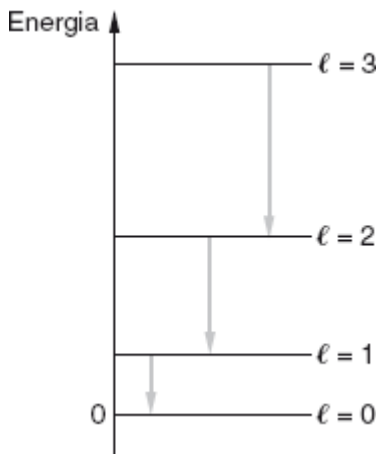


FIGURA 9-22 Níveis de energia e transições permitidas para um corpo rígido em rotação, calculados usando a Equação 9-13.

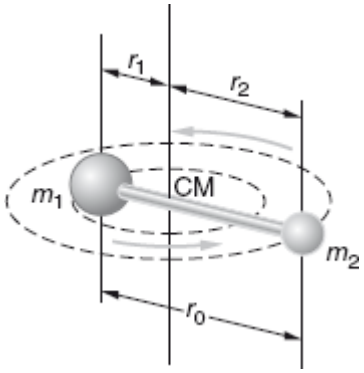


FIGURA 9-23 Molécula diatômica girando em torno de um eixo que passa pelo centro de massa.

A medida da energia rotacional de uma molécula a partir do espectro rotacional pode ser usada para determinar o momento de inércia da molécula, que, por sua vez, pode ser usado para calcular a distância de equilíbrio entre os átomos que compõem a molécula. O momento de inércia em relação a um eixo passando pelo centro de massa de uma molécula diatômica (veja a Figura 9-23) é dado por

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

As distâncias r_1 e r_2 entre os átomos e o centro de massa estão relacionadas por meio da equação $m_1 r_1 = m_2 r_2$. Usando esta relação e chamando de $r_0 = r_1 + r_2$ a distância entre os átomos, podemos escrever:

$$I = \mu r_0^2 \qquad \textbf{9-16}$$

na qual μ, a massa reduzida, é dada por:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{9-17}$$

Quando as massas são iguais ($m_1 = m_2$), como acontece nas moléculas de H_2 e O_2, $\mu = m/2$ e, portanto,

$$I = \frac{1}{2} m r_0^2 \qquad \textbf{9-18}$$

Uma unidade de massa conveniente para estudos de física atômica e molecular é a *unidade unificada de massa*, definida como um doze avos da massa do átomo neutro de carbono 12 (^{12}C) e representada pela letra u. A massa de um átomo de ^{12}C é, portanto, 12 u. A massa de um átomo em unidades unificadas de massa é numericamente igual à massa molar do átomo em gramas. As relações entre a unidade unificada de massa, o quilograma e o elétron-volt são as seguintes:

$$1\ \text{u} = \frac{1\ g}{N_A} = \frac{10^{-3}\ \text{kg}}{6{,}0221 \times 10^{23}}$$

$$= 1{,}6605 \times 10^{-27}\ \text{kg} = 931{,}5 \times 10^6\ \text{eV} \qquad \textbf{9-19}$$

Sendo N_A o número de Avogadro.

EXEMPLO 9-5 **Massa Reduzida de HCl** Calcule a massa reduzida da molécula de HCl em unidades unificadas de massa.

SOLUÇÃO

1. A massa reduzida μ é dada pela Equação 9-17:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

2. Consultando a tabela periódica na capa traseira interna do livro, vemos que a massa do átomo de hidrogênio é 1,01 u e a massa do cloro é 35,5 u. Substituindo esses valores na equação, temos:

$$\mu = \frac{(1{,}01\ \text{u})(35{,}5\ \text{u})}{1{,}01\ \text{u} + 35{,}5\ \text{u}}$$

$$\mu = 0{,}982\ \text{u}$$

Observação: *Note que a massa reduzida da molécula de HCl é menor que a massa do átomo de hidrogênio.*

EXEMPLO 9-6 **Distância de Equilíbrio do CO** A diferença de energia ΔE entre os estados rotacionais $\ell = 0$ e $\ell = 1$ da molécula de CO pode ser determinada a partir do valor experimental do comprimento de onda da transição correspondente, $\lambda = 2{,}6$ mm. O valor calculado é $\Delta E = 4{,}77 \times 10^{-4}$ eV. Determine a distância de equilíbrio r_0 para a molécula de CO.

SOLUÇÃO

1. A distância de equilíbrio r_0 pode ser expressa em função do momento de inércia por meio da Equação 9-16:

$$I = \mu r_0^2 \quad \text{ou} \quad r_0 = \sqrt{\frac{I}{\mu}}$$

2. A relação entre ΔE e I é dada pela Equação 9-15:

$$\Delta E_{\ell,\ell+1} = \frac{(\ell+1)\hbar^2}{I} \quad \text{ou} \quad I = \frac{(\ell+1)\hbar^2}{\Delta E_{\ell,\ell+1}}$$

3. Fazendo $\ell = 0$ e $\Delta E = 4{,}77 \times 10^{-4}$ eV na equação anterior, temos:

$$I = \frac{\hbar^2}{4{,}77 \times 10^{-4}\ \text{eV}}$$

4. A massa reduzida da molécula de CO pode ser calculada com o auxílio da Equação 9-17 e da tabela periódica:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(12\,\text{u})(16\,\text{u})}{12\,\text{u} + 16\,\text{u}} = 6{,}86\ \text{u}$$

5. Substituindo I e μ por seus valores na equação do item (1), temos:

$$r_0 = \left(\frac{\hbar^2}{4{,}77 \times 10^{-4}\ \text{eV} \times 6{,}86\ \text{u}}\right)^{1/2}$$

$$r_0 = \frac{1{,}055 \times 10^{-34}}{\left[(4{,}77 \times 10^{-4}\ \text{eV})(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})(6{,}86\ \text{u})(1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})\right]^{1/2}}$$

$$r_0 = 0{,}133\ \text{nm}$$

As energias dos estados rotacionais são muito menores que as energias dos estados eletrônicos, que são da ordem de 1 eV ou mais. Assim, por exemplo, de acordo com a Equação 9-14, a energia rotacional característica da molécula de O_2, cuja distância de equilíbrio é 0,1 nm, é $2{,}59 \times 10^{-4}$ eV. Os fótons associados às transições entre estados rotacionais estão na região do infravermelho distante. Observe que as energias dos estados rotacionais também são pequenas em comparação com a energia térmica kT de uma molécula à temperatura ambiente. Para $T = 300$ K, por exemplo, o valor de kT é $2{,}6 \times 10^{-2}$ eV. Assim, à temperatura ambiente, uma molécula pode facilmente ser excitada por colisões com outras moléculas para níveis de energia rotacionais mais elevados, mas as mesmas colisões não têm energia suficiente para excitar os elétrons da molécula, que permanecem no estado fundamental.

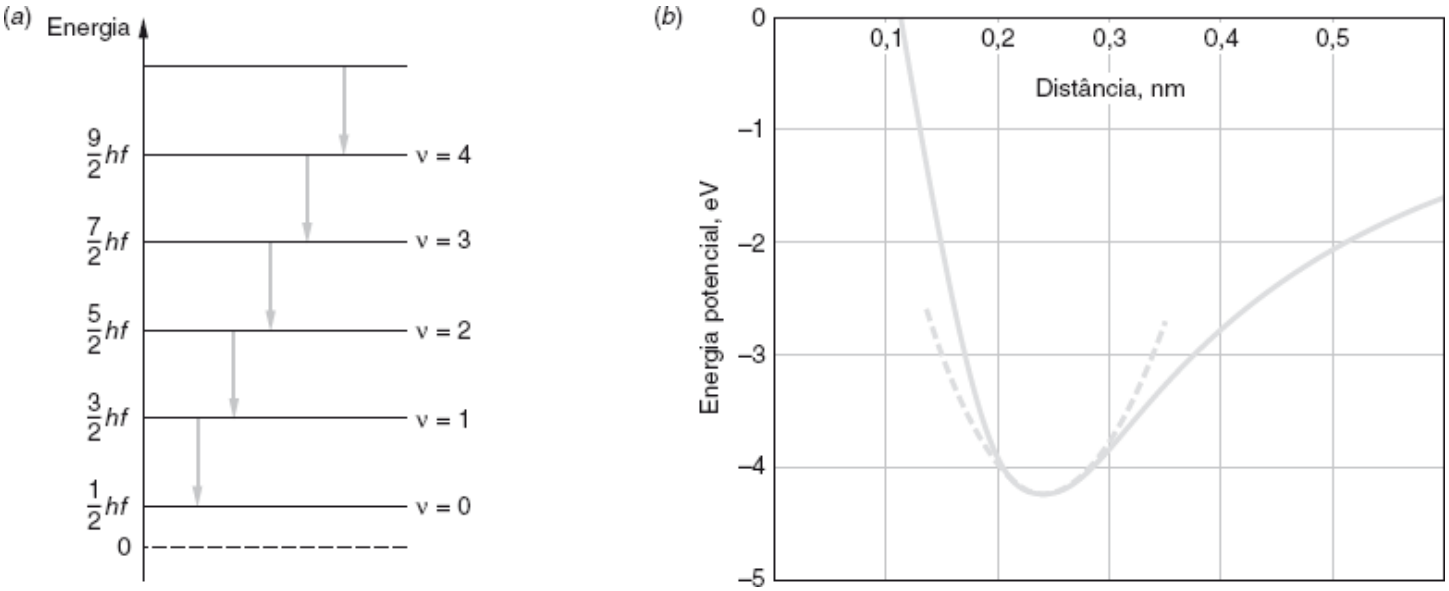


FIGURA 9-24 (*a*) Os níveis de energia associados às vibrações moleculares estão igualmente espaçados nas vizinhanças da distância de equilíbrio entre os átomos. (*b*) Comparação entre a energia potencial de um oscilador harmônico (linha tracejada) e a energia potencial da molécula de NaCl, que já foi mostrada na Figura 9-2*b* (linha contínua).

Estados Vibracionais

As energias vibracionais de uma molécula são um pouco mais difíceis de estimar que as energias rotacionais. A análise do problema é facilitada pelo fato de que as funções de energia potencial das Figuras 9-2, 9-7 e 9-8*b* podem ser aproximadas por parábolas nas vizinhanças do ponto de equilíbrio (veja a Figura 9-24*b*). Assim, podemos usar os resultados do estudo do oscilador harmônico simples (Capítulo 6). Os níveis de energia são dados por

$$E_v = (v + 1/2)hf \qquad v = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{9-20}$$

na qual f é a frequência de vibração, e v é o *número quântico vibracional*.[8] Uma propriedade interessante dos estados vibracionais é que o espaçamento entre os níveis de energia é constante, como mostra a Figura 9-24*a*; a distância entre níveis vizinhos é dada por $\Delta E_{v,\,v+1} = hf$. A frequência de vibração de uma molécula diatômica depende apenas das forças exercidas pelos átomos um sobre o outro. Considere dois objetos de massas m_1 e m_2 ligados por uma mola de constante elástica K. A frequência de oscilação do sistema (veja a Seção 6-5) é dada por

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}} \qquad \textbf{9-21}$$

em que $\boldsymbol{\mu}$ é a massa reduzida dada pela Equação 9-17. Assim, é possível determinar a constante elástica efetiva de uma molécula diatômica a partir da medida da frequência de oscilação.

É possível obter uma boa estimativa para f substituindo a função energia potencial da molécula pela função energia potencial de um oscilador harmônico, como mostra a Figura 9-24*b*, mas se estamos interessados apenas em uma estimativa grosseira, podemos aproximar o potencial por um poço quadrado infinito (Figura 9-25). Nesse caso, de acordo com a Equação 6-23, temos:

$$E_n = n^2\frac{h^2}{8mr_0^2} = n^2\frac{4\pi^2\hbar^2}{8mr_0^2} = n^2\frac{\pi^2}{2}\frac{\hbar^2}{mr_0^2}$$

na qual m é a massa reduzida da molécula e r_0 a distância de equilíbrio. Exceto pelo fator $\pi^2/2 \approx 5$ (e pelo fator n^2), esta expressão é igual à da energia rotacional característica E_{0r} (veja as Equações 9-14 e 9-18); assim, esperamos que as energias vibracionais sejam um pouco maiores que as energias rotacionais.

Como a regra de seleção para transições entre estados vibracionais (do mesmo estado eletrônico) exige que v varie de ±1, a energia de um fóton associado a esse tipo de transição é hf, em que f é a frequência de vibração. Para um valor experimental típico das transições entre estados vibracionais, 5×10^{13} Hz, a energia de vibração é

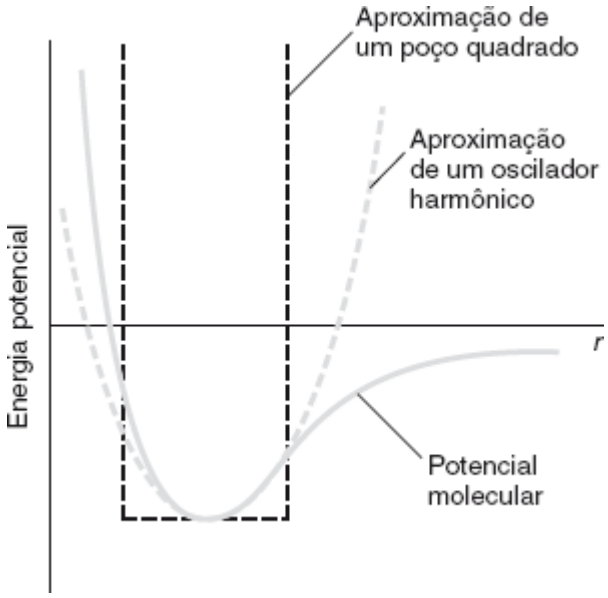


FIGURA 9-25 Potencial molecular (linha contínua). O potencial do oscilador harmônico, usado para calcular os níveis de energia, e o potencial de um poço quadrado, usado para estimar a ordem de grandeza dos níveis de energia, estão indicados por linhas tracejadas.

$$E \sim hf = (4{,}14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s})(5 \times 10^{13}\ \text{s}^{-1}) = 0{,}2\ \text{eV}$$

Assim, uma energia vibracional típica é cerca de 1000 vezes maior que a energia rotacional característica da molécula de O_2 e 8 vezes maior que a energia térmica à temperatura ambiente. Isso significa que, ao contrário do que acontece com os estados rotacionais, os estados vibracionais não são facilmente excitados por colisões à temperatura ambiente.

EXEMPLO 9-7 **Constante de Força do CO** O valor experimental da frequência vibracional do CO é $6{,}42 \times 10^{13}$ Hz. Qual é a constante elástica efetiva da molécula?

SOLUÇÃO

1. A constante de força K é dada pela Equação 9-21:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

2. A massa reduzida μ da molécula de CO foi calculada no Exemplo 9-6:

$$\mu = 6{,}86\ \text{u}$$

3. Explicitando K na equação do item (1) e substituindo f e μ por seus valores, obtemos:

$$\begin{aligned} K &= (2\pi f)^2 \mu \\ &= (2\pi \times 6{,}42 \times 10^{13}\ \text{Hz})^2 (6{,}86\ \text{u})(1{,}66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) \\ &= 1{,}86 \times 10^{3}\ \text{N/m} \end{aligned}$$

Espectros de Emissão

A Figura 9-26 mostra, de forma esquemática, alguns níveis eletrônicos, vibracionais e rotacionais de uma molécula diatômica. Os níveis vibracionais são caracterizados pelo número quântico v e os níveis rotacionais pelo número quântico ℓ. Os primeiros níveis vibracionais têm um espaçamento constante $\Delta E = hf$. No caso dos níveis vibracionais de maior energia, a aproximação do potencial molecular pelo potencial de um oscilador harmônico simples deixa de ser válida e o espaçamento entre os níveis não é mais constante. Como se pode ver na Figura 9-25, o potencial molecular passa a variar mais lentamente com a distância, e, portanto, o espaçamento entre os níveis se torna inversamente proporcional ao valor do número quântico v. Observe na Figura 9-26 que as curvas de energia potencial que representam a força entre os dois átomos da molécula não têm exatamente a mesma forma para o estado eletrônico fundamental e para o primeiro estado excitado. Isso significa que a frequência de vibração f é diferente para diferentes estados eletrônicos. No caso de transições entre estados vibracionais associados a diferentes estados

eletrônicos, a regra de seleção $\Delta v = \pm 1$ não precisa ser respeitada. Transições desse tipo resultam na emissão de fótons na região do espectro visível ou nas proximidades.

O espaçamento dos níveis rotacionais aumenta com o valor de ℓ. Como as energias de rotação são muito menores que as energias vibracionais e as energias eletrônicas, as rotações aparecem nos espectros das moléculas como um desdobramento fino das linhas espectrais. Quando a resolução é insuficiente para resolver as linhas, o espectro apresenta várias faixas, como na Figura 9-27*a*. Quando essas faixas são observadas com maior resolução, verifica-se que são compostas por linhas muito próximas, como se pode ver na Figura 9-27*b*.

Espectros de Absorção

Muitos estudos espectroscópicos das moléculas são realizados usando técnicas de absorção de infravermelho nas quais apenas os estados vibracionais e rotacionais do estado eletrônico fundamental são excitados. Por esse motivo, vamos agora concentrar a atenção no chamado *espectro vibracional-rotacional*. À temperatura ambiente, as energias dos estados vibracionais são muito maiores que a energia térmica kT e, portanto, a maioria das moléculas se encontra no estado vibracional de menor energia, $v = 0$, cuja energia é $E_0 = hf/2$. A transição de absorção mais importante é a transição de $v = 0$ para $v = 1$. Por outro lado, as energias dos estados rotacionais são muito menores que kT, o que faz com que muitos estados com diferentes energias sejam ocupados por moléculas, de acordo com a distribuição de Boltzmann. Se a molécula se encontra originalmente em um estado rotacional caracterizado pelo número quântico ℓ, a energia rotacional-vibracional, que se soma à energia do estado eletrônico, é

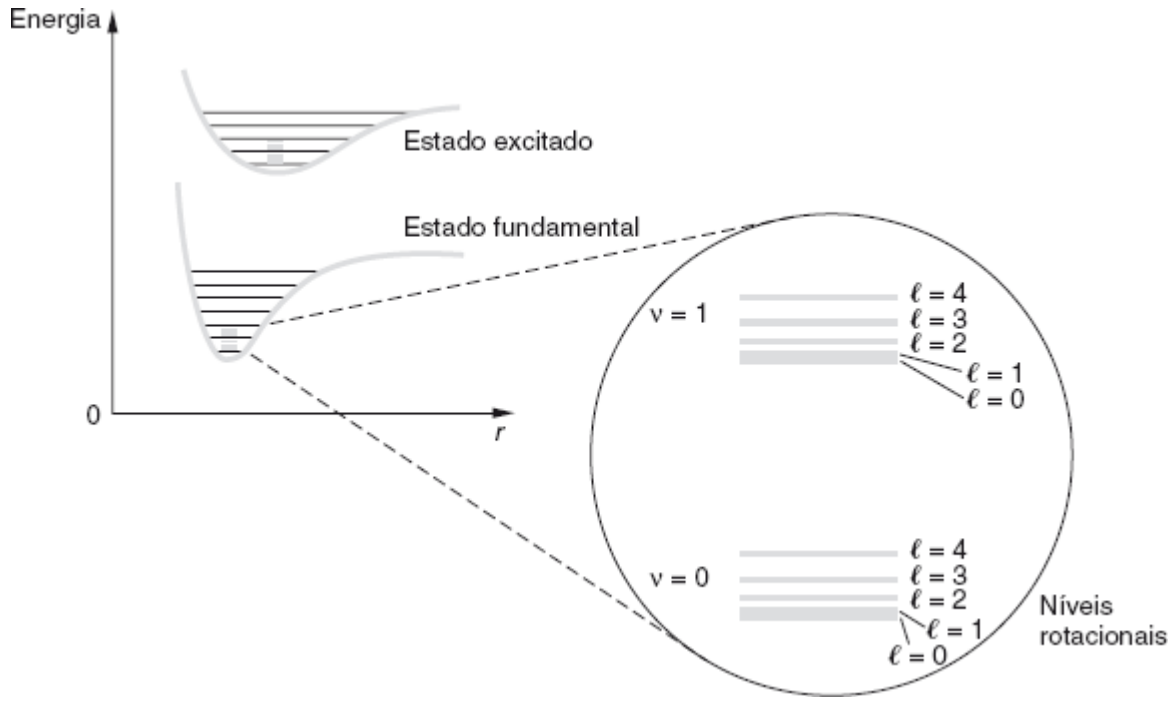


FIGURA 9-26 Níveis de energia eletrônicos, vibracionais e rotacionais de uma molécula diatômica. Os níveis rotacionais estão representados em uma ampliação dos níveis vibracionais $v = 0$ e $v = 1$ do estado eletrônico fundamental.

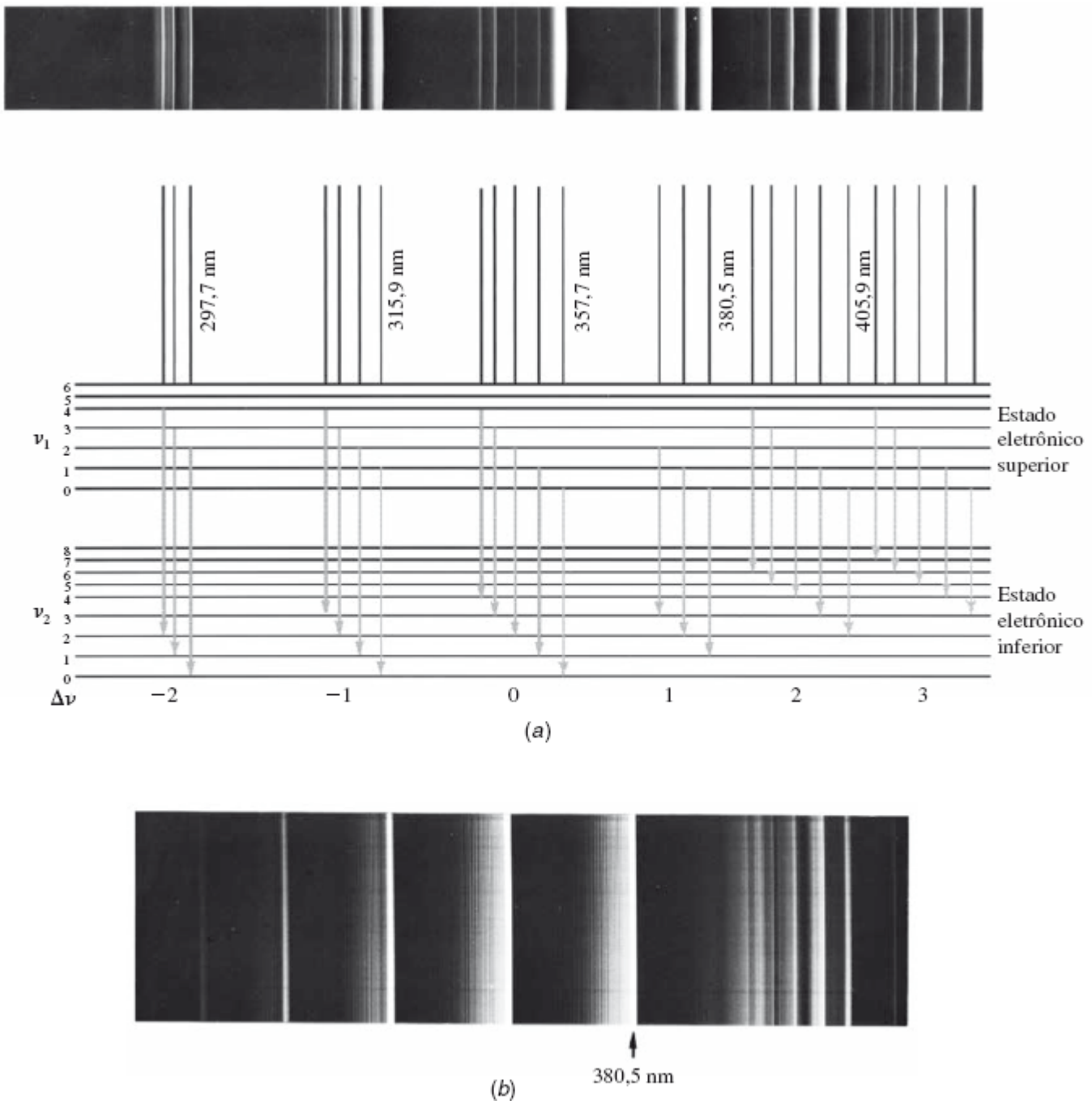


FIGURA 9-27 Parte do espectro de emissão do N_2. (*a*) Como se pode ver no diagrama, essas componentes são produzidas por transições entre os níveis vibracionais de dois estados eletrônicos. (*b*) Uma ampliação de parte do espectro mostrado em (*a*) revela que as supostas linhas são, na verdade, grupos de linhas muito próximas, associadas ao espectro rotacional. [*Cortesia de J. A. Marquisee.*]

$$E_\ell = \tfrac{1}{2}hf + \ell(\ell + 1)E_{0r} \qquad \textbf{9-22}$$

em que E_{0r} é dada pela Equação 9-14. Duas transições são permitidas pelas regras de seleção a partir deste estado. Para uma transição para o primeiro estado vibracional excitado, $v = 1$, e um estado rotacional caracterizado por $\ell + 1$, a energia final é

$$E_{\ell+1} = \tfrac{3}{2}hf + (\ell + 1)(\ell + 2)E_{0r} \qquad \textbf{9-23}$$

Para uma transição para o primeiro estado vibracional excitado e um estado rotacional caracterizado por $\ell - 1$, a energia final é

$$E_{\ell-1} = \tfrac{3}{2}hf + (\ell - 1)\ell E_{0r} \qquad \textbf{9-24}$$

As diferenças de energia são

$$\Delta E_{\ell\rightarrow\ell+1} = E_{\ell+1} - E_\ell = hf + 2(\ell + 1)E_{0r} \qquad \textbf{9-25}$$

em que $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ e

$$\Delta E_{\ell \to \ell-1} = E_{\ell-1} - E_\ell = hf - 2\ell E_{0r} \qquad \textbf{9-26}$$

em que $\ell = 1, 2, 3, \ldots$ (Na Equação 9-26, o menor valor de ℓ é 1 porque, a partir do estado $\ell = 0$, apenas a transição $\ell \to \ell + 1$ é possível.) Essas transições aparecem na Figura 9-28. As frequências são dadas por

$$f_{\ell \to \ell+1} = \frac{\Delta E_{\ell \to \ell+1}}{h} = f + \frac{2(\ell+1)E_{0r}}{h} \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{9-27}$$

e

$$f_{\ell \to \ell-1} = \frac{\Delta E_{\ell \to \ell-1}}{h} = f - \frac{2\ell E_{0r}}{h} \qquad \ell = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{9-28}$$

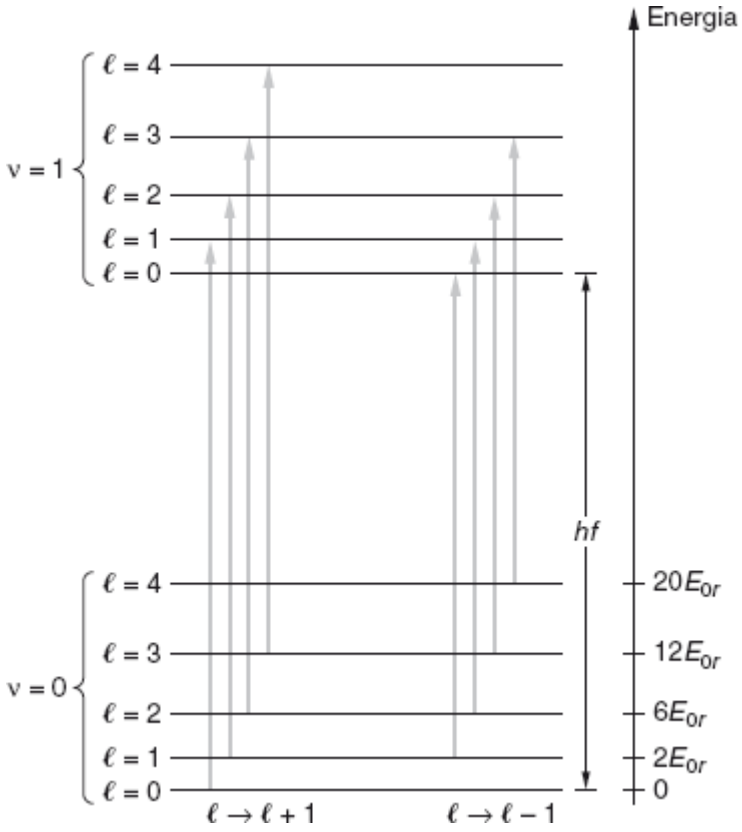


FIGURA 9-28 Transições entre os estados vibracionais $v = 0$ e $v = 1$ de uma molécula diatômica. Essas transições obedecem à regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$ e podem ser divididas em dois grupos. As energias do grupo $\ell \to \ell + 1$ são $hf + 2E_{0r}$, $hf + 4E_{0r}$, $hf + 6E_{0r}$, e assim por diante, enquanto as energias do grupo $\ell \to \ell - 1$ são $hf - 2E_{0r}$, $hf - 4E_{0r}$, $hf - 6E_{0r}$, e assim por diante.

As frequências das transições do tipo $\ell \to \ell + 1$ são, portanto, $f + 2E_0/h, f + 4E_0/h, f + 6E_0/h$, e assim por diante; as frequências das transições do tipo $\ell \to \ell - 1$ são $f - 2E_0/h, f - 4E_0/h, f - 6E_0/h$, e assim por diante. Esperamos, portanto, que o espectro de absorção contenha frequências igualmente espaçadas de $2E_0/h$, a não ser por um espaçamento de $4E_0/h$ no centro do espectro, como mostra a Figura 9-29. A medida da posição desse espaçamento maior fornece o valor de f, e a medida do espaçamento dos picos de absorção fornece o valor de E_{0r}, que é inversamente proporcional ao momento de inércia da molécula.

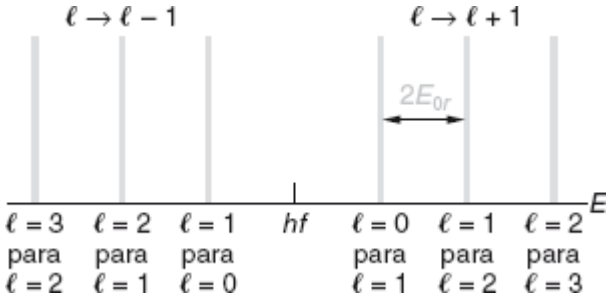


FIGURA 9-29 Espectro de absorção teórico de uma molécula diatômica. O grupo da direita corresponde às transições do tipo $\ell \to \ell + 1$ e o grupo da esquerda às transições do tipo $\ell \to \ell - 1$. A distância entre linhas vizinhas é constante e igual a $2E_{0r}$. A energia no centro do espectro é hf, em que f é a frequência de vibração da molécula.

A Figura 9-30 mostra o espectro de absorção do HCl. Todos os picos são duplos porque o cloro é encontrado na natureza como uma mistura de dois isótopos, ^{35}Cl e ^{37}Cl, que possuem momentos de inércia ligeiramente diferentes. Se os estados rotacionais fossem igualmente ocupados, todas as linhas do espectro de absorção teriam a mesma intensidade. Entretanto, a população $n(E_\ell)$ do estado rotacional ℓ é proporcional à densidade de estados $g(E_\ell)$, que, neste caso, é igual à degeneração do estado, ou seja, ao número de estados com o mesmo valor de ℓ, que é $2\ell + 1$, e também ao fator de Boltzmann $e^{-E_\ell/kT}$, no qual E_ℓ é a energia do estado.

$$n(E_\ell) = g(E_\ell)e^{-E_\ell/kT} \qquad \textbf{9-29}$$

ou

$$n(E_\ell) = (2\ell + 1)e^{-[\frac{1}{2}hf + \ell(\ell+1)E_{0r}]} \qquad \textbf{9-30}$$

O fato de que o número de estados com o mesmo valor de ℓ é $2\ell + 1$ faz com que a população dos estados em equilíbrio térmico seja proporcional a $(2\ell + 1)\exp[-\ell(\ell + 1)\hbar^2/2IkT]$. Assim, o estado $\ell = 0$ não é o estado mais ocupado à temperatura ambiente. Para pequenos valores de ℓ, a população aumenta ligeiramente por causa do aumento da densidade de estados; para grandes valores de ℓ, a população diminui por causa do fator de Boltzmann. Assim, como se pode ver na Figura 9-30, a intensidade das linhas de absorção aumenta com ℓ para pequenos valores de ℓ e diminui com ℓ para grandes valores de ℓ. Podemos determinar o valor de ℓ para o qual a população é máxima derivando a Equação 9-30 em relação a ℓ e igualando o resultado a zero. O resultado é o seguinte:

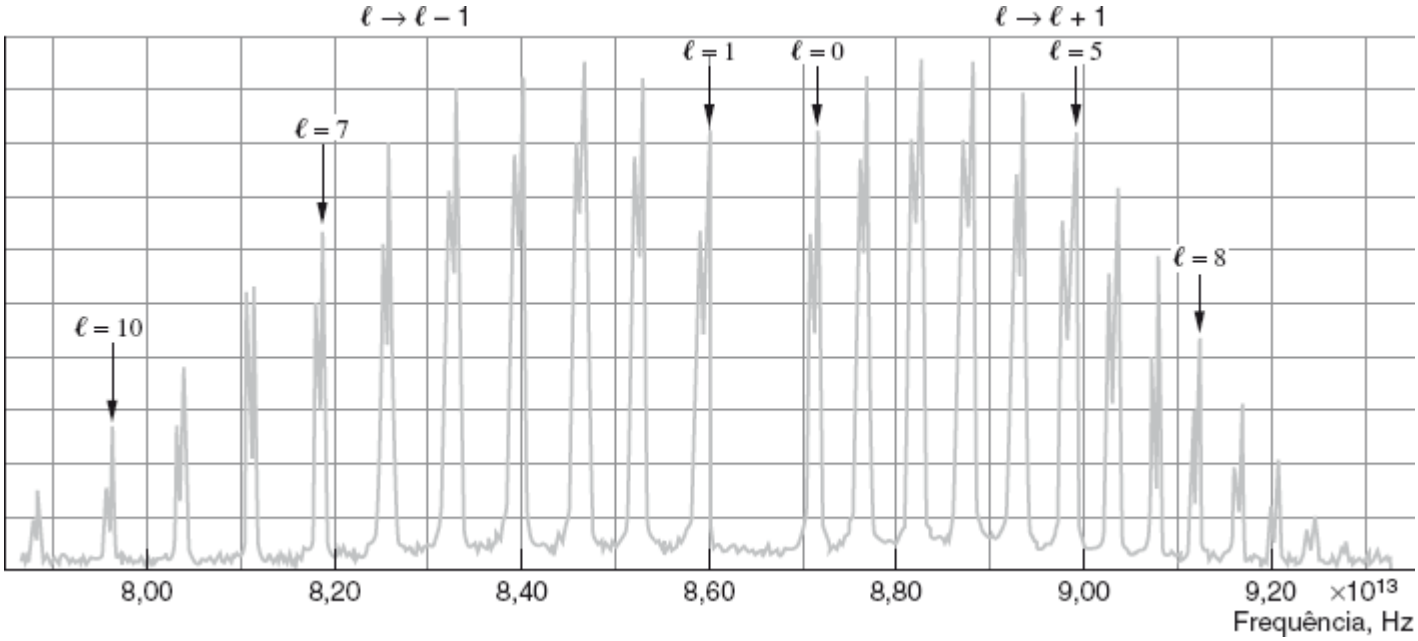


FIGURA 9-30 Espectro de absorção do HCl. Os picos são duplos porque existem dois isótopos naturais do cloro, o ^{35}Cl, com uma abundância de 75,5%, e o ^{37}Cl, com uma abundância de 24,5%. A intensidade dos picos varia porque a população do estado inicial depende do valor de ℓ.

Tabela 9-8 Constantes rotacionais e vibracionais de várias moléculas diatômicas

Molécula	Distância de equilíbrio r_0 (nm)	Frequência f (Hz)	E_{0r} (eV)
H_2	0,074	$1{,}32 \times 10^{14}$	$7{,}56 \times 10^{-3}$
Li_2	0,267	$1{,}05 \times 10^{13}$	$8{,}39 \times 10^{-5}$
O_2	0,121	$4{,}74 \times 10^{13}$	$1{,}78 \times 10^{-4}$
LiH	0,160	$4{,}22 \times 10^{13}$	$9{,}27 \times 10^{-4}$

$H^{35}Cl$	0,127	$8,97 \times 10^{13}$	$1,32 \times 10^{-3}$
$Na^{35}Cl$	0,251	$1,14 \times 10^{13}$	$2,36 \times 10^{-5}$
$K^{35}Cl$	0,279	$8,40 \times 10^{12}$	$1,43 \times 10^{-5}$
$K^{79}Br$	0,294	$6,93 \times 10^{12}$	$9,1 \times 10^{-6}$

Moléculas simétricas, como o H_2 e o O_2, não possuem um momento dipolar elétrico. As vibrações e rotações de moléculas desse tipo não dão origem a linhas de emissão e absorção, já que não se traduzem em oscilações de um dipolo elétrico.

$$\ell_{max} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{4kT}{h^2/mr^2}} - 1\right] \qquad \textbf{9-31}$$

Para medidas à temperatura ambiente (T = 300 K), kT = 0,026 eV e, portanto, $\ell_{max} \approx 3$, como se pode ver na Figura 9-30.

Observe também na Figura 9-30 que a distância entre linhas vizinhas, que supusemos constante e igual a $2E_{0r}$ nos cálculos anteriores, não é exatamente constante. A razão está no aumento do momento de inércia com a velocidade de rotação. Quanto mais rapidamente está girando a molécula, maior é a distância entre os átomos e, portanto, maior o momento de inércia e menor a energia rotacional. Em consequência, o espaçamento das linhas, como mostra a Figura 9-30, diminui à medida que ℓ aumenta.

Como já dissemos, o espaçamento maior no centro do espectro da Figura 9-30 se deve à ausência de uma transição começando no estado $\ell = 0$ no grupo de linhas associadas às transições do tipo $\ell \rightarrow \ell - 1$. O centro do intervalo corresponde à frequência característica de oscilação f da molécula, dada pela Equação 9-21. No caso do HCl, de acordo com os dados da Figura 9-30, $f = 8,65 \times 10^{13}$ Hz, o que corresponde a uma energia E = 0,36 eV e a uma constante elástica K = 476 N/m. A Tabela 9-8 mostra as constantes rotacionais e vibracionais de várias moléculas diatômicas. Todas as moléculas diatômicas[9] apresentam um espaçamento maior entre as linhas no centro do espectro vibracional-rotacional; entretanto, muitas moléculas poliatômicas possuem vibrações e rotações mais complexas e, em consequência, as transições com $\Delta\ell = 0$ podem ser permitidas, isto é, a energia vibracional pode variar sem que a energia rotacional mude. Nesse caso, aparece uma linha na frequência f, ou seja, no centro do espectro vibracional-rotacional. Linhas desse tipo recebem o nome enigmático de *linhas do ramo Q*.[10]

9-5 Espalhamento, Absorção e Emissão Estimulada

Espalhamento

Nas interações entre a radiação incidente e átomos ou moléculas, os fótons podem ser espalhados de forma elástica ou inelástica. O processo no qual os fótons são espalhados elasticamente, ou seja, sem mudança de frequência, é chamado de *espalhamento elástico* ou *espalhamento de Rayleigh* porque foi descrito pela primeira vez com o auxílio de uma teoria clássica proposta por Rayleigh por volta de 1900. O espalhamento de Rayleigh está ilustrado na Figura 9-30*d*. Na teoria clássica, o campo elétrico oscilante da radiação incidente produz uma aceleração oscilante dos elétrons do átomo, fazendo com que irradiem ondas eletromagnéticas com a mesma frequência e a mesma fase que a onda incidente. Assim, os elétrons dos átomos e moléculas do alvo absorvem energia da onda incidente e tornam a emiti-la, espalhando-a em todas as direções sem mudar a frequência. A intensidade da radiação espalhada é proporcional a f^4. O espalhamento de Rayleigh é responsável pela linha não deslocada que aparece na Figura 3-17 (veja a discussão do espalhamento de raios X na Seção 3-4). Como vimos na Seção 3-4, se o comprimento de onda da radiação incidente λ_1 é muito maior que o deslocamento de Compton $\lambda_2 - \lambda_1$, como acontece, por exemplo, no caso da luz visível, o comprimento de onda da onda espalhada é praticamente igual ao comprimento de onda da radiação incidente, independentemente de usarmos na Equação 3-25 a massa do elétron (o que é o correto) ou a massa do átomo (como fez Rayleigh). Assim, quando $\lambda \rightarrow \infty$, a explicação quântica do Capítulo 3 e a explicação clássica de Rayleigh para o espalhamento elástico levam à mesma conclusão. No caso, porém, de radiações na região de raios X ou de raios gama do espectro, que possuem um comprimento de onda relativamente pequeno, o espalhamento de Compton, mostrado esquematicamente na Figura 9-30*e*, se torna importante, especialmente no caso de átomos de baixo Z, para os quais as energias de ligação dos elétrons não são muito grandes. Na região dos raios gama, na qual $\lambda \rightarrow 0$, a energia dos fótons se torna tão grande que até mesmo os elétrons mais firmemente presos ao núcleo são arrancados e o efeito Compton passa a ser o processo dominante.

Também existe uma correlação entre os fótons incidentes e espalhados no processo de espalhamento *inelástico* ilustrado na

Figura 9-30*f*. Este tipo de espalhamento foi observado pela primeira vez pelo físico indiano C. V. Raman[11] e hoje é conhecido como *espalhamento de Raman* ou *efeito Raman*. O fóton espalhado pode ter uma energia menor que o fóton incidente ou pode ter uma energia maior, se a molécula se encontrar inicialmente em um estado vibracional ou rotacional excitado. As duas possibilidades estão ilustradas na Figura 9-31*f*. No efeito Raman, a frequência do fóton espalhado não é igual à frequência do fóton incidente nem está relacionada a uma frequência característica da molécula. Observou-se que, no caso de uma radiação incidente monocromática de frequência *f*, a radiação espalhada contém não só a frequência *f* (espalhamento de Rayleigh; veja a Figura 9-32), mas também linhas muito mais fracas de um lado e de outro da linha de Rayleigh, com frequências dadas por

$$f' = f \pm \Delta f \qquad \textbf{9-32}$$

Estas são as linhas de Raman, ilustradas na Figura 9-32. Quando se faz variar a frequência dos fótons incidentes, as linhas de Raman se deslocam ao longo do eixo das frequências na mesma proporção e, portanto, a *diferença* Δf entre f e f' permanece constante. É esta diferença Δf que corresponde a transições características da molécula responsável pelo espalhamento.

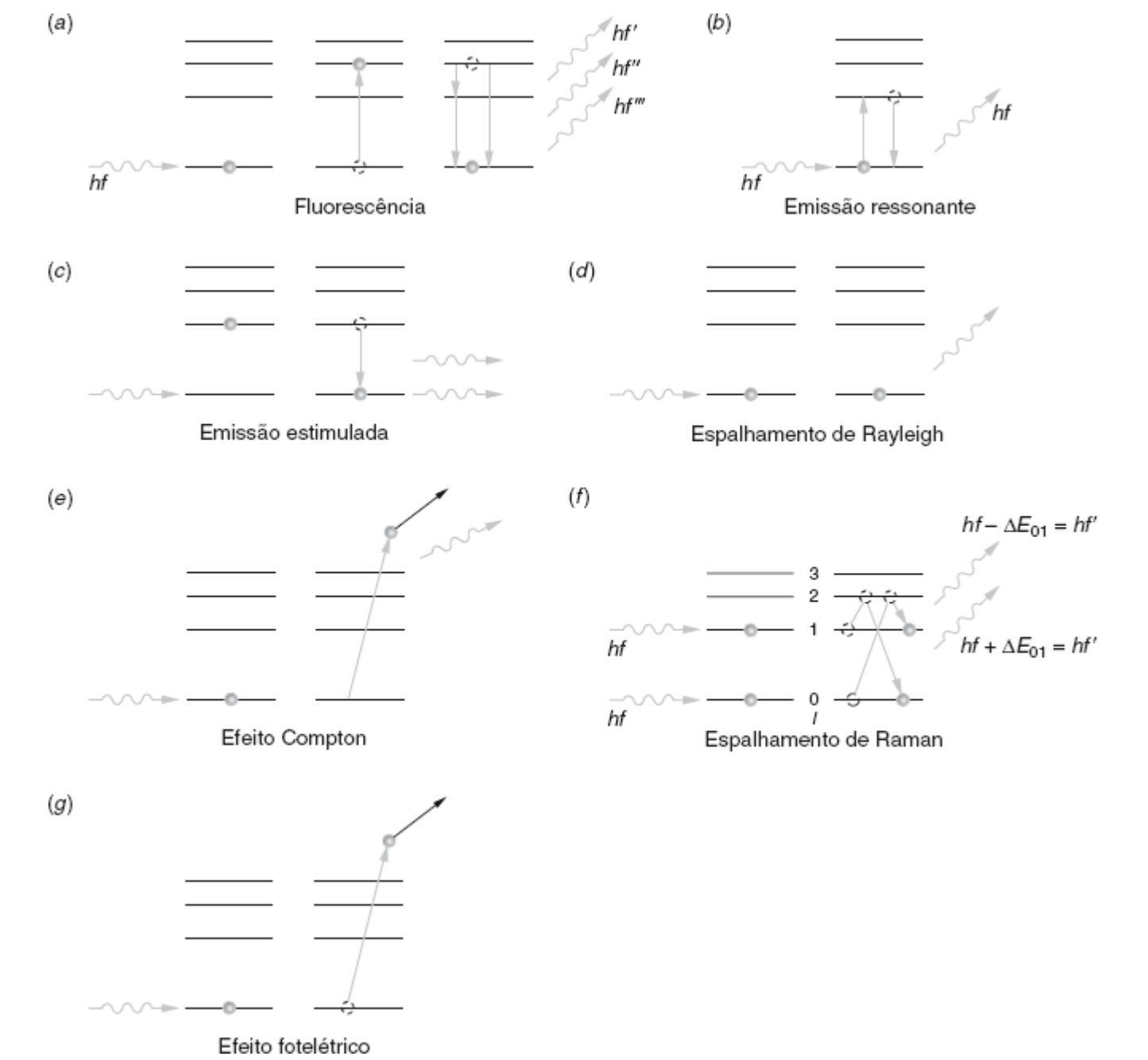


FIGURA 9-31 Possíveis interações de um fóton com um átomo. (*a*) O fóton é absorvido e o átomo passa para um estado excitado; mais tarde, o átomo volta para o estado fundamental, emitindo um ou mais fótons no processo. Neste processo de dois estágios, conhecido como *fluorescência*, não existe uma correlação entre o fóton incidente e os fótons emitidos. (*b*) Se a energia do fóton incidente é igual à diferença de energia entre o estado fundamental do átomo e o primeiro estado excitado, o fenômeno recebe o nome especial de radiação ressonante. (*c*) Na emissão estimulada, o átomo se encontra inicialmente em um estado excitado e é estimulado por um fóton incidente a sofrer uma transição para um estado de menor energia. A diferença entre o espalhamento de Rayleigh (*d*) e o espalhamento de Raman (*f*) e os processos de radiação ressonante e fluorescência está no fato de que, nos processos (*d*) e (*f*), existe uma correlação entre os fótons incidentes e os fótons emitidos. As figuras (*e*) e (*g*) ilustram o efeito Compton e o efeito fotelétrico, que já foram discutidos no Capítulo 3.

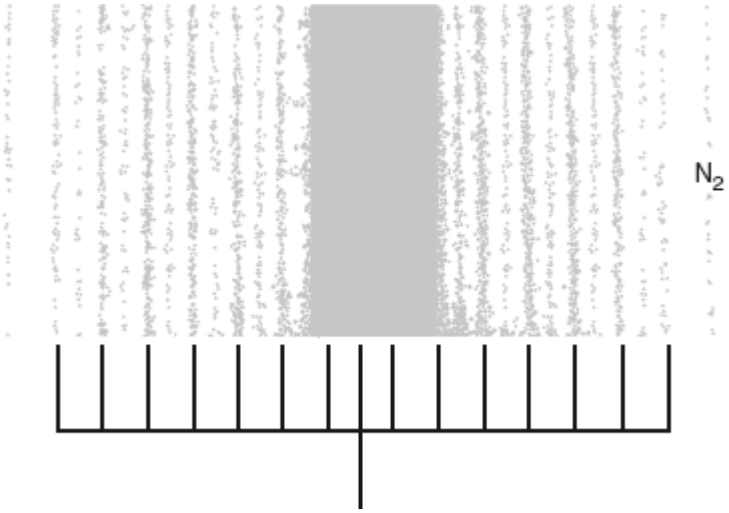


FIGURA 9-32 Espectro rotacional de Raman do N_2. As linhas vizinhas variam de intensidade em uma relação de 2 para 1, o que está de acordo com o spin $I = 1$ do núcleo de nitrogênio. A região central mais escura corresponde ao espalhamento de Rayleigh dos fótons incidentes. [R. Eisberg e R. Resnick, *Quantum Physics*, 2d ed. (New York: Wiley, 1985), p. 436.]

Embora a medida de Δf para as linhas do espectro de Raman permita determinar os níveis rotacionais de uma molécula,[12] o espectro de Raman é bem diferente do espectro rotacional. Em particular, a regra de seleção para o efeito Raman é $\Delta\ell = 0, \pm 2$. O valor $\Delta\ell = 0$ corresponde ao espalhamento de Rayleigh, enquanto os valores $\Delta\ell = \pm 2$ correspondem às linhas de Raman. Podemos compreender como surgem essas linhas examinando as transições representadas na Figura 9-31*f*. Um elétron que se encontra inicialmente no estado $\ell = 0$ absorve uma energia $\Delta E_{01} + \Delta E_{12}$ do fóton incidente, de frequência f, e emite uma energia ΔE_{12}. Assim, a energia do fóton espalhado é dada por

$$hf' = hf - (\Delta E_{01} + \Delta E_{12}) + \Delta E_{12} = hf - \Delta E_{01} \qquad \textbf{9-33}$$

ou

$$f' = f - \Delta f$$

em que $\Delta f = \Delta E_{01}/h$. Se o elétron se encontra inicialmente no estado $\ell = 1$, absorve uma energia ΔE_{12} do fóton incidente e emite uma energia $\Delta E_{12} + \Delta E_{01}$. Assim, a energia do fóton espalhado é dada por

$$hf' = hf - \Delta E_{12} + (\Delta E_{12} + \Delta E_{01}) = hf + \Delta E_{01} \qquad \textbf{9-34}$$

ou

$$f' = f + \Delta f$$

Muitos espectros de Raman já foram estudados. Este tipo de espectro fornece informações importantes a respeito dos estados quânticos das moléculas, incluindo, como já dissemos, a estrutura dos níveis rotacionais no caso das moléculas diatômicas homonucleares. Assim, por exemplo, o conhecimento detalhado das complexas vibrações e rotações da molécula de amônia, a que nos referimos na Seção 6-6, que permitiu a construção dos primeiros relógios atômicos, resultou de estudos do espectro vibracional-rotacional de Raman da molécula de NH_3, o chamado *espectro de inversão da amônia*.

Finalmente, a Figura 9-31*g* ilustra o efeito fotelétrico, no qual a absorção de um fóton ioniza o átomo ou molécula. Como o espalhamento de Compton, o efeito fotelétrico foi discutido no Capítulo 3 e não será examinado novamente neste capítulo.

Absorção

Informações a respeito dos níveis de energia de um átomo ou molécula são geralmente obtidas a partir da radiação emitida quando o átomo ou molécula sofre uma transição de um estado excitado para um estado de menor energia. Entretanto, como dissemos na seção anterior, podemos também obter informações a respeito dos níveis de energia a partir do espectro de absorção. Quando átomos e moléculas são submetidos a um espectro contínuo de radiação, a radiação transmitida apresenta linhas escuras que correspondem aos comprimentos de onda absorvidos pela amostra. Os primeiros espectros de linhas observados pelos cientistas foram os espectros de absorção dos átomos. Em 1817, Fraunhofer estudou as linhas de absorção mais visíveis do espectro solar; por essa razão, as duas linhas mais intensas do espectro do sódio são conhecidas como *linhas D de Fraunhofer*. Como, à temperatura ambiente, os átomos e moléculas se encontram no estado fundamental ou nos primeiros

estados excitados, os espectros de absorção costumam ser mais simples que os espectros de emissão. Assim, por exemplo, apenas as linhas correspondentes à série de Lyman são observadas no espectro de absorção do hidrogênio, porque quase todos os átomos se encontram inicialmente no estado fundamental. Na Leitura Suplementar *Transições entre Níveis de Energia* (Capítulo 6), vimos que transições entre os estados quânticos de um sistema atômico podem ocorrer em consequência de interações com campos eletromagnéticos externos. Em particular, se uma frequência igual a f_{12} está presente na radiação incidente em um átomo no qual as energias do estado fundamental e de um estado excitado são E_1 e E_2, existe uma probabilidade finita de que o átomo sofra uma transição do estado E_1 para o estado E_2, absorvendo a energia $hf_{12} = E_2 - E_1$ da radiação. Esta absorção de energia, que resulta da interação entre o campo elétrico da radiação incidente e a carga do elétron, foi descrita pela primeira vez por Einstein, que expressou a probabilidade de absorção por átomo e por unidade de tempo na forma $B_{12}u(f)$, sendo $u(f)$ a densidade de energia da radiação dos fótons de frequência f_{12} e B_{12} é o *coeficiente de absorção de Einstein*.



Como mostra a Figura 9-31, além da absorção, vários outros fenômenos interessantes ocorrem quando a radiação eletromagnética interage com átomos ou moléculas. Na Figura 9-31*a*, um fóton de energia *hf* é absorvido e o sistema sofre uma transição para um estado excitado. Mais tarde, o sistema sofre uma transição para outro estado excitado de menor energia ou para o estado fundamental com a *emissão espontânea* de um ou mais fótons, através do processo descrito na Leitura Suplementar *Transições entre Níveis de Energia.* A radiação assim emitida é conhecida como *fluorescência*. Se o estado 2 é o primeiro estado excitado, este processo de dois estágios é chamado de *absorção ressonante* e a radiação emitida é chamada de *radiação ressonante* (Figura 9-31*b*). Em consequência dos movimentos que ocorrem enquanto o sistema se encontra no nível 2, não existe correlação de direção ou de fase entre os fótons incidentes e emitidos. Enquanto se encontra no nível 2, o sistema pode sofrer uma transição para qualquer estado de menor energia; as probabilidades dessas transições são dadas pela Equação 6-52*d* da Leitura Suplementar *Transições entre Níveis de Energia*. Assim, por exemplo, a probabilidade por átomo e por unidade de tempo de que o sistema volte ao estado 1 com a emissão espontânea de um fóton pode ser expressa pelo coeficiente A_{21} (transições por unidade de tempo). Note que o parâmetro $1/A_{21}$ tem dimensões de tempo, ou seja, é uma medida do tempo que o sistema permanece no estado 2 antes de voltar ao estado 1. Em outras palavras, se o estado 1 é o único estado com energia menor que o estado 2, o tempo de vida do estado 2 é dado por $t_s = 1/A_{21}$. Para a maioria das transições atômicas do tipo dipolo elétrico, este tempo característico é da ordem de 10^{-8} s. O coeficiente A_{21} é conhecido como *coeficiente de emissão espontânea de Einstein*.

Emissão Estimulada

Além da emissão espontânea de radiação fluorescente e ressonante com probabilidade por unidade de tempo A_{21}, que não depende da densidade de energia $u(f)$ da radiação incidente, existe também a emissão induzida pela própria radiação incidente. A probabilidade desta emissão, conhecida como *emissão estimulada*, depende de $u(f)$. O fenômeno, como os da absorção e da emissão espontânea, foi analisado pela primeira vez por Einstein, em 1917. A probabilidade de emissão estimulada por unidade de tempo pode ser escrita na forma $B_{21}u(f)$, na qual o coeficiente B_{21} é conhecido como *coeficiente de emissão estimulada de Einstein*. Neste processo, o campo elétrico do fóton incidente, de energia hf igual à diferença $E_2 - E_1$ (Figura 9-31*c*), estimula o átomo ou molécula que se encontra no estado 2 a emitir um fóton de energia $E_2 - E_1 = hf$ que se propaga na mesma direção e com a mesma fase que o fóton incidente. Fótons com esta propriedade são chamados de *coerentes*. É possível definir ainda um terceiro coeficiente, B_{12}, como a probabilidade de absorção por unidade de tempo.

A relação entre os três coeficientes definidos no parágrafo anterior pode ser determinada sem muita dificuldade. Considere um sistema de átomos e radiação em equilíbrio térmico a uma temperatura T. Sejam N_1 e N_2 os números de átomos nos estados com energias E_1 e E_2. A razão N_2/N_1 é dada pelo fator de Boltzmann (Equação 8-2). Supondo que os dois estados têm a mesma degeneração,

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2-E_1)/kT} = e^{-hf/kT} \qquad \textbf{9-35}$$

Esta razão representa um equilíbrio dinâmico no qual o número de transições de absorção ($E_1 \rightarrow E_2$) por unidade de tempo é igual à soma dos números de transições espontâneas e estimuladas ($E_2 \rightarrow E_1$) por unidade de tempo. Como o número de átomos que sofrem uma transição de qualquer tipo é proporcional à população do estado no qual a transição começa e à probabilidade da transição, podemos expressar o equilíbrio dinâmico por meio da equação

$$N_1 B_{12} u(f) = N_2(A_{21} + B_{21}u(f)) \qquad \textbf{9-36}$$

Explicitando a densidade de energia $u(f)$ na Equação 9-36, temos:

$$u(f) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{N_1}{N_2}\frac{B_{12}}{B_{21}} - 1} \qquad \textbf{9-37}$$

Substituindo N_2/N_1 por seu valor, dado pela Equação 9-35, obtemos:

$$u(f) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}}e^{hf/kT} - 1} \qquad \textbf{9-38}$$

Esta expressão para a densidade de energia da radiação de frequência f em equilíbrio térmico à temperatura T com átomos de energias E_1 e E_2 deve estar de acordo com a lei de Planck para o espectro de um corpo negro à temperatura T, expressa pela Equação 8-57:

$$u(f) = \frac{8\pi hf^3}{c^3}\left(\frac{1}{e^{hf/kT} - 1}\right) \qquad \textbf{9-39}$$

Comparando as Equações 9-38 e 9-39, concluímos que

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = 1 \qquad \textbf{9-40}$$

e que

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \qquad \textbf{9-41}$$

Embora esta análise permita determinar apenas as razões entre os coeficientes, o valor de A_{21} pode ser calculado separadamente, como foi visto na Leitura Suplementar *Transições entre Níveis de Energia*, e os valores dos outros coeficientes podem ser obtidos a partir do valor de A_{21}.

Várias conclusões interessantes podem ser extraídas dessas equações. Por exemplo, de acordo com a Equação 9-40, os coeficientes de absorção e de emissão estimulada são iguais para o mesmo par de estados. Observe também que, segundo a Equação 9-41, a razão entre o coeficiente de emissão espontânea e o coeficiente de emissão estimulada é proporcional a f^3. Isso significa que quanto maior o valor de $\Delta E = E_2 - E_1$, maior a probabilidade de emissão espontânea em relação à probabilidade de emissão estimulada. Reescrevendo a Equação 9-39 na forma

$$\frac{A_{21}}{B_{21}u(f)} = e^{hf/kT} - 1 \qquad \textbf{9-42}$$

podemos ver que, em situações de equilíbrio nas quais $hf >> kT$, a emissão espontânea é muito mais provável que a emissão estimulada. Como esta é quase sempre a situação no caso das transições eletrônicas em átomos e moléculas, o decaimento dos estados excitados por emissão estimulada normalmente pode ser ignorado. A emissão estimulada é importante se $hf \approx kT$ e pode dominar os processos de decaimento dos estados excitados se $hf << kT$. Esta última situação existe à temperatura ambiente para frequências na faixa de micro-ondas do espectro eletromagnético. Voltaremos a discutir o assunto da Seção 9-6, quando falarmos de lasers e masers.

EXEMPLO 9-8 **Emissão Espontânea e Emissão Estimulada** Compare as probabilidades relativas de emissão espontânea e emissão estimulada em um sistema em equilíbrio à temperatura ambiente (T = 300 K) para uma transição (*a*) na região visível do espectro; (*b*) na região de micro-ondas.

SOLUÇÃO

A razão entre a probabilidade de emissão espontânea, A_{21}, e a probabilidade de emissão estimulada, $B_{21}u(f)$, é dada pela Equação 9-42. Para T = 300 K, kT = 0,026 eV.

(*a*) Na região visível do espectro, $hf \approx 2$ eV, de modo que $hf/kT = 2/0{,}026 = 77$. Assim, de acordo com a Equação 9-42,

$$\frac{A_{21}}{B_{21}u(f)} = e^{77} - 1$$

É evidente que, nessas condições, a probabilidade de emissão estimulada é insignificante em comparação com a probabilidade de emissão espontânea.

(*b*) Na região de micro-ondas, $hf \approx 10^{-4}$ eV, de modo que $hf/kT = 10^{-4}/0{,}026 = 0{,}0038 \approx 1/260$ e, portanto, a emissão estimulada é muito mais provável que a emissão espontânea.

Exercícios

6. Qual é a diferença entre o espalhamento de Rayleigh e a absorção ressonante?

7. Qual é a diferença entre o efeito fotelétrico e os outros processos ilustrados na Figura 9-31?

8. Por que a emissão estimulada raramente é observada?

9-6 Lasers e Masers

O *laser* (*l*ight *a*mplification by *s*timulated *e*mission of *r*adiation)* é um dispositivo que produz um feixe intenso de fótons coerentes por emissão estimulada. O *maser*, cujo nome tem a mesma origem do laser, com a palavra *light* (luz) substituída por *microwave* (micro-ondas), foi o predecessor do laser. O funcionamento dos dois dispositivos se baseia na emissão estimulada, que vamos discutir agora com mais detalhes por causa da aplicação a esses importantes dispositivos. A emissão estimulada ocorre quando um átomo se encontra inicialmente em um estado excitado e a energia de um fóton incidente no átomo é igual a $E_2 - E_1$, sendo que E_2 é a energia do estado excitado e E_1 é a energia do estado fundamental ou de um estado excitado de menor energia. Nesse caso, o campo eletromagnético do fóton incidente aplica ao elétron uma força alternada que o faz oscilar com a mesma frequência que o fóton incidente, estimulando o átomo excitado, que emite um fóton na mesma direção que o fóton incidente e com a mesma fase. Vimos na Seção 9-5 que as probabilidades de emissão estimulada e absorção, B_{21} e B_{12}, são iguais (Equação 9-40). Normalmente, à temperatura ambiente, quase todos os átomos se encontram no estado fundamental, de modo que a absorção é o efeito principal. Em outras palavras, como $N_1 >> N_2$, temos:

$$N_1u(f)B_{12} >> N_2u(f)B_{21}$$

considerando que N_1 e N_2 são as populações dos dois estados. Para que o número de emissões estimuladas seja maior que o número de absorções, é preciso que existam mais átomos no estado excitado que no estado fundamental, ou seja, que $N_2 > N_1$. Não é difícil chegar a essa situação, conhecida como *inversão de população*, se o estado E_2 for um estado metaestável. Depois de conseguida a inversão de população, os fótons emitidos por transições espontâneas do tipo $E_2 \rightarrow E_1$ são multiplicados pela emissão estimulada dos átomos que encontram. Um dos métodos usados para obter uma inversão de população é o chamado *bombeamento ótico*, no qual uma radiação auxiliar de alta intensidade é usada para "bombear" os átomos para estados de energia maior que E_2. Esses átomos decaem para o estado metaestável E_2, seja por emissão espontânea, seja por transições que não envolvem a emissão de fótons, como as produzidas por colisões.

Masers

O primeiro dispositivo baseado na emissão estimulada foi o maser, inventado por Charles Townes e colaboradores em 1953. O primeiro maser produzia emissão estimulada em moléculas de amônia na frequência de tunelamento de $2{,}3786 \times 10^{10}$ Hz (veja a Seção Exploratória *O Relógio Atômico de NH_3*, no Capítulo 6). No momento, o tipo mais importante de maser é o maser de hidrogênio, usado em relógios atômicos. A transição estimulada é a que acontece entre os níveis hiperfinos do estado fundamental, a mesma que os astrônomos utilizam para observar nuvens de hidrogênio no espaço interestelar (veja o Capítulo 13). Esta transição entre os estados $\psi_{100+1/2}$ e $\psi_{100-1/2}$ está indicada na Figura 9-33*a*. Um feixe de átomos de hidrogênio produzidos por uma descarga elétrica a partir de moléculas de H_2 (Figura 9-33*b*) passa por um campo magnético não homogêneo que dirige os átomos para uma cavidade ressonante sintonizada exatamente para a frequência da transição. As micro-ondas emitidas são reinjetadas na cavidade, produzindo novas emissões estimuladas. Uma parte do feixe é transferida para fora da cavidade para ser utilizada. Townes recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1964, juntamente com N. G. Basov e A. M. Prokhorov, "por trabalhos fundamentais no campo da eletrônica quântica, que levaram à construção de osciladores e amplificadores baseados no princípio dos masers e lasers".

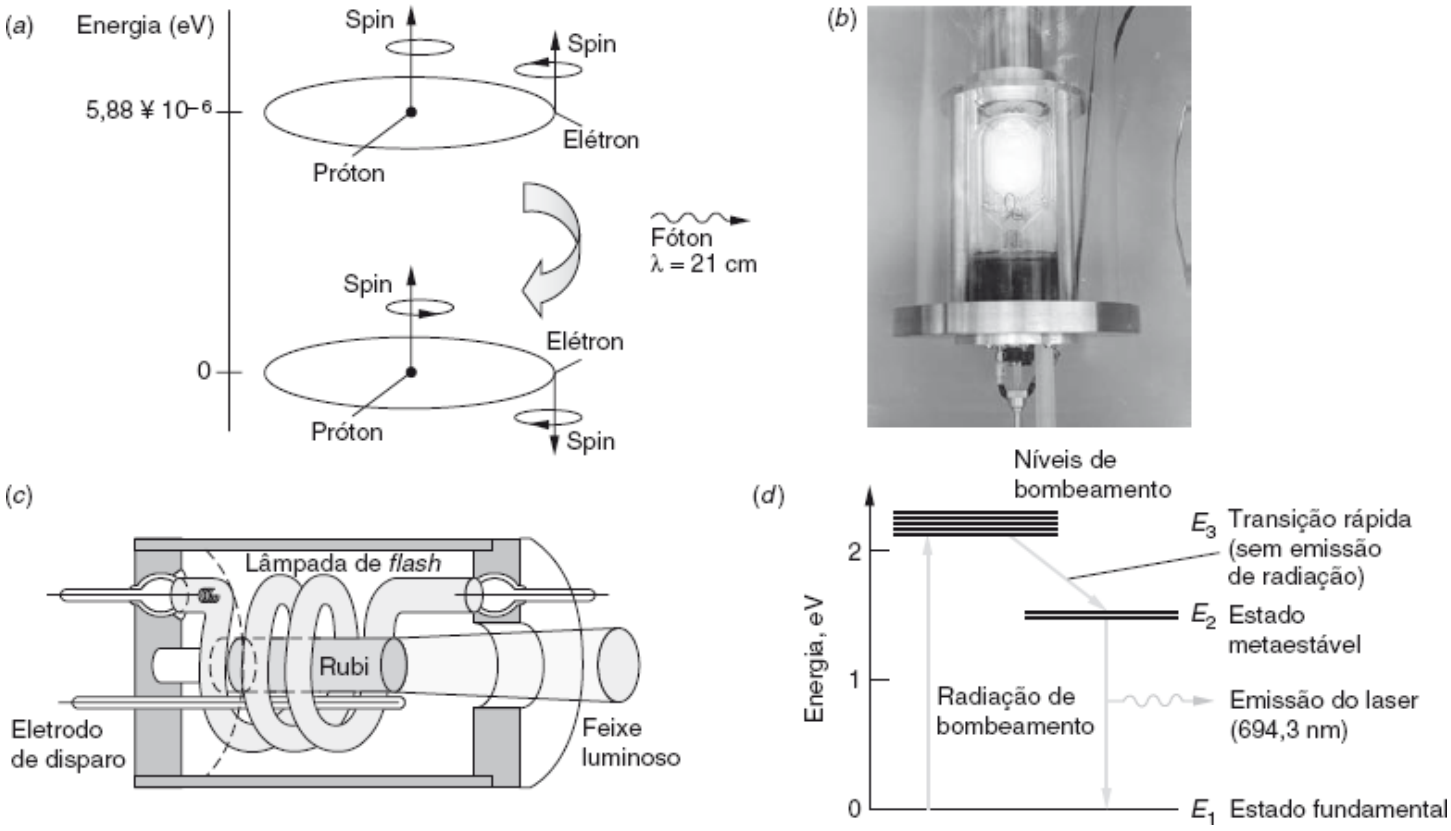


FIGURA 9-33 (*a*) Níveis de energia hiperfinos usados no maser de hidrogênio. (*b*) Tubo de descarga elétrica responsável pela produção de átomos isolados em um maser de hidrogênio. (*c*) Diagrama esquemático do primeiro laser de rubi. (*d*) Níveis de energia do cromo no rubi, Cr^{3+}: Al_2O_3. [*Foto cortesia da NASA/Jet Propulsion Laboratory – Caltech.*]

A emissão estimulada também acontece no espaço sideral, em moléculas como SiO_2, H_2O e CH_3OH. O nome *maser* não corresponde mais ao acrônimo original, já que os masers contemporâneos produzem radiações em uma ampla faixa de frequências, que vai desde as ondas de rádio até as micro-ondas.

O Laser de Rubi

A Figura 9-33*c* mostra o diagrama esquemático do primeiro laser, um laser de rubi construído por Theodore Maiman em 1960.[13] O dispositivo era formado por uma pequena barra cilíndrica de rubi (com alguns centímetros de comprimento) envolvida por uma lâmpada de *flash* helicoidal. As extremidades da barra eram planas e perpendiculares ao eixo da barra. O rubi é um cristal de Al_2O_3 contendo uma pequena concentração (cerca de 0,05%) de cromo. A cor vermelha se deve ao fato de que os íons de cromo (Cr^{3+}) possuem bandas de absorção nas regiões do verde e do azul. A Figura 9-33*d* mostra os níveis de energia do cromo que são importantes para o funcionamento do laser de rubi.

Quando a lâmpada de vapor de mercúrio ou de xenônio é disparada, produz um intenso clarão durante alguns milissegundos. Com isso, muitos íons de cromo são excitados para uma banda de níveis de energia chamados *níveis de bombeamento* na Figura 9-33*d*. Esses íons transferem energia para o cristal através de colisões e decaem para um par de estados metaestáveis (E_2, na figura). Os estados metaestáveis estão situados aproximadamente 1,79 eV acima do estado fundamental. Se o clarão é suficientemente intenso, a população dos estados E_2 se torna maior que a população do estado fundamental, ou seja, ocorre uma inversão de população entre o estado fundamental e os estados excitados. Quando um átomo que se encontra nos estados E_2 decai para o estado fundamental por emissão espontânea, é produzido um fóton com uma energia de 1,79 eV e um comprimento de onda de 694,3 nm. Este fóton estimula outro átomo excitado a emitir um fóton com a mesma energia, na mesma direção e com a mesma fase.

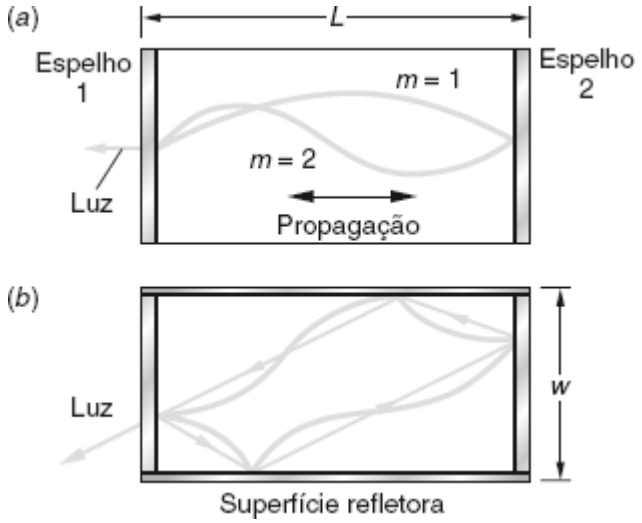


FIGURA 9-34 O laser como uma cavidade ótica ressonante. O espelho 1 é semitransparente e o espelho 2 é um espelho normal. Em (*a*) são mostrados os modos estacionários longitudinais, para os quais $L = m\lambda/2$, em que λ é o comprimento de onda do laser e m é um número inteiro. Se os lados da cavidade também são espelhos, como em (*b*), podem existir modos estacionários transversais. Observe que, neste caso, o feixe de saída não é paralelo ao eixo maior do laser.

O laser de rubi, como outros lasers convencionais, se comporta como uma cavidade ótica ressonante. Um filme metálico é depositado nas extremidades do cristal, fazendo com que uma das extremidades se comporte como um espelho quase perfeito (refletindo 99,9% da luz incidente) e a outra como um espelho semitransparente (refletindo 99% da luz incidente). Assim, uma parte dos fótons consegue deixar o dispositivo através da extremidade parcialmente transparente. Se os planos das duas extremidades são paralelos, ondas estacionárias se formam no interior do material, como mostra a Figura 9-34, e o dispositivo produz um feixe intenso de luz coerente. A Figura 9-35 ilustra a formação do feixe luminoso no interior do laser. Quando os fótons que se movimentam paralelamente ao eixo do cristal atingem os espelhos, quase todos são refletidos por um dos espelhos e a maioria é refletida pelo outro espelho, enquanto uns poucos fótons deixam o dispositivo atravessando a extremidade parcialmente transparente. A cada passagem pelo cristal, os fótons estimulam mais átomos a emitir fótons, até se formar um feixe luminoso muito intenso.

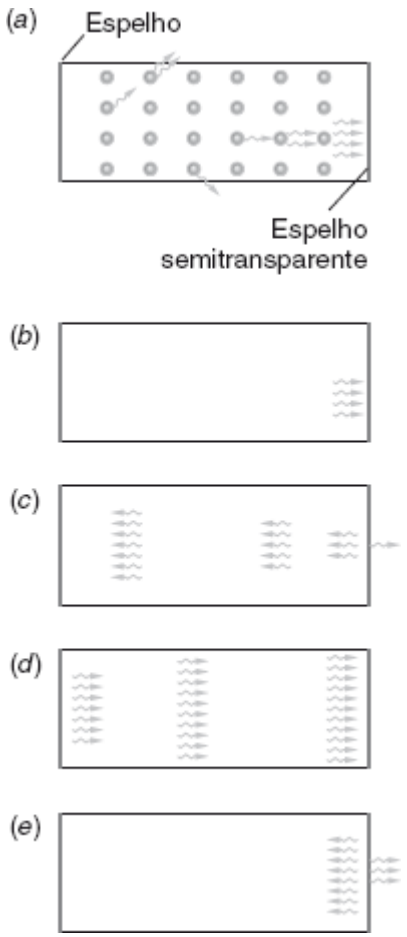


FIGURA 9-35 Multiplicação de fótons em um laser. (*a*) Alguns átomos emitem fótons espontaneamente. Parte desses fótons se movimenta para a direita, paralelamente ao eixo maior do cristal, estimulando outros átomos a emitir fótons na mesma direção. Os outros fótons são absorvidos, escapam pelas paredes laterais, ou são perdidos de outras formas. (*b*) Quatro fótons atingem a extremidade semitransparente do laser. (*c*) Um dos fótons deixa o cristal e os outros três são refletidos. Esses três fótons atravessam o cristal no sentido contrário, estimulando outros átomos excitados a emitir novos fótons. Ao chegarem à extremidade esquerda do cristal, todos esses fótons são refletidos. No momento em que o feixe atinge novamente a extremidade direita do cristal (*d*), o número de fótons aumentou consideravelmente. (*e*) Alguns desses fótons deixam o cristal, tornando-se parte do feixe de saída do laser. Os outros fótons são refletidos mais uma vez e o processo se repete várias vezes.

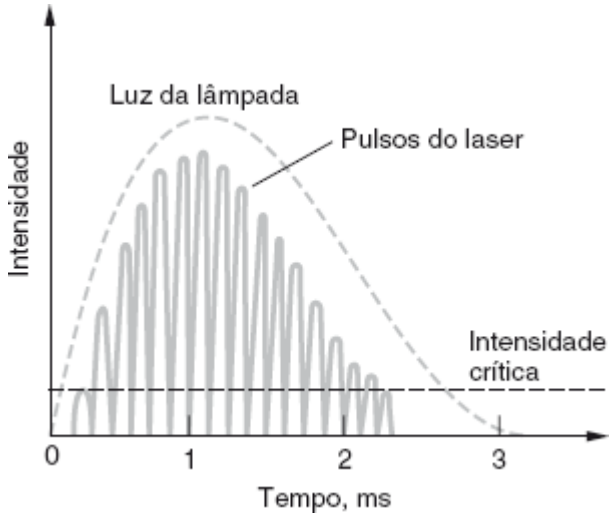


FIGURA 9-36 Pulso de saída de um laser de rubi. O pulso é formado, na verdade, por uma série de pulsos muito estreitos, com cerca de 1 μs de duração. Quando a intensidade da lâmpada de *flash* é menor que um certo valor crítico, a inversão de população é insuficiente para que o efeito laser ocorra. A figura não mostra o ruído de fundo produzido pelas emissões espontâneas, incoerentes, que acompanham as emissões coerentes do laser.

Os lasers modernos de rubi são capazes de gerar feixes luminosos com energias de 50 a 100 J em pulsos com alguns milissegundos de duração. A largura dos pulsos é aproximadamente igual à largura dos pulsos produzidos pela lâmpada usada para excitar os átomos para os níveis de bombeamento mostrados na Figura 9-33*d*. A luz produzida pelo laser durante esse tempo é, na verdade, uma série de pulsos muito estreitos, com cerca de um microssegundo de duração (Figura 9-36). Isso acontece porque o efeito laser faz com que a população do nível metaestável diminua rapidamente; é necessário um certo tempo para que a inversão de população seja restabelecida e o pulso seguinte possa ocorrer.

Cada um dos pulsos estreitos ou "picos" que aparecem na Figura 9-36 começa logo depois que ocorre uma inversão de população ($N_2 > N_1$) e termina quando as emissões estimuladas fazem com que N_2 se torne menor que N_1. É possível produzir pulsos mais intensos que o normal usando uma técnica conhecida como *mudança de Q*, que consiste em degradar temporariamente as propriedades ressonantes da cavidade para permitir que a radiação de bombeamento torne N_2 muito maior que N_1; quando as propriedades ressonantes são restauradas, o pulso resultante é extremamente intenso. O "*Q*" que aparece no nome da técnica é o *fator de qualidade*, um parâmetro que mede a capacidade da cavidade ressonante de sustentar uma onda estacionária. Quando as perdas introduzidas pelos espelhos das extremidades são pequenas e o meio quase não absorve luz na frequência do laser, as ondas são pouco atenuadas, o valor de *Q* é elevado e dizemos que a cavidade é de boa qualidade ou de alto *Q*. Quando as perdas são grandes, as ondas são rapidamente atenuadas, o valor de *Q* é pequeno e dizemos que a cavidade é de má qualidade ou de baixo *Q*. Quando o valor de *Q* se torna menor que um certo limite, o laser deixa de funcionar. Uma das formas de controlar o valor de *Q* consiste em substituir os espelhos de uma das extremidades por um espelho ajustável externo. Quando o espelho externo não está paralelo ao espelho que existe do outro lado da cavidade, o valor de *Q* é baixo e a probabilidade de emissão estimulada permanece muito pequena enquanto a radiação de bombeamento aumenta continuamente a população do estado E_2, fazendo com que N_2 se torne muito maior que N_1. Quando o espelho externo é ajustado para ficar paralelo ao outro espelho, o valor de *Q* aumenta bruscamente (daí o nome "mudança de *Q*") e um pulso extremamente intenso é gerado, já que, nesse momento, a diferença de populações entre os dois estados é muito grande.

Para que um laser possa funcionar de forma contínua, é preciso que o número de fótons coerentes produzidos por unidade de tempo por emissão estimulada no interior da cavidade ressonante seja igual ou maior que as perdas (incluindo os fótons emitidos pelo laser). Como veremos a seguir, é possível calcular, a partir dos coeficientes de Einstein definidos na Seção 9-5, a inversão de população necessária para que exista o efeito laser. Para começar, vamos combinar todas as perdas em um único tempo característico t_p, definido de tal forma que a intensidade luminosa I em uma certa frequência f no interior da cavidade diminui de acordo com a equação

$$I = I_0 e^{-t/t_p} \qquad \textbf{9-43}$$

em que I_0 é a intensidade no instante $t = 0$. Assim, a taxa com a qual a intensidade diminui é dada por

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{\text{perda}} = -\frac{I_0}{t_p} e^{-t/t_p} = -\frac{I}{t_p} \qquad \textbf{9-44}$$

A taxa com a qual a intensidade luminosa na frequência f aumenta devido à diferença entre os fótons criados por emissão estimulada e os fótons perdidos por absorção é igual ao produto de três termos: a diferença de populações $N_2 - N_1$, a intensidade luminosa por fóton e a probabilidade de emissão estimulada, $u(f)B_{21}$. A probabilidade de transição $u(f)B_{21}$ deve ser corrigida para levar em conta o fato de que a linha espectral emitida na transição $E_2 \rightarrow E_1$ tem uma largura Δf, já que, como vimos no Capítulo 5, o nível E_2 tem uma largura finita.[14] Essa correção é um fator multiplicativo aproximadamente igual a $2/\pi\Delta f$. Assim, temos:

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{\text{ganho}} = (N_2 - N_1)\frac{hfc}{V}\frac{2}{\pi\Delta f}u(f)B_{21} \qquad \textbf{9-45}$$

na qual V é o volume da cavidade ressonante e hfc/V é a intensidade por fóton. Usando a Equação 9-38 e o fato de que A_{21} é o recíproco do tempo de vida para emissão espontânea t_s, a Equação 9-45 pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{\text{ganho}} = \frac{(N_2 - N_1)}{V}(hfc)\left[\frac{u(f)c^3}{4\pi^2 hf^3 \Delta f t_s}\right] \qquad \textbf{9-46}$$

ou

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{\text{ganho}} = (n_2 - n_1)\frac{c^3 I}{4\pi^2 f^2 \Delta f t_s} \qquad \textbf{9-47}$$

na qual $n_2 = N_2/V$ e $n_1 = N_1/V$ são as *densidades de população* dos estados e $cu(f) = I$, a intensidade.[15] Se as densidades de estados (degenerações) $g(E)$ dos estados E_2 e E_1 não são iguais, é necessário incluir um fator adicional na Equação 9-47, que assume a forma

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{\text{ganho}} = \left[n_2 - n_1\left(\frac{g(E_2)}{g(E_1)}\right)\right]\frac{c^3 I}{4\pi^2 f^2 \Delta f t_s} \qquad \textbf{9-48}$$

A condição para que exista o efeito laser é

$$\left(\frac{dI}{dt}\right)_{\text{ganho}} \geq \left(\frac{dI}{dt}\right)_{\text{perda}} \qquad \textbf{9-49}$$

ou

$$\left[n_2 - n_1\left(\frac{g(E_2)}{g(E_1)}\right)\right]\frac{c^3 I}{4\pi^2 f^2 \Delta f t_s} \geq \frac{I}{t_p} \qquad \textbf{9-50}$$

O sinal de igualdade representa a condição para que o efeito laser comece; o sinal de desigualdade, a condição para que o efeito laser se mantenha indefinidamente. Resolvendo a Equação 9-50 com o sinal de igualdade, obtemos a *densidade de inversão de população crítica* Δn_c:

$$\Delta n_c = \frac{4\pi^2 f^2 \Delta f t_s}{c^3 t_p} \qquad \textbf{9-51}$$

em que

$$\Delta n_c = n_2 - n_1\left(\frac{g(E_2)}{g(E_1)}\right)$$

A Equação 9-51 expressa a inversão de população necessária para conseguir o efeito laser em uma dada frequência em função das perdas, da largura de linha espectral e do tempo de vida da emissão espontânea. De acordo com a equação, a única

propriedade da cavidade que afeta Δn_c é o tempo de decaimento característico t_p.

O laser de rubi é um exemplo de laser de três níveis (Figura 9-33*d*). A desvantagem deste tipo de laser está no fato de que, para conseguir a necessária inversão de população, é preciso bombear mais da metade dos átomos do nível E_1 para o nível E_3. Além disso, a fonte de energia, a lâmpada de *flash*, produz uma larga faixa de frequências; a maior parte da radiação não contribui para transferir elétrons para o nível E_3 e é, portanto, desperdiçada. A necessidade de bombear um grande número de átomos e a baixa eficiência de excitação significam que uma quantidade considerável de energia deve ser dissipada em forma de calor; assim, os lasers sólidos de três níveis, como o de rubi, devem funcionar de forma intermitente para evitar superaquecimento. Existe um outro tipo de laser que não exige uma transferência tão grande de elétrons e evita o excesso de calor produzido pelo bombeamento ótico; esse laser é conhecido como *laser de onda contínua* ou laser cw.*

O Laser de Hélio-Neônio

Em 1961, a entrada em funcionamento do primeiro laser cw, um laser contínuo de hélio-neônio, foi anunciada por A. Javan, W. R. Bennet, Jr., e D. R. Herriott.[16] A Figura 9-37 mostra um diagrama esquemático do tipo de laser de hélio-neônio usado nos laboratórios de física. O dispositivo é constituído por um tubo oco contendo 15% de hélio e 85% de neônio. Um espelho plano é montado em uma das extremidades do tubo; na outra extremidade é montado um espelho côncavo semitransparente. O espelho côncavo focaliza a luz no espelho plano e também funciona como uma lente que transmite parte da luz, gerando um feixe de raios paralelos.

O laser de hélio-neônio utiliza um método diferente do que é usado no laser de rubi para conseguir a inversão de população. A Figura 9-38 mostra os níveis de energia do hélio e do neônio que são importantes para o funcionamento do laser. (Os diagramas de níveis de energia completos dos dois gases são muito mais complexos.) O hélio possui dois estados excitados, os estados 2^3S e 2^1S, que estão 19,72 eV e 20,61 eV, respectivamente, acima do estado fundamental 1^1S. Os dois estados excitados são metaestáveis por causa da regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$, e a probabilidade de decaimento a partir do nível 2^3S é ainda menor por causa da regra de seleção $\Delta S = 0$, discutida na Leitura Suplementar *Átomos com Mais de um Elétron Externo*, que proíbe linhas de intercombinação. Os átomos de hélio são excitados para esses estados por uma descarga elétrica. O neônio possui dois grupos de estados excitados 19,83 eV e 20,66 eV acima do estado fundamental, o que significa que as energias desses estados são praticamente iguais às dos estados metaestáveis do hélio. Os átomos de neônio são excitados para esses estados por colisões com átomos de hélio excitados. A energia cinética dos átomos de hélio fornece a energia adicional, de 0,05 eV, necessária para excitar os átomos de neônio. Existe um outro estado excitado do neônio 18,70 eV acima do estado fundamental e 1,96 eV abaixo do estado de 20,66 eV. Como este último estado está normalmente desocupado, a inversão de população entre os dois estados é obtida imediatamente. A emissão estimulada que ocorre entre esses estados produz fótons com uma energia de 1,96 eV e comprimento de onda de 632,8 nm, que corresponde à luz vermelha. Depois da emissão estimulada, os átomos que se encontram no estado de 18,70 eV decaem para o estado fundamental por emissão espontânea de um fóton com um comprimento de onda de aproximadamente 600 nm, seguida por um decaimento sem emissão de radiação, normalmente causado por colisões com as paredes da cavidade. Essas colisões são uma parte importante do processo; se o diâmetro do tubo (Figura 9-37) é muito grande, a probabilidade de colisão com a parede é pequena e os átomos permanecem no estado $2p^5 3s^1$ (veja a Figura 9-38) por um tempo suficiente para serem novamente excitados para o estado $2p^5 3p^1$, o que reduz a inversão de população e diminui o ganho do laser. A emissão estimulada também pode ocorrer do estado de 19,83 eV ($2p^5 4s^1$) para o estado de 18,70 eV ($2p^5 3p^1$), produzindo fótons com um comprimento de onda de 1100 nm (isto é, no infravermelho). Mais recentemente, foram fabricados lasers de hélio-neônio que produzem fótons de outros comprimentos de onda na faixa da luz visível e do infravermelho. Os vários comprimentos de onda possíveis não estão presentes simultaneamente, já que cada dispositivo é projetado para operar em um determinado comprimento de onda.

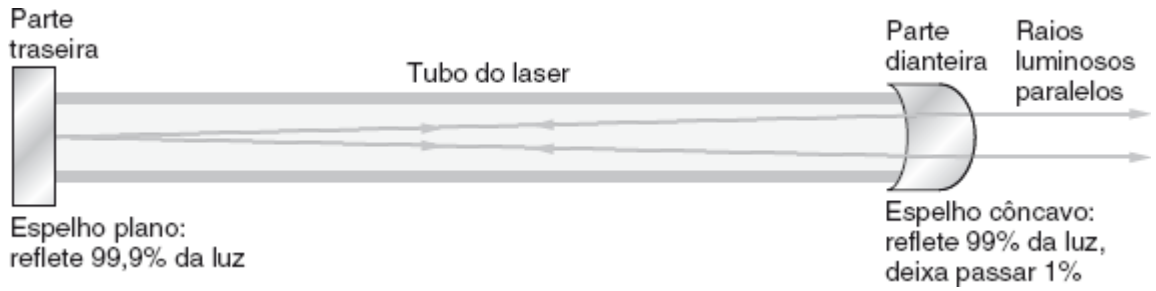


FIGURA 9-37 Diagrama esquemático de um laser de hélio-neônio. A substituição de um dos espelhos planos por um espelho côncavo faz com que o alinhamento dos espelhos não precise ser tão perfeito como no laser de rubi. O espelho côncavo também serve como lente, transformando o feixe de saída do laser em um feixe paralelo.

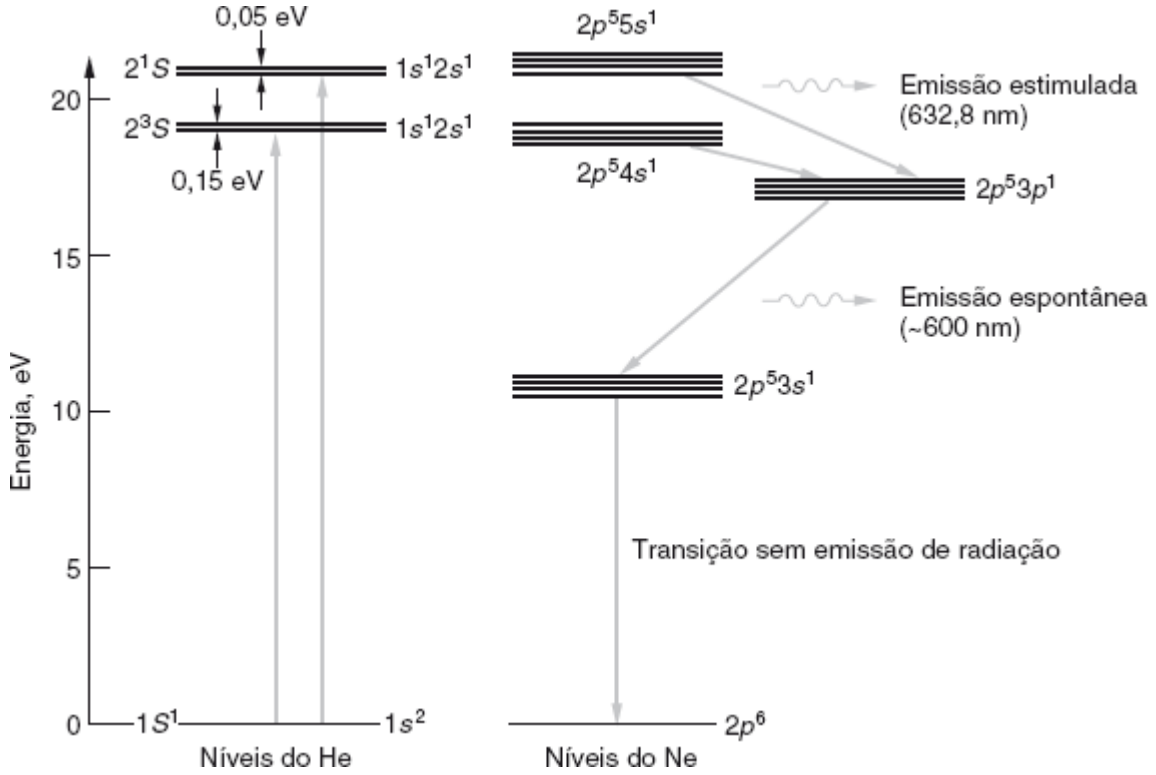


FIGURA 9-38 Níveis de energia do hélio e do neônio que são importantes para o funcionamento do laser de hélio-neônio. Os átomos de hélio são excitados por descargas elétricas para estados 19,72 e 20,61 eV acima do estado fundamental. Esses átomos colidem com átomos de neônio, excitando-os para estados 19,83 eV e 20,66 eV acima do estado fundamental. Com isso, ocorre uma inversão de população entre esses estados e um estado 18,70 eV acima do estado fundamental. A emissão espontânea de fótons com uma energia de 1,96 eV associados à transição do estado de 20,66 eV para o estado de 18,70 eV estimula outros átomos que se encontram no estado de 20,66 eV a emitir fótons com a mesma energia de 1,96 eV, produzindo a luz vermelha, com um comprimento de onda de 632,8 nm, característica do laser de He-Ne. A transição do estado de 19,83 eV para o estado de 18,70 eV também pode produzir uma emissão coerente, com um comprimento de onda na faixa do infravermelho (1100 nm).

Observe que existem quatro níveis envolvidos no funcionamento do laser de hélio-neônio, enquanto o funcionamento do laser de rubi envolve apenas três níveis. No laser de três níveis, é mais difícil conseguir a inversão de população porque a população do estado excitado deve ser maior do que a população do estado fundamental, que, em equilíbrio térmico, é muito maior que a população dos outros estados. No laser de quatro níveis, é mais fácil conseguir a inversão de população porque o estado em que o átomo se encontra depois da emissão estimulada não é o estado fundamental e sim um estado excitado, cuja população em equilíbrio térmico é relativamente pequena.

Exercícios

9. Qual é a principal vantagem do laser de quatro níveis em relação ao laser de três níveis?

10. Qual é a função do hélio em um laser de hélio-neônio? Por que não se usa apenas o neônio?

EXEMPLO 9-9 **Comparação entre Inversões de População Críticas** Compare as inversões de população mínimas necessárias para o funcionamento de um laser de rubi e de um laser de He-Ne. Calcule as potências de alimentação correspondentes.

SOLUÇÃO

A densidade de inversão de população crítica Δn_c é dada pela Equação 9-51. Os parâmetros típicos dos dois lasers são os seguintes:

Tabela 9-9 Parâmetros típicos de dois lasers

Parâmetro	Laser de rubi	Laser de He-Ne
λ	694,3 nm	632,8 nm
f	$4{,}32 \times 10^{14}\ s^{-1}$	$4{,}74 \times 10^{14}\ s^{-1}$

n (índice de refração)	1,76	1,00
t_s	3×10^{-3} s	10^{-7} s
t_p	$2{,}9 \times 10^{-8}$ s	$3{,}3 \times 10^{-7}$ s
Δf	$3{,}3 \times 10^{11}$ s^{-1}	9×10^{8} s^{-1}
N(concentração de Cr^{3+})	2×10^{19}/cm^3	–

Para o laser de rubi:

$$\Delta n_c = \frac{4\pi^2 f^2 \Delta f\, t_s}{c^3 t_p} = \frac{4\pi^2 (4{,}32\times 10^{14})^2 (3{,}3\times 10^{11})(3\times 10^{-3})}{(3{,}00\times 10^{8}/1{,}76)^3 (2{,}9\times 10^{-8})}$$

$$\Delta n_c = 5{,}08 \times 10^{22}\,\text{átomos/m}^3 = 5{,}08 \times 10^{16}\,\text{átomos/cm}^3$$

Para o laser de He-Ne:

$$\Delta n_c = \frac{4\pi^2 f^2 \Delta f\, t_s}{c^3 t_p} = \frac{4\pi^2 (4{,}74 \times 10^{14})^2 (9 \times 10^{8})\,(10^{-7})}{(3{,}00 \times 10^{8})^3 (3{,}3 \times 10^{-7})}$$

$$\Delta n_c = 8{,}96 \times 10^{13}\,\text{átomos/m}^3 = 8{,}96 \times 10^{7}\,\text{átomos/cm}^3$$

Assim, a densidade de inversão de população crítica é muito menor para o laser de He-Ne.

No caso do laser de hélio-neônio, como $N_1 \approx 0$, a potência mínima necessária para o funcionamento do laser é dada por

$$\begin{aligned} P(\text{He-Ne}) &\approx \Delta n_c\,(hf/t_s) \\ &\approx \frac{(8{,}96\times 10^{7})(6{,}63\times 10^{-34})(4{,}74\times 10^{14})}{10^{-7}} \\ &\approx 2{,}8 \times 10^{-4}\,\text{W/cm}^3 \end{aligned}$$

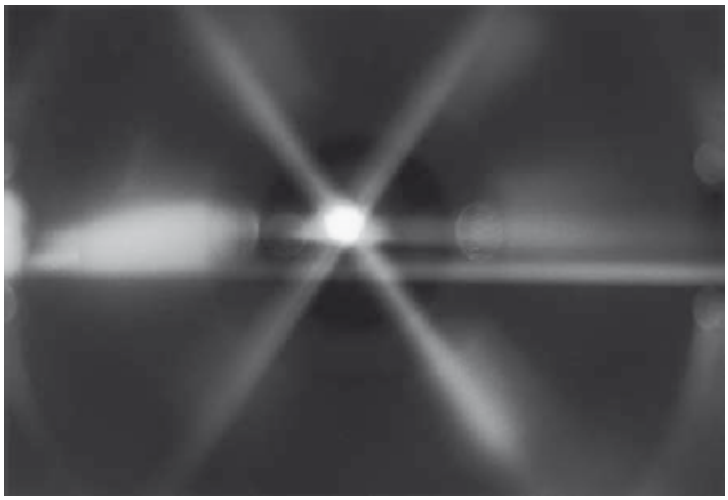
No caso do laser de rubi, cerca de metade dos íons de Cr^{3+} devem estar no nível de bombeamento E_3 da Figura 9-33*d*; a potência por unidade de volume necessária para manter essa inversão de população é dada por

$$\begin{aligned} P(\text{rubi}) &\approx \frac{N}{2}\left(\frac{hf}{t_s}\right) \approx \frac{(2\times 10^{19})(6{,}63\times 10^{-34})(4{,}32\times 10^{14})}{2\times 3\times 10^{-3}} \\ &\approx 955\ \text{W/cm}^3 \end{aligned}$$

Novos Lasers e Novas Aplicações

O feixe de luz produzido por um laser é coerente, estreito e intenso. É a coerência do laser que permite a obtenção de hologramas como os que são usados em cartões de crédito e *heads-up displays*, instrumentos usados para fornecer informações visuais ao piloto de uma aeronave sem que este tenha que desviar os olhos. A direção precisa e pequena dispersão angular o torna útil como instrumento cirúrgico para destruir células cancerosas e corrigir descolamentos de retina. Os lasers também são usados para fazer levantamentos topográficos. É possível medir distâncias com grande precisão usando um espelho para refletir a luz de um laser e medindo o tempo necessário para que um pulso luminoso faça o percurso de ida e volta. A distância entre a Terra e a Lua foi medida com precisão de alguns milímetros usando espelhos deixados na Lua por astronautas das missões americanas Apolo 11, 14 e 15 e pelas naves russas não tripuladas Luna 17 e 21. Além disso, naturalmente, os aparelhos de CD e DVD e os leitores de código de barras, cujo funcionamento se baseia no uso de lasers, fazem parte do nosso dia a dia. Os lasers de alta potência também são usados em experimentos de fusão nuclear. Nesse caso, os feixes de vários lasers são focalizados em pequenas esferas de deutério-trítio em uma câmara de combustão. Os lasers aquecem rapidamente as esferas a temperaturas da

ordem de 10^8 K, o que faz com que os átomos de deutério e trítio se fundam, liberando energia (veja a Seção 11-8). Na outra extremidade da escala de temperaturas, usando técnicas avançadas de resfriamento que incluíram o uso de três pares ortogonais de lasers (pinças óticas) em uma amostra com 2500 átomos de césio, W. Ketterle e colaboradores[17] conseguiram obter uma temperatura de apenas 450 pK. (Veja a foto.) Pares de lasers, conhecidos como *armadilhas óticas*, capazes de resfriar milhões de átomos a temperaturas de menos de um microkelvin, são usados para criar condensados de Bose-Einstein, discutidos no Capítulo 8, e átomos de anti-hidrogênio, descritos no Capítulo 12.



Nesta fotografia, três pares de lasers iluminam cerca de 100 milhões de átomos de sódio. A pressão da luz desacelera os átomos, reduzindo a velocidade rms a apenas algumas vezes a velocidade de recuo correspondente à absorção ou emissão de um único fóton. Este processo permitiu resfriar átomos de sódio a uma temperatura de apenas 450 pK. [*Fonte*: *National Institute of Standards and Technology*.]

Embora os lasers cw sejam os mais adequados para muitas aplicações, outras exigem lasers pulsados, especialmente as aplicações nas quais a potência necessária é tão elevada que uma operação contínua se torna inviável. Para essas aplicações, foi desenvolvido o método de *amplificação de pulsos por variação de frequência* ou CPA.* Nessa técnica, inventada na década de 1980 por Gérhard Mourou, um pulso curto passa por um conjunto de redes de difração ou prismas que dispersa as frequências contidas no pulso (veja a Figura 9-39). Em consequência, o pulso fica até 10^5 vezes mais largo e muito menos intenso que o pulso original e pode ser amplificado 10^6 vezes ou mais sem que haja risco de danificar os componentes do amplificador. Em seguida, o pulso é comprimido novamente por um sistema ótico que faz o trabalho inverso do sistema original. Hoje em dia, são produzidos comercialmente lasers pulsados com uma potência instantânea de mais de 100 gigawatts. Alguns laboratórios de pesquisa dispõem de lasers com uma potência instantânea na faixa dos petawatts (10^{15} watts). Alguns exemplos são mencionados brevemente no próximo parágrafo.

As *pinças óticas* utilizam as forças eletromagnéticas extremamente pequenas associadas à luz de um laser, focalizada com extrema precisão ao passar pela lente objetiva de um microscópio, para manipular partículas de tamanho nanométrico ou micrométrico às quais estão associadas moléculas como as de DNA. Esta técnica é usada, por exemplo, para separar células e para resfriar átomos neutros.

A tecnologia dos lasers está progredindo tão rapidamente que é possível mencionar aqui apenas algumas das novidades mais recentes. A introdução no mercado, em 2006, da tecnologia Blu-ray, que utiliza um laser azul para aumentar a capacidade dos DVDs de 5 para 25 gigabytes, é um exemplo. Além do laser de rubi, foram construídos muitos outros lasers baseados em cristais, cujos comprimentos de onda variam de 18 nm (raios X macios) até 3900 nm (infravermelho). Também existem lasers capazes de gerar continuamente uma potência de mais de 1 kW e lasers que produzem pulsos com nanossegundos de duração e uma potência instantânea da ordem de 10^9 W. Um laser CPA de titânio-safira da Universidade de Michigan estabeleceu um recorde mundial ao concentrar uma potência de 3×10^{14} W em uma região de apenas 1,2 μm de diâmetro em um pulso com 10^{-5} de duração para produzir uma intensidade de 2×10^{23} W/m^2, cem vezes maior que o recorde anterior. Entretanto, existem lasers ainda mais potentes, como o laser Astra Gemini, do Rutherford Appleton Laboratory, na Inglaterra, que é capaz de desenvolver uma potência de 5×10^{14} W.[18] Um projeto europeu conhecido como Extreme Light Infrastructure (ELI) pretende construir um laser com uma potência da ordem de 2×10^{17} W, 200 vezes maior que dos lasers mais potentes da atualidade. Entre as possíveis aplicações desses novos lasers está a fabricação de aceleradores de partículas "de mesa" (ou seja, de pequeno porte) cuja radiação secundária (raios X e raios gama) seria usada em pesquisas médicas e de materiais.

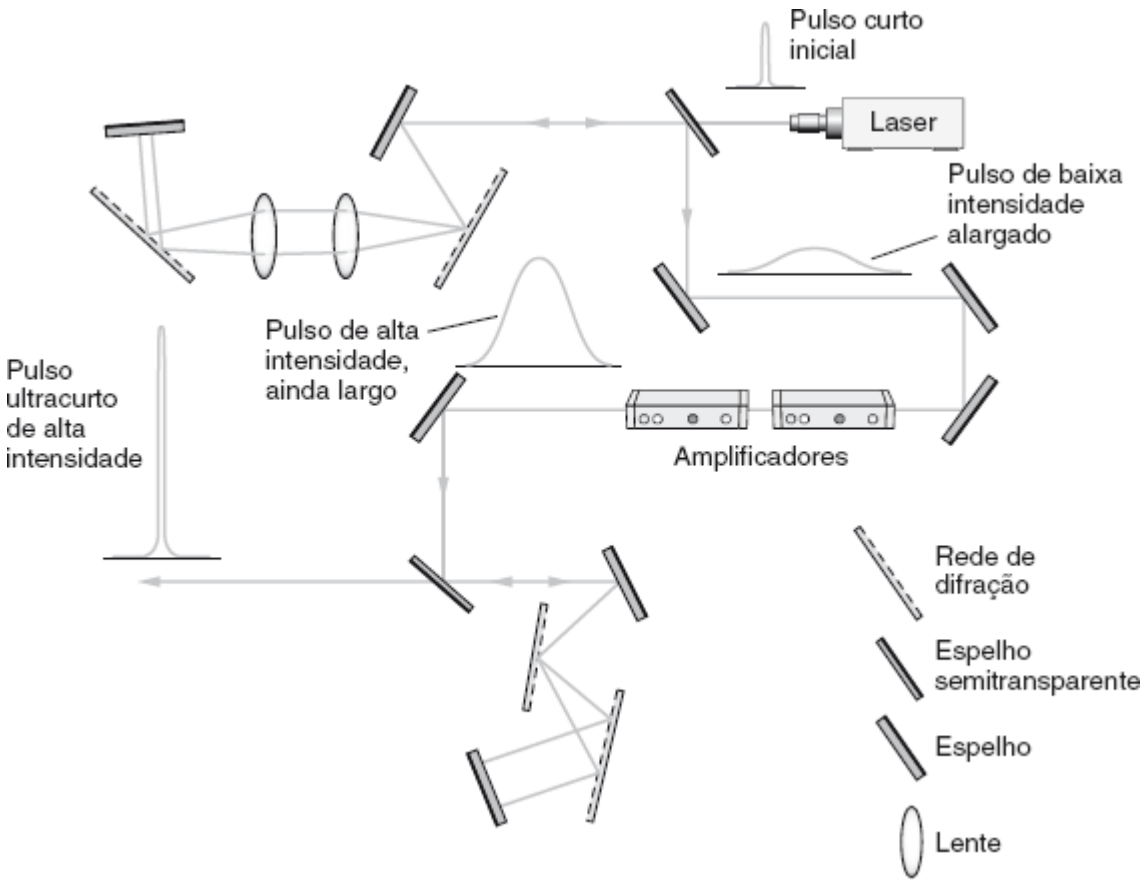
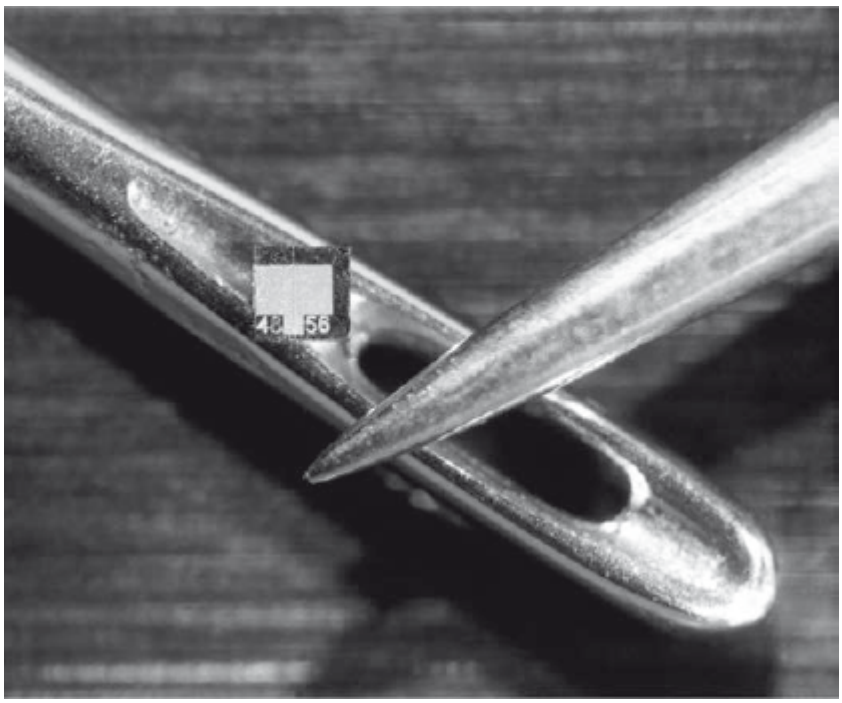


FIGURA 9-39 O pulso curto de um laser passa por duas redes de difração, que introduzem uma diferença de 10 cm entre as distâncias percorridas pelas frequências mais baixas e as frequências mais altas (dispersão positiva), alargando consideravelmente o pulso, o que reduz sua amplitude máxima. O pulso é amplificado e, em seguida, novamente comprimido por um segundo par de redes de difração que invertem a diferença de percurso introduzida pelo primeiro par (dispersão negativa). O resultado é um pulso ultracurto de alta intensidade.



Um laser semicondutor sintonizável (veja a Seção 10-8) mostrado, para comparação, no buraco de uma agulha de costura. [*NASA*/*Jet Propulsion Laboratory*.]

As comunicações por fibra ótica receberam um grande impulso com a recente criação de um amplificador ótico. A luz de um laser semicondutor é usada para “bombear” um segmento de fibra ótica dopada com érbio, introduzido na linha. O sinal que trafega na linha estimula a emissão de fótons pelos átomos de érbio, reforçando o sinal.

Os lasers a gás e os lasers de corantes sintonizáveis produzem comprimentos de onda que vão do infravermelho distante ao

ultravioleta. Os lasers semicondutores (veja o Capítulo 10) podem gerar 200 mW de potência em uma área do tamanho de uma cabeça de alfinete. Além dos lasers que produzem luz vermelha e hoje são usados em leitoras de código de barras, aparelhos de CD, copiadoras e impressoras, os cientistas de materiais desenvolveram lasers semicondutores que produzem luz azul e ultravioleta. Esses lasers, como dissemos, permitiram aumentar consideravelmente a capacidade dos DVDs. Lasers líquidos baseados em corantes podem ser sintonizados em uma faixa de comprimentos de onda com aproximadamente 70 nm de largura no caso de lasers contínuos e mais de 170 nm de largura no caso de lasers pulsados. Recentemente, em 2011, os cientistas Masle Gather e Seok-Hyun Yun, da Harvard Medical School, demonstraram a existência de lasers biológicos em células vivas, lançando as bases para uma nova forma de investigar o comportamento das células. Um laser relativamente novo, o laser de elétrons livres, extrai energia luminosa de um feixe de elétrons livres submetidos a um campo magnético não uniforme. Os cientistas esperam que, futuramente, este tipo de laser seja capaz de gerar grandes potências com alta eficiência, além de poder ser sintonizado em uma larga faixa de comprimentos de onda. Não parece haver limites para a variedade e as aplicações tecnológicas dos lasers.

Uma Oportunidade PARA VOCÊ Em abril de 2009, um novo tipo de fonte luminosa, conhecida como LCLS, começou a funcionar no SLAC National Accelerator Laboratory, na Califórnia. Trata-se de um laser de elétrons livres que produz, pela primeira vez na história, pulsos coerentes de raios X. Os raios X são usados há muito tempo por físicos e biólogos para estudar a estrutura dos materiais a nível atômico e molecular, mas a capacidade do LCLS de produzir pulsos de apenas 2×10^{-15} s de largura com uma intensidade 10^9 vezes maior que a dos aparelhos comuns de raios X oferece novas oportunidades. Por exemplo, o LCLS permite obter "instantâneos" de reações químicas em andamento, acompanhar a redistribuição de elétrons durante a formação de moléculas e estudar a estrutura de moléculas e materiais complexos, como o DNA e as nanopartículas. Os usos do novo instrumento são limitados apenas pela imaginação dos cientistas.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. A ligação iônica	Este tipo de ligação, que está presente na maioria dos sais, envolve a transferência de um ou mais elétrons para formar íons positivos e negativos que se atraem mutuamente pela força eletrostática. Como o princípio de exclusão impede que os íons se aproximem indefinidamente, a energia potencial $U(r)$ apresenta um mínimo. No caso de uma molécula diatômica, $$U(r) = -\frac{ke^2}{r} + E_{ex} + E_{ion} \qquad \textbf{9-1}$$ em que E_{ion} é a energia de ionização e E_{ex} é a energia de repulsão pelo princípio de exclusão, dada por $$E_{ex} = \frac{A}{r^n} \qquad \textbf{9-2}$$ em que A e n são constantes.
2. A ligação covalente Outras ligações covalentes	Este tipo de ligação resulta de um efeito quântico associado ao compartilhamento de um ou mais elétrons por átomos iguais ou semelhantes. A superposição dos orbitais eletrônicos pode dar origem a funções de onda moleculares com diferentes simetrias. A função de onda do estado simétrico, Ψ_S, tem um valor elevado na região entre os núcleos, o que produz um mínimo na energia potencial e uma molécula estável. A função de onda do estado antissimétrico, Ψ_A, tem um valor pequeno na região entre os núcleos; a energia potencial associada a esta função de onda não possui um mínimo e, portanto, não leva a uma molécula estável. A ligação entre dois átomos diferentes muitas vezes tem um caráter

parcialmente iônico e parcialmente covalente.

Podem existir vários tipos de ligações covalentes, dependendo dos elétrons que são compartilhados. Na molécula de H_2, por exemplo, a ligação é do tipo *s*; na molécula de O_2, a ligação é do tipo *pp*. Existem também ligações do tipo *sp*, como na molécula de H_2O.

3. Ligações dipolo-dipolo

As ligações entre átomos e moléculas podem se dever a interações entre momentos dipolares. Essas interações podem envolver moléculas com momentos dipolares elétricos permanentes (moléculas polares) ou com momentos dipolares elétricos induzidos (moléculas apolares). A energia potencial *U* de um dipolo $\mathbf{p}_2$ na presença do campo elétrico $\mathbf{E}_d$ produzido por um dipolo $\mathbf{p}_1$ é dada por

$$U = -\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{E}_d \qquad \textbf{9-8}$$

A força entre dipolos permanentes é proporcional a $1/r^4$. Se pelo menos um dos dipolos é um dipolo induzido, a força passa a ser proporcional a $1/r^7$.

4. Espectros moleculares

Os níveis de energia das moléculas diatômicas são constituídos por níveis eletrônicos desdobrados por níveis vibracionais, que por sua vez são desdobrados por níveis rotacionais.

Níveis rotacionais

As energias rotacionais de uma molécula diatômica são dadas por

Níveis vibracionais

$$E = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2I} = \ell(\ell+1)E_{0r} \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{9-13}$$

em que *I* é o momento de inércia, $E_{0r} = \hbar^2/2I$ é a energia rotacional característica e ℓ é o número quântico rotacional. As transições entre os estados rotacionais obedecem à regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$.

Os níveis vibracionais de uma molécula diatômica são dados por

$$E_v = (v + 1/2)hf \qquad v = 0, 1, 2, \ldots \qquad \textbf{9-20}$$

em que *f* é a frequência vibracional e *v* é o número quântico vibracional. As transições vibracionais obedecem à regra de seleção $\Delta v = \pm 1$.

5. Espalhamento, absorção e emissão estimulada

Um fóton que incide em um átomo pode ser absorvido, produzindo fluorescência ou radiação ressonante, ou espalhado elasticamente (espalhamento de Rayleigh) ou inelasticamente (espalhamento de Raman). Quando a energia do fóton é maior que a energia de ionização do átomo, pode ocorrer o espalhamento de Compton ou o efeito fotelétrico. Quando o átomo se encontra inicialmente em um estado excitado, um fóton incidente com a energia apropriada pode estimular a emissão de outro fóton com a mesma energia. Os fótons incidente e emitido estão em fase e se propagam na mesma direção. Em um sistema em equilíbrio, as probabilidades de absorção e de emissão estimulada (coeficientes de Einstein) entre os mesmos estados são iguais.

6. Lasers e masers

Os lasers e masers são importantes aplicações tecnológicas da

emissão estimulada que diferem apenas quanto aos comprimentos de onda produzidos. A amplificação por emissão estimulada depende da possibilidade de ser obtida uma inversão de população, na qual existem mais átomos em um estado excitado do que no estado fundamental ou outro estado excitado de menor energia. Em geral, a inversão de população é conseguida por bombeamento ótico e é produzida mais facilmente em sistemas de quatro níveis que em sistemas de três níveis.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Brehm, J. J. e W. J. Mullin, *Introduction to the Structure of Matter,* Wiley, New York, 1989.

Eisberg, R. e R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2d ed., Wiley, New York, 1985.

Herzberg, G., *Atomic Spectra and Atomic Structure*, Dover, New York, 1944.

Pauling, L., *The Chemical Bond*, Cornell University Press, Ithaca, NY, 1967.

Schawlow, A. L., "Laser Light", *Scientific American*, September 1968. Este e vários outros excelentes artigos a respeito de lasers e masers estão reproduzidos em *Lasers and Light*, Freeman and Co., New York, 1969.

Serway, R. A., C. J. Moses e C. A. Moyer, *Modern Physics*, 3d ed., Thomson, Belmont, CA, 2005.

Zeilinger, A., "Quantum Teleportation", *Scientific American*, April 2000.

Notas

1. O termo *orbital* é usado frequentemente na física e na química molecular para designar a parte espacial da função de onda, ou seja, a parte da função de onda que depende dos números quânticos n, ℓ e m_ℓ. Na física molecular, os elétrons de interesse são, quase sempre, os elétrons da última camada, ou elétrons de valência, dos átomos que pertencem à molécula. Como as funções de onda associadas a esses átomos se estendem a toda a molécula, podemos falar de "orbitais moleculares", da mesma forma como falamos de "orbitais atômicos" quando as funções de onda dos elétrons se limitam às vizinhanças de um único átomo.

2. Moléculas cujos átomos são iguais, como a de H_2, são chamadas de *homopolares* ou *homonucleares*. Moléculas cujos átomos não são iguais recebem o nome de *heteropolares* ou *heteronucleares*.

3. O nome fullereno é uma homenagem ao filósofo e engenheiro R. Buckminster Fuller, o inventor da cúpula geodésica, uma estrutura arquitetônica construída a partir de pentágonos e hexágonos.

4. Leonhard Euler (1707-1783), matemático suíço. Considerado o matemático mais prolífero de todos os tempos, publicou 866 artigos durante a vida e, apesar de ter perdido a visão em 1766 (em parte por causa de observações do Sol), deixou tantos originais ao morrer que foram necessários 35 anos para publicá-los. Foi Euler quem introduziu o símbolo e para representar a base do sistema de logaritmos naturais e o símbolo i para representar a raiz quadrada de -1.

5. Johannes Diderik van der Waals (1837-1923), físico holandês. Essencialmente um autodidata, interessou-se pelo fato de que a lei dos gases perfeitos deduzida a partir da teoria cinética dos gases não era seguida exatamente pelos gases reais. Isso o levou a questionar a hipótese de que as moléculas dos gases não interagem, a não ser através de colisões. Depois de estudar o problema, chegou a uma equação, a equação de van der Waals, que descreve com mais precisão o comportamento dos gases reais. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1910 por este trabalho.

6. Esta equação é demonstrada em muitos livros de física elementar. Veja, por exemplo, P. A. Tipler e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed., W. H. Freeman and Co., New York, 2008, p. 671.

7. A terminologia das forças dipolo-dipolo é um pouco confusa. Alguns livros chamam os três tipos de forças entre dipolos de *forças de van der Waals*. Neste livro vamos seguir a prática mais comum (e mais tradicional) de reservar o nome *força de van der Waals* para a força de atração entre dois dipolos induzidos.

8. Usamos o símbolo v (letra grega ni) para os estados vibracionais, em lugar de n, para evitar confusão com o número quântico principal associado aos estados eletrônicos.

9. A molécula do óxido nítrico (NO) é uma exceção porque contém um elétron desemparelhado.

10. As linhas associadas a transições do tipo $\ell \rightarrow \ell - 1$ são conhecidas como *linhas do ramo P* e as linhas associadas a transições do tipo $\ell \rightarrow \ell + 1$ são conhecidas como *linhas do ramo R*.

11. Chandrasekhara Venkata Raman (1888-1970), físico indiano. Depois de se formar na universidade com 16 anos, tornou-se

funcionário público, como Einstein, e passou a fazer ciência nas horas vagas. Previu que a luz visível podia sofrer espalhamento inelástico antes que Compton observasse o efeito usando raios X. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1930 por seu trabalho, tornando-se o primeiro asiático a receber um Prêmio Nobel na área das ciências.

12. Existe também um efeito Raman para os estados vibracionais e eletrônicos das moléculas.

13. T. H. Maiman, "Stimulated Optical Radiation in Ruby", *Nature*, **187**, 493 (1960).

14. Esta correção é necessária porque, devido à largura finita da linha espectral, a densidade de energia $u(f)$ que aparece na probabilidade de emissão estimulada está distribuída em uma faixa de frequências Δf em vez de estar concentrada em uma única frequência f.

15. O produto da energia por unidade de volume $u(f)$ pela velocidade c tem dimensões de intensidade (W/m^2 em unidades do SI).

16. A. Javan, W. B. Bennet, Jr., e D. R. Herriott, *Physical Review Letters*, **6**, 106 (1961).

17. W. Ketterle et al., *Science*, **301**, 1513 (2003).

18. Convém observar que, embora a potência desses lasers pulsados seja extremamente elevada, o fato de que pulsos são muito curtos faz com que a energia por pulso seja relativamente pequena, da ordem de 5 a 100 J.

Problemas

NÍVEL I

Seção 9-1 A Ligação Iônica

9-1. A energia de dissociação às vezes é expressa em quilocalorias por mol. (*a*) Determine a relação entre elétrons-volts por molécula e quilocalorias por mol. (*b*) Determine a energia de dissociação do NaCl molecular em quilocalorias por mol. (*c*) A energia de dissociação da molécula de Li_2 é 106 kJ/mol. Determine o valor da energia de dissociação do Li_2 em eV por molécula.

9-2. A energia de dissociação do Cl_2 é 2,48 eV. Considere a formação de uma molécula de NaCl por meio da reação

$$\mathrm{Na} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Cl_2} \rightarrow \mathrm{NaCl}$$

Esta reação é endotérmica (absorve energia) ou exotérmica (libera energia)? Qual é a energia liberada ou absorvida por molécula?

9-3. Usando os dados da Tabela 9-1, calcule a energia necessária para transferir um elétron nos seguintes casos: do Cs para o F; do Li para o I; do Rb para o Br.

9-4. Usando os dados das Tabelas 9-1 e 9-2, estime a energia de dissociação das moléculas de CsI, NaF e LiI. Explique por que os valores obtidos são maiores que os que aparecem na Tabela 9-2.

9-5. A distância de equilíbrio entre os íons Rb^+ e Cl^- no RbCl é 0,267 nm. (*a*) Calcule a energia potencial de atração entre os íons, supondo que eles se comportam como cargas pontuais. (*b*) A energia de ionização do rubídio é 4,18 eV e a afinidade eletrônica do cloro é 3,62 eV. Determine a energia de dissociação do KCl, desprezando a energia de repulsão. (*c*) O valor experimental da energia de dissociação é 4,37 eV. Qual é a energia de repulsão dos íons na distância de equilíbrio?

9-6. Calcule a energia eletrostática da molécula de KBr na distância de equilíbrio. Use o resultado para calcular a energia de repulsão pelo princípio de exclusão na distância de equilíbrio.

9-7. Se a energia de repulsão pelo princípio de exclusão do Problema 9-6 é dada pela Equação 9-2, calcule os valores do coeficiente A e do expoente n.

9-8. Calcule a energia de dissociação do NaBr molecular em quilocalorias por mol.

9-9. Observe na Tabela 9-2 que as distâncias de equilíbrio das moléculas de KBr e RbCl são praticamente iguais. Calcule as energias de repulsão pelo princípio de exclusão para as duas moléculas.

Seção 9-2 A Ligação Covalente

9-10. O hidrogênio pode formar ligações covalentes com muitos outros átomos além dos que aparecem nas Tabelas 9-3 e 9-5, incluindo o enxofre, o telúrio, o fósforo e o antimônio. Determine as fórmulas químicas das moléculas resultantes da combinação do hidrogênio com os elementos citados. (*Sugestão*: Use a tabela de configurações eletrônicas do Apêndice C.)

9-11. Que tipo de ligação é o mais importante (*a*) na molécula de KCl; (*b*) na molécula de O_2; (*c*) na molécula de CH_4?

9-12. A distância de equilíbrio da molécula de HF é 0,0917 nm e o valor experimental do momento dipolar elétrico da molécula

é $6{,}40 \times 10^{-30}$ C·m. Qual é a porcentagem de caráter iônico da ligação?

9-13. A distância de equilíbrio da molécula de CsF é 0,2345 nm. Se a ligação é 70% iônica, qual deve ser o valor do momento dipolar elétrico da molécula?

9-14. A ligação iônica da molécula de BaO envolve a transferência de dois elétrons do átomo de bário para o átomo de oxigênio. Se a distância de equilíbrio é 0,193 nm e o valor experimental do momento dipolar elétrico é $26{,}7 \times 10^{-30}$ C · m, qual é a porcentagem de caráter iônico da ligação?

Seção 9-3 Outros Tipos de Ligação

9-15. Cite três elementos com a mesma configuração das duas últimas subcamadas que o carbono. Você espera que esses elementos apresentem as mesmas ligações híbridas que o carbono? Justifique sua resposta.

9-16. O momento dipolar **p** da molécula de água, representada de forma esquemática na Figura 9-19, é, na verdade, a soma vetorial de dois dipolos de módulos iguais, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$, paralelos às retas que ligam o átomo de oxigênio aos dois átomos de hidrogênio. O valor experimental do ângulo entre os dois átomos de hidrogênio é 104,5°, a distância de equilíbrio entre o átomo de oxigênio e cada um dos átomos de hidrogênio é 0,0956 nm e o módulo de **p** é $6{,}46 \times 10^{-30}$ C·m. Determine a fração de carga que é transferida de cada um dos átomos de hidrogênio para o átomo de oxigênio na molécula de água.

9-17. A polarizabilidade do Ne é $1{,}1 \times 10^{-37}$ m·C^2/N. (*a*) Para que distância a energia dipolo-dipolo entre uma molécula de H_2O e um átomo de Ne na atmosfera é suficiente para resistir a uma colisão com uma molécula de N_2 que esteja se movendo com a velocidade cinética média correspondente a $T = 300$ K? (*b*) Qual é essa distância para uma molécula típica? (*c*) Com base nos resultados dos itens (*a*) e (*b*), a formação de ligações H_2O–Ne é muito provável? Justifique sua resposta.

9-18. As pontes de hidrogênio que ligam duas moléculas de DNA têm uma energia da ordem de 0,3 eV, o que corresponde a aproximadamente 15% da energia das ligações iônicas e covalentes entre os átomos de cada molécula. (*a*) Qual é o comprimento de onda de um fóton com energia suficiente para romper as pontes de hidrogênio? (*b*) Em que região do espectro eletromagnético se encontram esses fótons? (*c*) Como existe uma concentração significativa de fótons nesta faixa de energias no ambiente terrestre, por que as ligações entre as moléculas de DNA dos seres vivos não se romperam há muito tempo?

9-19. Quais das moléculas a seguir você espera que sejam polares e quais você espera que sejam apolares? Justifique suas respostas. (*a*) NaCl; (*b*) O_2.

Seção 9-4 Níveis de Energia e Espectros de Moléculas Diatômicas

9-20. A energia rotacional característica E_{0r} da molécula de N_2 é $2{,}48 \times 10^{-4}$ eV. A partir desta informação, calcule a distância de equilíbrio dos átomos de nitrogênio na molécula de N_2.

9-21. A distância de equilíbrio da molécula de O_2 é 0,121 nm. Calcule a energia rotacional característica $E_{0r} = \hbar^2/2I$ em eV.

9-22. A molécula de CO sofre uma transição do estado vibracional $v = 1$ para o estado vibracional $v = 0$. (*a*) Qual é o comprimento de onda do fóton emitido? (*b*) A que temperatura 1% das moléculas de CO se encontram no estado vibracional $v = 1$?

9-23. Usando os dados da Tabela 9-8, (*a*) calcule a energia vibracional da molécula de LiH no estado vibracional de menor energia. (*b*) Calcule a massa reduzida do LiH. (*c*) Calcule a constante de força do LiH. (*d*) A partir desses resultados, estime a distância de equilíbrio da molécula de LiH e compare o resultado com o valor da tabela.

9-24. Calcule a massa reduzida, em unidades unificadas de massa, (*a*) da molécula de H_2; (*b*) da molécula de N_2; (*c*) da molécula de CO; (*d*) da molécula de HCl.

9-25. A energia rotacional característica $E_{0r} = \hbar^2/2I$ do KCl é $1{,}43 \times 10^{-5}$ eV. (*a*) Determine a massa reduzida da molécula de KCl. (*b*) Determine a distância de equilíbrio entre os íons K^+ e Cl^-.

9-26. Use os dados da Tabela 9-8 para determinar a constante de força (*a*) da molécula de $H^{35}Cl$; (*b*) da molécula de $K^{79}Br$.

9-27. A frequência de vibração da molécula de NO é $5{,}63 \times 10^{13}$ Hz. Calcule a constante elástica da molécula de NO.

9-28. A distância de equilíbrio do HBr é 0,141 nm. Supondo que o átomo de Br permanece fixo, calcule as quatro menores energias rotacionais da molécula de HBr e represente-as graficamente, em escala, em um diagrama de níveis de energia.

9-29. O espectro vibracional do Li_2 é constituído por uma série de linhas igualmente espaçadas na região das micro-ondas. Sabendo que a distância entre linhas vizinhas é $1{,}05 \times 10^{13}$ Hz, calcule a distância de equilíbrio do Li_2.

9-30. Calcule a diferença entre as energias rotacionais E_{0r} do $K^{35}Cl$ e do $K^{37}Cl$.

9-31. Qual é o principal tipo de ligação (*a*) no NaF; (*b*) no KBr; (*c*) no N_2; (*d*) no Ne?

9-32. Para o NaCl, calcule (*a*) a energia, em eV, necessária para excitar o primeiro estado rotacional e (*b*) o comprimento de onda e a frequência do fóton emitido na transição de volta ao estado fundamental. (Suponha que a molécula está no estado eletrônico fundamental e no estado vibracional fundamental.)

Seção 9-5 Espalhamento, Absorção e Emissão Estimulada

9-33. As energias dos cinco primeiros estados de um certo gás monoatômico são $E_1 = 0$, $E_2 = 3{,}80$ eV, $E_3 = 4{,}30$ eV, $E_4 = 7{,}2$ eV e $E_5 = 7{,}5$ eV. (*a*) Se a temperatura é suficientemente elevada para que todos os estados estejam ocupados e o gás é iluminado com uma luz cujo comprimento de onda é 2400 nm, quais são as transições possíveis? (*b*) Quais das transições descritas no item (*a*) continuam a ocorrer se a temperatura é tão baixa que apenas o estado E_1 está ocupado? (*c*) Repita os itens (*a*) e (*b*) para uma luz com um comprimento de onda de 250 nm. (*d*) Quais são os comprimentos de onda capazes de estimular a emissão de um fóton por um átomo que se encontra no estado E_4?

9-34. Em uma demonstração de laboratório, um tubo de descarga de hidrogênio é operado a 300 K para produzir a série de Balmer. Calcule a razão entre a probabilidade de emissão espontânea das linhas H_α e a probabilidade de emissão estimulada.

9-35. Determine a razão entre o número de moléculas no estado $v = 1$ e o número de moléculas no estado $v = 0$ para uma amostra de O_2 a 273 K. Repita o cálculo supondo que a temperatura da amostra é 77 K. (Ignore os movimentos de rotação.)

9-36. Os núcleos da molécula de F_2 estão separados por uma distância de 0,14 nm. (*a*) Calcule as distâncias entre os quatro primeiros níveis rotacionais com $v = 0$ e desenhe em escala o diagrama de níveis de energia correspondente. (*b*) Quais são os comprimentos de onda das transições possíveis entre esses níveis?

Seção 9-6 Lasers e Masers

9-37. Os pulsos produzidos por um laser de rubi têm uma potência média de 10 MW e uma duração de 1,5 ns. (*a*) Qual é a energia total de cada pulso? (*b*) Quantos fótons são emitidos em cada pulso?

9-38. Um laser de hélio-neônio emite luz com um comprimento de onda de 632,8 nm e tem uma potência de saída de 4 mW. Quantos fótons o laser emite por segundo?

9-39. A luz de um laser é apontada para a Lua, que está a $3{,}84 \times 10^8$ m de distância. A dispersão angular do feixe é dada pela fórmula de difração (critério de Rayleigh), $\operatorname{sen}\theta = 1{,}22\lambda/D$, na qual D é o diâmetro do tubo do laser. (*a*) Calcule o diâmetro do feixe ao atingir a superfície da Lua, supondo que $D = 10$ cm e $\lambda = 600$ nm. (*b*) Repita o cálculo supondo que o feixe é projetado na direção da Lua através de um telescópio com 1,0 m de diâmetro.

9-40. Um certo átomo tem dois estados entre os quais ocorre uma transição; o comprimento de onda da radiação emitida é 420 nm. A uma temperatura de 297 K, existem $2{,}5 \times 10^{21}$ átomos no nível inferior. (*a*) Quantos átomos existem no nível superior? (*b*) Suponha que $1{,}8 \times 10^{21}$ átomos sejam bombeados do nível inferior para o superior. Qual a energia que o sistema é capaz de irradiar em um único pulso de laser?

NÍVEL II

9-41. (*a*) Calcule a energia potencial eletrostática dos íons de Na^+ e Cl^- na distância de equilíbrio, 0,24 nm, supondo que os íons se comportam como cargas pontuais. (*b*) Qual é a energia de repulsão a esta distância? (*c*) Suponha que a energia de repulsão é dada pela Equação 9-2. De acordo com a Figura 9-2*b*, a energia é igual a ke^2/r para $r \approx 0{,}14$ nm. Use esta informação e o resultado do item (*b*) para determinar os valores de n e A. (Embora este cálculo não seja muito preciso, a energia de repulsão realmente varia muito mais depressa com r que a energia de atração.)

9-42. A dispersão angular do feixe de um laser de rubi pode ser determinada pelo critério de Rayleigh (veja o Problema 9-39). Suponha que o diâmetro do cilindro de rubi é 1,0 cm e que $\lambda = 694{,}3$ nm. (*a)* Qual é o diâmetro da região iluminada pelo laser a uma distância de 1,0 km? (*b*) Se o laser está emitindo 10^{18} fótons/s, qual é a potência depositada por centímetro quadrado em um alvo situado a 1,0 km de distância?

9-43. A distância de equilíbrio dos íons K^+ e Cl^- no KCl é 0,267 nm. (*a*) Calcule a energia potencial de atração dos íons supondo que a essa distância os íons se comportam como cargas pontuais. (*b*) A energia de ionização do potássio é 4,34 eV e a afinidade eletrônica do cloro é 3,62 eV. Determine a energia de dissociação do KCl, desprezando a energia de repulsão (veja a Figura 9-2*a*). (*c*) O valor experimental da energia de dissociação é 4,40 eV. Qual é a energia de repulsão dos íons na distância de equilíbrio?

9-44. Use a distância de equilíbrio entre os íons K^+ e Cl^-, dada no Problema 9-43, e a massa reduzida do KCl para calcular a energia rotacional característica E_{r0} do KCl.

9-45. Neste problema, o leitor vai determinar como varia a força de atração entre uma molécula polar e uma molécula apolar com a distância entre as moléculas. Suponha que o momento dipolar elétrico da molécula polar está apontando na direção do eixo x e a molécula apolar está a uma distância x do centro da molécula polar. (*a*) Como varia com a distância x o campo elétrico associado ao dipolo elétrico da molécula polar? (*b*) Use os fatos de que a energia potencial de um dipolo elétrico de momento $\mathbf{p}$ na presença de um campo elétrico $\mathbf{E}$ é dada por $U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$ e de que o momento dipolar induzido em uma molécula apolar é proporcional a $\mathbf{E}$ para determinar de que forma a energia potencial de interação das duas moléculas varia com a distância entre as moléculas. (*c*) Use a relação $F = -dU/dx$ para determinar a variação com x da força entre as moléculas.

9-46. A constante elástica da ligação covalente da molécula de H_2 é 580 N/m. Determine a energia dos primeiros quatro níveis vibracionais das moléculas de H_2, HD e D_2. Calcule o comprimento de onda dos fótons emitidos nas transições entre níveis vizinhos das três moléculas.

9-47. O espectro de micro-ondas do CO apresenta linhas em 0,86 mm, 1,29 mm e 2,59 mm. (*a*) Calcule as energias dos fótons e desenhe, em escala, o diagrama de níveis de energia correspondente. Qual é o tipo de movimento molecular responsável por essas linhas? (*b*) Calcule a distância de equilíbrio do CO.

9-48. Plote a curva de energia potencial de uma molécula diatômica em função da distância entre os átomos (como a da Figura 9-2*b*) e indique os valores médios de *r* para dois níveis vibracionais. Mostre que, por causa da assimetria da curva, $r_{méd}$ aumenta com o aumento da energia vibracional e, portanto, os sólidos aumentam de volume ao serem aquecidos.

9-49. Uma amostra de HCl é submetida a uma luz cujo comprimento de onda é 435,8 nm. (*a*) Calcule os comprimentos de onda das quatro linhas do espectro rotacional de Raman que estão mais próximas do comprimento de onda da radiação incidente. (*b*) Compare as diferenças entre as frequências dessas linhas e as diferenças entre as frequências das linhas correspondentes na Figura 9-30.

9-50. Use os dados da Tabela 9-8 para calcular a energia do primeiro estado excitado vibracional e a energia do primeiro estado excitado rotacional (*a*) da molécula de Li_2; (*b*) da molécula de $K^{79}Br$.

9-51. Determine a constante elástica efetiva do HCl a partir da massa reduzida da molécula e da frequência vibracional fundamental, calculada a partir dos dados da Figura 9-30.

9-52. Observe na Figura 9-33*d* que o estado E_2 do Cr^{3+} é, na verdade, um dubleto; a distância entre os dois níveis é apenas 0,0036 eV. (*a*) Suponha que todos os íons Cr^{3+} de um certo laser estão nos três estados E_1 e E_2 (dubleto) e calcule as populações relativas desses estados. (*b*) Se apenas o estado de menor energia do dubleto E_2 contribui para o efeito laser, mas os dois níveis têm que ser bombeados juntos, calcule a potência de bombeamento necessária para que o sistema funcione como um laser. A densidade de estados (degeneração) do nível E_1 é 4 e a degeneração de cada um dos estados E_2 é 2.

9-53. A frequência central da banda de absorção do HCl mostrada na Figura 9-30 é $f = 8{,}66 \times 10^{13}$ Hz e a distância entre os picos de absorção é $\Delta f = 6 \times 10^6$ Hz. Usando estas informações, determine (*a*) a menor energia vibracional (energia de ponto zero) do HCl, (*b*) o momento de inércia do HCl e (*c*) a distância de equilíbrio entre os átomos da molécula de HCl.

NÍVEL III

9-54. A energia potencial entre dois átomos de uma molécula pode muitas vezes ser descrita com precisão razoável pelo potencial de Lenard-Jones

$$U(r) = U_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$

em que U_0 e a são constantes. (*a*) Determine, em função de a, a distância interatômica r_0 para a qual a energia potencial é mínima. (*b*) Determine o valor correspondente de U_{min}. (*c*) Use a Figura 9-8*b* para obter valores numéricos de r_0 e U_0 para a molécula de H_2. Expresse a resposta em nanômetros e em elétrons-volts. (*d*) Faça um gráfico da energia potencial $U(r)$ em função da distância interatômica r para a molécula de hidrogênio. Represente separadamente os diferentes termos e o valor total $U(r)$.

9-55. (*a*) Determine a energia de repulsão pelo princípio de exclusão para o NaCl. (*b*) Use a Equação 9-2 para calcular os valores de A e n.

9-56. Mostre que o sistema $H^+ - H^-$ não pode formar uma molécula iônica. (*Sugestão*: Mostre que a função $U(r)$ não possui um mínimo negativo.)

9-57. (*a*) Calcule a diferença normalizada $\Delta\boldsymbol{\mu}/\boldsymbol{\mu}$ entre as massas reduzidas das moléculas de $H^{35}Cl$ e $H^{37}Cl$. (*b*) Mostre que a mistura de isótopos no HCl leva a uma diferença das frequências das transições de um estado rotacional para outro dada por $\Delta f/f = -\Delta\boldsymbol{\mu}/\boldsymbol{\mu}$. (*c*) Calcule o valor de $\Delta f/f$ e compare o resultado com os dados da Figura 9-30.

9-58. No caso de uma molécula como o CO, que possui um momento dipolar elétrico permanente, transições do tipo $\Delta\ell = \pm 1$ entre dois estados rotacionais associados ao mesmo estado vibracional são permitidas, ou seja, a regra de seleção $\Delta v = \pm 1$ não se aplica. (*a*) Determine o momento de inércia da molécula de CO, para a qual $r_0 = 0{,}113$ nm, e calcule a energia rotacional característica E_{0r} em elétrons-volts. (*b*) Faça um diagrama de níveis de energia dos estados rotacionais com $\ell = 0$ a $\ell = 5$ para um nível vibracional qualquer. Assinale o valor das energias desses níveis em elétrons-volts, supondo que $E = 0$ para $\ell = 0$. (*c*) Indique no diagrama as transições que obedecem à regra de seleção $\Delta\ell = -1$ e calcule a energia dos fótons emitidos. (*d*) Determine o comprimento de onda dos fótons cuja energia foi calculada no item (*c*). Em que região do espectro eletromagnético encontram-se esses fótons?

9-59. Uma molécula de H_2 no estado fundamental eletrônico, vibracional e rotacional absorve um fóton de frequência $1{,}356 \times 10^{14}$ Hz e sofre uma transição para o estado $v = 1$, $\ell = 1$, permanecendo no estado eletrônico fundamental. Em seguida, sofre uma transição para o estado $v = 0$, $\ell = 2$, emitindo um fóton de frequência $1{,}246 \times 10^{14}$ Hz. (*a*) Calcule o momento de inércia da molécula de H_2 em relação a um eixo passando pelo centro de massa. (*b*) Determine a frequência vibracional f e a distância de equilíbrio r_0 para o H_2 e compare os resultados obtidos com os valores da Tabela 9-8.

***Ou seja, amplificação de luz por emissão estimulada de radiação. (N.T.)**

***Do inglês *continuous wave*. (N.T.)**

***Do inglês *c*hirped *p*ulse *a*mplification. (N.T.)**

CAPÍTULO 10

Física do Estado Sólido

10-1 Estrutura dos Sólidos
10-2 Teoria Clássica da Condução de Eletricidade
10-3 Gás de Elétrons Livres nos Metais
10-4 Teoria Quântica da Condução de Eletricidade
10-5 Magnetismo em Sólidos
10-6 Bandas de Energia em Sólidos
10-7 Semicondutores Dopados
10-8 Junções e Dispositivos Semicondutores
10-9 Supercondutividade

As substâncias sólidas, em sua imensa variedade, vêm fascinando a humanidade há muitos séculos. Inovações tecnológicas na preparação e uso de metais e ligas metálicas mudaram o curso da história; a simetria e beleza dos cristais naturais sempre foram uma fonte de deslumbramento. Por outro lado, a explicação das propriedades dos sólidos a partir de primeiros princípios teve que aguardar o advento da mecânica quântica. Grande parte do progresso tecnológico ocorrido nos últimos cem anos resultou da aplicação da mecânica quântica ao estudo dos sólidos. Vamos examinar rapidamente alguns aspectos da estrutura dos sólidos na Seção 10-1 e, em seguida, concentraremos nossa atenção nas propriedades elétricas e magnéticas dos materiais.

10-1 Estrutura dos Sólidos

Em nosso dia a dia, encontramos a matéria em três formas: sólida, líquida e gasosa. Nos gases, a distância média entre as partículas que compõem a substância (átomos ou moléculas) é muito maior que o tamanho das partículas. As partículas praticamente não interagem, a não ser através de colisões frequentes, mas de curta duração. Nos líquidos e nos sólidos, as partículas estão muito mais próximas e interagem com uma força comparável à que mantém os átomos unidos nas moléculas. (Existe uma quarta forma de matéria, o plasma, na qual a substância é formada por íons e elétrons livres. Os plasmas são gerados apenas em temperaturas muito elevadas, como no interior das estrelas, ou quando os gases são submetidos a fortes descargas elétricas, como nos relâmpagos e em certas experiências de laboratório. As propriedades de um plasma são muito diferentes das de um gás comum por causa dos efeitos elétricos e magnéticos de longo alcance associados à presença de partículas carregadas. Uma recém-descoberta quinta forma de matéria, o condensado de Bose-Einstein, foi discutida no Capítulo 8.) Nos líquidos, as partículas formam ligações temporárias de curto alcance que são constantemente rompidas e refeitas em consequência da agitação térmica. A força dessas ligações depende do tipo de partícula. Assim, por exemplo, como vimos na Seção 9-3, a atração entre os átomos de hélio se deve a uma forma muito fraca de interação, a interação de van der Waals, e, por isso, o hélio não se liquefaz à pressão atmosférica, a não ser a uma temperatura (4,2 K) muito próxima do zero absoluto.

Quando um líquido é resfriado lentamente, a energia cinética das partículas que o compõem diminui e as partículas passam a

formar um arranjo regular que maximiza o número de ligações e minimiza a energia potencial. Caso, porém, o líquido seja resfriado tão depressa que as partículas se imobilizam antes que tenham tempo de encontrar a posição de energia mínima, o sólido assim formado não apresenta uma estrutura cristalina, mas se parece com um líquido "congelado". Um sólido desse tipo é chamado de *amorfo.* Os sólidos amorfos apresentam a ordem de curto alcance, mas não a ordem de longo alcance (que se estende a muitos diâmetros atômicos) que caracteriza um cristal. O vidro é um exemplo típico de sólido amorfo. Enquanto os cristais apresentam um ponto de fusão bem definido, os sólidos amorfos se tornam simplesmente mais deformáveis com o aumento da temperatura. Muitos materiais podem se solidificar no estado amorfo ou no estado cristalino, dependendo da forma como são preparados; outros existem apenas em uma dessas formas. A maioria dos sólidos existe naturalmente na forma de policristais, isto é, conjuntos de pequenos monocristais (com uma fração de milímetro de diâmetro) orientados em diferentes direções. Entretanto, grandes monocristais são encontrados na natureza e produzidos artificialmente (Figura 10-1). Neste capítulo, vamos discutir apenas os sólidos cristalinos simples.

A propriedade mais importante de um monocristal é a regularidade da estrutura, que pode ser considerada como um arranjo básico relativamente simples repetido indefinidamente em todas as direções. A menor unidade de um cristal recebe o nome de *célula unitária.* A simetria da célula unitária depende do tipo de ligação entre os átomos, íons ou moléculas que formam o cristal. Se a célula unitária contém mais de um tipo de átomo, a simetria depende também do tamanho relativo dos átomos. A simetria também pode mudar com a pressão e/ou com a temperatura. Os tipos de ligação são os que foram discutidos no Capítulo 9: ligações iônica, covalente e dipolo-dipolo, as últimas incluindo as pontes de hidrogênio e as ligações van der Waals. Os sólidos e líquidos podem apresentar também um tipo de ligação que não é observado nos gases, a *ligação metálica,* que será discutida mais adiante.

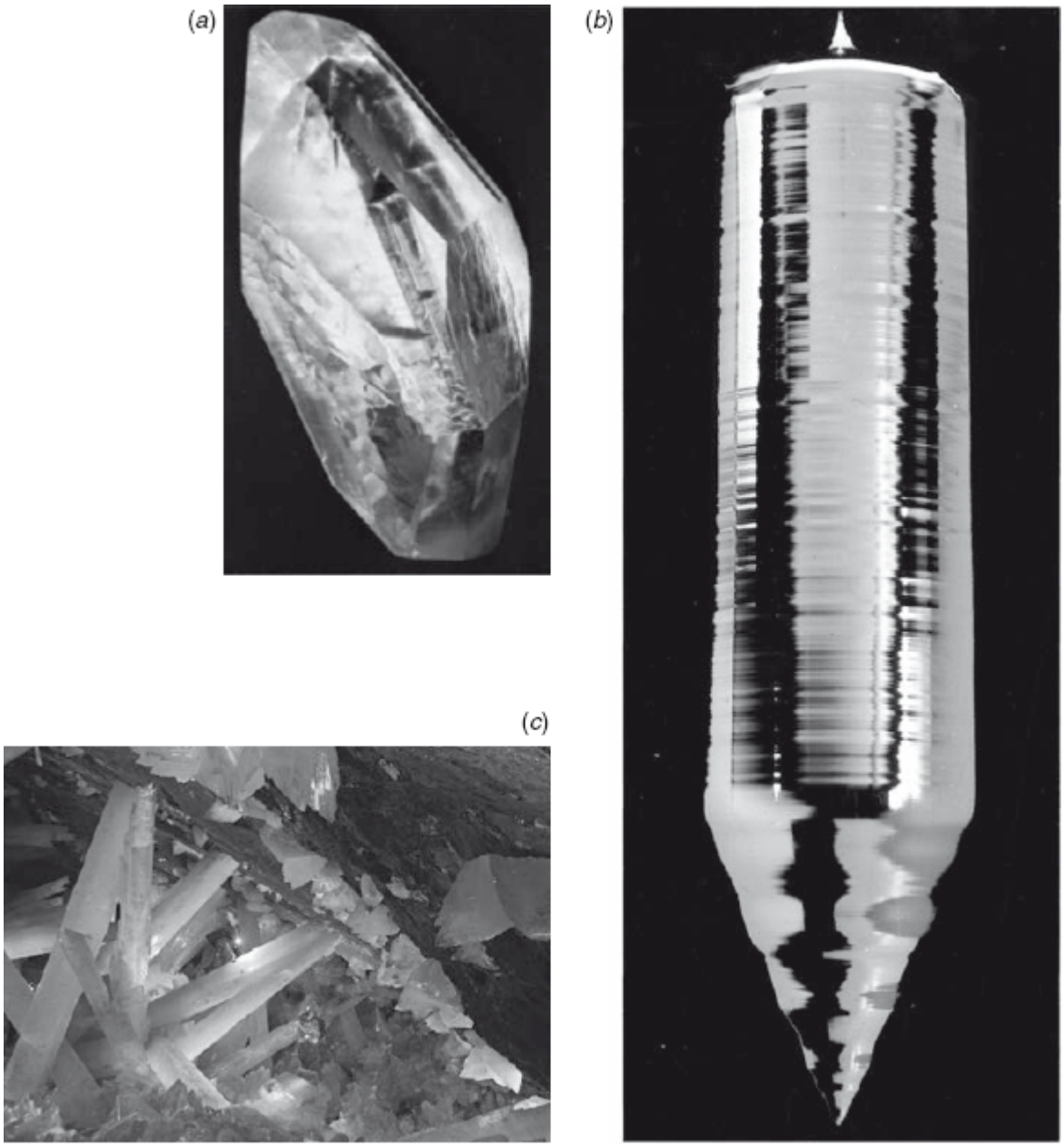


FIGURA 10-1 (*a*) Monocristal de quartzo, uma das formas naturais do SiO_2. [*Cortesia de Sawyer Research Products*, *Inc.*] (*b*) Para fabricar um cristal sintético de silício, é preciso tomar um material que contenha silício (areia de praia, por exemplo), separar o silício e

fundi-lo. A partir de uma pequena semente, o silício fundido se transforma em um cristal cilíndrico como o que aparece na foto. Os cristais, com até 1,3 m de comprimento, são formados em condições altamente controladas para assegurar que não contenham defeitos e cortados em milhares de discos, que servem de matériaprima para a fabricação de circuitos integrados. [*Cortesia do Museum of Modern Art*, New York City.] (*c*) Cristais naturais de gipsita ($CaSO_4$) na Caverna dos Cristais, situada no México. Alguns desses cristais têm mais de 25 m de comprimento. [*Carsten Peter/Speleoresearch & Films/National Geographic/Getty Images*.]

Sólidos Iônicos e Covalentes

A Figura 10-2 mostra a estrutura do cristal iônico NaCl. Os íons Na^+ e Cl^- possuem simetria esférica (veja a Seção 9-1), com os íons Cl^- aproximadamente duas vezes maiores que os íons Na^+. A energia potencial do cristal é mínima quando um íon de cada tipo tem seis vizinhos mais próximos do outro tipo. Uma estrutura deste tipo é conhecida como *cúbica de faces centradas* (*cfc*) porque a simetria da célula unitária pode ser descrita pelos vértices de um cubo com um ponto adicional no centro de cada face. Observe que, no caso do sólido, os íons Na^+ e Cl^- *não se unem* para formar moléculas de NaCl.

A parte atrativa da energia potencial de um íon em um cristal pode ser escrita na forma

$$U_{atr} = -\alpha \frac{ke^2}{r} \qquad \textbf{10-1}$$

na qual r é a distância entre íons vizinhos (que é 0,282 nm para os íons Na^+ e Cl^- em um cristal de NaCl) e α é uma constante, conhecida como *constante de Madelung,* que depende da estrutura do cristal. Se apenas os seis vizinhos mais próximos de cada íon fossem importantes, α seria igual a 6. Acontece que, além dos 6 vizinhos de carga oposta, situados a uma distância igual a r, existem 12 vizinhos de mesma carga situados a uma distância $r\sqrt{2}$, 8 íons de carga oposta situados a uma distância $r\sqrt{3}$, e assim por diante. A constante de Madelung é, portanto, uma soma infinita:

$$\alpha = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} - \frac{6}{2} + \frac{20}{\sqrt{5}} - \cdots \qquad \textbf{10-2}$$

Acontece que a soma da Equação 10-2 não converge! Como U_{atr} não pode ser infinita, deve haver um erro em algum lugar. O erro está no fato de que, ao usarmos distâncias r cada vez maiores para determinar os termos da soma da Equação 10-2, supusemos implicitamente que os cristais de NaCl têm forma esférica, o que não está correto. Quando a soma é executada levando em conta a estrutura cúbica do NaCl, a soma equivalente à Equação 10-2 converge, embora muito devagar. O resultado para uma estrutura cúbica de faces centradas como a do NaCl é $\alpha = 1{,}7476$. O valor de α é diferente para cristais iônicos com outras estruturas cristalinas (veja a Tabela 10-1).

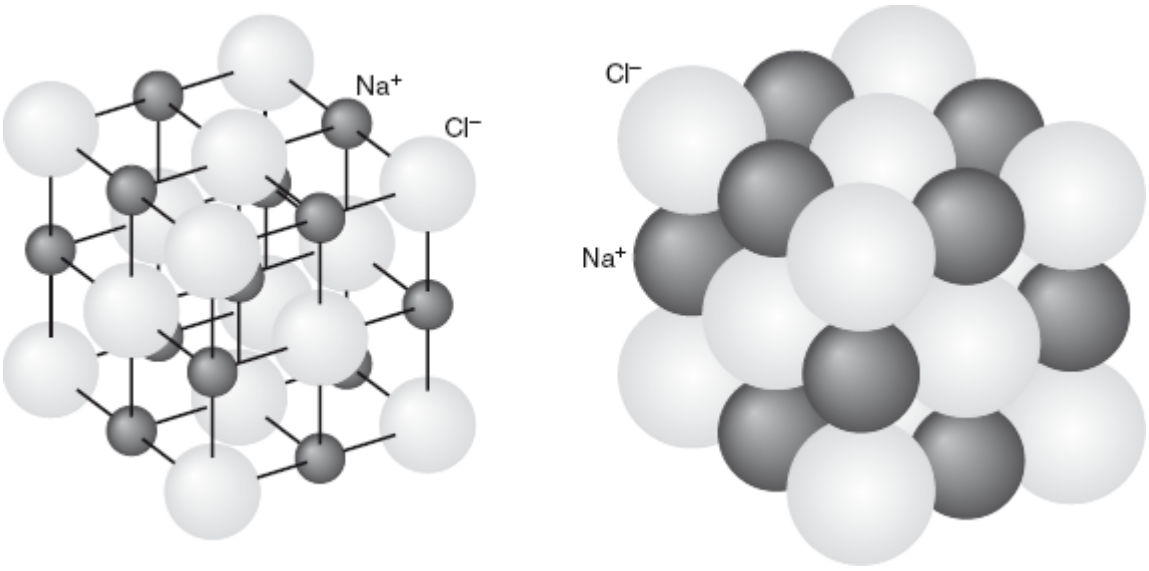


FIGURA 10-2 A estrutura cúbica de faces centradas (cfc) do NaCl.

Quando os íons Na^+ e C^- se aproximam muito, começam a se repelir porque as nuvens eletrônicas se superpõem e sofrem os efeitos do princípio de exclusão (veja a Seção 9-1). Uma expressão empírica para a energia potencial associada a essa repulsão que funciona muito bem na prática é a seguinte:

$$U_{rep} = \frac{A}{r^n}$$

na qual A e n são constantes.[1] A energia potencial total de um dos íons é, portanto,

$$U = -\alpha \frac{ke^2}{r} + \frac{A}{r^n} \qquad \textbf{10-3}$$

A distância de equilíbrio $r = r_0$ é aquela para a qual a força $F = -dU/dr$ é nula. Derivando a Equação 10-3 e fazendo $dU/dr = 0$ para $r = r_0$, obtemos:

$$A = \frac{\alpha k e^2 r_0^{n-1}}{n} \qquad \textbf{10-4}$$

A energia potencial total de um íon em um cristal pode, portanto, ser escrita na forma

$$U = -\alpha \frac{ke^2}{r_0}\left[\frac{r_0}{r} - \frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\right] \qquad \textbf{10-5}$$

Tabela 10-1 Propriedades de alguns sólidos cristalinos

Sólido	Tipo de ligação	Distância de equilíbrio (nm)	Estrutura cristalina	Constante de Madelung	Energia coesiva (eV/átomo)	Ponto de fusão (K)
NaCl	Iônica	0,282	cfc	1,7476	3,19	1074
LiBr	Iônica	0,275	cfc	1,7476	3,10	823
KCl	Iônica	0,315	cfc	1,7476	3,24	1043
RbF	Iônica	0,282	cfc	1,7476	3,55	1068
CsCl	Iônica	0,348	cs	1,7627	3,27	918
ZnO	Iônica	0,222	hcp	1,4985	7,22	2248
Li	Metálica	0,302	ccc	–	1,63	454
Fe	Metálica	0,248	ccc	–	4,28	1811
Au	Metálica	0,288	cfc	–	3,81	1338
Zn	Metálica	0,266	hcp	–	1,35	693
C	Covalente	0,154	cfc	–	7,37	†
Si	Covalente	0,235	cfc	–	4,63	1687
Ge	Covalente	0,245	cfc	–	3,85	1211
H_2O	Dipolo-dipolo	0,367	hcp	–	0,52*	273
C_{60}	Dipolo-	1,00	cfc	–	1,5*	?

	dipolo					
Ne	Dipolo-dipolo	0,313	cfc	–	0,020	24

*eV/molécula.

† O diamante se transforma em grafita em altas temperaturas. A grafita sublima a 3800 K.

Para $r = r_0$, temos:

$$U(r_0) = -\alpha \frac{ke^2}{r_0}\left[1 - \frac{1}{n}\right] \qquad \textbf{10-6}$$

Uma vez conhecido o valor da distância de equilíbrio r_0, que pode ser determinado por difração de raios X ou calculado a partir da densidade do cristal, é possível estimar o valor de n a partir da *energia de dissociação* ou *energia da rede* do cristal iônico, que é a energia necessária para decompor o cristal. No caso do NaCl, o valor experimental da energia de dissociação é 770 kJ/mol. Usando a relação 1 eV = 1,602 × 10^{-19} J e o fato de que 1 mol de NaCl contém N_A pares de íons, podemos expressar a energia de dissociação em elétrons-volts por par de íons. O fator de conversão entre elétrons-volts por par de íons e quilojoules por mol é

$$1\frac{\text{eV}}{\text{par de íons}} \times \frac{6{,}022 \times 10^{23}\,\text{par de íons}}{\text{mol}} \times \times \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{J}}{1\,\text{eV}} = 96{,}47\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \qquad \textbf{10-7}$$

Assim, 770 kJ/mol = 7,98 eV por par de íons. Fazendo $U(r_0) = -7{,}98$ eV, $r_0 = 0{,}282$ nm (veja o Exemplo 10-1) e $\alpha = 1{,}75$ na Equação 10-6, podemos calcular o valor de n. O resultado é $n = 9{,}35 \approx 9$.

A energia de dissociação também é usada para calcular a *energia coesiva* de um cristal, que é a energia potencial por átomo ou por par de átomos e é um parâmetro usado em todos os tipos de ligação. No caso do NaCl, 7,98 eV é a energia necessária para remover um íon Na^+ e um íon Cl^- do cristal. Para formar um átomo neutro de Cl a partir do íon Cl^- é preciso fornecer 3,62 eV ao íon; a formação de um átomo neutro de Na a partir do íon Na^+ libera uma energia de 5,15 eV. Assim, a energia necessária para remover do cristal um átomo neutro de Na e um átomo neutro de Cl é 7,98 eV + 3,62 eV − 5,14 eV = 6,46 eV e a energia coesiva do NaCl é 6,46 eV por par de átomos. Existe uma boa concordância entre este resultado teórico e o valor experimental de 3,19 eV/átomo (veja a Tabela 10-1). Uma grande energia coesiva está associada a um alto ponto de fusão, e vice-versa.

EXEMPLO 10-1 **Energia de Ligação do DNA** Nos primórdios dos estudos de genética, H. Muller estimou em ≤ 0,025 μm o limite superior do diâmetro do material genético, ainda desconhecido, contido nos cromossomos. (Hoje sabemos que o diâmetro desse material, o DNA, é menos de 1/10 do valor estimado.) As medidas de Muller mostraram que o portador das informações genéticas tinha dimensões moleculares, ou seja, era uma molécula. Por que a agitação térmica não quebra as ligações atômicas das moléculas de DNA, o que causaria frequentes mutações?

SOLUÇÃO

A molécula de DNA, em forma de dupla hélice, é extremamente estável. As duas cadeias do DNA se comportam como um fecho ecler, com ligações covalentes entre os átomos de cada cadeia e pontes de hidrogênio acoplando as duas cadeias. A ligação covalente dupla entre carbono e oxigênio no DNA tem uma energia de aproximadamente 732 kJ/mol. A energia das pontes de hidrogênio é cerca de 10 kJ/mol.

1. A energia de dissociação de uma ligação covalente do DNA é

$$E_{\text{dis}} = 732\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \times \frac{1\,\text{eV/par de íons}}{96{,}47\,\text{kJ/mol}} = 7{,}59\frac{\text{eV}}{\text{par de íons}}$$

2. A energia de dissociação de uma ponte de hidrogênio é

$$E_{\text{dis}} = 10\frac{\text{kJ}}{\text{mol}} \times \frac{1\ \text{eV/par de íons}}{96{,}47\ \text{kJ/mol}} = 0{,}10\frac{\text{eV}}{\text{par de íons}}$$

3. A 300 K (temperatura ambiente padrão), a energia média da agitação térmica é

$$\langle E_t \rangle = \frac{3}{2}kT = (3/2)(1{,}38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(300\ \text{K}) \times$$
$$\times \frac{1\ \text{eV}}{1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{J}}$$
$$\langle E_t \rangle = 0{,}039\ \text{eV}$$

Assim, a energia térmica à temperatura ambiente é muito menor que a necessária para romper as ligações covalentes de uma das cadeias do DNA, ou mesmo que a necessária para separar as duas cadeias da molécula.

EXEMPLO 10-2 **Distância de Equilíbrio r_0 em um Cristal de NaCl** Calcule a distância de equilíbrio r_0 em um cristal de NaCl, sabendo que a massa específica do NaCl é $\rho = 2{,}16\ \text{g/cm}^3$.

SOLUÇÃO

Suponha que cada íon ocupe o volume de um cubo de lado r_0. A massa de 1 mol de NaCl é 58,4 g, que é a soma das massas atômicas do sódio e do cloro. Os íons ocupam um volume igual a $2N_A r^3{}_0$, em que $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro. A relação entre a densidade e a distância de equilíbrio é, portanto dada, por

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{2N_A r_0^3}$$

Nesse caso, temos:

$$r_0^3 = \frac{m}{2N_A\rho} = \frac{58{,}4\ \text{g}}{2\,(6{,}02 \times 10^{23})\,(2{,}16\ \text{g/cm}^3)} =$$
$$= 2{,}24 \times 10^{-23}\ \text{cm}^3$$
$$r_0 = 2{,}82 \times 10^{-8}\ \text{cm} = 0{,}282\ \text{nm}$$

EXEMPLO 10-3 **Medida de r_0 por Difração de Raios X** Quando os raios X correspondentes à linha K_α do molibdênio (λ = 0,071 nm) incidem nos planos diagonais de um cristal de NaCl que aparecem do lado direito da Figura 3-12, um máximo de difração (ponto claro na figura de Laue) é observado para um ângulo $\theta = 10{,}25^\circ$. Determine o valor de r_0.

SOLUÇÃO

1. Como o NaCl é um cristal cúbico, a distância d entre os planos diagonais de Bragg é dada por

$$d = \frac{r_0}{\sqrt{2}}$$

2. Os máximos de difração de raios X devem satisfazer à condição de Bragg, Equação 3-23:

$$2d\,\text{sen}\theta = m\lambda$$

3. Fazendo $m = 1$ e substituindo d pelo seu valor, obtemos:

$$2\left(\frac{r_0}{\sqrt{2}}\right)\text{sen}\,\theta = \lambda$$

4. Explicitando r_0 e substituindo λ e θ por seus valores numéricos, obtemos:

$$r_0 = \frac{\sqrt{2}\,\lambda}{2\,\text{sen}\theta}$$
$$= \frac{(\sqrt{2})\,(0{,}071\ \text{nm})}{(2)\,(\text{sen}\,10{,}25^\circ)}$$
$$= 0{,}282\ \text{nm}$$

Observação: *Este resultado está de acordo com o valor calculado por outro método no Exemplo 10-2.*

EXEMPLO 10-4 **Constante de Madelung de um Cristal Bidimensional** Calcule, com precisão de quatro termos, a constante de Madelung do cristal bidimensional hipotético da Figura 10-5.

SOLUÇÃO

O potencial atrativo é dado pela Equação 10-1. Colocando a origem na posição de íon negativo, como na Figura 10-5, existem quatro íons positivos situados a uma distância r, sobre a circunferência A, e quatro íons negativos sobre a circunferência B, cujo raio é $r\sqrt{2}$. Existem mais quatro íons negativos sobre a circunferência C, cujo raio é $2r$, e mais oito íons positivos sobre a circunferência D, cujo raio é $r\sqrt{5}$. Assim, considerando apenas os quatro primeiros termos, o potencial atrativo é dado por

$$U_{\text{atr}} = -ke^2\left(\frac{4}{r} - \frac{4}{\sqrt{2}r} - \frac{4}{2r} + \frac{8}{\sqrt{5}r}\right)$$

ou

$$U_{\text{atr}} = -\frac{ke^2}{r}\left(4 - \frac{4}{\sqrt{2}} - 2 + \frac{8}{\sqrt{5}}\right)$$

O fator entre parênteses é a constante de Madelung; efetuando o cálculo, obtemos $\alpha \approx 2{,}749$.

A maioria dos cristais iônicos, como o LiF, o KF, o KCl, o KI, o AgCl e outros formados por moléculas da Tabela 9-2, possui a estrutura cfc. Alguns elementos que também cristalizam com esta estrutura são a Ag, o Al, o Au, o Ca, o Cu, o Ni e o Pb.

A Figura 10-3 mostra a estrutura de outro cristal iônico, o CsCl, que recebe o nome de *cúbica simples* (*cs*), pois pode ser imaginada sendo composta por duas redes cúbicas interpenetrantes, uma com íons Cs^+ em cada vértice e outra com íons Cl^- em cada vértice. No caso da estrutura cúbica simples, o valor da constante de Madelung é 1,7627. Outros cristais iônicos com a mesma estrutura são o CsI, o TlI, o TlBr, o LiHg e o NH_4Cl.

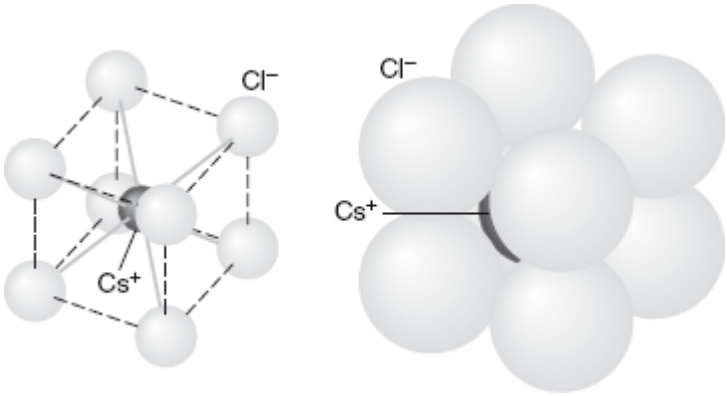


FIGURA 10-3 A estrutura cúbica simples (cs) do CsCl.

Alguns elementos, como o Ba, o Cs, o Fe, o K, o Li, o Mo e o Na, também cristalizam em uma estrutura como a da Figura 10-3; quando os átomos nos vértices e no centro do cubo são iguais, a estrutura recebe o nome de *cúbica de corpo centrado* (*ccc*).

A Figura 10-4 mostra outra estrutura cristalina importante, conhecida como *hexagonal compacta* (*hcp*). Esta estrutura pode ser obtida empilhando esferas iguais, como bolas de pingue-pongue ou balas de canhão. Em cada camada, uma bola está em contato com seis outras; é por isso que a estrutura é chamada de *hexagonal*. Na camada vizinha, as bolas se encaixam nas

depressões triangulares da primeira camada. Na terceira camada, as bolas se encaixam nas depressões triangulares da segunda camada, de forma a se posicionarem diretamente acima das esferas da primeira camada. Entre os elementos que cristalizam com a estrutura hcp estão o Be, o Cd, o Ce, o Mg, o Os, o Zn e o Zr. Existem 14 tipos diferentes de redes cristalinas tridimensionais, das quais discutimos apenas as mais comuns. (Veja o Apêndice B3.)

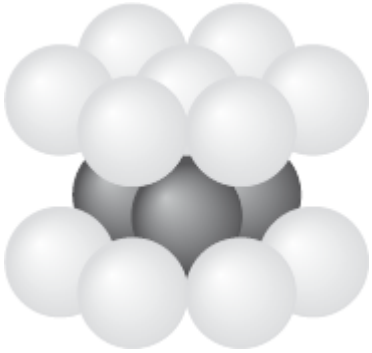


FIGURA 10-4 Estrutura hexagonal compacta (hcp).

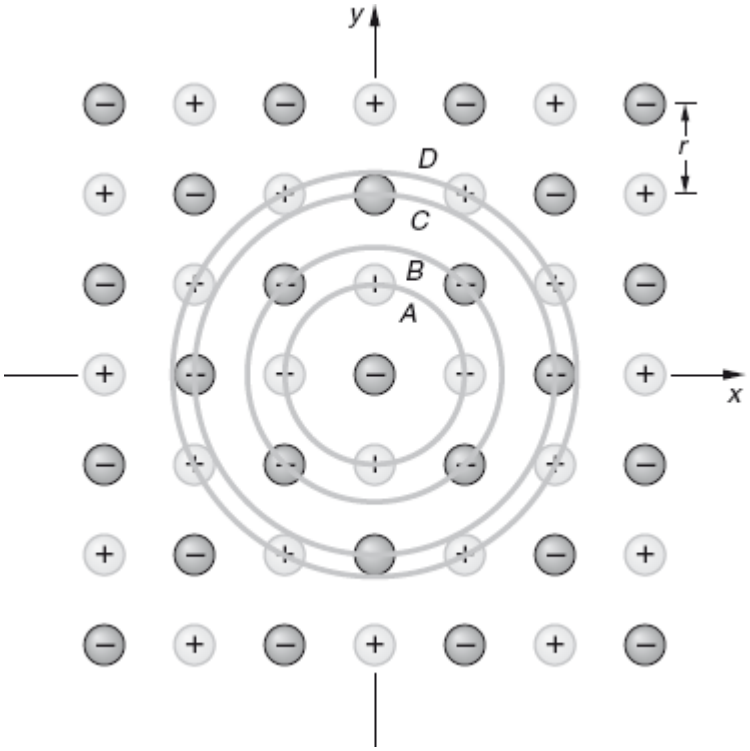


FIGURA 10-5 Cristal iônico bidimensional monovalente (hipotético).

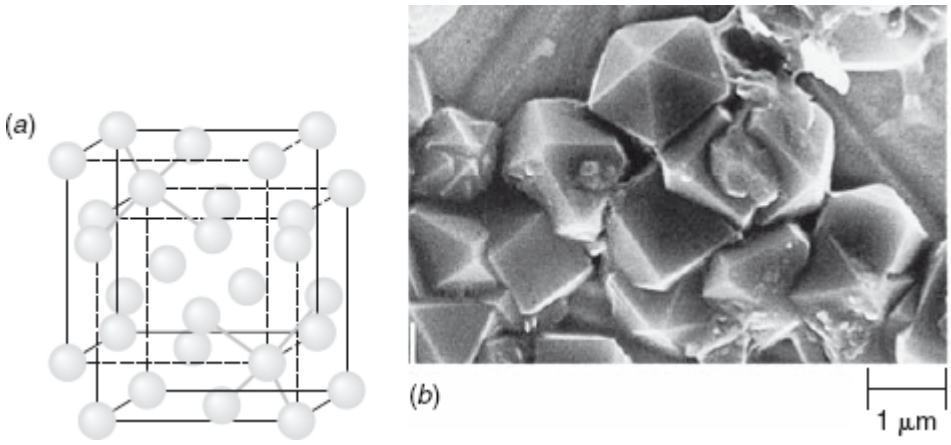


FIGURA 10-6 (*a*) Estrutura de um cristal de diamante, mostrando que esta estrutura pode ser considerada como a combinação de duas redes cúbicas de faces centradas interpenetrantes. (*b*) Diamantes sintéticos ampliados aproximadamente 50.000 vezes. No diamante, cada átomo de carbono está no centro de um tetraedro formado por outros quatro átomos de carbono. [*Cortesia de Chris Kovach/Discover Publications*.]

Nos cristais covalentes, as ligações entre as partículas são semelhantes às ligações entre os átomos das moléculas covalentes, que já foram discutidas na Seção 9-2. O compartilhamento de elétrons permite, por exemplo, que o carbono forme ligações com até quatro outros átomos de carbono. A simetria dos cristais covalentes é determinada pelas direções relativas das ligações. A Figura 10-6 mostra a estrutura do diamante (que é também a estrutura do Ge e do Si), na qual cada átomo está ligado a quatro outros localizados nos vértices de um tetraedro regular, em consequência da hibridização sp^3 discutida no Capítulo 9. A estrutura do diamante pode ser considerada sendo composta por duas estruturas cúbicas de faces centradas interpenetrantes. Este arranjo, no qual os ângulos das ligações são todos iguais, é particularmente estável e faz com que o diamante possua uma das maiores energias coesivas conhecidas, 7,37 eV por átomo, aproximadamente. O carbono também pode cristalizar em outras duas formas, a grafita e os fullerenos,[2] nas quais as ligações são do tipo sp^2. Na grafita (Figura 10-7*a*), três dos elétrons de valência ligam cada átomo de carbono a três vizinhos, formando uma estrutura hexagonal planar. Os planos assim formados são ligados entre si por interações do tipo dipolo-dipolo, muito mais fracas. O resultado é uma estrutura constituída por placas que podem ser facilmente separadas umas das outras. A estrutura dos fullerenos, como o C_{60}, é bem diferente das estruturas do carbono e da grafita. Como vimos na Seção 9-2, as moléculas de C_{60} assumem a forma de uma bola de futebol quando 12 pentágonos são introduzidos na estrutura hexagonal, distorcendo os planos da grafita. Como os planos da grafita, as moléculas de fullereno são ligadas por interações do tipo dipolo-dipolo. Em consequência, a energia coesiva por átomo é elevada (7,4 eV, ou seja, um valor aproximadamente igual ao do diamante), mas a energia coesiva por molécula é pequena, da ordem de 1,5 eV. A estrutura cristalina do C_{60}, que aparece na Figura 10-7*b*, é cúbica de faces centradas. A distância de equilíbrio entre as moléculas é 1,00 nm. Os nanotubos mostrados na Figura 10-7*c* constituem um exemplo notável da grande variedade de configurações que os átomos de carbono podem assumir.

Bicicletas de competição e carros de Fórmula 1 são feitos atualmente de fibra de carbono, um material que absorve muito bem os choques e é mais leve e resistente que o aço e o alumínio usados no passado.

A Ligação Metálica

Em todos sólidos formados pelos elementos metálicos, que constituem mais da metade da tabela periódica, os átomos são mantidos unidos pela *ligação metálica*, que, como já observamos, não existe nos gases. Há uma certa semelhança entre a ligação metálica e a ligação covalente, na qual os átomos de uma molécula compartilham um ou mais elétrons. Na ligação metálica, um ou dois elétrons de valência de cada átomo se tornam livres para vagar pelo material, sendo, portanto, compartilhados por *todos* os átomos. Assim, um cristal metálico pode ser imaginado como uma rede de íons positivos imersos em um gás de elétrons. É a atração entre os íons positivos da rede e o gás de elétrons negativos que mantém o sólido coeso.[3]

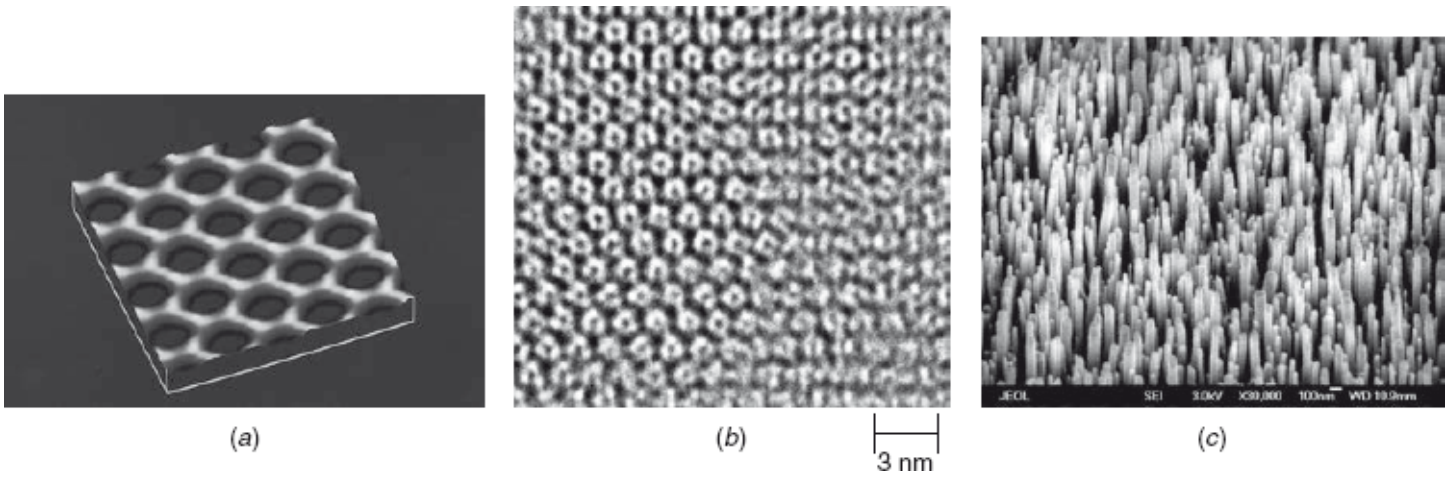


FIGURA 10-7 (*a*) Micrografia de força atômica de um cristal de grafita. As manchas mais claras nos vértices são átomos de carbono. Na grafita, os átomos de carbono estão dispostos em camadas; dentro de cada camada, os átomos formam anéis hexagonais. As camadas deslizam com facilidade umas em relação às outras e é por isso que a grafita é usada como lubrificante. [*Cortesia de Srinivas Manne, University of California at Santa Barbara*.] (*b*) Esta micrografia eletrônica de transmissão de alta resolução mostra claramente a estrutura cúbica de faces centradas compacta das moléculas de C_{60} em um cristal de fullereno. [*Cortesia de* P. R. Buseck, *Science*, **257**, 215 (1992).] (*c*) Nanotubos de carbono crescidos em um substrato de titânio. Os nanotubos são perpendiculares ao substrato e têm 40 a 100 nm de diâmetro. [*Cortesia de* Z. F. Ren *et al*., *Boston College*.]

Para examinar mais de perto as propriedades da ligação metálica, vamos considerar um caso particular, o do cristal de lítio. A estrutura eletrônica do átomo de lítio é $1s^2 2s$ e a função de onda radial do elétron 2*s*, que "enxerga" um caroço esférico constituído pelo núcleo e pelos dois elétrons 1*s*, é dada por

$$\psi_{20} = C_{20}\left(2 - \frac{r}{a_0}\right)e^{-r/2a_0} \qquad \textbf{10-8}$$

na qual C_{20} é uma constante de normalização e a_0 é o raio de Bohr. A Figura 10-8*a* mostra, em uma dimensão, a densidade de probabilidade correspondente a esta função de onda para um átomo isolado de lítio com o centro em $r = 0$. Como se pode ver na figura, a densidade de probabilidade tende a zero quando r tende a $\pm\infty$. A Figura 10-8*b* mostra a densidade de probabilidade dos elétrons de um cristal de lítio, que é a mesma nas vizinhanças de cada íon da rede. Os máximos secundários estão mais próximos dos íons positivos que no íon isolado, o que significa que a energia potencial dos elétrons é menor. Por outro lado, ao contrário do que acontece no átomo isolado, os elétrons estão confinados a uma região com 0,6 nm de largura entre dois íons vizinhos, o que, de acordo com o princípio de indeterminação, envolve um aumento do momento e, portanto, da energia cinética dos elétrons. A ligação metálica é estável porque o aumento da energia cinética é mais do que compensado pela diminuição da energia potencial e, portanto, a formação de um cristal diminui a energia total do sistema de átomos. A redução é maior se é grande a diferença de tamanho entre o átomo neutro e o caroço (o que leva a uma grande redução da energia potencial) e se é pequeno o número de elétrons de valência (o que reduz o aumento da energia cinética). Quanto mais à esquerda se encontra um elemento na tabela periódica, melhor essas condições são satisfeitas.

O hidrogênio se torna um metal quando é submetido a pressões extremamente elevadas, que reduzem a largura da banda proibida (veja a Seção 10-6) de 15 eV para 0,3 eV. O estudo do hidrogênio metálico é importante para o desenvolvimento da fusão nuclear como fonte de energia (veja a Seção 11-8).

Exercícios

1. Por que r_0 é diferente em um cristal de NaCl e em uma molécula de NaCl no estado gasoso?
2. Por que não é razoável que a estrutura cristalina do NaCl seja hexagonal compacta?
3. Por que as constantes de Madelung do NaCl e do CsCl são diferentes?
4. Por que as ligações entre os átomos de um cristal de hidrogênio não são do tipo metálico, embora o elemento esteja na mesma coluna da tabela periódica que o Li?

10-2 Teoria Clássica da Condução de Eletricidade



3, 11

O fato de que os metais são bons condutores de eletricidade sugere que eles contêm cargas móveis. A ideia de que os metais são formados por elétrons livres e íons positivos praticamente fixos foi proposta pelo físico alemão Paul Drude por volta de 1900, apenas três anos após Thomson haver descoberto o elétron, e expandida por H. A. Lorentz por volta de 1909. Este modelo microscópico, hoje conhecido como *modelo clássico da condução de eletricidade*, permite deduzir a lei de Ohm e associa a condução de eletricidade e calor ao movimento de elétrons livres nos condutores. Entretanto, o modelo leva a uma variação da condutividade elétrica com a temperatura que não está de acordo com os resultados experimentais e prevê que o calor específico dos metais deve exceder o calor específico dos isolantes em $3R/2$ por mol, o que também não acontece na prática. Apesar dos insucessos, a teoria clássica dos elétrons livres constitui um bom ponto de partida para um tratamento mais sofisticado dos metais, baseado na mecânica quântica. Essa teoria é apresentada em uma Revisão de Conceitos Clássicos disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet. Nesta seção, vamos apresentar sucintamente as previsões da teoria clássica que são relevantes para a discussão subsequente da teoria quântica da condução de eletricidade. Como vamos ver, as principais deficiências da teoria clássica são o uso da distribuição clássica de Maxwell-Boltzmann para as energias dos elétrons em um metal e o tratamento do espalhamento dos elétrons pelos íons da rede como um fenômeno clássico.

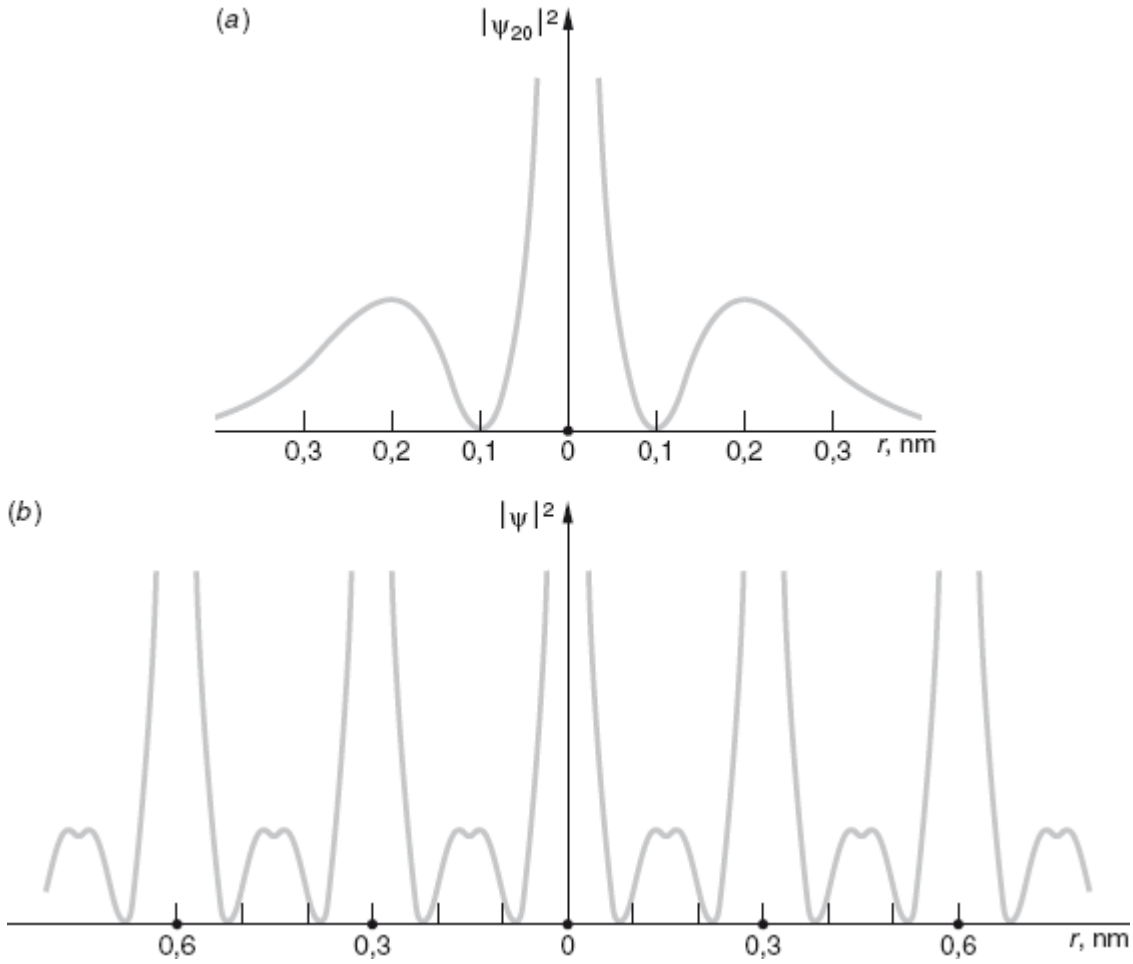


FIGURA 10-8 (*a*) Densidade de probabilidade para o elétron 2*s* de um átomo isolado de Li. (*b*) Densidade de probabilidade para os elétrons 2*s* de um cristal (unidimensional) de Li. Os pontos sobre o eixo *r* mostram a posição dos núcleos de Li. Observe que a função $|\psi|^2$ é mais estreita que a do átomo isolado e que os elétrons estão confinados a uma região de aproximadamente 0,6 nm de largura entre íons vizinhos.

Condução de Eletricidade

O modelo clássico de um metal é um arranjo tridimensional de átomos ou íons com um grande número de elétrons livres para vagar por todo o material. A velocidade média dos elétrons devido à agitação térmica, conhecida como *velocidade térmica*, tem um valor elevado. A uma temperatura de 300 K, por exemplo, a velocidade térmica é

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_e}} = \sqrt{\frac{8(1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K})(300\,\mathrm{K})}{\pi(9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})}} = 1{,}08 \times 10^5\,\mathrm{m/s} \qquad \textbf{10-9}$$

Quando um campo elétrico $\mathscr{E}$ é aplicado ao metal, a velocidade dos elétrons adquire uma segunda componente, a *velocidade de deriva* $\mathbf{v}_d$, que tem a mesma direção e o sentido oposto ao do campo aplicado. Se o metal possui *n* elétrons livres por unidade de volume, a corrente elétrica *I* que atravessa o material (Figura 10-9) é dada por

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = neAv_d \qquad \textbf{10-10}$$

Em que ΔQ é a carga que atravessa o condutor no intervalo de tempo Δt e *A* é a área da seção reta do condutor.

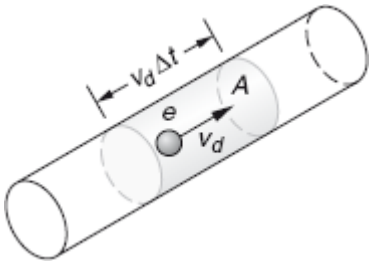


FIGURA 10-9 Em um intervalo de tempo Δt, todos os elétrons contidos no volume sombreado passam pela seção reta do fio. Se existem n elétrons por unidade de volume, todos com carga e, a carga total no volume sombreado é $\Delta Q = nev_dA\Delta t$, na qual v_d é a velocidade de deriva dos elétrons. A corrente total é, portanto, $I = \Delta Q/\Delta t = nev_dA$.

Ao contrário da velocidade térmica, a velocidade de deriva dos elétricos é relativamente pequena, como ilustra o Exemplo 10-5 para o caso do cobre.

EXEMPLO 10-5 **Velocidade de Deriva dos Elétrons no Cobre** Qual é o módulo da velocidade de deriva dos elétrons em um fio de cobre com 0,815 mm de raio, percorrido por uma corrente de 1 A?

SOLUÇÃO

Supondo que cada átomo de cobre contribui com um elétron livre, a concentração de elétrons livres é igual à concentração de átomos n_a, que pode ser expressa em função da massa específica ρ, do número de Avogadro N_A e da massa molar M:

$$n_a = \frac{\rho N_A}{M}$$

No caso do cobre, $\rho = 8{,}92\ \text{g/cm}^3$ e $M = 63{,}5\ \text{g/mol}$. Assim,

$$n_a = \frac{(8{,}93\ \text{g/cm}^3)\,(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol})}{63{,}5\ \text{g/mol}} = \\ = 8{,}47 \times 10^{22}\ \text{átomos/cm}^3$$

A concentração de elétrons é, portanto,

$$n = 8{,}47 \times 10^{22}\ \text{elétrons/cm}^3 = 8{,}47 \times 10^{28}\ \text{elétrons/m}^3$$

e o módulo da velocidade de deriva é

$$v_d = \frac{I}{Ane} = \\ = \frac{1\ \text{C/s}}{\pi\,(0{,}000815\ \text{m})^2\,(8{,}47 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})\,(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})} \\ \approx 3{,}54 \times 10^{-5}\ \text{m/s}$$

Assim, no caso de um cobre, um condutor típico, a velocidade de deriva é da ordem de 0,01 mm/s, um valor bem pequeno. Observe que a velocidade de deriva é muito menor que a velocidade térmica dos elétrons, dada pela Equação 10-9. Na verdade, a diferença é de aproximadamente 10 ordens de grandeza.

De acordo com a lei de Ohm, a corrente em um segmento de fio é proporcional à queda de tensão entre as extremidades do segmento: $I \propto V$. A constante de proporcionalidade é $1/R$, o que nos permite escrever: $I = V/R$. A resistência R não depende da corrente I nem da queda de tensão V, mas é proporcional ao comprimento L do segmento e inversamente proporcional a A, a área da seção reta: $R = \rho L/A$. A constante de proporcionalidade ρ é chamada de *resistividade* e depende do material de que é feito o fio. A Equação 10-10 também pode ser escrita na forma

$$v_d = \frac{j}{ne} \qquad \textbf{10-11}$$

na qual $j = I/A$ é a *densidade de corrente*. No caso dos materiais que obedecem à lei de Ohm, a resistividade ρ e seu inverso, a condutividade σ, são independentes do campo elétrico $\mathscr{E}$.

Livre Caminho Médio õ



10

O objetivo da teoria clássica da condução de eletricidade é encontrar uma expressão para ρ em função das propriedades do material condutor, uma tarefa que é facilitada pela definição da distância média que um elétron percorre entre duas colisões, conhecida como *livre caminho médio* e representada pelo símbolo λ. O livre caminho médio é o produto da velocidade média $\langle v \rangle$ dos elétrons pelo tempo médio entre colisões, denominado *tempo de relaxação* e representado pelo símbolo τ.

$$\lambda = \langle v \rangle \tau = 1/n_a \pi r^2 \qquad \textbf{10-12}$$

em que n_a é o número de íons por unidade de volume e r é o raio iônico. No cobre, por exemplo, λ = 0,38 nm. Em termos de λ, a resistividade e a condutividade são dadas por

$$\rho = \frac{m_e \langle v \rangle}{ne^2\lambda} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{ne^2\lambda}{m_e \langle v \rangle} \qquad \textbf{10-13}$$

No Exemplo 10-6, calculamos os valores clássicos da resistividade e da condutividade do cobre, que ilustram um defeito básico da teoria clássica da condução de eletricidade. Os defeitos da teoria clássica da condução são discutidos em uma das seções da Revisão de Conceitos Clássicos, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet.

EXEMPLO 10-6 **Condutividade e Resistividade do Cobre** Calcule o valor da resistividade e da condutividade do cobre a 300 K.



28

SOLUÇÃO

De acordo com a Equação 10-3 e os resultados do Exemplo 10-5, temos, para λ = 0,38 nm,

$$\rho = \frac{m_e \langle v \rangle}{ne^2\lambda} = \frac{(9{,}11\times10^{-31}\ \text{kg})(1{,}08\times10^{5}\ \text{m/s})}{(8{,}47\times10^{28}\ \text{m}^{-3})(1{,}60\times10^{-19}\ \text{C}^2)(0{,}38\times10^{-9}\ \text{m})}$$
$$= 1{,}20\times10^{-7}\ \Omega\cdot\text{m}$$

Observação: *Este valor da resistividade é 7 vezes maior que o valor experimental de 1,7 × 10⁻⁸ Ω · m.*

Calor Específico

Se o gás de elétrons fosse um conjunto clássico de partículas iguais e distintas, obedeceria à estatística de Boltzmann, e a distribuição de velocidades seria a distribuição de Maxwell (Equação 8-8). Nesse caso, a energia cinética média dos elétrons seria 3kT/2 e o calor específico molar de um metal seria 3R/2 a mais que o calor específico molar de um isolante. Deste total, uma parcela de 3R se deveria à contribuição das vibrações da rede (lei de Dulong e Petit; veja a Seção 8-1) e uma parcela de 3R/2 à contribuição do gás de elétrons:

$$C_v = (3R)_{\text{vibração da rede}} + (3/2)R_{\text{gás de elétrons}} = (9/2)R$$

Como vimos na Seção 8-5, esta previsão não é confirmada pelos resultados experimentais, já que o calor específico dos metais é aproximadamente igual a 3R. Em altas temperaturas, o calor específico dos metais se torna ligeiramente maior que 3R, mas esse aumento é muito menor que 3R/2. O aumento, proporcional à temperatura, é de apenas de 0,02R à temperatura ambiente (300 K).

10-3 Gás de Elétrons Livres nos Metais

Classicamente, todos os elétrons de um metal teriam energia cinética nula no zero absoluto, isto é, em $T = 0$. Quando um condutor é aquecido, os íons da rede adquirem uma energia cinética média de $3kT/2$, que é transferida ao gás de elétrons por interações da rede com os elétrons. Classicamente, portanto, os elétrons deveriam possuir a mesma energia cinética média, $3kT/2$. De acordo com a mecânica quântica, porém, como os elétrons estão confinados ao espaço ocupado pelo metal, a energia cinética não pode ser nula em $T = 0$ por causa do princípio de indeterminação. Além disso, o princípio de exclusão impede que mais de dois elétrons (de spins opostos) ocupem o estado fundamental. Assim, esperamos que, em $T = 0$, os elétrons ocupem os níveis mais baixos que puderem sem violar o princípio de exclusão. Antes de discutir a teoria quântica da condução de eletricidade, o que será feito na próxima seção, vamos considerar um modelo unidimensional dos metais.

Modelo Unidimensional

Considere N elétrons em um poço unidimensional quadrado infinito de largura L. Fisicamente, este modelo corresponde a um fio muito fino e muito comprido. Como vimos anteriormente, as energias permitidas são dadas por

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = n^2E_1 \qquad \textbf{10-14}$$

em que m é a massa do elétron e $E_1 = h^2/8mL^2$ é a energia do estado fundamental. Como o nível $n = 1$ pode ser ocupado por dois elétrons, o nível $n = 2$ por dois elétrons, e assim por diante, em $T = 0$ os N elétrons ocupam $N/2$ níveis, que correspondem aos números quânticos $n = 1$ a $n = N/2$ (Figura 10-10*a*). A energia do último nível ocupado é a energia de Fermi, que, para nosso sistema unidimensional, é dada por

$$E_F = E_{N/2} = \frac{(N/2)^2h^2}{8mL^2} = \frac{h^2}{32m}\left(\frac{N}{L}\right)^2 \qquad \textbf{10-15}$$

A energia de Fermi é função do número de elétrons por unidade de comprimento, o análogo unidimensional da concentração de elétrons. De acordo com o Exemplo 10-5, a concentração de elétrons no cobre é $8{,}47 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}$. Em uma dimensão, isso corresponde a

$$\frac{N}{L} = (8{,}47 \times 10^{28}/\text{m}^3)^{1/3} = 4{,}40 \times 10^9/\text{m}$$
$$= 0{,}440/\text{Å} = 4{,}40/\text{nm}$$

Usando este valor, vemos que a energia de Fermi para um fio fino de cobre é dada por

$$E_F = \frac{(hc)^2}{32mc^2}\left(\frac{N}{L}\right)^2 = \frac{(1240\ \text{eV}\cdot\text{nm})^2(4.40/\text{nm})^2}{(32)(5{,}11 \times 10^5\ \text{eV})}$$
$$= 1{,}82\ \text{eV}$$

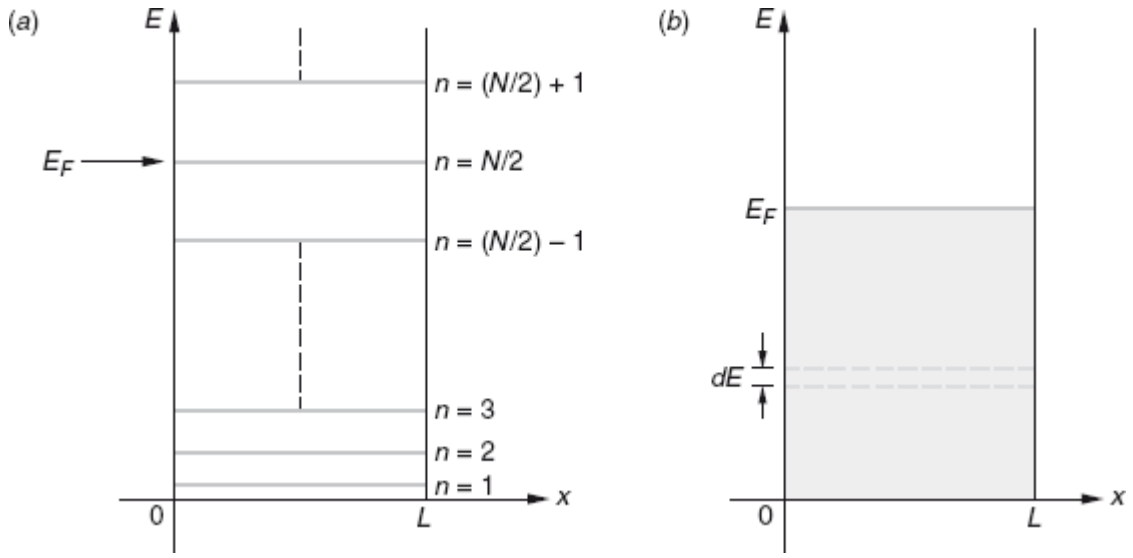


FIGURA 10-10 (*a*) Poço quadrado infinito unidimensional com N elétrons em $T = 0$ K. Cada nível é ocupado por dois elétrons, um com o spin para cima e outro com o spin para baixo. A energia de Fermi é a energia do nível $n = N/2$, o nível mais alto ocupado. (*b*) A distância entre os níveis é tão pequena que podemos supor que a energia varia continuamente. A densidade de estados $g(E)$ é definida

como o número de estados entre E e $E + dE$ dividido por dE.

Este valor é muito maior que o valor de kT à temperatura ambiente, que é 0,026 eV. A energia média dos elétrons é igual à energia total dividida por N:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N/2} 2n^2 E_1$$

na qual o fator 2 aparece porque existem dois elétrons em cada estado. Como $N/2 >> 1$, o somatório pode ser substituído por uma integral, o que nos dá

$$\langle E \rangle = \frac{E_1}{N} \int_0^{N/2} 2n^2 \, dn = \frac{E_1}{N} \frac{2}{3} \left(\frac{N}{2} \right)^3 = \frac{h^2}{8mL^2} \frac{2}{3N} \left(\frac{N}{2} \right)^3 = \frac{1}{3} E_F \qquad \textbf{10-16}$$

Assim, em uma dimensão, a energia média dos elétrons do cobre é aproximadamente 0,6 eV em $T = 0$. Este valor é 15 vezes maior que a energia cinética média das moléculas do ar à temperatura ambiente. A temperatura para a qual a energia cinética das moléculas do ar seria 0,6 eV para uma distribuição de Boltzmann unidimensional é aproximadamente 14.000 K, como podemos calcular fazendo $kT/2$ igual a 0,6 eV.

A expressão para o número de elétrons $n(E)$ com energia E no sistema unidimensional pode ser obtida a partir da Equação 8-37*c*:

$$n(E)dE = g(E) f_{FD}(E) dE$$

em que $f_{FD}(E) = 1$ para $T = 0$ K e $E < E_F$ e $f_{FD}(E) = 0$ para $T = 0$ K e $E > E_F$. A densidade de estados $g(E)$ é igual ao número dn de estados com energia entre E e $E + dE$ multiplicado por 2 para levar em conta a existência de dois estados de spin para cada estado espacial (Figura 10-10*b*):

$$g(E) = 2 \frac{dn}{dE}$$

Como $E = n^2 E_1$, $dE = 2E_1 n dn = 2E_1^{1/2} E^{1/2}$ e, portanto,

$$g(E) = E_1^{-1/2} E^{-1/2}$$

O número de elétrons com energia E em $T = 0$ K em um condutor unidimensional é, portanto,

$$n(E) = \begin{cases} E_1^{-1/2} E^{-1/2} & \text{para } E < E_F \\ 0 & \text{para } E > E_F \end{cases} \qquad \textbf{10-17}$$

O Gás de Elétrons Tridimensional

Vamos agora estender nossa discussão a sistemas tridimensionais. A energia de Fermi pode ser calculada a partir da expressão geral para o número de férmions $n_{FD}(E)$, dada pela Equação 8-37*c*. A concentração de elétrons em três dimensões, N/V, na qual V é o volume do metal, é dada por

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \int_0^\infty n_{FD}(E) dE = \frac{\pi}{2} \left(\frac{8m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{E^{1/2} dE}{e^{(E - E_F)/kT} + 1} \qquad \textbf{10-18}$$

Para valores arbitrários de T, a Equação 10-18 deve ser resolvida numericamente, mas para $T = 0$ a solução é imediata, já que, como vimos, $f_{FD}(E)$ é igual a 1 para $E < E_F$ e igual a 0 para $E > E_F$. Nesse caso, temos:

$$\frac{N}{V} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{8m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \frac{\pi}{2} \left(\frac{8m}{h^2} \right)^{3/2} \frac{2}{3} E_F^{3/2} \qquad \textbf{10-19}$$

Explicitando E_F, obtemos a seguinte expressão, válida apenas para $T = 0$ K:

$$E_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \qquad \textbf{10-20}$$

A Tabela 10-2 mostra a concentração de elétrons livres N/V e a energia de Fermi E_F para vários elementos. Observe que quanto maior o valor de N/V, maior o valor de E_F, o que é razoável para $T = 0$, já que, como todos os estados até E_F estão ocupados, aumentar N/V equivale a aumentar o número de estados a serem ocupados, o que faz com que o último estado ocupado tenha uma energia maior. O número $n(E)$ de elétrons com energia E é dado por

$$n(E) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8m}{h^2}\right)^{3/2} VE^{1/2} = \frac{3N}{2}E_F^{-3/2}E^{1/2} \qquad \textbf{10-21}$$

Tabela 10-2 Concentração de elétrons livres, energia de Fermi e temperatura de Fermi para alguns elementos metálicos

Elemento	N/V (× 10^{28} m^{-3})	Energia de Fermi (eV)	Temperatura de Fermi (× 10^4 K)
Al	18,1	11,7	13,6
Ag	5,86	5,49	6,38
Au	5,90	5,53	6,42
Cu	8,47	7,00	8,16
Fe	17,0	11,1	13,0
K	1,40	2,12	2,46
Li	4,70	4,74	5,51
Mg	8,61	7,08	8,23
Mn	16,5	10,9	12,7
Na	2,65	3,24	3,77
Sn	14,8	10,2	11,8
Zn	13,2	9,47	11,0

Fonte: Handbook of Chemistry and Physics, 90th ed. (New York: Chemical Rubber Co., 2009.)

e a energia média em $T = 0$ K é

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N}\int_0^{E_F} En(E)dE = \frac{3}{2}E_F^{-3/2}\int_0^{E_F} E^{3/2}dE = \frac{3}{5}E_F \qquad \textbf{10-22}$$

Em temperaturas maiores que zero, alguns elétrons ganham energia e tendem a ocupar estados com maiores energias. Entretanto, os elétrons não podem ser transferidos para estados de maior ou menor energia, a menos que os estados estejam desocupados. Como a energia cinética dos íons da rede é da ordem de kT, os elétrons não podem ganhar energias muito maiores

que kT através de colisões com a rede; assim, apenas os elétrons cujas energias estão em uma faixa de largura de $2kT$ no entorno da energia de Fermi podem mudar de energia a uma temperatura T.

Em $T = 300$ K, kT é apenas 0,026 eV e, portanto, o princípio de exclusão impede que a maioria absoluta dos elétrons ganhe energia através de colisões. A Figura 10-11 mostra a pequena fração de elétrons livres que podem se mover em $T = 300$ K (região sombreada). *Mesmo em temperaturas da ordem de milhares de graus, a distribuição de energia do gás de elétrons é muito parecida com a distribuição em T = 0 K.*

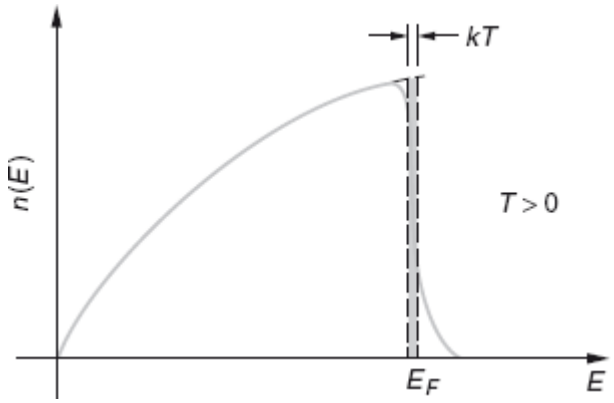


FIGURA 10-11 A fração dos N elétrons de um metal que contribui para C_v é igual à razão entre a área do retângulo sombreado e a área total sob a curva de $n(E)$ em função de E.

Para valores de T maiores que 0, precisamos nos lembrar de que a energia de Fermi deve ser definida a partir da Equação 8-68, já que não existe uma energia abaixo da qual todos os estados estejam ocupados e acima da qual todos os estados estejam vazios. Nesse caso, a energia de Fermi é a energia para a qual $f_{FD}(E) = 1/2$. A não ser em temperaturas extremamente elevadas, a diferença entre a energia de Fermi a uma temperatura T, $E_F(T)$, e a energia de Fermi no zero absoluto, $E_F(0)$, é muito pequena. Como mostram a Equação 8-68 e a Figura 8-31*b*, o valor de $f_{FD}(E)$ para um valor qualquer de T difere do valor para $T = 0$ apenas no caso de energias que estejam em faixa de largura $2kT$ no entorno da energia de Fermi.

Temperatura de Fermi

É conveniente definir a *temperatura de Fermi*, T_F, através da equação

$$E_F = kT_F \qquad \textbf{10-23}$$

Em temperaturas muito menores que a temperatura de Fermi, a energia média dos íons da rede é muito menor que a energia de Fermi e, portanto, a distribuição de energia dos elétrons não é muito diferente da distribuição em $T = 0$. No caso do cobre, a temperatura de Fermi correspondente a $E_F = 7{,}0$ eV é aproximadamente 81.900 K. A Tabela 10-2 mostra a temperatura de Fermi de vários elementos. É fácil mostrar que, em temperaturas muito maiores do que a temperatura de Fermi (ou seja, em temperaturas muito maiores que 81.900 K, no caso do cobre), $f_{FD}(E)$ tende para $e^{-E/kT}$ e, portanto, a distribuição de Fermi-Dirac se aproxima da distribuição de Boltzmann. Este resultado não é muito importante para o estudo do comportamento dos metais, já que não existe nenhum condutor que permaneça sólido ou mesmo líquido em temperaturas tão elevadas.

EXEMPLO 10-7 **Energia de Fermi e Temperatura de Fermi da Prata** Determine (*a*) a energia de Fermi da prata e (*b*) a temperatura de Fermi da prata a 0 K.

SOLUÇÃO

A massa específica da prata é 10,50 g/cm^3 e a massa molecular é 107,9 g/mol. Supondo que cada átomo de prata contribui com um elétron para o gás de Fermi, a concentração de elétrons livres pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{N}{V} = (10{,}50\ \text{g/cm}^3)(1/107{,}9\ \text{g/mol})(6{,}02 \times 10^{23}\ \text{elétrons/mol})$$
$$= 5{,}84 \times 10^{22}\ \text{elétrons/cm}^3 = 5{,}84 \times 10^{28}\ \text{elétrons/m}^3$$

um valor muito próximo do que aparece na Tabela 10-2.

(*a*) De acordo com a Equação 10-20, a energia de Fermi é dada por

$$E_F = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2}{2(9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})}\left(\frac{3 \times 5{,}84 \times 10^{28}}{8\pi}\right)^{2/3}$$
$$= 8{,}82 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = 5{,}51\,\mathrm{eV}$$

um valor muito próximo do aparece na Tabela 10-2.

(*b*) De acordo com a Equação 10-23, a temperatura de Fermi é dada por

$$T_F = \frac{E_F}{k} = \frac{8{,}82 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}}{1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}} = 6{,}39 \times 10^4\,\mathrm{K}$$

um valor muito próximo do que aparece na Tabela 10-2.

10-4 Teoria Quântica da Condução de Eletricidade

Introduzindo duas modificações relativamente simples, mas importantes, na teoria clássica dos elétrons livres, a mecânica quântica permite explicar a condutividade elétrica, o calor específico e a condutividade térmica dos metais. Em primeiro lugar, como vimos na Seção 8-5, é preciso levar em conta o fato de que a distribuição de energias no gás de elétrons é descrita pela distribuição de Fermi e não pela distribuição clássica de Boltzmann. Em segundo lugar, temos que considerar os efeitos das propriedades ondulatórias dos elétrons quando estes são espalhados pelos íons da rede.

Condução de Eletricidade

À primeira vista, a maioria dos elétrons não deveria participar do processo de condução de eletricidade por causa do princípio de exclusão, mas, na verdade, isso não acontece porque o campo elétrico acelera todos os elétrons. A Figura 10-12 mostra a distribuição de Fermi-Dirac em função da velocidade para uma temperatura T muito menor que a temperatura de Fermi (a temperatura ambiente, por exemplo). A função é aproximadamente igual a 1 para $-u_F < v_x < +u_F$, em que a *velocidade de Fermi* u_F é a velocidade correspondente à energia de Fermi:

$$u_F = \left(\frac{2E_F}{m_e}\right)^{1/2} \qquad \textbf{10-24}$$

EXEMPLO 10-8 **A Velocidade de Fermi no Alumínio** Calcule a velocidade de Fermi dos elétrons livres no alumínio.

SOLUÇÃO

Como, de acordo com a Tabela 10-2, a energia de Fermi do Al é 11,7 eV,

$$u_F(\mathrm{Al}) = \left(\frac{2 \times 11{,}7\,\mathrm{eV} \times 1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J/eV}}{9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}}\right)^{1/2} =$$
$$= 2{,}03 \times 10^6\,\mathrm{m/s}$$

A curva tracejada da Figura 10-12 mostra a distribuição de Fermi depois que o condutor foi submetido, durante algum tempo, a um campo elétrico. Embora todos os elétrons tenham sido deslocados para maiores velocidades, o efeito total equivale a deslocar apenas os elétrons que se encontram nas proximidades do nível de Fermi; assim, podemos usar as equações clássicas para a resistividade e para a condutividade (Equação 10-13) se substituirmos a velocidade média $\langle v \rangle$ pela velocidade de Fermi u_F:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{m_e u_F}{ne^2\lambda} \qquad \textbf{10-25}$$

Agora temos dois problemas para resolver. Em primeiro lugar, como u_F praticamente não depende da temperatura, a variação com a temperatura da resistividade e da condutividade não pode mais ser explicada em termos da variação da velocidade média, como no modelo clássico. O segundo problema tem a ver com os valores numéricos obtidos. Como vimos no Exemplo 10-5, a condutividade elétrica calculada pelo modelo clássico, usando um valor de $\langle v \rangle$ determinado a partir da distribuição de

Maxwell-Boltzmann, é 7 vezes maior que o valor experimental. Como u_F é aproximadamente 19 vezes maior que $\langle v \rangle$, o valor teórico da condutividade calculado com o auxílio da Equação 10-25 é $7 \times 19 = 133$ vezes menor que o valor experimental e o valor teórico da resistividade é 133 vezes maior que o valor experimental.



A solução dos dois problemas está no modo como o valor do livre caminho médio é calculado. Quando usamos a expressão da Equação 10-24 para calcular u_F e a Equação 10-25 para determinar o livre caminho médio, substituindo ρ pelo valor medido experimentalmente para o cobre, $1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$, obtemos $\lambda \approx 39$ nm, um valor aproximadamente 100 vezes maior que o valor de 0,38 nm que, como foi visto na Seção 10-2, é o valor correto de λ no cobre.

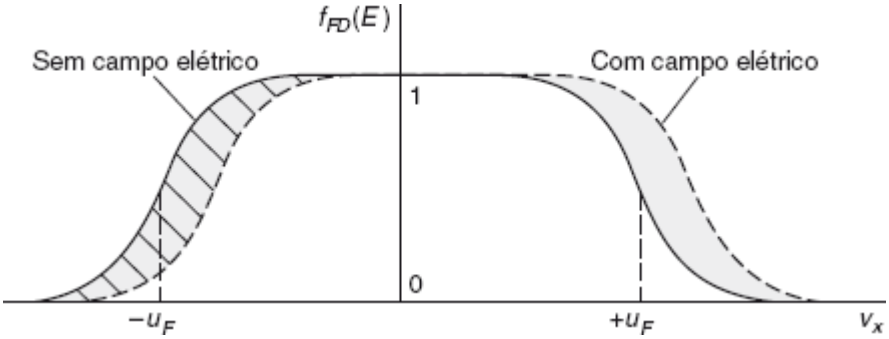


FIGURA 10-12 Probabilidade de ocupação $f_{FD}(E)$ em função da velocidade em uma dimensão, na ausência de campo elétrico e com um campo elétrico no sentido positivo do eixo x. A diferença foi exagerada na figura.

Não devemos nos surpreender com o fato de que o livre caminho médio dos elétrons no cobre não é previsto corretamente pela teoria cinética clássica. A razão desta enorme discrepância entre o resultado clássico e o resultado "experimental" obtido com o auxílio da Equação 10-25 está no fato de que o modelo clássico não leva em conta a natureza ondulatória do elétron. A colisão de um elétron com um íon da rede não é semelhante à colisão de uma bola de tênis com uma árvore, mas envolve o espalhamento da onda eletrônica pelo potencial periódico dos íons da rede. Se o comprimento da onda de matéria é muito maior que a distância entre os íons, como no caso que estamos considerando (veja o Problema 10-57), o espalhamento de Bragg não pode ocorrer. Cálculos detalhados do espalhamento das ondas eletrônicas por um cristal *perfeito* revelam que *não existe espalhamento* e que, portanto, o livre caminho médio é infinito. *O espalhamento das ondas eletrônicas é causado por imperfeições da rede cristalina.* As imperfeições mais comuns são as impurezas e as vibrações térmicas dos íons da rede.

Na Equação 10-12, usada para calcular o valor clássico do livre caminho médio, a grandeza πr^2 pode ser considerada como a seção reta dos íons da rede do ponto de vista de um elétron livre, onde r é o raio iônico. A Figura 10-13*a* mostra o modelo clássico de um metal, no qual os íons da rede têm uma área igual a πr^2. De acordo com a mecânica quântica, porém, a "área" da seção reta dos íons do ponto de vista dos elétrons não tem nada a ver com o tamanho dos íons, mas depende apenas dos *desvios* dos íons da rede em relação à posição de equilíbrio. Vamos ver agora como é possível estimar o valor desses desvios e assim obter um valor mais realista para o livre caminho médio.

Vamos supor que os íons da rede são *pontos* que estão vibrando por causa da agitação térmica (Figura 10-13*b*). A seção de choque para espalhamento pode ser tomada como igual a $\pi\overline{r^2}$, na qual $\overline{r^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2}$ é o valor médio quadrático do deslocamento de um ponto da rede em um plano perpendicular à direção de movimento do elétron e representa uma medida do desvio do íon em relação à posição de equilíbrio. Vamos determinar o valor de $\overline{r^2}$ com o auxílio do teorema da equipartição. Temos:

$$\frac{1}{2}K\overline{r^2} = \frac{1}{2}M\omega^2\overline{r^2} = kT \qquad \textbf{10-26}$$

na qual K é a constante de força, M é a massa do íon e $\omega = (K/M)^{1/2}$ é a frequência angular das vibrações. O livre caminho médio é, portanto,

$$\lambda = \frac{1}{n\pi\overline{r^2}} = \frac{M\omega^2}{2\pi nk}\frac{1}{T} \qquad \textbf{10-27}$$

Como $\rho \propto 1/\lambda$ (Equação 10-25), a Equação 10-27 prevê a variação correta de ρ com a temperatura, já que, de acordo com os resultados experimentais, ρ é proporcional a T e não a $T^{1/2}$, como no modelo clássico.

Podemos estimar o valor de $\overline{r^2}$ e, portanto, o valor de λ, usando o modelo de Einstein para as vibrações da rede, que é razoavelmente preciso, a não ser em temperaturas muito baixas. No modelo de Einstein (Seção 8-4), todos os átomos vibram com a mesma frequência. A temperatura de Einstein é definida pela Equação 8-63:

$$kT_E = hf = \hbar\omega$$

Substituindo ω por seu valor na Equação 10-27, obtemos:

$$\overline{r^2} = \frac{2kT}{M\omega^2} = \frac{2T\hbar^2}{MkT_E^2} = \frac{2(\hbar c)^2}{Mc^2kT_E}\frac{T}{T_E} \qquad \textbf{10-28}$$

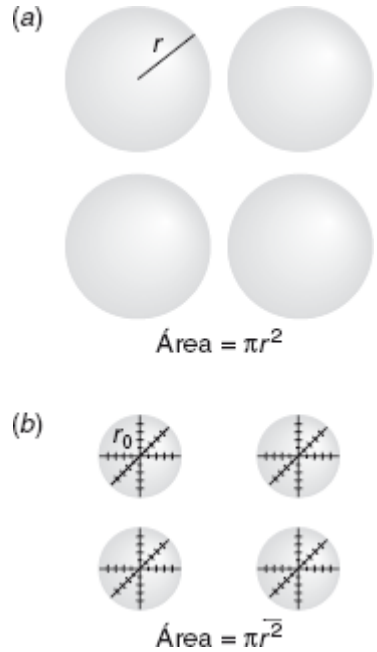


FIGURA 10-13 (*a*) Modelo clássico de um cristal, no qual os íons da rede são considerados esferas de raio r que apresentam uma área πr^2 aos elétrons. (*b*) Modelo quântico, no qual os íons são considerados pontos que oscilam em três dimensões. A área apresentada aos elétrons é $\pi\overline{r_0^2}$, na qual r_0 é a amplitude das oscilações.

No caso do cobre, a temperatura de Einstein é 200 K, o que corresponde a uma energia kT_E = 0,0172 eV. Usando este valor e um valor Mc^2 = 63,5 × 931 MeV para a massa do íon de cobre, o valor de $\overline{r^2}$ à temperatura ambiente (T = 300 K) é

$$\overline{r^2} = \frac{2(197{,}3\ \text{eV}\cdot\text{nm})^2}{(63{,}5 \times 931 \times 10^6\ \text{eV})(0{,}0172\ \text{eV})}\frac{300\ \text{K}}{200\ \text{K}} = \\ = 1{,}14 \times 10^{-4}\ \text{nm}^2$$

Como esse valor é aproximadamente 100 vezes menor que a seção de choque de um íon de cobre com 0,1 nm de raio, o livre caminho médio é aproximadamente 100 vezes maior que o valor previsto pelo modelo clássico e está, portanto, de acordo com o valor experimental da resistividade. Vemos, portanto, que *o modelo dos elétrons livres permite explicar a condução elétrica dos metais*, *contanto que a velocidade média clássica seja substituída pela velocidade de Fermi e as colisões sejam interpretadas em termos do espalhamento das ondas eletrônicas*, *caso em que apenas os desvios dos íons da rede em relação à posição de equilíbrio são importantes*.

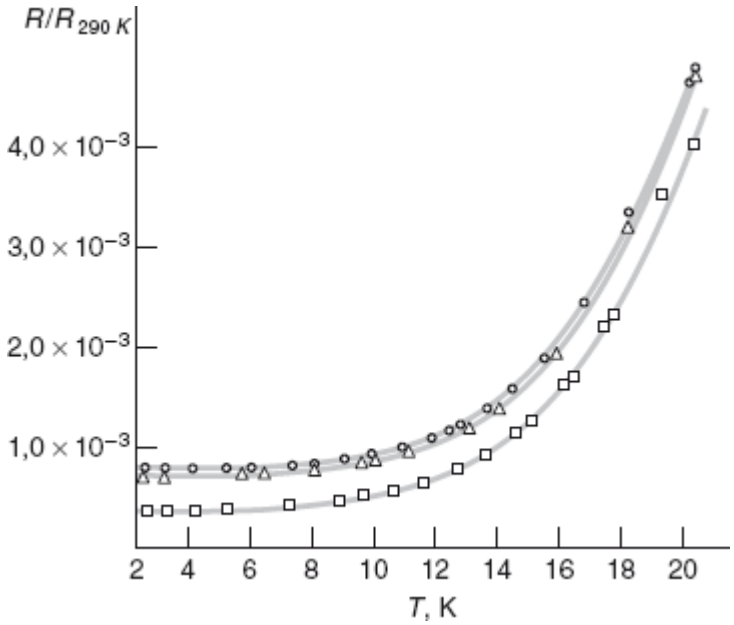


FIGURA 10-14 Resistência relativa em função da temperatura para três amostras de sódio. A variação com a temperatura é a mesma para as três amostras, mas os valores de resistência são diferentes porque as amostras contêm diferentes concentrações de impurezas. [*Fonte*: D. MacDonald e K. Mendelssohn, *Proceedings of the Royal Society*, **A202**, 103 (1950).]

A presença de impurezas em um metal também quebra a regularidade da rede cristalina, representando, portanto, um fator adicional de espalhamento dos elétrons. Como o efeito das impurezas sobre a resistividade quase não varia com a temperatura, a resistividade de um metal que contém impurezas pode ser escrito na forma $\rho = \rho_r + \rho_i$, na qual ρ_r é o espalhamento devido às vibrações da rede e ρ_i é o espalhamento devido às impurezas. A Figura 10-14 mostra curvas típicas da resistência de um metal impuro em função da temperatura. Quando a temperatura tende a zero, ρ_r tende a zero e a resistividade tende a ρ_i.

Calor Específico

Vamos estimar a contribuição do gás de elétrons para o calor específico molar. Em $T = 0$, a energia média de um elétron, dada pela Equação 10-22, é $3E_F/5$, de modo que a energia total de N elétrons é $U = 3NE_F/5$. Em uma temperatura T, apenas os elétrons que se encontram nas proximidades do nível de Fermi podem ser excitados por colisões com os íons da rede, que possuem uma energia da ordem de kT. A fração dos elétrons que podem ser excitados é da ordem de kT/E_F e cada colisão faz a energia desses elétrons aumentar de um valor da ordem de kT. Podemos, portanto, escrever a seguinte expressão para a energia dos N elétrons à temperatura T:

$$U = \frac{3}{5}NE_F + \alpha N\frac{kT}{E_F}kT \qquad \textbf{10-29}$$

na qual α é uma constante que deve ser da ordem de 1 se nosso raciocínio estiver correto. Para determinar o valor de α, é preciso usar a distribuição de Fermi para uma temperatura $T > 0$, o que não é fácil. Este cálculo foi executado por A. A. Sommerfeld, que mostrou que $\alpha = \pi^2/4$. Usando este valor, a contribuição dos elétrons para o calor específico molar se torna

$$C_v(\text{elétrons}) = \frac{dU}{dT} = 2\alpha Nk\frac{kT}{E_F} = \frac{\pi^2}{2}R\frac{T}{T_F} \qquad \textbf{10-30}$$

em que $T_F = E_F/k$ é a temperatura de Fermi. Como T_F tem um valor elevado, a contribuição do gás de elétrons é muito pequena em temperaturas normais. No caso do cobre, por exemplo, T_F = 81.000 K, e o calor específico molar do gás de elétrons, à temperatura ambiente (T = 300 K),

$$C_v = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{300}{81.900}\right)R = 0{,}018R$$

apresenta uma concordância razoável com o valor estimado a partir da pequena fração de elétrons com energia maior que E_F na Figura 10-11 e uma excelente concordância com os resultados experimentais.

O conhecimento da teoria quântica da condução de calor tornou possível a construção de produtos eletrodomésticos

de “alta tecnologia” como máquinas de fazer sorvete comum e sorvete de iogurte. Usando fluidos de trabalho especialmente projetados, essas máquinas estão substituindo gradualmente os velhos aparelhos manuais à base de gelo e sal. Bicicletas ergométricas que utilizam fluidos de viscosidade variável são usadas por ciclistas profissionais para simular as condições das provas de estrada.



Leitura Suplementar

A teoria quântica explica adequadamente a condução de calor, fornecendo resultados que concordam muito bem com os valores experimentais. O modelo quântico da condução de calor é apresentado sucintamente na Leitura Suplementar *Condução de Calor – O Modelo Quântico*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 10-31 e 10-32.

Exercícios

5. Por que, quando a temperatura é reduzida de 300 K para 4 K, a redução percentual da resistividade do cobre puro é muito maior que a do latão?

6. Explique, qualitativamente, por que é razoável supor que o livre caminho médio dos elétrons em um metal diminui quando a temperatura aumenta.

10-5 Magnetismo em Sólidos

O magnetismo dos sólidos se deve aos momentos magnéticos associados aos spins dos elétrons. Se os átomos de um sólido possuem um spin total diferente de zero, o sólido pode possuir um momento magnético diferente de zero. Como a distância entre os átomos de um sólido é pequena, o comportamento magnético dos sólidos é muito influenciado pelas forças interatômicas. Vários tipos de magnetismo são observados nos sólidos; o mais conhecido, embora não seja o mais comum, é o *ferromagnetismo*. Nesta seção, vamos discutir os diferentes tipos de magnetismo.

Paramagnetismo

Considere um sólido formado por átomos com um spin diferente de zero. Suponha, por exemplo, que cada átomo possui spin 1/2 (nesse caso, naturalmente, o módulo do spin total é $\hbar\sqrt{S(S+1)} = \hbar\sqrt{3/2}$) e que os átomos não interagem magneticamente. É o que acontece, por exemplo, no caso das terras raras e de muitos metais de transição. Em sólidos desse tipo, conhecidos como *paramagnéticos*, os momentos magnéticos estão orientados aleatoriamente e, portanto, o material não apresenta propriedades magnéticas, a não ser na presença de um campo magnético externo.

A componente z do momento magnético de cada átomo do material é dada pela Equação 7-47:

$$\mu_z = -m_s g_s \mu_B \qquad \textbf{7-47}$$

na qual $g_s \approx 2$ é o fator g do elétron e μ_B é o magnéton de Bohr ($9{,}27 \times 10^{-24}$ J/T ou $9{,}27 \times 10^{-24}$ A · m^2). Na presença de um campo externo aplicado **B**, cuja direção é tomada como a do eixo z, a energia do momento magnético é dada por

$$U = -\mu_z B \qquad \textbf{7-45}$$

ou

$$U = m_s g_s \mu_B B \qquad \textbf{10-33}$$

na qual $m_s = +1/2$ ou $-1/2$, dependendo da orientação do momento magnético em relação ao campo **B**. A energia pode ter, portanto, apenas dois valores, $g_s\mu_B B/2 \approx 2\mu_B B$ e $-g_s\mu_B B/2 \approx -\mu_B B$. Se a orientação for tal que $m_s = -1/2$, dizemos que o átomo está orientado com o “spin para baixo”, porque, nesse caso, **s** e **B** estão orientados em sentidos opostos (por convenção, supomos que a orientação do campo magnético **B** é “para cima”) e a energia é menor que se a orientação for tal que $m_s = +1/2$, caso que **s** e **B** estão orientados no mesmo sentido e dizemos que o átomo está orientado com o “spin para cima”. Em equilíbrio térmico, existem mais átomos com spin para baixo do que átomos com spin para cima e o sólido possui um momento magnético por unidade de volume, **M**, na mesma direção e sentido de **B**, cujo módulo é dado por

$$M = \frac{g_s \mu_B}{2}(\rho_- - \rho_+) \approx \mu_B(\rho_- - \rho_+),$$

em que ρ_- e ρ_+ são as concentrações de átomos com spin para baixo e com spin para cima, respectivamente (o vetor **M** é chamado de magnetização e a unidade correspondente, no SI, é o A/m). Em altas temperaturas, tais que $\mu_B B << kT$, **M** é proporcional a **B** e podemos escrever:

$$\mu_0 \mathbf{M} = \chi \mathbf{B} \qquad \textbf{10-34}$$

na qual a constante de proporcionalidade χ é chamada *de susceptibilidade magnética*. No caso de um conjunto de íons com spin 1/2, é possível mostrar (veja o Problema 10-62) que

$$\chi = \frac{\mu_0 M}{B} = \frac{\mu_0 \rho \mu_B^2}{kT} \qquad \textbf{10-35}$$

em que $\rho = \rho_+ + \rho_-$ é a concentração total de elétrons. A Equação 10-35 é conhecida como *lei de Curie*, em homenagem ao físico francês Pierre Curie. De acordo com a lei de Curie, quando T aumenta, a capacidade do campo magnético aplicado de alinhar os spins diminui. Na maioria dos sólidos paramagnéticos, o comportamento da magnetização obedece à lei de Curie. Em baixas temperaturas, tais que $\mu B >> kT$, $M \approx \mu_B \rho$, o que corresponde ao alinhamento de todos os momentos magnéticos no sentido do campo magnético externo.

A Equação 10-35 não se aplica ao magnetismo produzido nos metais por um campo magnético externo, já que, nos metais, os níveis de energia permitidos para os elétrons estão todos ocupados até o nível de Fermi. Isso significa que dois níveis de energia que diferem apenas quanto à orientação do spin estão ambos ocupados e, quando um campo magnético externo **B** é aplicado, um elétron não pode inverter o spin, para alinhar o momento magnético com o campo aplicado, sem violar o princípio de exclusão de Pauli. Assim, apenas os elétrons cuja energia é da ordem da energia de Fermi podem sofrer uma mudança de spin e a susceptibilidade magnética resultante é muito menor que no caso de sólidos paramagnéticos não metálicos. Este tipo de comportamento magnético ê conhecido como *paramagnetismo de Pauli*.

Diamagnetismo

Um elétron que se move perpendicularmente à direção de um campo magnético uniforme experimenta uma força magnética $\mathbf{F} = -e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. O movimento circular resultante constitui uma corrente elétrica que produz um campo magnético no sentido *oposto* ao do campo magnético aplicado. (Para verificar se isso é verdade, basta usar a regra da mão direita.) Considere dois elétrons com spins antiparalelos girando em sentidos opostos em um átomo, à mesma distância do núcleo (Figura 10-15). Se um campo externo **B** é aplicado perpendicularmente ao plano da órbita dos dois elétrons, a força centrípeta a que o elétron 1 está sujeito diminui de $\mathbf{F}_{\text{eletrostática}}$ para $\mathbf{F}_{\text{eletrostática}} - \mathbf{F}_{\text{magnética}}$ e, para manter a mesma distância do núcleo, o elétron passa a se mover mais devagar, o que diminui seu momento magnético *orbital*, que tem o mesmo sentido que **B**. Ao mesmo tempo, a força centrípeta a que o elétron 2 está submetido aumenta de $\mathbf{F}_{\text{eletrostática}}$ para $\mathbf{F}_{\text{eletrostática}} + \mathbf{F}_{\text{magnética}}$ e, para manter a mesma distância do núcleo, o elétron passa a se mover mais depressa, o que aumenta seu momento magnético orbital, que tem o sentido oposto ao de **B**. O resultado é que a soma dos momentos magnéticos orbitais dos dois elétrons, que era nula na ausência do campo **B**, passa a ter um valor diferente de zero no sentido oposto ao de **B**. Este fenômeno, conhecido como *diamagnetismo*, em geral é muito fraco e só pode ser observado se outros efeitos magnéticos, como o paramagnetismo, não estiverem presentes. Uma exceção notável são as substâncias supercondutoras, discutidas na Seção 10-9, nas quais a aplicação de um campo magnético externo produz um campo magnético de mesmo módulo e sentido oposto.

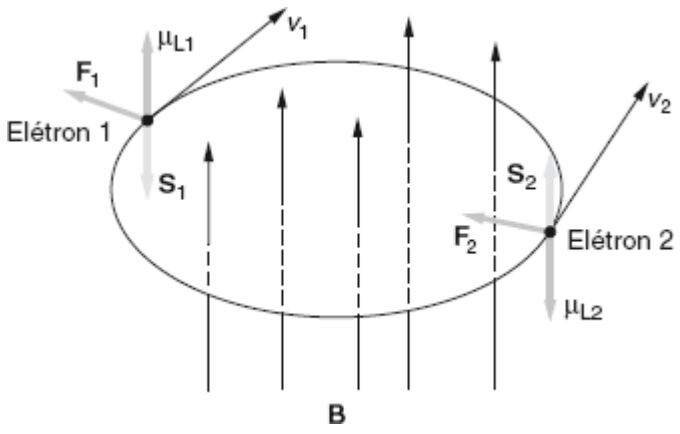


FIGURA 10-15 Os elétrons 1 e 2 giram em sentidos opostos em torno do núcleo atômico (que não aparece na figura). O campo magnético **B** é perpendicular ao plano da órbita dos elétrons. As forças magnéticas $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ aumentam o momento magnético orbital do elétron 2 e diminuem o momento magnético orbital do elétron 1, o que resulta em um momento total diferente de zero no sentido oposto ao do campo magnético **B**.

Ferromagnetismo, Antiferromagnetismo e Ferrimagnetismo

O *ferromagnetismo* é um alinhamento dos spins atômicos de alguns materiais abaixo de uma temperatura crítica T_c, conhecida como temperatura de Curie. Apenas cinco elementos são ferromagnéticos: ferro, níquel, cobalto, gadolínio e disprósio. Existem também muitos compostos e ligas metálicas que são ferromagnéticos, alguns dos quais não contêm nenhum dos elementos ferromagnéticos. Os materiais ferromagnéticos produzem um campo magnético, mesmo na ausência de um campo magnético externo, um fenômeno conhecido como *magnetismo espontâneo*.

Em certos compostos, como o FeO, o $NiCl_2$, o MnO e o MnS, os spins dos átomos vizinhos se alinham antiparalelamente abaixo de uma temperatura crítica T_N, conhecida como *temperatura de Néel*. Esses materiais, que são chamados de *antiferromagnéticos*, não apresentam magnetismo espontâneo porque os spins dos átomos vizinhos se cancelam.

Existem também compostos que apresentam duas ou mais sub-redes magnéticas. Os spins estão alinhados dentro de cada sub-rede, mas a direção de alinhamento varia de uma sub-rede para outra. Esses materiais são chamados de *ferrimagnéticos*. Como os momentos magnéticos totais das sub-redes não se cancelam mutuamente, os materiais ferrimagnéticos apresentam magnetismo espontâneo. As primeiras bússolas eram feitas de um composto ferrimagnético, a magnetita (Fe_3O_4).



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Spintrônica

Um campo de pesquisa relativamente novo, com aplicações quase imediatas, a *spintrônica*, ou *magnetoeletrônica*, nada mais é que a eletrônica baseada no spin dos elétrons. N. F. Mott foi o primeiro a sugerir, há mais de 30 anos, o uso de correntes de elétrons com os spins alinhados. O método só se tornou viável em 1988, com a descoberta da magnetorresistência gigante (GMR*) em multicamadas magnéticas. Uma multicamada magnética é um conjunto de filmes finos alternadamente magnéticos e não magnéticos. A resistência elétrica é baixa, quando os spins dos elétrons nas camadas ferromagnéticas vizinhas estão paralelos, e alta quando os spins dos elétrons nas camadas ferromagnéticas vizinhas estão antiparalelos; isso acontece porque o espalhamento dos elétrons depende da orientação relativa dos spins. Quando os spins são alinhados por um campo magnético externo, a variação de resistência pode chegar a 200%, embora 10 a 20% sejam valores mais típicos. As chamadas *válvulas de spin*, dispositivos formados por multicamadas magnéticas, são capazes de detectar campos magnéticos extremamente fracos, como os que estão presentes nos discos rígidos dos computadores.

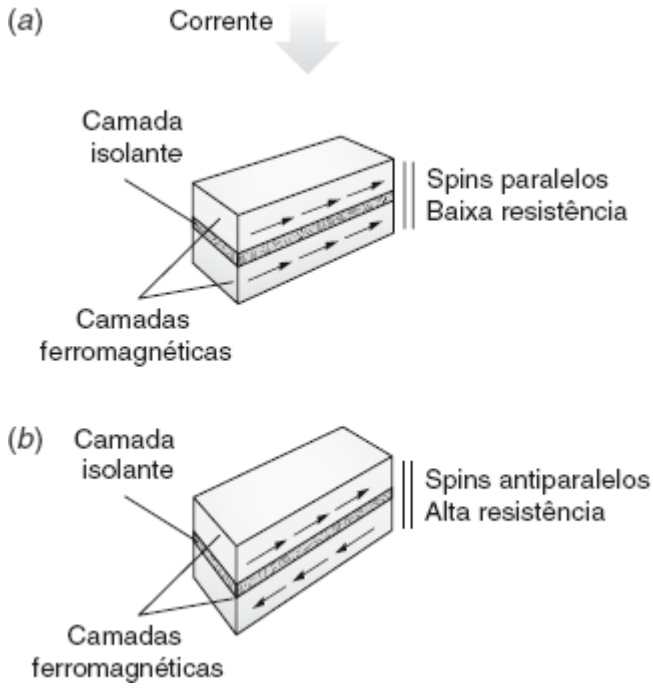


FIGURA 10-16 Uma junção túnel magnética é formada por duas camadas ferromagnéticas separadas por uma camada extremamente fina de um material isolante. A probabilidade de que os elétrons atravessem a camada isolante por tunelamento depende da orientação relativa dos spins dos elétrons nas camadas ferromagnéticas. (*a*) A probabilidade de tunelamento é maior, e, portanto, a resistência é menor quando os spins estão paralelos nas duas camadas ferromagnéticas. (*b*) A probabilidade de tunelamento é menor, e, portanto, a resistência é maior quando os spins estão antiparalelos nas duas camadas ferromagnéticas. Assim, uma junção desse tipo pode ser usada para armazenar um bit de informação, com a configuração (*a*) representando, por exemplo, o "0" e a configuração (*b*) representando o "1".

As *válvulas de spin*, o primeiro dispositivo spintrônico a ser produzido em escala comercial, são usadas nas cabeças de leitura e gravação de praticamente todos os discos rígidos modernos. Mais recentemente, foram desenvolvidas as memórias magnetorresistivas, que são muito mais rápidas e duráveis que as memórias flash.

Outro dispositivo spintrônico com muitas possíveis aplicações é a *junção túnel magnética* que é formada por duas camadas ferromagnéticas separadas por uma camada extremamente fina de um material isolante como o óxido de alumínio (Figura 10-16). Os elétrons podem passar pela camada isolante por efeito túnel (veja as Seções 6-6 e 10-8); como a probabilidade de tunelamento depende da orientação relativa dos spins nas duas camadas ferromagnéticas, a resistência é baixa, quando os spins nas camadas ferromagnéticas estão paralelos, e alta quando os spins dos elétrons nas duas camadas ferromagnéticas estão antiparalelos; a diferença relativa pode chegar a 75%. Dispositivos de armazenamento de dados baseados neste efeito seriam mil vezes mais rápidos que as memórias flash usadas atualmente. A junção túnel magnética desempenhou um papel importante na observação do *efeito Hall de spin* (veja a Seção 10-7), que permite controlar correntes de spin com campos elétricos.

Outra possibilidade interessante é o uso de dispositivos spintrônicos em computadores quânticos. Um dos grandes problemas dos computadores quânticos é que os estados de carga usados para representar informações têm uma vida muito curta. Os estados de spin, por outro lado, sobrevivem durante muito mais tempo.

10-6 Bandas de Energia em Sólidos

Quando o gás de elétrons é tratado como um gás de Fermi e as colisões dos elétrons com os íons da rede são tratadas como o espalhamento de ondas de matéria, o modelo dos elétrons livres permite prever as propriedades elétricas e térmicas dos condutores. Este modelo simples, porém, não explica por que um material é um bom condutor de eletricidade e outro é um isolante. A condutividade e a resistividade variam enormemente quando passamos dos melhores isolantes para os melhores condutores. A resistividade de um isolante típico, como o quartzo, é da ordem de $10^{16}\ \Omega \cdot m$, enquanto a resistividade de um condutor típico, como o cobre, é da ordem de $10^{-8}\ \Omega \cdot m$ e a de um supercondutor é menor que $10^{-19}\ \Omega \cdot m$.

Para compreender por que alguns materiais são bons condutores e outros não, precisamos aperfeiçoar o modelo dos elétrons livres e considerar o efeito da rede cristalina sobre os níveis de energia dos elétrons. Existem duas abordagens tradicionais para o problema de determinar os níveis de energia dos elétrons em um cristal. A primeira consiste em estudar o problema de um elétron em um potencial periódico e calcular os níveis permitidos de energia resolvendo a equação de Schrödinger. A segunda é determinar os níveis de energia dos elétrons em um sólido acompanhando o comportamento dos níveis de energia dos átomos isolados quando são reunidos para formar o sólido, como fizemos na Seção 9-2 para explicar a formação da molécula de H_2. As duas abordagens mostram que, em um sólido, os níveis de energia dos átomos se unem para formar bandas permitidas e proibidas. É a disposição dessas bandas que determina se um material é condutor, isolante ou semicondutor. Vamos examinar agora o primeiro desses métodos. O segundo será discutido na Leitura Suplementar *Bandas de Energia em Sólidos – Uma Abordagem Alternativa*.

O Modelo de Kronig-Penney

Considere o problema de um elétron submetido a um potencial periódico. A Figura 10-17*a* mostra a energia potencial de uma rede de íons positivos em um gráfico unidimensional. A característica mais importante deste potencial não é a forma, mas o fato de ser periódico. Um potencial periódico mais simples, constituído por poços quadrados finitos, aparece na Figura 10-17*b*. O modelo de um sólido baseado neste potencial é conhecido como *modelo de Kronig-Penney*. Mesmo no caso do modelo de Kronig-Penney, mais fácil de tratar matematicamente, a solução da equação de Schrödinger é muito trabalhosa e vamos nos limitar a apresentar aqui os resultados principais. Para os dois potenciais periódicos representados na Figura 10-17, existem soluções da equação de Schrödinger na forma de ondas progressivas apenas para certos intervalos de energia. Este resultado é consequência da importante descoberta de Felix Bloch[4] de que as soluções da equação de Schrödinger para potenciais periódicos devem ser da forma (em uma dimensão)

$$\psi(x) = u_k(x)e^{ikx} \qquad \textbf{10-36}$$

na qual $u_k(x) = u_k(x + L) = u_k(x + nL)$, L é a distância entre dois poços de potencial vizinhos e n é um número inteiro. A função e^{ikx} é uma onda plana e, portanto, representa um elétron livre (veja a Seção 6-6) com número de onda $k = 2\pi/\lambda$. Nas palavras do próprio Bloch:

Eu sabia que o maior problema era explicar como os elétrons podiam se esgueirar por todos os íons de um metal... Descobri, radiante, que a única diferença entre a onda e a onda plana dos elétrons livres era uma modulação periódica.

Assim, exigimos que as soluções da equação de Schrödinger,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \qquad \textbf{10-37}$$

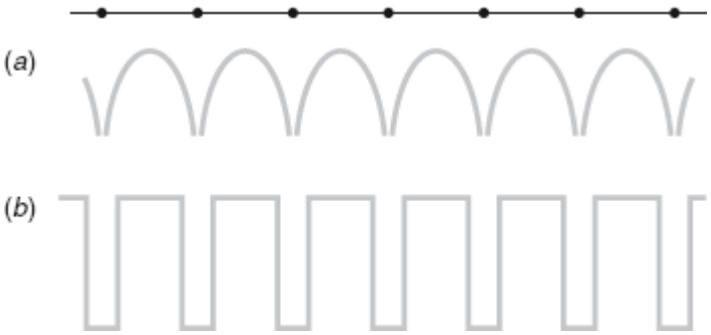


FIGURA 10-17 (*a*) Energia potencial unidimensional de um elétron em um cristal. $L(x) = -\infty$ nas posições dos íons. (*b*) Modelo de Kronig-Penney da energia potencial de um elétron em um cristal.

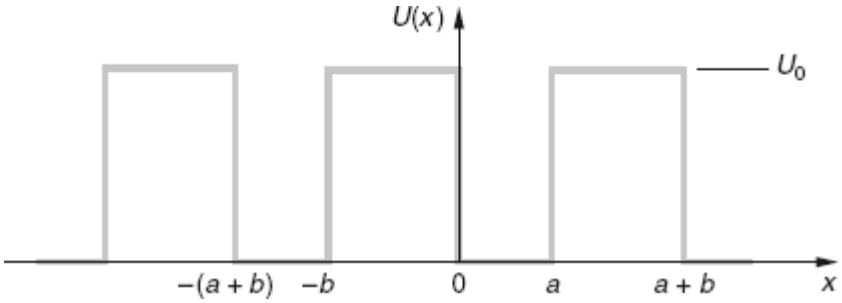


FIGURA 10-18 Parte do potencial de Kronig-Penney da Figura 10-17*b*, mostrando a largura *a* dos poços de potencial e a distância $a + b$ entre os poços.

na qual $U(x)$ é o potencial de Kronig-Penney, tenham a forma da *função de Bloch* dada pela Equação 10-36. A solução para a região $0 < x < a$ da Figura 10-18 é

$$\psi(x) = A_1 e^{ik'x} + A_2 e^{-ik'x} \qquad \textbf{10-38}$$

na qual $k' = (2mE)^{1/2}/\hbar$. Na região $-b < x < 0$, as soluções são da forma

$$\psi(x) = B_1 e^{\alpha x} + B_2 e^{-\alpha x} \qquad \textbf{10-39}$$

na qual $\alpha = [2m(U_0 - E)]^{1/2}/\hbar$. A exigência de que $\psi(x)$ tenha a forma da Equação 10-36 significa que

$$\begin{aligned}\psi(x + a + b) &= u_k(x + a + b)e^{ik(x+a+b)}\\ \psi(x + a + b) &= u_k(x)e^{ikx}e^{ik(a+b)}\\ \psi(x + a + b) &= \psi(x)e^{ik(a+b)}\end{aligned} \qquad \textbf{10-40}a$$

em que $a + b$ é a distância entre os poços de potencial. No caso geral,

$$\psi(x + n(a + b)) = \psi(x)e^{ikn(a+b)} \qquad \textbf{10-40}b$$

Como foi feito na Seção 6-3 para resolver o problema do poço finito quadrado unidimensional, as constantes A_1, A_2, B_1 e B_2 são escolhidas de modo que as funções $\psi(x)$ e $d\psi/dx$ sejam contínuas em $x = 0$ e $x = a$. Não vamos calcular aqui os valores das constantes, mas apenas observar que, ao fazê-lo, obtemos uma equação que relaciona k, k' e α a a e b, os parâmetros da rede. O resultado é que a Equação 10-40 só é satisfeita quando as energias dos elétrons estão em certos intervalos. Esses intervalos, conhecidos como *bandas permitidas*, são separados por regiões chamadas *bandas proibidas* nas quais não podem existir ondas progressivas. A Figura 10-19*a* mostra a energia em função do número de onda k para um elétron totalmente livre. Trata-se, é claro, de um gráfico da função $E = \hbar^2k^2/2m$. A Figura 10-19*b* mostra o gráfico de E em função de k para um elétron submetido ao potencial periódico da Figura 10-18. As bandas proibidas ocorrem para

$$ka = \pm n\pi \qquad \textbf{10-41}$$

em que n é um número inteiro e a é a distância entre os íons da rede.[5] Podemos explicar este resultado em termos da reflexão de Bragg das ondas eletrônicas. Suponha que E seja inicialmente pequena (próxima de zero na Figura 10-19*b*) e, portanto, k seja

pequeno e λ seja grande. Se aumentarmos o valor de E, k aumenta e λ diminui. Se continuarmos a aumentar E, chega um momento em que λ se torna suficientemente pequeno para que as ondas eletrônicas sofram uma reflexão de Bragg (interferência construtiva) por parte da rede (veja a Seção 3-4). A reflexão de Bragg é governada pela condição de Bragg (Equação 3-23).

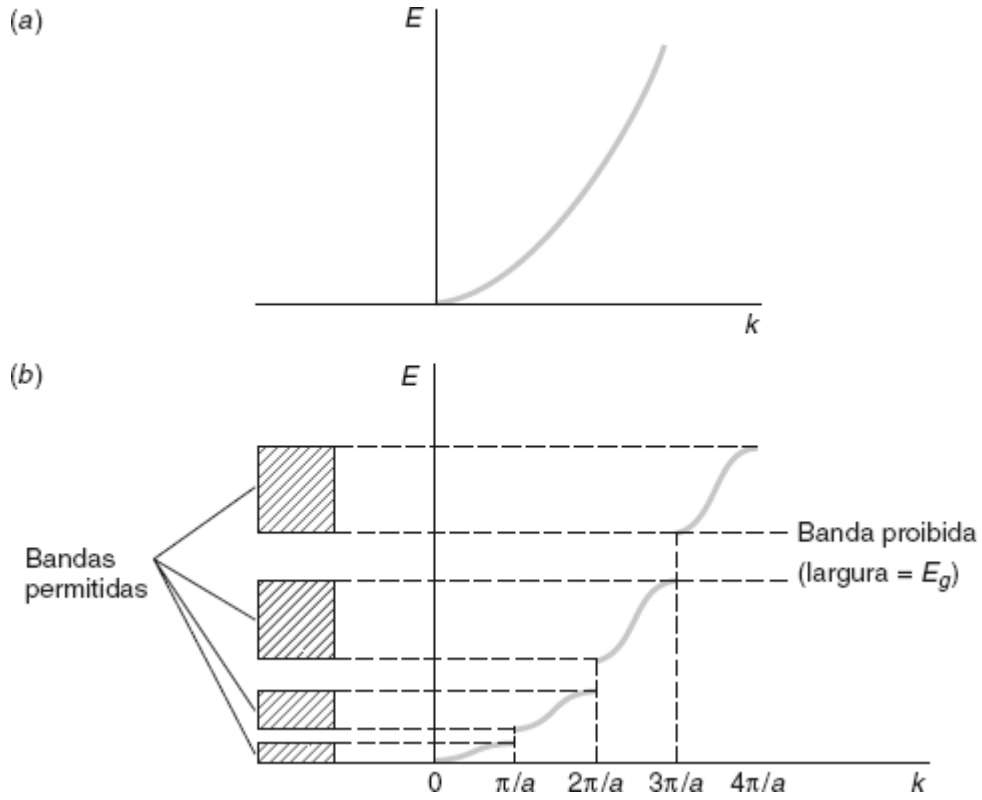


FIGURA 10-19 (*a*) Curva da energia em função do número de onda para um elétron livre. (*b*) Curva da energia em função do número de onda para um elétron quase livre no potencial periódico unidimensional da Figura 10-18, com $b = 0$ e $U_0 \rightarrow \infty$. Faixas proibidas de energia aparecem para valores de k que satisfazem a condição de Bragg. Embora as curvas sejam simétricas em relação a $k = 0$, foi plotada apenas a parte correspondente a $k > 0$.

$$n\lambda = 2a \operatorname{sen}\theta$$

Em um sistema unidimensional como o que estamos considerando, reflexão significa λ = 90º. Como $k = 2\pi/\lambda$, a condição para que haja reflexão de Bragg é exatamente a expressa pela Equação 10-41. O motivo pelo qual não podem existir ondas progressivas para esses números de onda é que a onda refletida por um dos átomos da cadeia se torna igual e com a mesma fase que a onda incidente no átomo anterior, o que resulta na formação de ondas estacionárias. A Figura 10-20 mostra um gráfico da densidade de probabilidade $|\psi|^2$ para os dois tipos de ondas estacionárias associados à banda proibida de menor energia, que ocorre para $k = \pi/a$:

$$\psi_1 = \operatorname{sen} kx = \operatorname{sen}\frac{\pi x}{a} \qquad \psi_2 = \cos kx = \cos\frac{\pi x}{a}$$

Como a concentração de carga negativa nas proximidades dos íons é maior para ψ_2 que para ψ_1, a energia potencial é menor para ψ_2. A diferença entre as duas energias potenciais é igual à largura da banda proibida. Dentro das bandas permitidas, a energia dos elétrons pode assumir qualquer valor, contanto que o número de átomos da cadeia seja infinito; no caso de N átomos, existem N níveis de energia permitidos em cada banda. Como o número de átomos em um sólido macroscópico é muito grande, as bandas permitidas podem ser consideradas contínuas. Cálculos em três dimensões são muito mais difíceis, é claro, mas os resultados são semelhantes. Os intervalos permitidos para o vetor de onda **k** são conhecidos como *zonas de Brillouin*. Na Figura 10-19*b*, por exemplo, a primeira zona de Brillouin corresponde ao intervalo $-\pi/a < k < \pi/a$, a segunda aos intervalos $-2\pi/a < k < -\pi/a$ e $\pi/a < k < 2\pi/a$, e assim por diante.

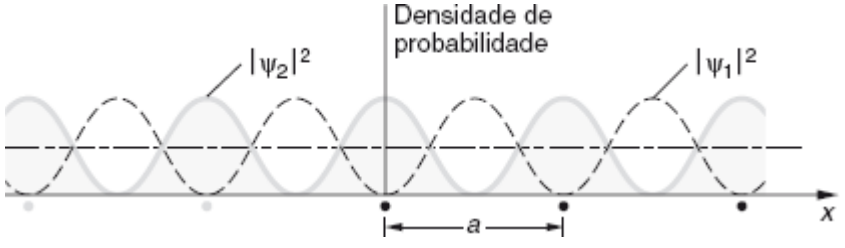


FIGURA 10-20 Densidade de probabilidade (proporcional à distribuição de carga) para ondas estacionárias de número de onda $k = \pi/a$ em um cristal unidimensional. A curva cheia $|\psi_2|^2$ é máxima nas posições dos íons e está associada a uma energia potencial menor que a curva tracejada $|\psi_1|^2$.

Condutores, Isolantes e Semicondutores

Condutores Podemos agora compreender por que alguns sólidos são condutores e outros são isolantes. Considere um cristal de sódio. Existe espaço para dois elétrons no orbital 3*s* de cada átomo, mas cada átomo de sódio tem apenas um elétron 3*s*. Assim, quando *N* átomos de sódio se unem para formar um cristal, a banda de energia correspondente ao orbital 3*s* é preenchida apenas até a metade. Além disso, a banda vazia associada ao orbital 3*p* coincide parcialmente com a banda 3*s*. A Figura 10-21 mostra, de forma esquemática, as bandas permitidas do sódio. Podemos ver que existem muitos estados disponíveis imediatamente acima do último estado ocupado e, portanto, os elétrons de valência podem ser excitados facilmente por um campo elétrico para níveis de maior energia. Em consequência, o sódio é um bom condutor. O magnésio, por outro lado, tem dois elétrons 3*s*, de modo que a banda 3*s* está completa. Entretanto, como no caso do sódio, a banda 3*p* vazia coincide parcialmente com a banda 3*s*, o que faz com que o magnésio também seja um condutor. A banda ocupada pelos elétrons da última camada dos átomos, ou elétrons de valência, é conhecida como *banda de valência*. A banda permitida imediatamente acima é chamada de *banda de condução*. Um condutor é um sólido cuja banda de valência está apenas parcialmente completa ou cuja banda de condução coincide parcialmente com a banda de valência. (Veja as Figuras 10-22*a* e 10-22*b*.) Existem alguns poucos elementos, entre eles o antimônio, o arsênio e o bismuto, nos quais a superposição entre a banda de condução e a banda de valência é muito pequena, o que limita o número de estados vazios disponíveis. Esses materiais são conhecidos como *semimetais*.

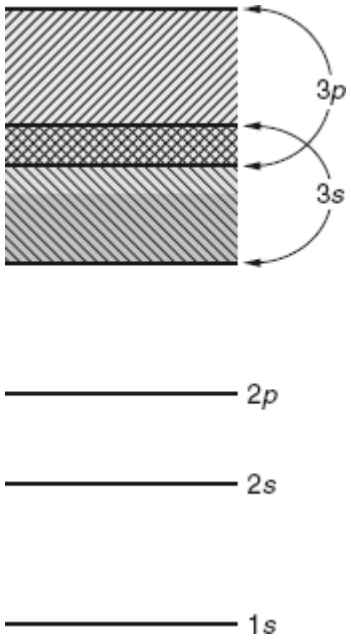


FIGURA 10-21 Diagrama de níveis de energia de um cristal de sódio. A banda 3*p* desocupada está parcialmente superposta à banda 3*s*, que está cheia até a metade. Logo acima dos estados ocupados, existem muitos estados vazios para os quais os elétrons podem ser excitados por um campo elétrico; assim, o sódio é um condutor.

Isolantes Um sólido com a banda de valência totalmente ocupada é um isolante quando a largura da banda proibida que separa a banda de valência da banda de condução é maior que aproximadamente 2 eV (Figura 10-22*c*). Quase todos os cristais iônicos são isolantes. A estrutura de um cristal iônico, como o NaCl, é muito diferente da de um metal. As bandas de energia provêm dos níveis de energia dos íons Na^+ e Cl^-. Como a última camada dos dois íons está completa, a banda mais alta ocupada do NaCl está totalmente cheia. A banda permitida seguinte, que está vazia, provém dos estados excitados dos íons Na^+ e Cl^-. Existe uma larga banda proibida entre a banda ocupada e a banda vazia. Os campos elétricos usados na prática são insuficientes para excitar elétrons dos níveis mais altos da banda de valência para os níveis mais baixos da banda de condução e, por isso, o NaCl é um isolante. Quando um campo elétrico aplicado a um isolante é suficientemente intenso para fazer com que elétrons sejam excitados para a banda de condução, o fenômeno é conhecido como *ruptura do dielétrico*.

Semicondutores Intrínsecos Quando a largura da banda proibida é pequena, o sólido é um semicondutor. Considere o carbono, que possui dois elétrons 2*s* e dois elétrons 2*p*. À primeira vista, o carbono deveria ser um condutor por causa dos

quatro estados 2*p* desocupados; entretanto, os estados 2*s* e 2*p* se misturam quando o carbono forma ligações covalentes.[6] A Figura 10-23 mostra o desdobramento dos oito estados 2*s*-2*p* quando os átomos de carbono se unem para formar um cristal de diamante. Este desdobramento se deve à formação de ligações covalentes e é semelhante ao desdobramento dos níveis 1*s* do hidrogênio, discutido na Seção 9-2. A energia dos níveis correspondentes às quatro funções de onda espacialmente simétricas (uma para o orbital 2*s* e três para os orbitais 2*p*) diminui, enquanto a energia dos níveis correspondentes às quatro funções de onda espacialmente antissimétricas (uma para o orbital 2*s* e três para os orbitais 2*p*) aumenta. Assim, a banda de valência contém apenas quatro níveis por átomo, que estão todos ocupados, e a banda de condução permanece vazia. No caso do diamante, em que a distância interatômica é 0,154 nm, a largura da banda proibida que separa a banda de condução da banda de valência é 7 eV. Como esta largura é grande em comparação com a energia térmica dos elétrons, que, à temperatura ambiente (T = 300 K), é da ordem de 0,026 eV, muito poucos elétrons são excitados para a banda de condução. O diamante é, portanto, um isolante. A estrutura das bandas é semelhante para o silício, que tem dois elétrons 3*s* e dois elétrons 3*p*, e para o germânio, que possui dois elétrons 4*s* e dois elétrons 4*p*. No caso do silício, em que a distância interatômica é 0,235 nm, a largura da banda proibida é 1 eV; no caso do germânio, em que a distância interatômica é 0,243 nm, a largura da banda proibida é 0,7 eV. À temperatura ambiente, para larguras dessa ordem, existe um número considerável de elétrons na banda de condução devido à agitação térmica, embora o número seja muito menor que em um condutor típico. Substâncias como o silício e o germânio são conhecidas como *semicondutores intrínsecos*. A Figura 10-22*d* mostra a estrutura de bandas dos semicondutores intrínsecos.

Os elétrons da banda de condução de um semicondutor intrínseco podem ser acelerados por um campo elétrico porque existem estados desocupados com energias ligeiramente maiores. Além disso, para cada elétron excitado para a banda de condução é criado um nível desocupado, conhecido como *buraco*, na banda de valência. A presença de um campo elétrico faz com que um elétron de valência de um átomo vizinho seja transferido para o nível desocupado, eliminando o buraco, mas criando outro buraco no átomo vizinho. Este movimento de elétrons, que contribui para a corrente elétrica, pode ser considerado como o movimento de um buraco no sentido do campo elétrico, ou seja, no sentido oposto ao do movimento dos elétrons. Os buracos se comportam, portanto, como cargas positivas. A analogia com uma rua de mão única com duas pistas, uma das quais ocupada por carros engarrafados, pode ajudar o leitor a visualizar o processo de condução de corrente elétrica por buracos. Quando um carro passa da pista engarrafada para a pista vazia, pode se mover livremente. Quando outros carros se adiantam para ocupar o espaço deixado pelo carro que mudou de pista, o espaço vazio se move para trás, no sentido oposto ao do movimento dos carros. Tanto o movimento para a frente do carro que está na pista livre como o movimento para trás do espaço vazio que foi criado na pista engarrafada contribuem para que os automóveis cheguem ao destino.

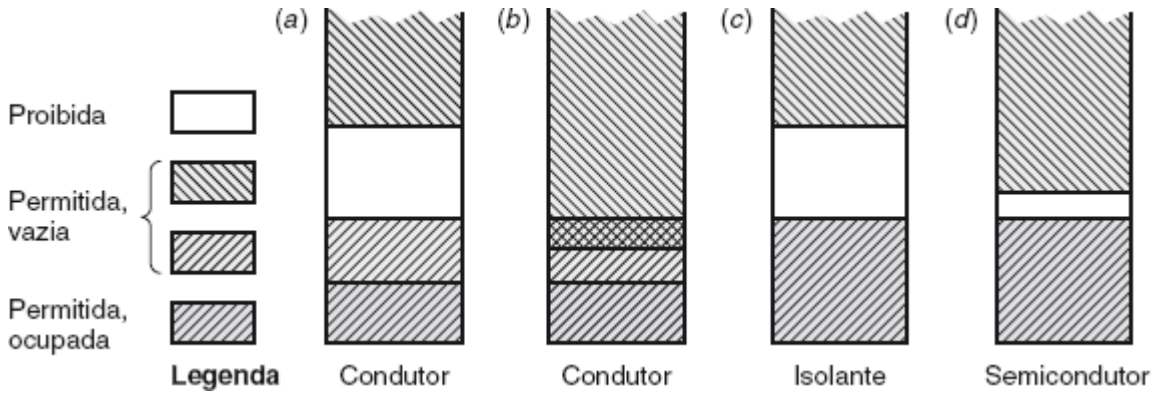


FIGURA 10-22 Quatro possíveis arranjos para as bandas de energia de um sólido. (*a*) A banda permitida está apenas parcialmente ocupada e, portanto, os elétrons podem ser excitados para níveis de energia próximos. O material (*a*) é um condutor. O material (*b*) também é um condutor porque uma banda permitida ocupada e uma banda permitida vazia estão parcialmente superpostas. No caso do material (*c*), existe uma banda proibida muito larga entre uma banda permitida totalmente ocupada e uma banda permitida vazia; o material (*c*) é um isolante. No caso do material (*d*), existe uma banda proibida relativamente estreita entre uma banda permitida totalmente ocupada e uma banda permitida vazia. Nesse caso, alguns elétrons são excitados termicamente para a banda superior em temperaturas normais, deixando buracos na banda inferior. O nível de Fermi fica aproximadamente no centro da banda proibida. O material (*d*) é um semicondutor.

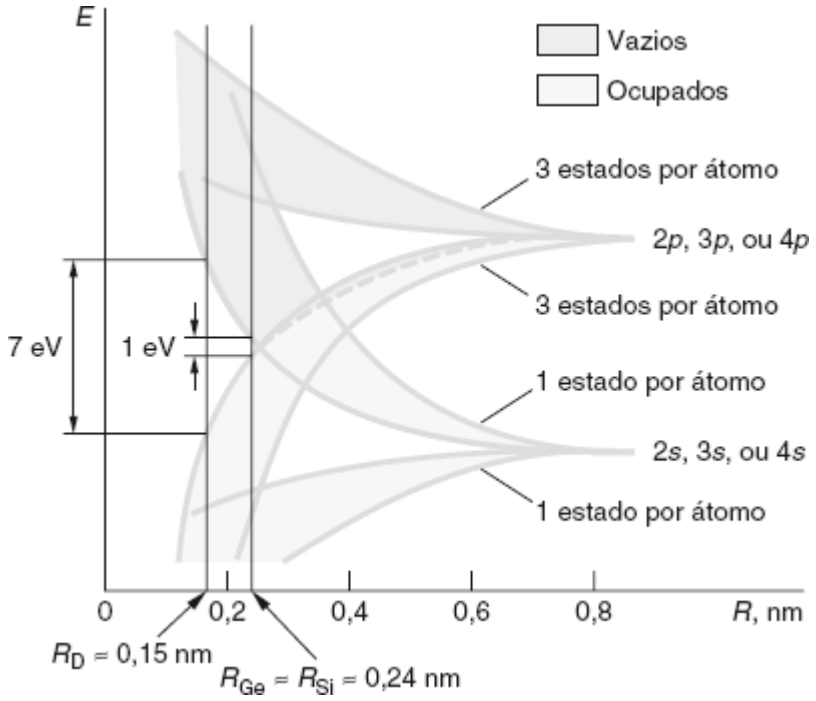


FIGURA 10-23 Desdobramento dos estados 2*s* e 2*p* do carbono, dos estados 3*s* e 3*p* do silício e dos estados 4*s* e 4*p* do germânio em função da distância interatômica. A largura da banda proibida que separa os quatro estados ocupados da banda de valência dos estados vazios da banda de condução é 7 eV para a distância interatômica do diamante, $R_D = 0{,}154$ nm. Para a distância interatômica do silício, $R_{Si} = 0{,}235$ nm, a largura da banda proibida é 1,09 eV. O desdobramento é semelhante no germânio, para o qual a distância interatômica é $R_{Ge} = 0{,}243$ e a largura da banda proibida é apenas 0,7 eV.

Uma característica interessante dos semicondutores é que, ao contrário do que ocorre nos metais, a condutividade dos semicondutores aumenta (e a resistividade diminui) quando a temperatura aumenta. Isso acontece porque, com o aumento da temperatura, o número de elétrons livres aumenta, já que mais elétrons são excitados para a banda de condução. Ao mesmo tempo, o número de buracos na banda de valência também aumenta. Nos semicondutores, o efeito do aumento do número de elétrons e buracos (que, tomados em conjunto, são conhecidos como *portadores*) é maior que o efeito do aumento do espalhamento dos elétrons pelas vibrações térmicas dos íons da rede. Isso significa que o coeficiente de temperatura da resistividade dos semicondutores é negativo.

O fato de um material com a banda de valência completa ser um semicondutor ou um isolante depende da largura E_g da banda proibida. Um cálculo dos números relativos de elétrons com várias energias que *podem* estar acima do nível de Fermi (situado no centro da banda proibida) à temperatura ambiente ilustra a situação. Esses números são dados pela distribuição de Fermi-Dirac $f_{FD}(E)$, Equação 8-68:

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{E^{(E-E_F)/kT} + 1} \qquad \textbf{8-68}$$

Para $T = 293$ K, $kT = 0{,}025$ eV. Lembre-se de que, para $E = E_F$, $f_{FD}(E) = 1/2$ (veja a Seção 8-5). Para $E - E_F = 4kT = 0{,}10$, temos:

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{0{,}10/0{,}025} + 1} = 0{,}018$$

Repetindo este cálculo para vários outros valores de $E - E_F$, obtemos os números relativos de elétrons que aparecem na Tabela 10-3. De acordo com a tabela, se a largura da banda proibida de um material é 0,5 eV, por exemplo, $E - E_F = 0{,}25$ e aproximadamente 10^{-5} dos elétrons que se encontram no alto da banda de valência são excitados para a banda de condução e contribuem para a condução de corrente elétrica. Trata-se de um número considerável, levando em conta o grande número de elétrons que existem no alto da banda de valência, de modo que esperamos que o material apresente uma condutividade relativamente alta, embora não tão grande como a dos metais.

Para uma banda proibida de 2,0 eV, apenas quatro vezes maior que no exemplo anterior, o número relativo de elétrons excitados para a banda de condução diminui de mais de 12 ordens de grandeza, o que mostra como o número de portadores é sensível à largura da banda proibida. O cálculo de $f_{FD}(E)$ também serve para confirmar que a condutividade dos semicondutores aumenta com a temperatura. Se a temperatura de um material com uma banda proibida de 2,0 eV aumenta de 293 K (como na Tabela 10-3) para 393 K, $f_{FD}(E)$ aumenta de $6{,}5 \times 10^{-18}$ para $1{,}5 \times 10^{-13}$, o que representa um aumento de mais de quatro ordens

de grandeza. A Tabela 10-4 mostra a largura da banda proibida de vários elementos e compostos semicondutores. Observe que a largura da banda proibida varia ligeiramente com a temperatura.

Um conceito importante para o estudo das propriedades dos semicondutores é o de *massa efetiva*. A Figura 10-19*a* é um gráfico de $E(k) = \hbar^2k^2/2m_e$, a energia de um elétron livre de comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$. A curvatura do gráfico de E em função de k é dada por $d^2E/dk^2 = \hbar^2/m_e$, e podemos dizer que a curvatura é proporcional a $1/m_e$, o inverso da massa do elétron. Na Figura 10-19*a*, a curvatura é constante; nas proximidades das bandas proibidas da Figura 10-19*b*, porém, a curvatura é muito maior que no caso do elétron livre. Como é importante conhecer o comportamento dos elétrons nesses intervalos, particularmente no caso dos semicondutores dopados, que serão discutidos na Seção 10-7, vale a pena continuar a descrever a forma da curva de E em função de k em termos do inverso de uma massa. Para isso, definimos a massa efetiva m^* através da equação

Tabela 10-3Valores de $f_{FD}(E)$ para T = 293 K

$E - E_F$ (eV)	0,05	0,10	0,25	1,0	2,5	7,5
Múltiplo de kT	2	4	10	40	100	300
$f_{FD}(E)$	$1{,}2 \times 10^{-1}$	$1{,}8 \times 10^{-2}$	$5{,}1 \times 10^{-5}$	$6{,}5 \times 10^{-18}$	$1{,}1 \times 10^{-43}$	$1{,}3 \times 10^{-129}$

Tabela 10-4 Largura da banda proibida E_g e constante dielétrica λ para alguns semicondutores

	E_g (eV)		
Material	**0 K**	**293 K**	**κ**
Si	1,15	1,11	11,8
Ge	0,74	0,67	15,9
Te	–	0,33	–
GaAs	1,53	1,35	13,1
InSb	0,23	0,16	17,8
ZnS	–	3,54	5,2
CdTe	1,56	1,44	10,2
PbS	0,28	0,37	17,0
InP	1,41	1,27	12,4
CdSe	1,85	1,74	10,1
GaP	2,40	2,24	11,1
PbTe	0,19	0,25	30,1

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E}{dk^2} \qquad \textbf{10-42}$$

Assim, como no caso do elétron livre, a curvatura do gráfico de E em função de k para os elétrons em um sólido cristalino pode ser descrita em termos do inverso de uma massa, $1/m^*$. Para um elétron livre, $m^* = m_e$, igualdade que também é válida para elétrons cuja energia não esteja muito próxima das bandas proibidas da Figura 10-19*b*. Perto das bandas proibidas, a situação muda de figura. Quando aumentamos o valor de k a partir de $k = 0$, a curvatura inicialmente é constante e igual à de um elétron livre e, portanto, $m^* = m_e$. Nas proximidades de $k = \pi/a$, a curvatura aumenta muito e depois troca de sinal; assim, m^* se torna muito menor que m_e e chega a ficar negativa! Logo acima da banda proibida, a curvatura é grande e positiva, de modo que m^* é muito menor que m_e e positiva. Nos casos em que a largura da banda proibida é pequena em comparação com a largura das bandas permitidas, o valor da massa efetiva é 1% a 10% da massa do elétron livre. Vamos voltar a falar da massa efetiva na Seção 10-7.

Exercícios

7. A resistividade do cobre e a resistividade do silício variam da mesma forma quando a temperatura aumenta?

8. Suponha que um elétron é excitado da banda de valência de um semicondutor para um estado vários níveis acima da base da banda de condução. Explique por que o elétron "decai" rapidamente para um nível situado na base da banda de condução.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Poços Quânticos

O progresso das técnicas para fabricar dispositivos com dimensões da ordem de nanômetros, conhecidos como *nanoestruturas*, tornou possível a construção de *poços quânticos*, poços de potencial finitos de uma, duas ou três dimensões que podem limitar o movimento dos elétrons a certas direções. O poço de potencial unidimensional é uma fina camada de material que impõe limites para o movimento dos elétrons na direção perpendicular à superfície da camada, mas não restringe o movimento dos elétrons em outras direções. Na direção em que o movimento é limitado, a situação é semelhante à de um poço de potencial quadrado unidimensional (veja a Seção 6-2 e a Figura 10-24*a*). Um *fio quântico* limita o movimento dos elétrons em duas dimensões, como mostra a Figura 10-24*b*. Em um *ponto quântico* como o da Figura 10-24*c*, o movimento dos elétrons é limitado em todas as direções; a situação é semelhante à do poço de potencial quadrado tridimensional, discutido na Seção 7-1. Da mesma forma como em um átomo ou em uma molécula, um ponto quântico possui níveis de energia quantizados e os elétrons aprisionados em um ponto quântico absorvem e emitem radiações com comprimentos de onda bem definidos.

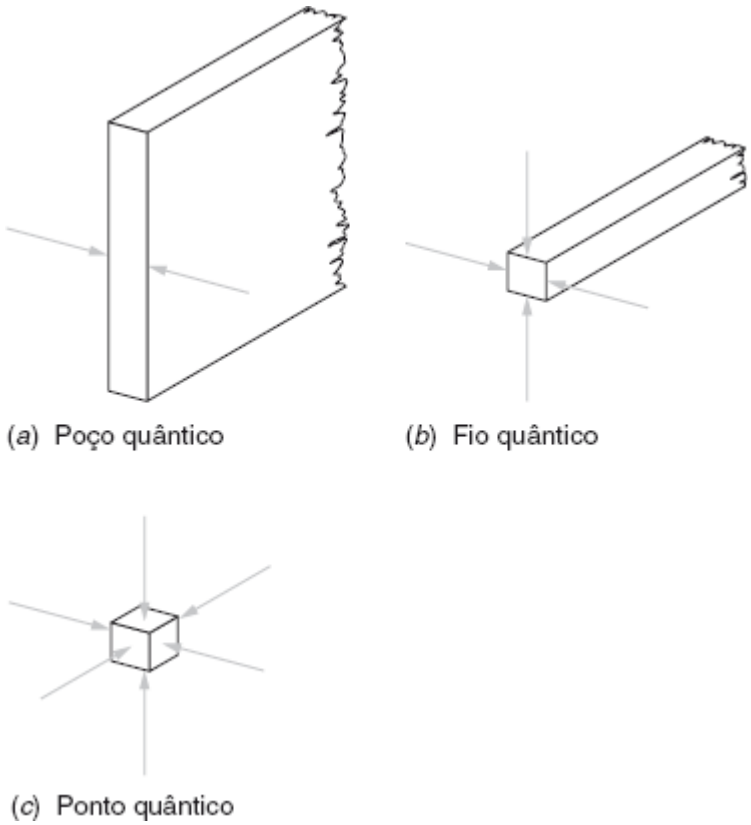


FIGURA 10-24 (*a*) Em um poço quântico, como, por exemplo, uma fina camada de material condutor entre dois isolantes, o movimento dos elétrons é limitado em uma direção. (*b*) Em um fio quântico, o movimento dos elétrons é limitado em duas direções. (*c*) Em um ponto quântico, o movimento dos elétrons é limitado nas três direções.

Atualmente, os poços quânticos são usados para construir os lasers semicondutores que fazem parte dos aparelhos de CD e DVD e das leitoras de código de barras. Os pontos quânticos talvez venham a ser usados em dispositivos de memória e em *computadores quânticos*, que teriam uma capacidade de processamento muito maior que os computadores atuais. Os fios quânticos permitiriam aumentar substancialmente a velocidade dos elétrons em direções escolhidas, o que, por sua vez, tornaria mais rápida a transferência de informações nos circuitos dos computadores.



Leitura Suplementar

Uma alternativa ao modelo de Kronig-Penney é o uso de uma extensão do modelo das ligações moleculares, discutido na Seção 9-2, para calcular as bandas de energia em sólidos. Este modelo é apresentado sucintamente na Leitura Suplementar *Bandas de Energia em Sólidos – Uma Abordagem Alternativa*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Figuras 10-25 e 10-26.

10-7 Semicondutores Dopados

A maioria dos dispositivos semicondutores, como os diodos e os transistores, utiliza *semicondutores dopados*, que são criados pela adição controlada de certas impurezas aos semicondutores intrínsecos, um processo conhecido como *dopagem*. A Figura 10-27*a* mostra a estrutura cristalina do silício puro; a concentração de elétrons na ligação covalente entre dois átomos de silício é mostrada na Figura 10-27*b*. A Figura 10-28*a* é uma representação esquemática do silício dopado com uma pequena concentração de arsênio. Observe que os átomos de arsênio tomam o lugar de alguns dos átomos de silício na rede cristalina. O arsênio tem cinco elétrons de valência na camada $n = 4$, enquanto o silício tem quatro elétrons de valência na camada $n = 3$. Quatro dos cinco elétrons do arsênio formam ligações covalentes com os quatro átomos de silício vizinhos, e o quinto elétron fica frouxamente ligado ao átomo. Este elétron a mais ocupa um nível de energia ligeiramente abaixo da banda de condução e pode ser facilmente excitado para essa banda, onde contribui para a condução de eletricidade. O quinto elétron de valência do átomo de arsênio e o caroço restante formam um sistema semelhante ao átomo de hidrogênio. Assim, a teoria de Bohr (veja a Seção 4-3) pode ser usada para calcular os valores aproximados das energias permitidas para o elétron, contanto que seja levado em conta o fato de que o sistema elétron-íon de arsênio não está isolado de outros átomos, mas faz parte de um sólido cristalino.

Em primeiro lugar, um cristal é um meio com uma alta constante dielétrica; assim, a função potencial (Equação 7-6) que aparece na equação de Schrödinger (Equação 7-7) deve ser substituída[7] por $V(r) = -Zke^2/\kappa r$, onde κ é a constante dielétrica do material e $k = 1/4\pi\varepsilon_0$. Em segundo lugar, a massa do elétron na equação de Schrödinger deve ser substituída pela massa efetiva m^* para levar em conta o fato de que o elétron "enxerga" uma versão tridimensional do potencial periódico da Figura 10-17. A equação de Schrödinger, com essas duas modificações, pode ser resolvida como no Capítulo 7. As energias e os valores médios dos raios das órbitas de Bohr para o quinto elétron do arsênio são dados por

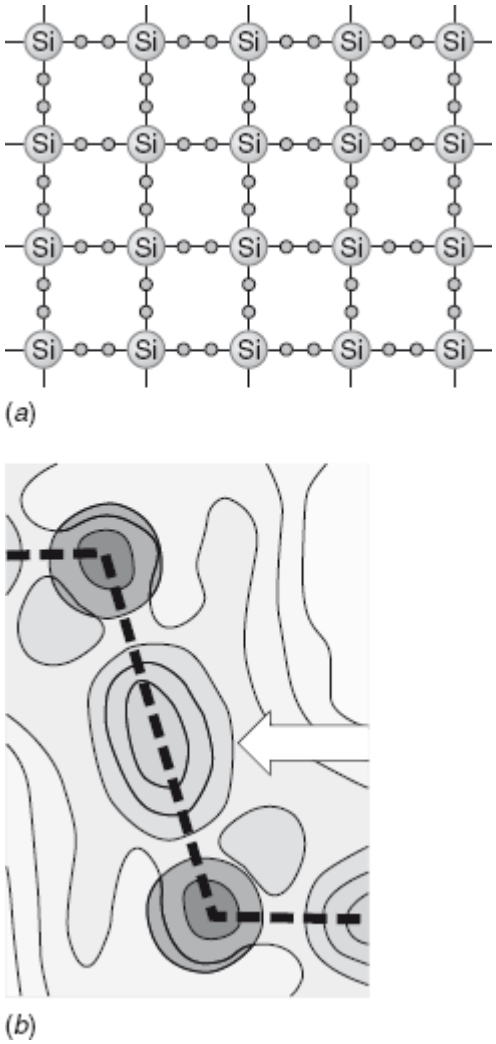


FIGURA 10-27 (*a*) Representação bidimensional de um cristal de silício. Cada átomo forma ligações covalentes com quatro vizinhos, compartilhando com cada um deles um dos quatro elétrons de valência. (*b*) Medida por espalhamento de raios X da concentração de elétrons nas vizinhanças de dois átomos de um cristal de silício. A seta mostra a região de alta concentração de elétrons da ligação covalente. [Adaptado de Y.W. Yang e P. *Coppens, Solid State Commun*., **15**, 1555 (1974).]

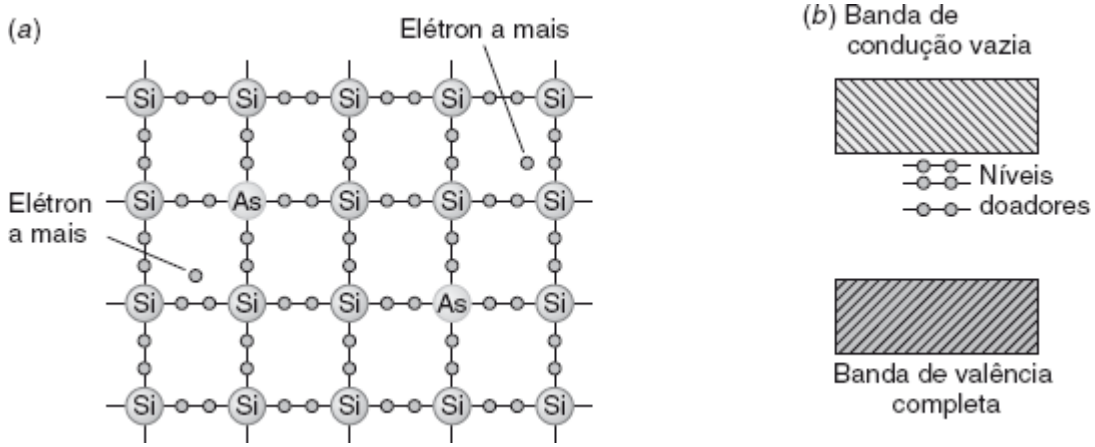


FIGURA 10-28 (*a*) Representação bidimensional de um cristal de silício dopado com arsênio. Como o arsênio tem cinco elétrons de valência, um desses elétrons não forma ligações covalentes com os átomos vizinhos de silício e pode ser excitado facilmente para a banda de condução, onde passa a contribuir para a condução de eletricidade. (*b*) Estrutura de bandas de um semicondutor tipo *n*, como o silício dopado com arsênio. Os átomos de impurezas doadoras ocupam níveis de energia na banda proibida, logo abaixo da banda de condução.

Os átomos que estão nesses níveis doam elétrons para a banda de condução.

$$E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{\hbar}\right)^2 \frac{m_e}{n^2} \times \frac{m^*}{m_e} \times \frac{1}{\kappa^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{\hbar}\right)^2 \frac{m^*}{\kappa^2}\frac{1}{n^2} \quad \textbf{10-43}$$

$$\langle r_n \rangle = a_0 n^2 \times \frac{m_e}{m^*} \times \kappa \quad \textbf{10-44}$$

em que a_0 é o raio de Bohr, igual a 0,0529 nm (Equação 4-19), e n é o número quântico principal.

Para saber onde estão os níveis do quinto elétron do arsênio em relação às bandas do silício, lembre-se de que, quando o átomo de arsênio é ionizado, ou seja, quando o quinto elétron é removido, esse elétron se torna livre para participar da condução de eletricidade, isto é, passa a ocupar a banda de condução. Isso significa que o nível $E_\infty = 0$ coincide com a base da banda de condução e os outros níveis E_n estão na banda proibida. A energia do estado fundamental, E_1, pode ser determinada a partir dos valores experimentais da massa efetiva dos elétrons no silício, $0{,}2m_e$, e da constante dielétrica do silício, $\kappa = 11{,}8$ (Tabela 10-4). Substituindo esses valores na Equação 10-43, obtemos $E_1 = -0{,}020$ eV em relação à base da banda de condução, um valor muito menor que a energia do estado fundamental do hidrogênio, −13,6 eV (veja a Seção 7-2). Substituindo os mesmos valores na Equação 10-44, obtemos $\langle r_1 \rangle = 3{,}1$ nm, um valor 60 vezes maior que o raio do átomo de hidrogênio no estado fundamental.[8] Os níveis do quinto elétron de valência do arsênio, como mostra a Figura 10-28*b*, estão muito próximos da banda de condução e o elétron pode facilmente ser excitado para a banda de condução, já que sua energia de ionização é comparável à energia térmica kT à temperatura ambiente.

Os níveis de energia como os do átomo de arsênio, próximos da banda de condução, recebem o nome de *níveis doadores* porque esses átomos doam elétrons para a banda de condução. Um semicondutor dopado com impurezas pentavalentes é conhecido como *semicondutor tipo n* porque os portadores em maioria são elétrons, ou seja, partículas *negativas*. É muito fácil controlar a condutividade de um semicondutor dopado, já que depende da concentração dos átomos da impureza. A adição de apenas algumas partes por milhão de uma impureza pode resultar em um aumento de várias ordens de grandeza na condutividade.

Outro tipo de semicondutor dopado pode ser obtido substituindo alguns átomos de silício na rede cristalina por átomos de uma impureza com o gálio, que possui três elétrons de valência (Figura 10-29*a*). O átomo de gálio aceita um elétron da banda de valência do silício para completar quatro ligações covalentes com átomos vizinhos de silício, criando assim um buraco na banda de valência. A Figura 10-29*b* mostra os níveis de energia introduzidos no cristal de silício pela dopagem com gálio. Os níveis vazios logo acima da banda de valência se devem aos buracos associados aos átomos de gálio. Esses níveis recebem o nome de *níveis aceitadores* porque os átomos de gálio aceitam elétrons da banda de valência. No estado neutro, os átomos de gálio podem ser considerados como um caroço negativo em torno do qual orbita um buraco, do mesmo modo como os átomos de arsênio podem ser considerados como um caroço positivo em torno do qual orbita um elétron. Assim, o conjunto buraco-íon de gálio também constitui um sistema semelhante ao átomo de hidrogênio. Os níveis de energia e os valores médios dos raios das órbitas de Bohr do buraco podem ser calculados usando o modelo de Bohr; os resultados são novamente dados pela Equação 10-43. Em diagramas de níveis de energia como os das Figuras 10-28*b* e 10-29*b*, um aumento da energia dos elétrons é representado por um deslocamento para cima e um aumento da energia dos buracos por um deslocamento para baixo; ionizar o sistema buraco-íon de gálio significa transferir o buraco para a banda de valência. Os níveis de energia introduzidos pelos átomos de gálio na rede cristalina no silício estão logo acima do topo da banda de valência (Figura 10-29*b*). Transferir buracos dos íons de gálio para a banda de valência equivale a transferir elétrons da banda de valência para os níveis aceitadores. Com isso, são criados buracos na banda de valência, que contribuem para a condução de eletricidade. Um semicondutor dopado com impurezas trivalentes é conhecido como *semicondutor tipo p* porque os portadores em maioria são buracos, ou seja, partículas *positivas*. O fato de que a condução nos semicondutores tipo *p* se deve principalmente ao movimento de buracos é confirmado pelo efeito Hall, que será discutido na próxima Seção Exploratória.

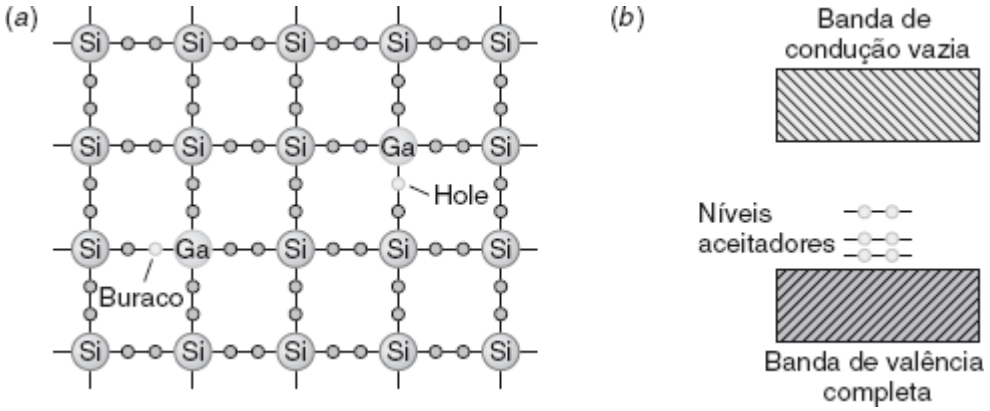


FIGURA 10-29 (*a*) Representação bidimensional de um cristal de silício dopado com gálio. Como o gálio tem três elétrons de valência, existe um buraco nas ligações covalentes de um átomo de gálio com os átomos vizinhos de silício. Esse buraco pode se mover pelo cristal, contribuindo para a condução de eletricidade. (*b*) Estrutura de bandas de um semicondutor tipo *p*, como o silício dopado com gálio. Os átomos de impurezas aceitadoras ocupam níveis de energia na banda proibida, logo acima da banda de valência. Os átomos que estão nesses níveis aceitam elétrons da banda de valência.

EXEMPLO 10-9 **Energia de Ionização dos Doadores no Germânio** se o fósforo, uma impureza pentavalente, é usado para dopar o germânio, formando um semicondutor tipo *n*, qual é a energia de ionização do fósforo? Qual é o raio da órbita do quinto elétron? (A massa efetiva dos elétrons no germânio é $0{,}1m_e$.)

SOLUÇÃO

1. A energia de ionização pode ser determinada fazendo $n = 1$ na Equação 10-43:

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{ke^2}{\hbar}\right)^2 \frac{m^*}{\kappa^2}$$

2. A constante dielétrica do germânio é dada na Tabela 10-4:

$$\kappa = 15{,}9$$

3. Introduzindo valores numéricos na equação do item (1), obtemos:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{9 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2} \times (1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}\right)^2 \\ &\quad \times \frac{(0{,}1 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})}{(15{,}9)^2} \\ &= 8{,}6 \times 10^{-22}\,\mathrm{J} = 5{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV} \end{aligned}$$

4. O raio da órbita do quinto elétron do fósforo pode ser determinado fazendo $n = 1$ na Equação 10-44:

$$\langle r_1 \rangle = a_0 \frac{m_e}{m^*}\kappa$$

5. Introduzindo valores numéricos na equação do item (4), temos:

$$\begin{aligned} \langle r_1 \rangle &= 0{,}0529 \times \frac{m_e}{0{,}1m_e} \times 15{,}9 \\ &= 8{,}4\,\mathrm{nm} \end{aligned}$$

Observação: *Apesar de todas as aproximações envolvidas, o valor de E_1 calculado neste exemplo é da mesma ordem que o valor experimental, $12{,}0 \times 10^{-3}$* eV.

SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Efeito Hall

Em geral, a concentração de elétrons nos semicondutores dopados tipo *n*, bem como a concentração de buracos nos semicondutores dopados tipo *p*, é muito maior que a concentração de pares elétron-buraco nos semicondutores intrínsecos, criados por excitação térmica de elétrons da banda de valência para a banda de condução. Quando um semicondutor dopado é submetido a um campo elétrico, a corrente resultante é constituída por portadores em maioria (elétrons nos semicondutores tipo *n*, buracos nos semicondutores tipo *p*) e portadores em minoria. O fato de que os buracos se comportam como partículas positivas do ponto de vista da condução de eletricidade é confirmado pelo efeito Hall, ilustrado na Figura 10-30*a*. Na figura, uma placa fina de material semicondutor é ligada a uma fonte de tensão (que não aparece no desenho) e atravessada por uma corrente elétrica cujo sentido é da esquerda para a direita. Um campo magnético uniforme *B* é aplicado perpendicularmente à direção da corrente. Para os sentidos da corrente e do campo magnético mostrados na figura, a força magnética $q\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ experimentada por uma partícula carregada em movimento (na qual $\mathbf{v}_d$ é a velocidade de deriva) é para cima, quer a corrente esteja associada a uma carga positiva se movendo da esquerda para a direita ou a uma carga negativa se movendo da direita para a esquerda. Se os portadores em maioria são elétrons, como na Figura 10-30*b*, a força magnética faz com que os elétrons se concentrem na parte de cima da placa, deixando a parte de baixo com um excesso de cargas positivas. O processo continua até que o campo elétrico $\mathscr{E}$ causado pela separação das cargas submeta os portadores a uma força que compense a força magnética. A condição de equilíbrio é, portanto, $q\mathscr{E} = qv_dB$. Se *w* é a largura da placa, existe uma diferença de potencial

$$V_H = \mathscr{E}w = v_dBw \qquad \textbf{10-45}$$

entre a parte superior e a parte inferior da placa, conhecida como *tensão de Hall*, que pode ser medida com um voltímetro. A polaridade da diferença de potencial (ou seja, o fato de a parte superior da placa ser mais positiva ou mais negativa que a parte inferior) indica o sinal dos portadores em maioria. Medidas desse tipo revelam que, de fato, os portadores em maioria são elétrons nos semicondutores tipo *n* e buracos nos semicondutores tipo *p*. Conhecendo o valor experimental da tensão de Hall, é possível calcular a velocidade de deriva v_d. Como a densidade de corrente $j = nqv_d$ pode ser calculada, de forma independente, a partir do valor experimental da corrente e da área da seção reta da placa, a medida da tensão de Hall permite determinar o valor de *n*, a concentração de portadores em maioria.

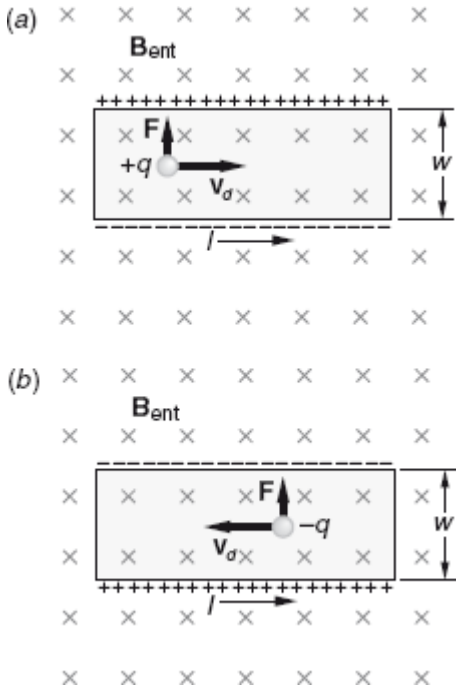


FIGURA 10-30 O efeito Hall. Para os sentidos de corrente e campo magnético indicados na figura, a força a que são submetidos os portadores é para cima, tanto quando os portadores são buracos que se movem para a direita (*a*) como quando são elétrons que se movem para a esquerda (*b*). O tipo de portador pode ser determinado pelo sinal da diferença de potencial entre a parte superior e a parte inferior da placa, e a velocidade de deriva pode ser calculada a partir do valor absoluto da diferença de potencial. A espessura *t* da placa não está indicada na figura.

As sondas de efeito Hall são muito usadas para medir campos magnéticos. Fazendo passar uma corrente conhecida em uma tira metálica de dimensões conhecidas e com uma concentração conhecida de portadores, é possível determinar o valor do campo magnético a partir da tensão de Hall (veja a Equação 10-46).

EXEMPLO 10-10 **Efeito Hall no Alumínio** Uma placa de alumínio de largura $w = 1,5$ cm e espessura $t = 250$ μm é submetida a um campo magnético uniforme de 0,55 T perpendicular ao plano da placa. Quando a placa é atravessada por uma corrente de 25 A, uma tensão de 1,64 μV é medida entre os lados da placa. Qual é a concentração de elétrons no alumínio e quantos portadores existem, em média, por átomo?

SOLUÇÃO

Substituindo na Equação 10-45 a velocidade de deriva v_d por seu valor em termos da densidade de corrente (Equação 10-11), temos:

$$V_H = v_d B w = \frac{jBw}{nq} = \frac{iB}{qnt} \qquad \textbf{10-46}$$

pois $j = i/wt$. A concentração de portadores no alumínio é, portanto,

$$n = \frac{iB}{qtV_H} = \frac{(25\text{ A})(0,55\text{ T})}{(1,60 \times 10^{-19}\text{ C})(250 \times 10^{-6}\text{ m})(1,64 \times 10^{-6}\text{ V})}$$
$$= 2,10 \times 10^{29}\text{ portadores/m}^3$$

Como a densidade do alumínio ρ(Al) é $2,72 \times 10^3$ kg/m^3 e a massa molar M é 26,98 kg/mol, a concentração N de átomos é dada por

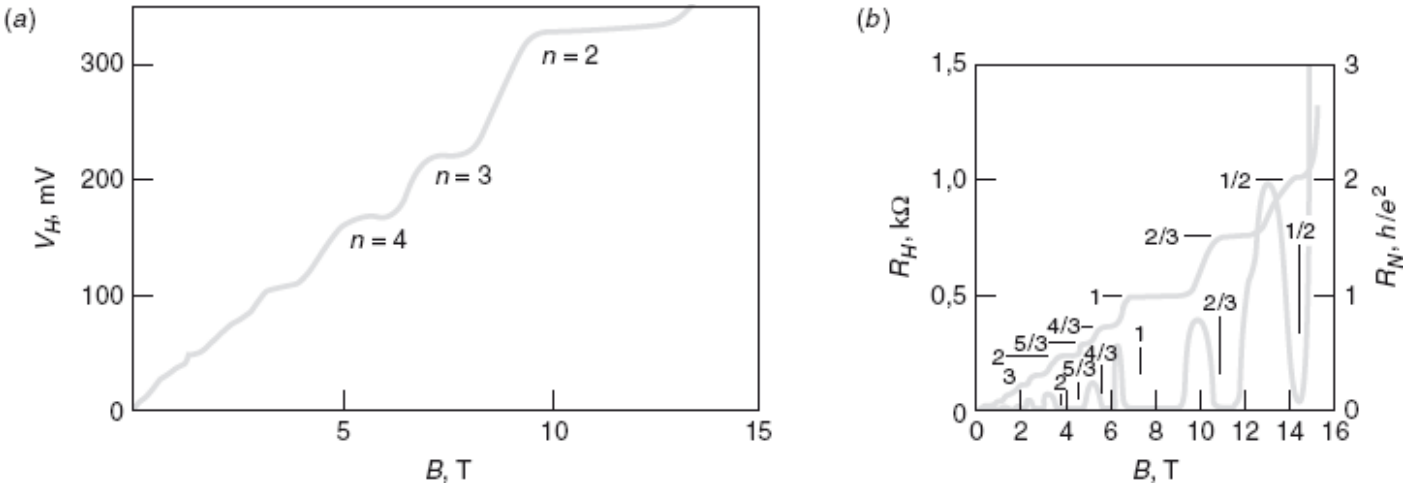


FIGURA 10-31 (*a*) A presença de patamares no gráfico da tensão de Hall em função do campo magnético aplicado mostra que a tensão de Hall é quantizada. Os dados foram obtidos a uma temperatura de 1,39 K, com a corrente i mantida fixa em um valor de 25,52 μA. (*b*) O efeito Hall quantizado fracionário. Os valores da resistência de Hall R_H (curva de cima) estão indicados na escala da esquerda e os valores da resistência normal R_N (curva de baixo) na escala da direita. [*Dados colhidos por Y. W. Suen e colaboradores da Princeton University*.]

$$N = \frac{N_A \rho}{M} = \frac{(6,02 \times 10^{26}\text{ átomos/mol})(2.702 \times 10^3\text{ kg/m}^3)}{26,98\text{ kg/mol}}$$
$$= 6,02 \times 10^{28}\text{ átomos/m}^3$$

Assim, cada átomo de alumínio contribui em média com $n/N = 3,5$ portadores.

O Efeito Hall Quantizado

De acordo com a Equação 10-46, a tensão de Hall deveria aumentar linearmente com o campo magnético se a corrente fosse mantida constante. Em 1980, quando estudava o efeito Hall em filmes finos semicondutores em temperaturas muito baixas, Klaus von Klitzing[9] descobriu que o gráfico de V_H em função de B *não é* linear, mas apresenta uma série de patamares, como na Figura 10-31*a*. Em outras palavras, a tensão de Hall é quantizada. Mais corretamente, definindo a resistência de Hall através da equação $R_H = V_H/i$, é a resistência de Hall que é quantizada, assumindo apenas os valores

$$R_H = \frac{V_H}{i} = \frac{R_K}{n} \qquad \textbf{10-47}$$

em que R_K, a *constante de von Klitzing*, é dada por

$$R_K = \frac{h}{e^2} = \frac{6{,}626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C})^2} = 25.813\ \Omega \quad \textbf{10-48}$$

Os valores de n observados por von Klitzing eram pequenos números inteiros positivos (n = 1, 2, 3, . . .), como mostra a Figura 10-31*a*. Em 1982, Daniel Tsui e colaboradores,[10] quando investigavam o efeito Hall quantizado em semicondutores de alta pureza, descobriram valores quantizados da resistência de Hall associados a valores de λ que eram frações racionais formadas por pequenos números inteiros. Até o momento, foram observados mais de 30 valores de R_H da forma a/b, em que a e b são números primos entre si. Vários desses valores podem ser vistos na Figura 10-31*b*.

A descoberta de von Klitzing ficou conhecida como *efeito Hall quantizado integral* (EHQI), enquanto a de Tsui e colaboradores recebeu o nome de *efeito Hall quantizado fracionário* (EHQF). Os modelos teóricos propostos para explicar os dois fenômenos ainda estão incompletos, e, de qualquer forma, são complexos demais para serem discutidos aqui; por essa razão, vamos apresentar apenas uma breve descrição qualitativa do EHQI. No efeito Hall "normal", a amostra é atravessada por uma corrente i ao ser submetida a um campo elétrico $\mathscr{E}$. O campo elétrico é perpendicular ao campo magnético aplicado **B**; em consequência, os portadores descrevem trajetórias circulares, ou órbitas, cujo raio é dado por $r = m^*n/qB$. O fato de que os elétrons obedecem ao princípio de exclusão de Pauli impede que as órbitas se cruzem; portanto, não permite que os elétrons se acumulem além de um certo limite no lado negativo da amostra. Como o movimento orbital dos elétrons é quantizado (as únicas órbitas permitidas são aquelas para as quais o comprimento da órbita é igual a um número inteiro de comprimentos de onda do elétron), o aumento do campo magnético faz diminuir o raio das órbitas eletrônicas, mas a diminuição acontece de forma descontínua. Com a redução do raio, um número maior de elétrons pode ser acomodado nas proximidades da superfície da amostra e a concentração de portadores aumenta nessa região, o que aumenta a probabilidade de colisões e, portanto, a resistência de Hall. Surpreendentemente, nas regiões do gráfico da resistência de Hall em função do campo magnético em que a resistência de Hall é constante, a resistência comum $R = V/i$ se anula, como mostra a curva inferior da Figura 10-31*b*. Os degraus adicionais que aparecem no EHQF se devem às interações entre os spins dos elétrons.

Como a constante de von Klitzing pode ser medida com uma precisão maior que 1 parte em 10^{10}, o efeito Hall quantizado é usado hoje em dia para definir a unidade de resistência. Atualmente, o ohm é definido como uma resistência tal que o valor de R_K é 25.812,807 Ω.

Efeito Hall de Spin

Novas possibilidades para a spintrônica foram abertas em 2004 com a descoberta do efeito Hall de spin no GaAs a 20 K por David Awschlom e colaboradores. Neste efeito, a aplicação de um campo magnético faz com que a corrente elétrica em um semicondutor se divida em duas componentes, com os elétrons com o spin para cima e os elétrons com o spin para baixo se acumulando em lados opostos da amostra. Em 2006, o fenômeno foi observado no ZeSe à temperatura ambiente (295 K) pelos mesmos pesquisadores. Se os esforços atuais para intensificar o efeito forem bem-sucedidos, será possível construir dispositivos análogos aos atuais transistores nos quais o spin dos elétrons desempenhará o papel desempenhado atualmente pela carga elétrica, com grandes vantagens em termos de miniaturização e velocidade de resposta. Mais recentemente, em 2010, E. S. Garlid e colaboradores detectaram diretamente o efeito Hall de spin em InGaAs usando medidas elétricas, uma técnica completamente diferente e mais simples que a usada em experimentos anteriores (veja a Figura 10-32). A nova técnica é acessível a um maior número de pesquisadores e pode ser utilizada em um maior número de aplicações práticas.

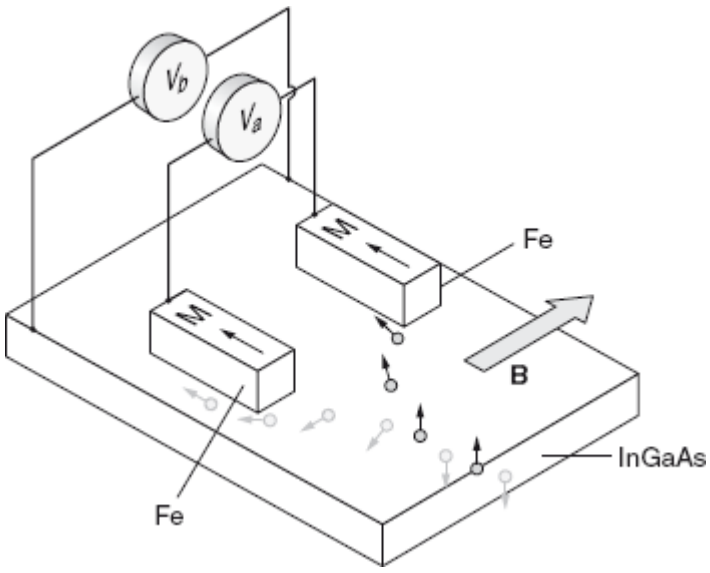


FIGURA 10-32 Duas barras finas paralelas e magnetizadas de Fe são montadas em uma placa de InGaAs. Um campo magnético aplicado **B** separa os spins e os alinha com a magnetização das barras de Fe. O efeito Hall de spin é detectado medindo a diferença de potencial $V_a - V_b$. [Adaptado de J. Sinova, *Physics* **3**, 82 (2010).]

10-8 Junções e Dispositivos Semicondutores

O funcionamento de dispositivos semicondutores como diodos e transistores se baseia em *junções* entre semicondutores tipo *n* e tipo *p*, como a que aparece na Figura 10-33. Na prática, os dois tipos de semicondutores são obtidos no mesmo cristal de silício dopando o material com impurezas doadoras de um lado e impurezas aceitadoras do outro.

Quando um semicondutor tipo *n* e um semicondutor tipo *p* são postos em contato, a concentração desigual de elétrons e buracos promove a difusão de elétrons para o lado *p* e de buracos para o lado *n* até que o equilíbrio seja estabelecido. A difusão de elétrons e buracos dá origem a uma dupla camada de cargas elétricas nas proximidades da junção, associada aos íons dos átomos doadores e aceitadores, semelhante à que existe em um capacitor de placas paralelas. Em consequência, aparece uma diferença de potencial V entre o lado *n* e o lado *p* da junção, conhecida como *potencial de contato*, que impede que a difusão prossiga. Na região da junção existem poucos elétrons e buracos e, portanto, a região possui uma alta resistência. A Figura 10-34 mostra o diagrama de níveis de energia de uma junção *pn*. A região da junção também é chamada de *região de depleção*.

Diodos

Um semicondutor com uma junção *pn* pode ser usado como um diodo retificador. Na Figura 10-35, uma diferença de potencial externa foi aplicada à junção por uma bateria ligada em série com um resistor. Quando o terminal positivo da bateria é ligado ao lado *p* da junção, como na Figura 10-35*a*, dizemos que o diodo está submetido a uma *polarização direta*. A polarização direta diminui a diferença de potencial entre os dois lados da junção, fazendo aumentar a difusão de elétrons e buracos e, portanto, produzindo uma corrente no circuito. Quando o terminal positivo da bateria é ligado ao lado *n* da junção, como na Figura 10-35*b*, dizemos que o diodo está submetido a uma *polarização inversa*. A polarização inversa aumenta a diferença de potencial entre os lados da junção, inibindo ainda mais a difusão. A Figura 10-36 mostra um gráfico da corrente em função da tensão para uma junção semicondutora típica. Para todos os efeitos práticos, a junção conduz corrente apenas em um sentido, comportando-se da mesma forma que as antigas válvulas diodo. Os diodos semicondutores substituíram as válvulas diodo em todas as aplicações, exceto as que envolvem correntes muito elevadas.

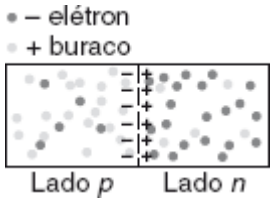


FIGURA 10-33 Junção *pn*. Por causa da diferença de concentrações, os buracos se difundem do lado *p* para o lado *n* e os elétrons se difundem do lado *n* para o lado *p*; em consequência, aparece uma camada dupla de cargas na junção, com cargas negativas do lado *p* e cargas positivas do lado *n*.

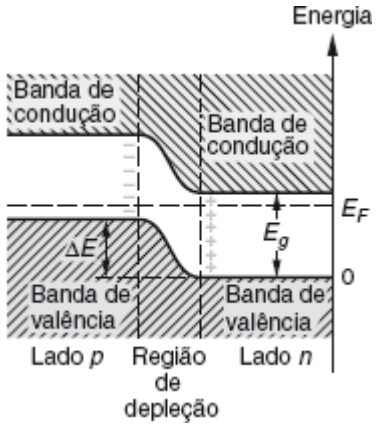


FIGURA 10-34 Níveis de energia dos elétrons em uma junção *pn* não polarizada.

Podemos ter uma ideia quantitativa de como a corrente depende da tensão aplicada, supondo que as concentrações de elétrons e buracos podem ser descritas aproximadamente pela distribuição de Maxwell-Boltzmann. Seja N_e o número de elétrons livres na região *n*. Na ausência de uma tensão externa, apenas uma pequena fração desses elétrons, dada por $N_e e^{-eV/kT}$, tem energia suficiente para vencer o potencial de contato associado aos íons das impurezas. Quando uma tensão direta V_b é

aplicada, o número de elétrons que passam para o outro lado da junção se torna

$$N_e e^{-e(V-V_b)/kT} = \left(N_e e^{-eV/kT}\right) e^{+eV_b/kT}$$

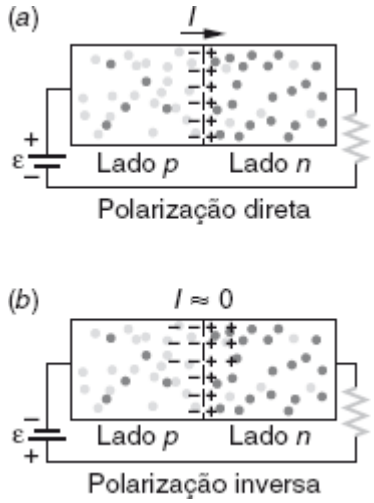


FIGURA 10-35 Junção *pn* polarizada. (*a*) Polarização direta. A tensão aplicada aumenta a difusão de buracos do lado *p* para o lado *n* e a difusão de elétrons do lado *n* para o lado *p*, produzindo uma corrente *I*. (*b*) Polarização inversa. A tensão aplicada se opõe à difusão de buracos e elétrons e a corrente é praticamente nula.

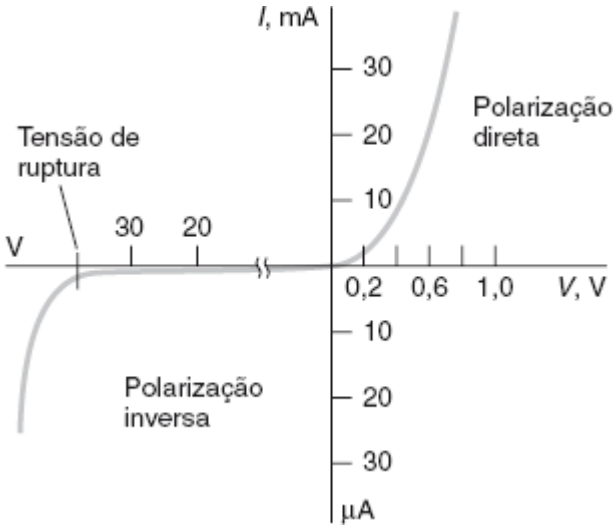


FIGURA 10-36 Curva característica corrente-tensão de uma junção *pn*. Note que as escalas de corrente são diferentes para a polarização direta e a polarização inversa.

A corrente associada a esses elétrons é dada por

$$I = I_0 e^{+eV_b/kT}$$

na qual I_0 é a corrente associada aos elétrons que passam do lado *n* para o lado *p* na ausência de uma tensão externa. Como a corrente deve ser nula na ausência de tensão aplicada, existe também uma corrente $-I_0$ associada aos elétrons que passam do lado *p* para o lado *n*. (Esta corrente é a mesma, quer a junção esteja polarizada ou não.) A corrente total de elétrons do lado *n* para o lado *p* é, portanto,

$$I_{\text{net}} = I_0\left(e^{+eV_b/kT} - 1\right) \qquad \textbf{10-49}$$

Quando calculamos a corrente total de buracos do lado *p* para o lado *n*, obtemos o mesmo resultado. Podemos usar a Equação 10-49 para calcular a corrente total que atravessa uma junção *pn* se interpretarmos I_0 como a corrente total associada aos dois tipos de portadores em minoria, buracos do lado *n* e elétrons do lado *p*. No caso de uma tensão V_b positiva, a corrente aumenta rapidamente com a tensão. Para $V_b = 0$, $I = 0$; para $V_b < 0$, a corrente satura em $-I_0$. Observe na Figura 10-36 que a corrente aumenta bruscamente quando a tensão inversa aplicada ultrapassa um certo limite; é a chamada *ruptura* da junção. A ruptura de uma junção pode acontecer por dois motivos. Na *ruptura Zener*, os elétrons são arrancados das ligações covalentes pelos intensos campos elétricos associados à tensão inversa aplicada; na *ruptura por avalanche*, os poucos portadores

existentes, ao serem acelerados pelo campo elétrico, adquirem energia suficiente para romper ligações covalentes, produzindo outros portadores, que, por sua vez, são acelerados pelo campo elétrico, e assim por diante, até que a concentração de portadores atinja níveis muito elevados. Embora a ruptura de uma junção possa ser desastrosa em circunstâncias normais, o fato de que acontece para um valor bem definido de tensão inversa serve de base para o funcionamento de um diodo especial usado como referência de tensão, o *diodo Zener*.

Um efeito interessante, que vamos discutir apenas qualitativamente, acontece quando o lado *n* e o lado *p* de uma junção *pn* são tão fortemente dopados que a parte inferior da banda de condução fica abaixo da parte superior da banda de valência. A Figura 10-37*a* mostra o diagrama de níveis de energia para esta situação. Como existem estados vazios do lado *p* com a mesma energia que estados ocupados do lado *n*, os elétrons podem atravessar a barreira de potencial por tunelamento (veja a Seção 6-6). A corrente associada a esses elétrons é conhecida como *corrente de tunelamento* e este tipo de diodo recebe o nome de *diodo túnel*.

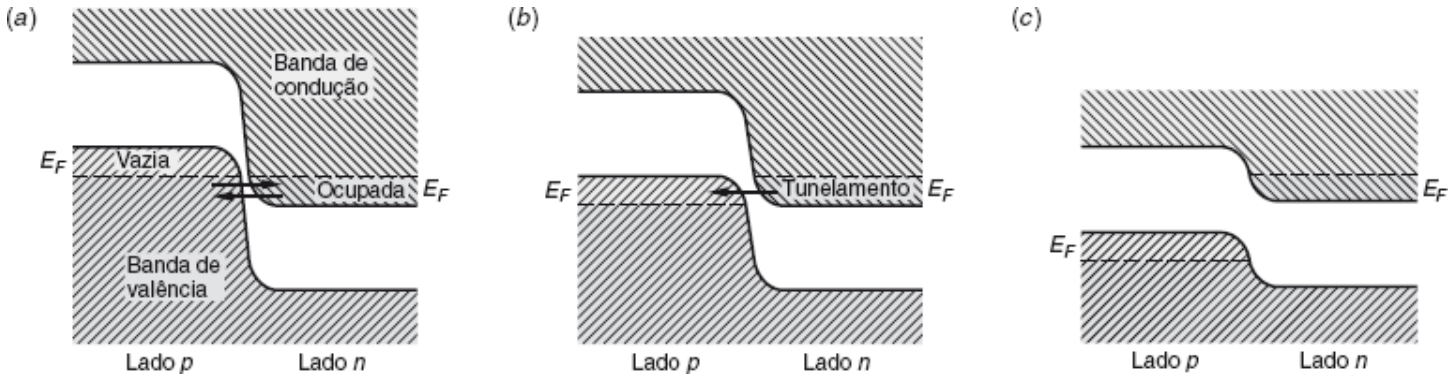


FIGURA 10-37 Níveis de energia dos elétrons em um diodo túnel. (*a*) Na ausência de tensão aplicada, existe uma pequena corrente de tunelamento nos dois sentidos. (*b*) Quando uma pequena tensão direta é aplicada, a corrente de tunelamento aumenta apenas em um sentido e passa a contribuir significativamente para a corrente total. (*c*) Para maiores valores da tensão direta aplicada, a corrente de tunelamento deixa de existir.

Em equilíbrio e na ausência de uma tensão externa, as correntes de tunelamento são iguais nos dois sentidos. Quando uma pequena tensão externa é aplicada à junção, o diagrama de níveis de energia passa a ser o da Figura 10-37*b*, e a corrente de tunelamento do lado *n* para o lado *p* se torna maior que a corrente no sentido oposto. A corrente total é a soma da corrente de tunelamento com a corrente normal de uma junção *pn* polarizada diretamente. Quando a tensão externa aumenta, o diagrama de níveis de energia passa a ser o da Figura 10-37*c*, e a corrente de tunelamento deixa de existir porque não existem mais estados do lado *p* com a mesma energia que estados do lado *n*. Assim, embora a corrente normal tenha aumentado, a corrente total diminui. Para tensões externas ainda maiores, a corrente total volta a aumentar por causa do aumento da corrente normal de uma junção *pn* com a tensão aplicada. A Figura 10-38 mostra a curva característica corrente-tensão de um diodo túnel. Os diodos túnel são usados em circuitos eletrônicos especiais por causa do tempo de resposta extremamente curto. Quando um diodo túnel está operando perto do máximo da curva corrente-tensão, uma pequena variação da tensão produz uma grande variação da corrente.

Entre as muitas aplicações das junções *pn* estão os detectores de partículas conhecidos como *detectores de barreira de superfície*. Neste tipo de dispositivo, uma junção *pn* é submetida a uma tensão inversa relativamente elevada, de modo que a corrente é praticamente nula na ausência de radiação. Ao atravessar o semicondutor, uma partícula de alta energia, como um elétron ou um fóton, quebra ligações covalentes, criando muitos pares elétron-buraco. O campo elétrico existente no interior do dispositivo transporta os elétrons para o lado *n* da junção, que está ligado ao terminal positivo da fonte de tensão, e os buracos para o lado *p*, que está ligado ao terminal negativo. O pulso de corrente resultante indica a passagem da partícula e a intensidade do pulso é proporcional à energia da partícula. Os pulsos são de curta duração (10^{-8} a 10^{-7} s), o que possibilita a medida da energia da partícula com alta resolução.

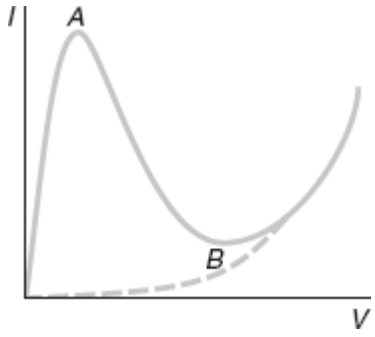


FIGURA 10-38 Curva característica corrente-tensão de um diodo túnel. Até o ponto *A*, um aumento da tensão aplicada produz um aumento da corrente normal e da corrente de tunelamento. Entre os pontos *A* e *B*, um aumento da tensão aplicada produz uma diminuição da corrente de tunelamento e o diodo se comporta como se a resistência fosse negativa. Depois do ponto *B*, a corrente de tunelamento se torna tão pequena que pode ser ignorada e o diodo passa a se comportar como um diodo comum, cuja curva característica até o ponto *B* está indicada pela linha tracejada.

As junções *pn* também podem ser usadas em dispositivos para emissão e absorção de luz visível, com as bandas de condução e de valência desempenhando o mesmo papel que os níveis de energia atômicos nas lâmpadas de vapor de sódio e outros dispositivos que utilizam gases. O princípio de funcionamento da *célula solar* é mostrado esquematicamente na Figura 10-39*a*. Quando um fóton de energia maior que a largura da banda proibida (1,1 eV, no caso do silício) incide na região tipo *p*, um elétron é transferido da banda de valência para a banda de condução, deixando um buraco na banda de valência. Esta região já é rica em buracos. Alguns dos elétrons criados pela luz se recombinam com buracos, mas outros migram até a junção, de onde são transferidos para a região tipo *n* pelo potencial de contato. Isto cria um excesso de cargas negativas na região tipo *n* e um excesso de cargas positivas na região tipo *p*. O resultado é uma diferença de potencial entre as duas regiões, que na prática é de aproximadamente 0,6 V. Se uma resistência de carga é ligada às duas regiões, a resistência é atravessada por uma corrente elétrica, ou seja, parte da energia da luz incidente é transformada em energia elétrica. A corrente no resistor é proporcional ao número de fótons, que, por sua vez, é proporcional à intensidade da luz incidente.

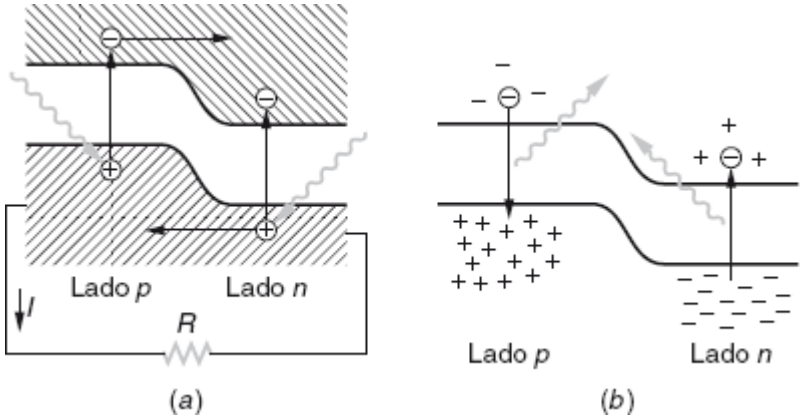


FIGURA 10-39 (*a*) Uso de uma junção *pn* como célula solar. Quando a luz atinge a junção, são criados elétrons e buracos. O campo elétrico intrínseco transporta os elétrons para o lado *n* e os buracos para o lado *p*. O acúmulo de cargas produz uma diferença de potencial que faz passar uma corrente por uma carga externa. (*b*) Uso de uma junção *pn* como LED. Uma tensão externa negativa do lado *n* e positiva do lado *p* faz com que elétrons e buracos sejam repelidos para o centro do dispositivo, onde se recombinam, emitindo luz.

O LED vermelho de InGaAlP, lançado no início da década de 1990, já está presente nas luzes traseiras de muitos automóveis. Mais recentemente, surgiu um LED branco de GaN que talvez venha a ser usado nos faróis dos automóveis em um futuro não muito distante.

O *diodo fotemissor* (LED*) é uma junção *pn* com uma alta polarização direta, de modo que a corrente é elevada e muitos elétrons se recombinam com buracos, emitindo fótons no processo (Figura 10-39*b*), exatamente o contrário do que acontece em uma célula solar, em que a energia dos fótons é usada para criar pares elétron-buraco. Depois da primeira demonstração prática, em 1962, a eficiência dos LEDs progrediu rapidamente (veja a Figura 10-40). Hoje existem LEDs capazes de produzir as três cores primárias e também luz branca, o que possibilita o uso de LEDs para iluminação. Os LEDs também são usados em lâmpadas-piloto, mostradores digitais, painéis de propaganda e nas luzes indicadoras dos automóveis. Nos sinais de trânsito, os conjuntos LEDs verdes, vermelhos e amarelos consomem apenas 10% da potência das lâmpadas incandescentes padrão de 140 W, produzem uma luz mais intensa e são muito mais duráveis. A invenção dos LEDs orgânicos (OLEDs), na década de 1990, foi motivada pelo interesse em construir receptores de televisão e monitores de computador de tela plana leves e baratos. Fabricados a partir de pequenas moléculas orgânicas ou de polímeros, os LEDs orgânicos podem ser produzidos em grandes quantidades por um custo muito menor que os LEDs à base de semicondutores.

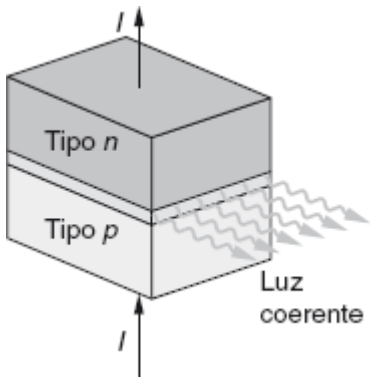


FIGURA 10-41 Uma cavidade ressonante é formada clivando as extremidades de um cristal para formar superfícies paralelas separadas por uma distância apropriada. Os lasers semicondutores são feitos de arsenieto de gálio e compostos semelhantes, que produzem fótons com muito mais eficiência que o silício. Esses dispositivos são capazes de produzir luz a partir de eletricidade com uma eficiência de mais de 50%.

O princípio de funcionamento do *laser semicondutor* é o mesmo do LED; a diferença está no fato de que o dispositivo opera com correntes ainda mais altas, o que produz uma inversão de população suficiente para que a emissão estimulada domine o processo de emissão de luz. Escolhendo uma geometria apropriada, é possível transformar o cristal em uma cavidade ressonante, o que leva à produção de um feixe de luz coerente (Figura 10-41).

Transistores

O transistor, inventado em 1948 por William Shockley, John Bardeen e Walter Brattain,[11] revolucionou a indústria eletrônica e o nosso dia a dia. Um transistor de junção é constituído por três regiões distintas conhecidas como *emissor*, *base* e *coletor*. A base é uma região muito estreita, feita de um tipo de semicondutor e situada entre duas regiões do tipo oposto. O emissor é dopado mais fortemente que a base e o coletor. No transistor *npn*, o emissor e o coletor são semicondutores tipo *n* e a base é um semicondutor tipo *p*; no transistor *pnp*, a base é um semicondutor tipo *n* e o emissor e o coletor são semicondutores tipo *p*. Em um transistor *pnp*, o emissor emite buracos; em um transistor *npn*, o emissor emite elétrons.

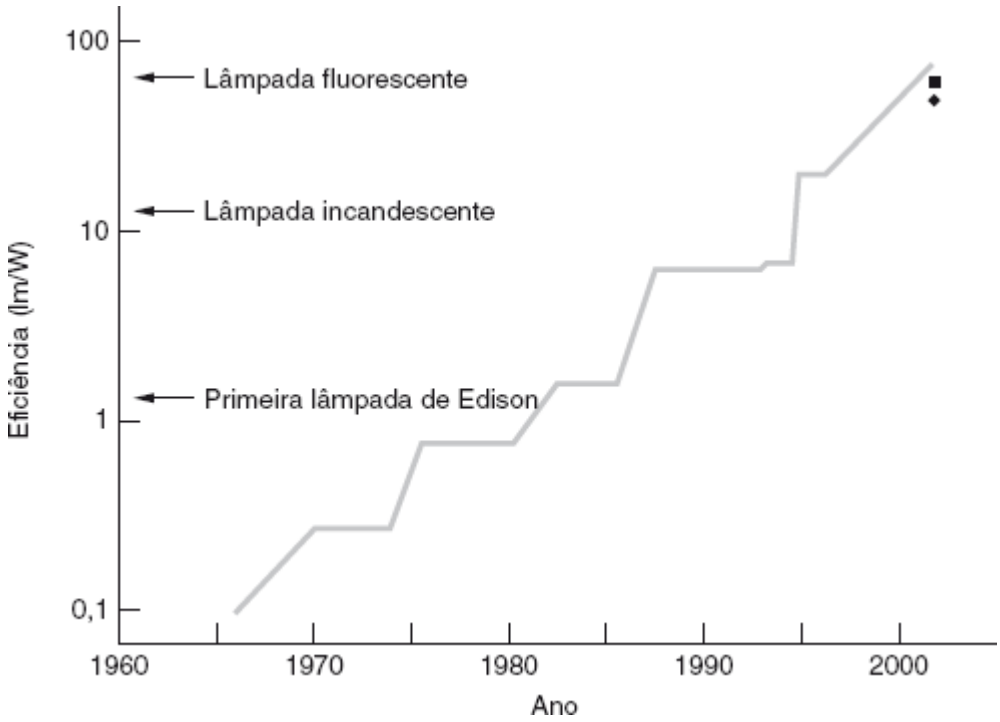


FIGURA 10-40 Evolução da eficiência dos LEDs desde meados da década de 1960. O símbolo ■ assinala a eficiência atual dos LEDs orgânicos de pequenas moléculas; o símbolo ◆, a eficiência atual dos LEDs orgânicos poliméricos. A eficiência de algumas outras fontes luminosas está indicada no eixo vertical.

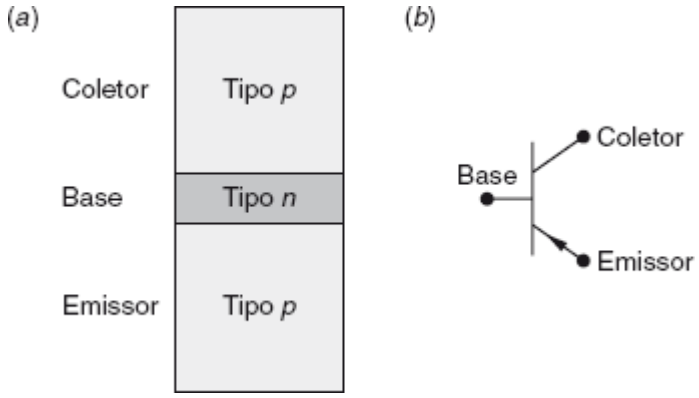


FIGURA 10-42 (*a*) Transistor *pnp*. O emissor emite buracos, que atravessam a base e chegam ao coletor. (*b*) Símbolo esquemático do transistor *pnp*. A seta aponta no sentido convencional da corrente, que é o dos buracos emitidos.

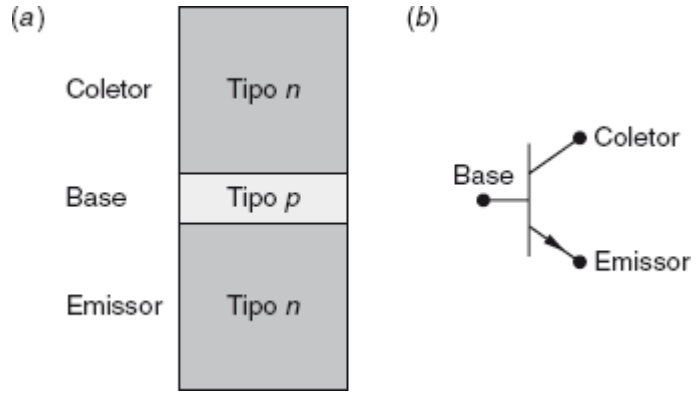


FIGURA 10-43 (*a*) Transistor *npn*. O emissor emite elétrons, que atravessam a base e chegam ao coletor. (*b*) Símbolo esquemático do transistor *npn*. A seta aponta no sentido convencional da corrente, que é o sentido contrário ao dos elétrons emitidos.

As Figuras 10-42 e 10-43 mostram, respectivamente, um transistor *pnp* e um transistor *npn*, juntamente com os símbolos usados para representá-los nos diagramas esquemáticos. Como se pode ver nas figuras, todo transistor contém duas junções *pn*. O funcionamento de um transistor *pnp* é discutido na Leitura Suplementar *Como Funcionam os Transistores*. O transistor *npn* funciona de forma semelhante.



Leitura Suplementar

O princípio de funcionamento dos transistores é discutido na Leitura Suplementar *Como Funcionam os Transistores*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 10-50 a 10-54, o Exemplo 10-11 e as Figuras 10-44 e 10-45.

Exercícios

9. Por que os diodos semicondutores tendem a funcionar pior em altas temperaturas?

10. Explique por que a presença de impurezas em um metal faz diminuir a condutividade, mas a presença de impurezas em um semicondutor faz aumentar a condutividade.

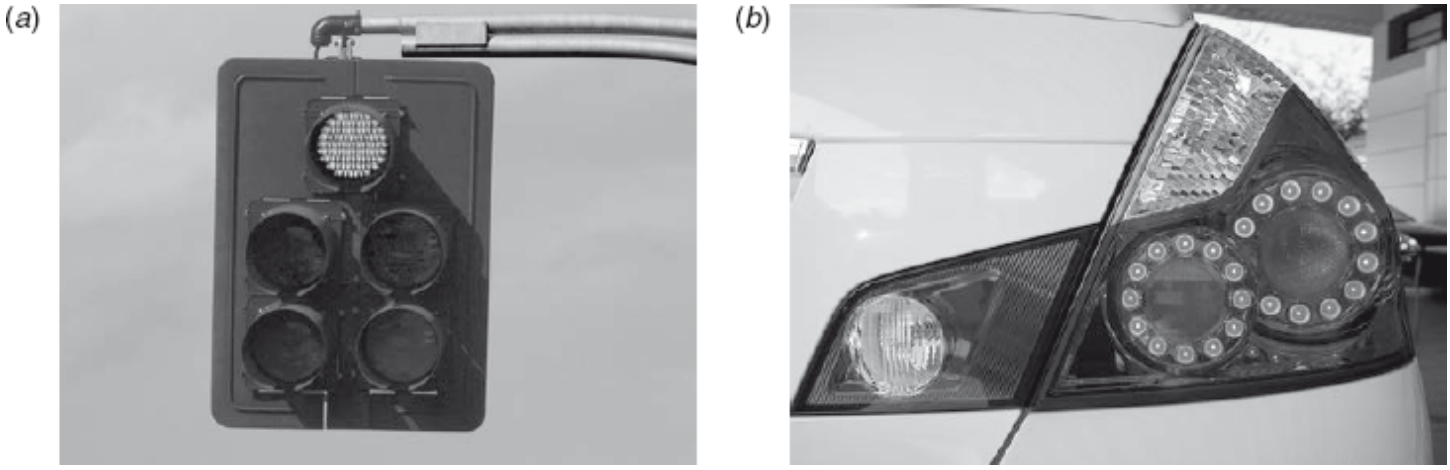
11. Qual é o efeito da presença de impurezas sobre a condutividade de um isolante?

10-9 Supercondutividade

Em 1911, apenas três anos depois de conseguir liquefazer o hélio pela primeira vez, enquanto investigava as propriedades dos materiais em baixas temperaturas, o físico holandês H. Kamerlingh Onnes descobriu que, para alguns materiais, existe uma temperatura, conhecida como *temperatura crítica* e representada pelo símbolo T_c, abaixo da qual a resistividade é nula. Este fenômeno é chamado de *supercondutividade*. A Figura 10-46 mostra o resultado das medidas da resistência do mercúrio em função da temperatura realizadas por Kamerlingh Onnes. No caso do mercúrio, a temperatura crítica é 4,2 K. A temperatura crítica de outros elementos supercondutores varia de menos de 0,1 K para o háfnio e o irídio até 9,2 K para o nióbio. A Tabela 10-5 mostra as temperaturas críticas de vários materiais. A aplicação de um campo magnético a um supercondutor afeta a

temperatura crítica. Como mostra a Figura 10-47, com o aumento do campo magnético, a temperatura crítica diminui. Quando o campo magnético ultrapassa um certo valor crítico B_c, a supercondutividade deixa de existir, qualquer que seja a temperatura. Os valores de T_c que aparecem na tabela são para $B = 0$.

Existem muitos compostos metálicos supercondutores. A liga supercondutora Nb_3Ge, por exemplo, descoberta em 1973, tem uma temperatura crítica de 23,2 K, a mais alta conhecida até 1986, quando o primeiro supercondutor cerâmico de alta temperatura crítica foi descoberto. Mais recentemente, em 2001, Jun Akimitsu descobriu que o composto metálico MgB_2, disponível comercialmente por menos de 2 dólares o grama, é um material supercondutor com uma temperatura crítica de 39 K, a mais alta conhecida até o momento (2013) para supercondutores convencionais (veja a Tabela 10-6). Apesar do custo e do transtorno da refrigeração com hélio líquido, que entra em ebulição a 4,2 K, os materiais supercondutores têm sido usados em várias aplicações, entre as quais a construção de ímãs capazes de produzir campos magnéticos de alta intensidade para uso na medicina (ressonância magnética) e na física (aceleradores de partículas).



(*a*) Os LEDs usados nos sinais de trânsito consomem 10% da energia das lâmpadas antigas de 140 W, duram muito mais e produzem uma luz mais forte. (*b*) Muitos fabricantes já utilizam LEDs nas luzes traseiras e de sinalização dos automóveis. [*Fotos de Francisco Roman*.]

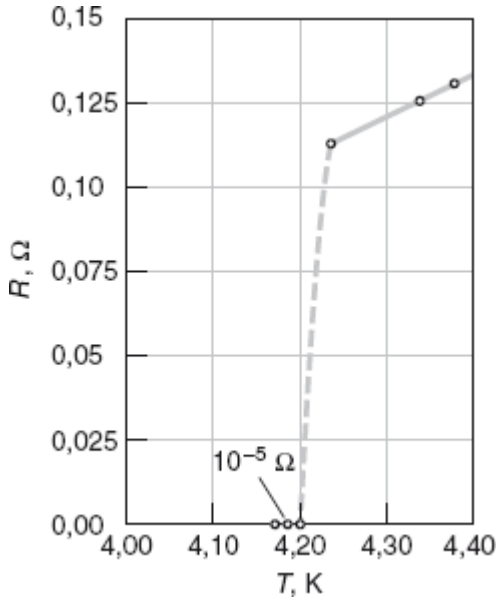


FIGURA 10-46 Gráfico obtido por Kamerlingh Onnes para a resistência do mercúrio em função da temperatura, mostrando uma queda brusca da resistência em $T = 4{,}2$ K que indica a passagem para a fase supercondutora.

Como a resistividade de um supercondutor é nula, pode existir uma corrente no material, mesmo na ausência de campo elétrico. Correntes desse tipo são conhecidas como *supercorrentes*. Os cientistas vêm mantendo supercorrentes há vários anos em anéis supercondutores sem que haja nenhum sinal de dissipação.

Eletroímãs com fios supercondutores são usados para produzir campos magnéticos de alta intensidade em aparelhos de ressonância magnética e em aceleradores de partículas.

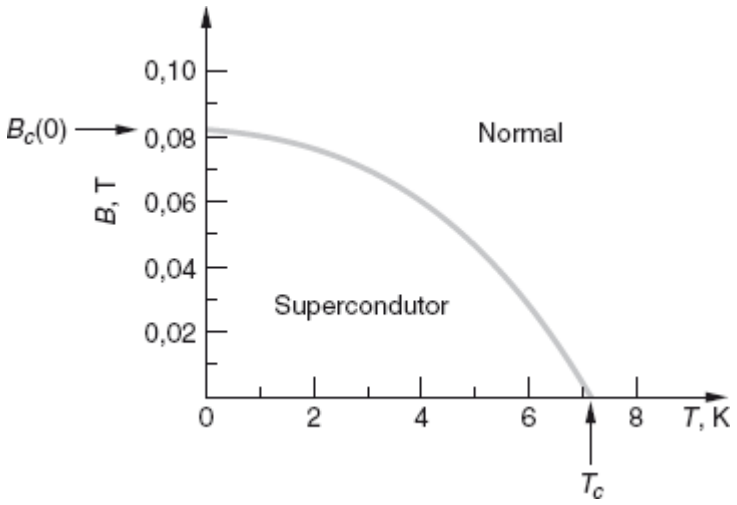


FIGURA 10-47 Variação da temperatura crítica do chumbo com o campo magnético. Note que $T = T_c$ para $B = 0$.

Efeito Meissner

Considere um material supercondutor que esteja inicialmente a uma temperatura maior que a temperatura crítica na presença de um pequeno campo magnético $B < B_c$. Suponha que o material seja resfriado até se tornar supercondutor. Como a resistência se anula ao ser atingida a temperatura crítica, a partir desse instante não pode existir uma fem no supercondutor. Assim, de acordo com a lei de Faraday, o campo magnético no supercondutor não pode variar. Segundo a física clássica, portanto, o campo magnético no interior do supercondutor deveria permanecer constante. De acordo com os resultados experimentais, porém, quando um supercondutor é resfriado até uma temperatura menor que a temperatura crítica na presença de um campo magnético externo, as linhas de campo magnético são expelidas do material, ou seja, o campo magnético no interior do material se anula quando o material se torna um supercondutor (veja a Figura 10-48). Este efeito, descoberto por H. W. Meissner e R. Ochsenfeld em 1933, hoje é conhecido como *efeito Meissner* e se tornou o critério pelo qual o material é considerado um supercondutor. O mecanismo através do qual as linhas de campo magnético são expelidas ou, mais precisamente, canceladas no interior do material é o seguinte: uma supercorrente (denominada corrente de blindagem) é induzida na superfície da peça, com a direção e a intensidade necessárias para cancelar exatamente o campo externo no interior do material.[12] A criação da supercorrente "custa" ao supercondutor uma energia por unidade de volume igual a $B^2/2\mu_0$, na qual μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo. Quando o campo B se torna maior que B_c, não existe energia suficiente para criar a supercorrente e o material volta ao estado normal. A levitação magnética mostrada na fotografia abaixo resulta da interação repulsiva entre o campo magnético de um ímã permanente e o campo magnético produzido pelas correntes induzidas no supercondutor. Apenas os supercondutores chamados *tipo I*, ou "*macios*", exibem o efeito Meissner completo. Quase todos os supercondutores tipo I são elementos metálicos muito puros. A Figura 10-49*a* mostra um gráfico da magnetização M multiplicada por μ_0 em função do campo magnético aplicado B para um supercondutor tipo I. Para campos magnéticos menores que o campo crítico B_c, o campo magnético $\psi_0 M$ induzido no supercondutor é igual e oposto ao campo magnético externo, ou seja, o supercondutor apresenta diamagnetismo perfeito. Os valores de B_c para os supercondutores tipo I são tão pequenos que esses materiais não podem ser usados nos enrolamentos de eletroímãs (veja a Tabela 10-5).

Tabela 10-5Valores de T_c e B_c para alguns supercondutores tipo I e tipo II

Elemento tipo I	T_c (K)	B_c (a 0 K; T)	Composto tipo II	T_c (K)	B_{c2} (a 0 K; T)
Al	1,175	0,0105	Nb_3Sn	18,1	24,5
Cd	0,517	0,0028	Nb_3Ge	23,2	34,5
Hg	4,154	0,411	NbN	16,0	15,3
In	3,408	0,0282	V_3Ga	16,5	35,0

Nb	9,25	0,2060	V_3Si	17,1	15,6
Os	0,66	0,0070	PbMoS	14,4	6,0
Pb	7,196	0,0803	CNb_2	9,1	0,06
Sn	3,722	0,0305	MgB_2	39,0	16
Tl	2,38	0,0178	Rb_3C_{60}	29,0	?
Zn	0,85	0,0054	Cs_2RbC_{60}	33,0	?

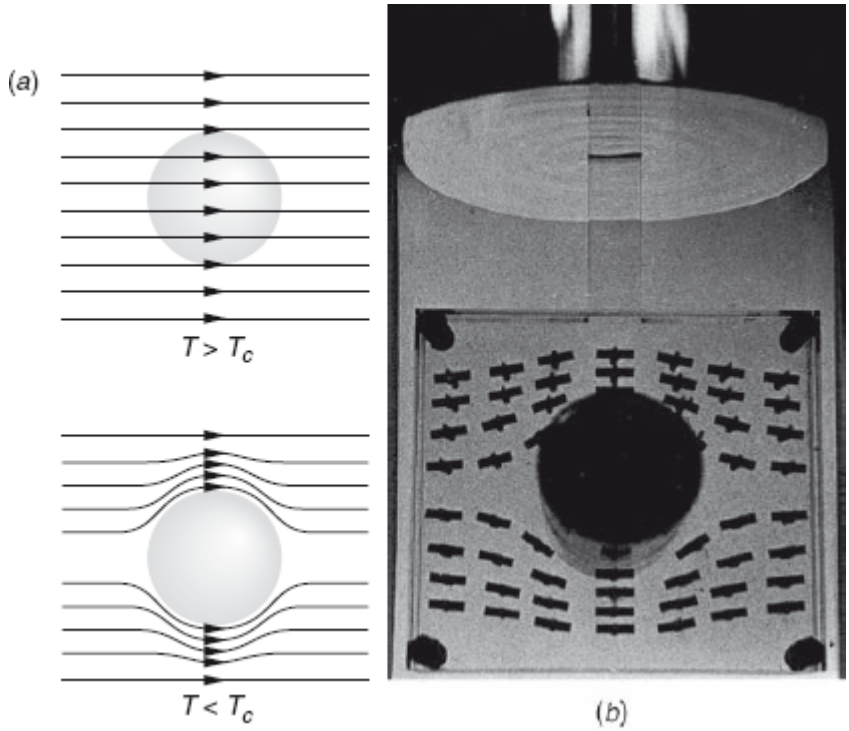


FIGURA 10-48 (*a*) Efeito Meissner em uma esfera supercondutora resfriada na presença de um campo magnético constante. Quando a temperatura cai abaixo da temperatura crítica T_c, as linhas de campo magnético são expelidas da esfera. (*b*) Demonstração do efeito Meissner. Um cilindro supercondutor de estanho é montado com o eixo perpendicular a um campo magnético horizontal. As direções das linhas de campo nas proximidades do cilindro são indicadas por agulhas fracamente magnetizadas montadas entre duas placas de plástico. [*Cortesia de A. Leitner, Rensselaer Polytechnic Institute.*]

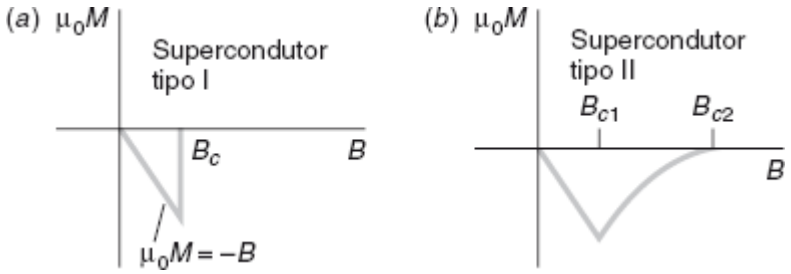
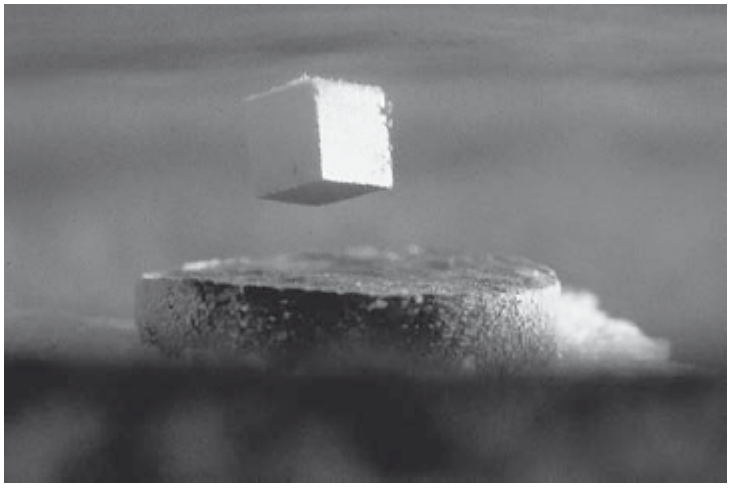


FIGURA 10-49 Gráficos de $\mu_0 M$ em função do campo aplicado para supercondutores tipo I e tipo II. (*a*) Nos supercondutores tipo I, o campo magnético resultante é zero abaixo de um certo campo crítico B_c porque o campo produzido pelas correntes induzidas na superfície do supercondutor cancelam exatamente o campo aplicado. Acima do campo crítico, o material se torna um condutor normal e a magnetização é pequena demais para ser representada na escala da figura. (*b*) Nos supercondutores tipo II, o campo magnético começa a penetrar no material quando ultrapassa um certo valor crítico B_{c1}, mas o material continua a ser supercondutor até o campo magnético exceder um segundo campo crítico B_{c2}. Para campos magnéticos maiores que este valor, o material se torna um condutor normal.



Um pequeno ímã em forma de cubo é levitado por um disco de óxido de ítrio-bário-cobre resfriado com nitrogênio líquido, cuja temperatura de ebulição é 77 K. Abaixo de 92 K, o material se torna supercondutor. O campo magnético do cubo induz uma corrente elétrica na superfície do supercondutor que anula o campo magnético no interior do material. O campo magnético produzido por essa corrente interage com o campo magnético do ímã, repelindo o cubo. [*Cortesia de IBM Research*.]

Outros materiais, conhecidos como supercondutores *tipo II*, ou "*duros*", apresentam uma curva de magnetização semelhante à que aparece na Figura 10-49*b*. Quase todos esses materiais são ligas metálicas ou metais que possuem uma resistividade relativamente alta no estado normal.* Como se pode ver nas Figuras 10-49*b* e 10-50, que mostra os resultados experimentais para o tântalo, os supercondutores tipo II possuem *dois* campos magnéticos críticos, B_{c1} e B_{c2}. No caso de campos aplicados menores que B_{c1}, o cancelamento do campo magnético é total e a amostra inteira permanece no estado supercondutor, como se vê na Figura 10-51*a*. Se o campo magnético aplicado é maior que B_{c2}, o campo penetra em toda a amostra, que volta ao estado normal. Para campos magnéticos entre B_{c1} e B_{c2}, existe uma penetração parcial do campo magnético; as linhas de campo se concentram em *tubos de fluxo*, também chamados de *vórtices*, no interior dos quais o material se encontra no estado normal. O resto da amostra permanece no estado supercondutor, como mostra a Figura 10-51*b*. Cada tubo de fluxo contém uma unidade quantizada de fluxo magnético. No caso de muitos supercondutores tipo II, o campo crítico B_{c2} é centenas de vezes maior que o campo crítico de um semicondutor tipo I típico (veja a Tabela 10-5). Assim, por exemplo, para a liga Nb_3Ge, B_{c2} = 34 T. Os supercondutores tipo II são usados nos enrolamentos de eletroímãs capazes de produzir campos magnéticos extremamente elevados.

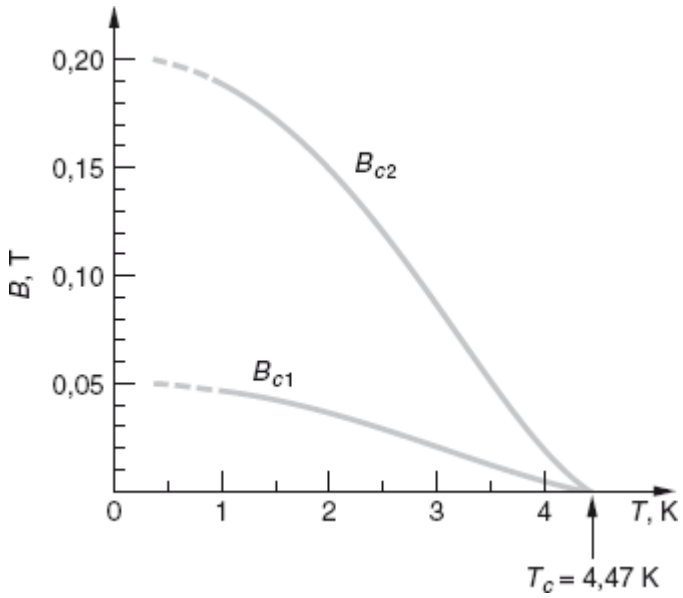


FIGURA 10-50 Campos magnéticos críticos B_{c1} e B_{c2} para o Ta (99,95% de pureza) em função da temperatura. Abaixo da curva B_{c1}, o material apresenta o efeito Meissner. Entre as curvas B_{c1} e B_{c2}, a amostra entra em um estado misto no qual filamentos de Ta normal se alternam com regiões supercondutoras. Acima da curva B_{c2}, o campo magnético penetra totalmente na amostra, que passa para o estado normal.

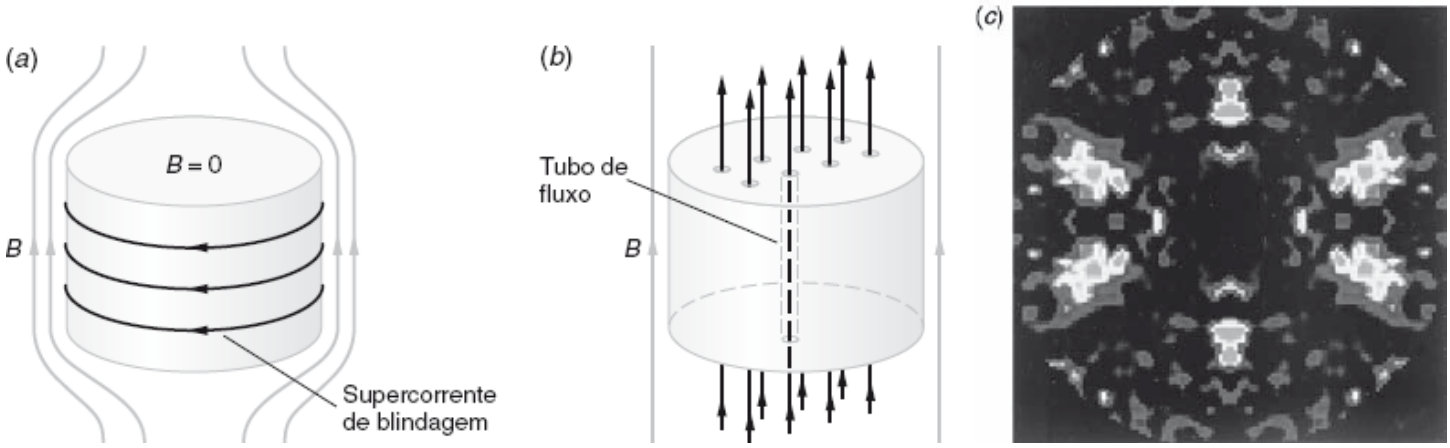
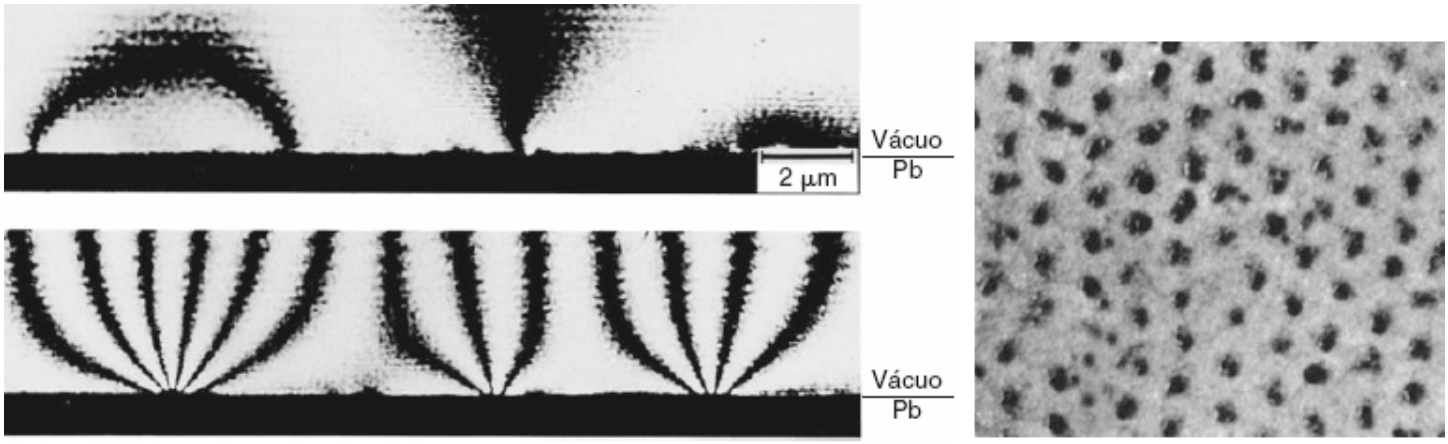


FIGURA 10-51 (*a*) Abaixo de B_{c1}, um supercondutor tipo II exibe o efeito Meissner. Em temperaturas abaixo de T_c, o material é supercondutor e $B = 0$ no interior. (*b*) Para $B_{c1} < B < B_{c2}$, algumas linhas de campo magnético penetram no material, mas ficam restritas a tubos de fluxo, no interior dos quais o material se encontra no estado normal. Para uma dada temperatura $T < T_c$, quanto mais o campo aplicado B *se* aproxima de B_{c2}, menor se torna a região supercondutora. Para $B > B_{c2}$, o material inteiro apresenta resistividade normal. (*c*) A rede de tubos de fluxo do composto UPt_3, um supercondutor tipo II, aparece claramente nesta imagem de difração de nêutrons.



(*a*) Tubos de fluxo penetrando em um filme supercondutor. A imagem foi formada por uma nova técnica, a holografia eletrônica, na qual feixes coerentes de elétrons são usados em lugar de feixes de luz coerente para criar um holograma. Ao passarem por uma região onde existe campo magnético, os elétrons sofrem um deslocamento de fase, ou seja, a fase da função de onda sofre uma variação. (Este deslocamento de fase é causado por um fenômeno conhecido como efeito Aharonov-Bohm.) A combinação do feixe modificado com um feixe de referência cria uma figura de interferência que pode ser interpretada como uma imagem do campo magnético. Nas duas imagens, um campo magnético foi aplicado perpendicularmente a um filme fino supercondutor de chumbo. Campos muito fracos não conseguem penetrar no supercondutor por causa do efeito Meissner; campos mais fortes penetram parcialmente no material, criando vórtices. Os vórtices não são causados diretamente pelo campo magnético, mas por correntes induzidas no supercondutor. No centro da imagem de cima pode-se ver um vórtice isolado; na extremidade esquerda, um par de vórtices. A imagem de baixo, obtida em um filme mais espesso, mostra o material sendo penetrado por feixes de vórtices. [*Cortesia de Akira Tonomura, Hitachi Ltd, Saitama, Japão*.] (*b*) Rede de vórtices na superfície de um supercondutor. Para tornar os vórtices visíveis, a superfície foi coberta com um pó de partículas magnéticas. [*Cortesia de U. Essmann*.]



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Quantização do Fluxo Magnético

Considere uma espira supercondutora de área A percorrida por uma corrente. Se o material no interior da espira se encontra no estado normal, formando o chamado tubo de fluxo, pode haver um fluxo magnético $\phi_m = B_n A$ no interior da espira. Quando o fenômeno da supercondutividade é investigado à luz dos princípios da mecânica quântica, verifica-se que o fluxo através de uma espira supercondutora é quantizado:

$$\phi_m = n\frac{h}{2e} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

O quantum de fluxo, chamado *fluxoide*, é dado por

$$\phi_0 = \frac{h}{2e} = 2{,}0678 \times 10^{-15}\ \mathrm{T \cdot m^2}$$

Cada tubo de fluxo em um supercondutor tipo II com $B_{c1} < B < B_{c2}$ contém um ou mais fluxoides.

Teoria BCS

Na teoria clássica dos elétrons livres (Seção 10-2), supusemos que os íons da rede cristalina se comportavam como pontos fixos; a resistividade elétrica se devia a choques dos elétrons com os íons da rede e tanto as interações elétron-elétron como os efeitos das vibrações da rede, ou seja, das interações elétron-fônon, eram ignorados. Na teoria quântica (Seção 10-4), o efeito das vibrações da rede cristalina foi considerado explicitamente (veja as Equações 10-26 a 10-28). As vibrações da rede cristalina também são responsáveis pelo *efeito isotópico*[13] da supercondutividade, descoberto em 1950. Resultados experimentais mostraram que a temperatura crítica de um supercondutor depende da massa média dos átomos do cristal* através da equação

$$M^{\alpha} T_c = \text{constante} \qquad \textbf{10-55}$$

na qual M é a massa média dos átomos e α é um parâmetro que varia de acordo com o material. No caso do mercúrio, por exemplo, α = 0,50; para amostras de massa média M = 199,5 u, T_c = 4,185 K; para amostras com M = 203,4 u, T_c = 4,146 K. A Tabela 10-6 mostra os valores experimentais de α para alguns supercondutores.

Tabela 10-6 Valores experimentais de α para alguns supercondutores

Substância	α
Cd	0,32
Hg	0,50
Pb	0,49
Nb_3Sn	0,08
Os	0,15
Zn	0,45

Fonte: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed. (New York: Wiley, 2005.)

A descoberta do efeito isotópico foi importante para os estudos da supercondutividade, pois mostrou que as vibrações da rede cristalina e, portanto, as interações elétron-fônon tinham uma influência sobre a temperatura crítica.

Há muito tempo se sabia que a supercondutividade estava associada ao comportamento coletivo dos elétrons de condução; a descoberta do efeito isotópico sugeria que a interação entre elétrons e fônons desempenhava um papel importante no aparecimento da supercondutividade, pois a frequência dos fônons era outro parâmetro que, como a temperatura crítica, dependia da massa média dos átomos. Em 1957, John Bardeen, Leon Cooper e John Robert Schrieffer formularam uma teoria da supercondutividade hoje conhecida como *teoria BCS*.[14] De acordo com a teoria, os elétrons de um supercondutor formam pares em baixas temperaturas. Os pares surgem por causa da interação entre os elétrons e a rede cristalina. Como mostra a Figura 10-52, ao passar pela rede cristalina, um elétron interage com os íons positivos. O elétron atrai os íons positivos mais próximos, deslocando-os ligeiramente, o que aumenta a concentração de cargas positivas em uma certa região do espaço. Como os íons estão presos à rede cristalina por forças elásticas, esta região de alta densidade de carga se propaga pelo material como uma onda de vibrações da rede, ou seja, como um *fônon*. Já que o momento do fônon é fornecido pelo elétron, podemos dizer que o elétron emitiu um fônon.

Um segundo elétron que passa pela região de alta concentração de cargas positivas é atraído pela força eletrostática e pode

absorver o momento transportado pela onda, ou seja, pode absorver o fônon. Assim, os dois elétrons interagem através do fônon; além disso (o que é muito importante), a interação é atrativa, já que os dois elétrons são atraídos para a região de alta concentração de cargas positivas. Em baixas temperaturas ($T < T_c$), a atração entre os dois elétrons se torna maior que a repulsão eletrostática. Assim, os dois elétrons formam um estado ligado conhecido como *par de Cooper*, contanto que a temperatura seja suficientemente baixa para que fônons gerados termicamente não interfiram no processo. Os elétrons de um par de Cooper têm spins opostos e momentos lineares iguais e opostos, formando, portanto, um sistema com spin zero e momento zero. Um par de Cooper pode ser considerado como uma partícula única de spin zero. Como essa partícula não precisa obedecer ao princípio de exclusão de Pauli, vários pares de Cooper podem ocupar o mesmo estado quântico.[15] No estado fundamental de um supercondutor (em $T = 0$), todos os elétrons formam pares de Cooper e todos os pares de Cooper se encontram no mesmo estado. No estado supercondutor, os pares de Cooper estão todos correlacionados e se comportam como uma entidade única. Para que os elétrons no estado supercondutor absorvam ou emitam energia, é preciso que os pares de Cooper sejam desfeitos. A energia necessária para desfazer um par de Cooper, análoga à energia necessária para romper uma ligação molecular, é conhecida como *largura da banda proibida do estado supercondutor* e representada pelo símbolo E_g. De acordo com a teoria BCS, esta energia, no zero absoluto, é dada por

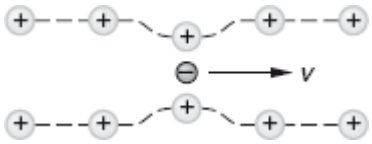


FIGURA 10-52 Ao passar pela rede cristalina, um elétron interage com os íons positivos, produzindo um aumento localizado da densidade de cargas positivas, indicado pelas linhas tracejadas, que pode exercer uma atração sobre um segundo elétron. O resultado é uma interação atrativa entre os dois elétrons, que, para $T < T_c$, leva à formação de pares de Cooper.

$$E_g = 3{,}5kT_c \qquad \textbf{10-56}$$

A teoria BCS também prevê, em concordância com os resultados experimentais, que o fluxo magnético nas regiões normais dos supercondutores tipo II é quantizado (veja a Seção Exploratória *Quantização do Fluxo Magnético*) e que o campo crítico varia com a temperatura de acordo com a seguinte equação:

$$B_c(T)/B_c(0) = 1 - (T/T_c)^2$$

EXEMPLO 10-12 **Largura da Banda Proibida do Cádmio** (*a*) Calcule a largura da banda proibida do cádmio em $T = 0$ de acordo com a teoria BCS e compare o resultado com o valor experimental, $1{,}50 \times 10^{-4}$ eV. (*b*) Calcule o comprimento de onda de um fóton cuja energia é exatamente a necessária para romper um par de Cooper no cádmio.

SOLUÇÃO

(*a*) De acordo com a Tabela 10-5, $T_c = 0{,}517$ K no caso do cádmio. Assim, a largura da banda proibida a 0 K na teoria BCS é dada por

$$E_g = 3{,}5kT_c = \frac{3{,}5\,(1{,}38 \times 10^{-23}\,\text{J/K})\,(0{,}517\,\text{K})}{(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} = 1{,}56 \times 10^{-4}\,\text{eV}$$

A diferença entre este valor e o valor experimental ($1{,}50 \times 10^{-4}$ eV) é aproximadamente 4%.

(*b*) $E_g = hf = hc/\lambda$ e, portanto,

$$\lambda = hc/E_g = \frac{(6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})\,(3{,}00 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{(1{,}56 \times 10^{-4}\,\text{eV})\,(1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{J/eV})} = 7{,}97 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

Observação: *Este comprimento de onda está na região de micro-ondas do espectro eletromagnético.*

Note que a largura da banda proibida de um supercondutor típico é muito menor que a da banda proibida de um semicondutor, que é da ordem de 1 eV. Quando a temperatura é aumentada a partir de $T \approx 0$ K, alguns pares de Cooper são rompidos pela agitação térmica. Os elétrons desemparelhados resultantes interagem com os pares de Cooper, reduzindo a

largura da banda proibida até que, em $T = T_c$ a banda proibida deixa de existir (veja a Figura 10-53). Observe também que, no estado supercondutor, a largura da banda proibida é maior que a energia térmica do sistema. Assim, por exemplo, em $T = 0{,}5T_c$, $E_g(T) = 0{,}95E_g(0) \approx 3{,}3kT_c$, enquanto a energia térmica é dada por $kT = 0{,}5kT_c$.

Os pares de Cooper discutidos até agora têm momento zero, de modo que o número de elétrons viajando em um certo sentido é igual ao número de elétrons viajando no sentido oposto e, portanto, não existe corrente elétrica. Pares de Cooper também podem se formar com um momento **p** diferente de zero, mas todos os pares têm o mesmo momento. Neste estado, os pares de Cooper podem ser responsáveis por uma corrente elétrica. Nos condutores comuns, existe resistência elétrica porque os portadores de carga podem ser espalhados com uma mudança de momento.

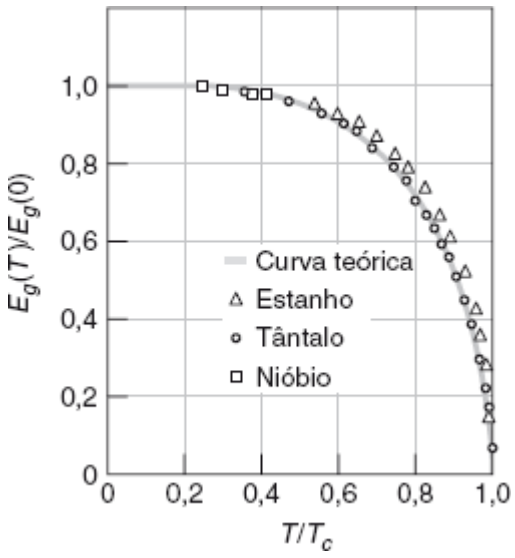


FIGURA 10-53 Razão entre a largura da banda proibida a uma temperatura T e a largura para $T = 0$ em função da temperatura normalizada T/T_c. Os pontos são resultados experimentais; a curva é a prevista pela teoria BCS.

Como vimos, este espalhamento pode se dever a átomos de impurezas ou a vibrações térmicas da rede cristalina. Em um supercondutor, os pares de Cooper estão constantemente espalhando uns aos outros; entretanto, como o momento total permanece constante, a corrente não muda. Um par de Cooper não pode ser espalhado por um íon da rede cristalina porque os pares se comportam como uma entidade única. A única forma de reduzir a corrente por espalhamento é romper um par, mas para isso é preciso uma energia igual ou maior que E_g, a largura da banda proibida. No caso de correntes não muito altas, eventos de espalhamento nos quais o momento total de um par de Cooper varia são totalmente proibidos e, portanto, a resistência elétrica é nula.

EXEMPLO 10-13 **Qual É o Tamanho de um Par de Cooper?** Faça uma estimativa da distância Δx entre os elétrons que formam um par de Cooper, supondo que a energia de ligação do par é igual a E_g, a largura da banda proibida, e que, como no caso dos semicondutores, a energia de Fermi E_F fica no centro da banda proibida.

SOLUÇÃO

De acordo com a relação de de Broglie, a energia de um dos elétrons é dada por

$$E = \frac{p^2}{2m^*} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$$

e, portanto,

$$\Delta E = \frac{2k\hbar^2 \Delta k}{2m^*}$$

Fazendo $E = E_F$ e $\Delta E = E_g$, temos:

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{E_g}{E_F} \approx \frac{2k\hbar^2 \Delta k}{2m^*} \times \frac{2m^*}{\hbar^2 k^2} \approx \frac{2\Delta k}{k}$$

Como a energia de Fermi é da ordem de 1 eV e a largura da banda proibida, de acordo com o Exemplo 10-12, é da ordem de 10^{-4} eV,

temos:

$$\Delta k \approx 0{,}5 \times 10^{-4} k$$

na qual k é o número de onda na posição do nível de Fermi. Como foi discutido na Seção 10-6 e ilustrado na Figura 10-19, $k = \pi/a$ no alto da primeira banda permitida, onde a energia é aproximadamente igual a E_F. Como a distância interatômica a é da ordem de 0,1 nm, $k \approx \pi/0{,}1\ \text{nm}^{-1}$ e $\Delta k = (0{,}5 \times 10^{-4})\ (\pi/0{,}1) \approx 10^{-3}\ \text{nm}^{-1}$. De acordo com a relação de indeterminação (Equação 5-17), a indeterminação na posição de um dos elétrons, isto é, a extensão espacial da função de onda do elétron, é dada por

$$\Delta x = \frac{1}{\Delta k} = 10^3\ \text{nm}$$

ou seja, cerca de 10.000 diâmetros atômicos, um valor aproximadamente igual ao comprimento de onda da luz visível.

Supercondutividade em Altas Temperaturas

Durante muito tempo, a maior temperatura crítica conhecida de um supercondutor era a da liga Nb_3Ge, 23,2 K. Em 1986, Bednorz e Muller* descobriram que um óxido de lantânio, bário e cobre se tornava supercondutor a 30 K. Um ano mais tarde, verificou-se que o composto $YBa_2Cu_3O_7$ apresentava uma temperatura crítica de 92 K. Desde então, foram descobertos vários outros óxidos de cobre com temperatura crítica elevada. A Tabela 10-7 mostra alguns dos novos supercondutores cerâmicos e suas temperaturas críticas. A descoberta dos supercondutores cerâmicos revolucionou o estudo da supercondutividade porque muitos permanecem supercondutores acima de 77 K, a temperatura de ebulição do nitrogênio líquido, o que permite usar o nitrogênio líquido como refrigerante em lugar do hélio líquido, muito mais caro e difícil de manipular. Entretanto, os novos supercondutores ainda apresentam problemas, como o fato de serem quebradiços, que dificultam seu uso em aplicações práticas.

Em 2008, H. Hosono descobriu que o composto $LaFeAsO_{1-x}F_x$ se tornava supercondutor abaixo de 26 K. Em poucos meses, outros pesquisadores, substituindo o La por outras terras raras, produziram vários supercondutores à base de ferro com temperaturas críticas entre 20 K e 56 K.

A Coreia do Sul está usando 3000 km de cabos feitos de um supercondutor de alta temperatura ($YBa_2Cu_3O_7$) para substituir linhas de transmissão antigas como parte de um programa para modernizar a rede de distribuição de energia elétrica do país.

Os novos supercondutores cerâmicos são todos tipo II, com um campo crítico superior muito elevado; alguns apresentam um B_{c2} maior que 100 T. Embora a teoria BCS pareça ser o ponto de partida correto para explicar suas propriedades, muitos aspectos do comportamento desses materiais ainda não estão bem compreendidos. Além disso, os compostos à base de Cu e à base de Fe apresentam semelhanças e diferenças em suas estruturas cristalinas, que ainda precisam ser investigadas com detalhes. Sendo assim, resta muito trabalho a ser feito no campo dos novos supercondutores cerâmicos.

Tabela 10-7Temperaturas críticas de alguns supercondutores cerâmicos à base de Cu e de Fe

Substância	T_c (K)
LaFeAs(O,F)	26
LaBaCuO	30
La_2CuO_4	40
CeFeAs(O,F)	41
SmFeAs(O,F)	55
Ponto de ebulição do N_2	77
$YBa_2Cu_3O_7$	92

$DyBa_2Cu_3O_7$	92,5
C_{60} ($CHBr_3$)	117
BiSrCaCuO	120
$Tl_2Ba_2Ca_2Cu_3O_{10}$	120
$Hg_{.8}Tl_{.2}Ba_2Ca_2Cu_3O_{8,33}$	138

Uma Oportunidade PARA VOCÊ No chamado efeito Meissner, o campo magnético produzido por supercorrentes na superfície de um supercondutor cancela os campos magnéticos externos aplicados, evitando que penetrem no material. O fenômeno pode ser usado na construção de trens levitados magneticamente, um sistema de transporte no qual as supercorrentes são usadas para sustentar, guiar e propulsionar veículos terrestres. O uso dos novos supercondutores cerâmicos, de alta temperatura crítica, permitiria substituir a refrigeração com hélio líquido por uma refrigeração com nitrogênio líquido, o que representaria uma economia considerável. Para isso, porém, será preciso resolver vários problemas técnicos, entre os quais a fabricação de materiais cerâmicos que conservem suas propriedades físicas e químicas durante muitos anos e possam ser transformados em fios finos e flexíveis. Se a história do transistor pode ser usada como modelo, supercondutores cerâmicos apropriados serão desenvolvidos no futuro não muito distante e muitas oportunidades surgirão para futuras pesquisas na área.

SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Junções de Josephson

O fenômeno de tunelamento, no qual uma partícula é capaz de atravessar uma barreira de potencial, embora classicamente não tenha energia suficiente para isso, foi discutido na Seção 6-6. O tunelamento de elétrons de um metal para outro pode ser observado separando os dois metais com uma camada de material isolante, como o óxido de alumínio, com apenas alguns nanômetros de espessura. Quando os dois metais são condutores normais (e não supercondutores), a corrente de tunelamento obedece à lei de Ohm para baixas tensões aplicadas (veja a Figura 10-54*a*). Quando um dos metais é um condutor normal e o outro é um supercondutor, a corrente é nula (no zero absoluto), a menos que a tensão aplicada, V, seja maior que uma tensão crítica $V_c = E_g/2e$, no qual E_g é a largura da banda proibida do supercondutor. A Figura 10-54*b* mostra o gráfico da corrente em função da tensão aplicada para esta situação. A corrente aumenta abruptamente quando V é suficiente para romper um par de Cooper. (Em temperaturas acima do zero absoluto, existe uma pequena corrente, mesmo para tensões menores que a tensão crítica, já que a agitação térmica quebra alguns pares de Cooper, criando elétrons desemparelhados.) É possível, portanto, determinar com grande precisão a largura da banda proibida de um supercondutor a partir da medida da tensão crítica V_c.

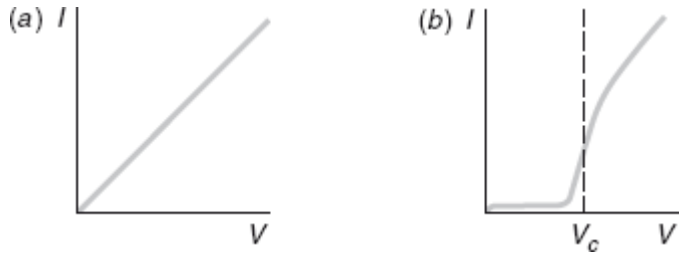


FIGURA 10-54 Corrente de tunelamento em função da tensão aplicada para uma junção de dois metais separados por uma camada de óxido. (*a*) Quando os dois metais estão no estado normal, a corrente é proporcional à tensão, como prevê a lei de Ohm. (*b*) Quando um dos metais está no estado normal e o outro no estado supercondutor, a corrente é praticamente nula até que a tensão aplicada exceda a tensão crítica $V_c = E_g/2$.

Em 1962, Brian Josephson[16] previu que, se fosse formada uma junção entre dois supercondutores, hoje conhecida como *junção de Josephson*, pares de Cooper poderiam passar por tunelamento de um supercondutor para o outro. O valor desta corrente, que existiria mesmo na ausência de uma tensão aplicada, seria dado por

$$I = I_{\text{máx}} \operatorname{sen}(\phi_2 - \phi_1) \qquad \textbf{10-57}$$

em que I_{max} é a corrente máxima, que depende da espessura da barreira, ϕ_1 é a fase da função de onda dos pares de Cooper em um dos supercondutores e ϕ_2 é a fase da função de onda correspondente no outro supercondutor. (A fase de uma função de onda é o expoente $Et/\hbar = \omega t$ da parte temporal da função de onda; veja a Seção 6-1.) A previsão foi confirmada experimentalmente; o fenômeno é

chamado de *efeito Josephson contínuo*.

Josephson também previu que, se uma tensão contínua fosse aplicada a uma junção de Josephson, a junção seria atravessada por uma corrente alternada de frequência f dada por

$$f = \frac{2eV}{h} \qquad \textbf{10-58}$$

Este fenômeno, que também foi observado experimentalmente e é conhecido como *efeito Josephson alternado*, permite determinar o valor da razão e/h com alta precisão. Como a frequência pode ser medida com grande precisão, o efeito Josephson alternado também é usado para estabelecer padrões de tensão usados como referência pelos cientistas. O efeito inverso, no qual a aplicação de uma tensão alternada a uma junção de Josephson dá origem a uma corrente contínua, também foi observado.

EXEMPLO 10-14 **Efeito Josephson Alternado** Sabendo que $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C e $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s, calcule a frequência da corrente de Josephson para uma tensão aplicada de 1 μV.

SOLUÇÃO

De acordo com a Equação 10-58, temos:

$$f = \frac{2eV}{h} = \left(\frac{2(1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C})\,(10^{-6}\,\text{V})}{6{,}616 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}\right.$$
$$= 4{,}836 \times 10^{8}\,\text{Hz}$$
$$= 483{,}6\,\text{MHz}$$

Entre as aplicações do SQUID na medicina estão a magnetocardiografia, que mede os campos magnéticos produzidos por correntes elétricas no coração, e a espectroscopia dielétrica, que mede os campos magnéticos produzidos por correntes elétricas em células vivas.

Existe um terceiro efeito que é observado nas junções de Josephson. Quando um campo magnético constante é aplicado perpendicularmente a um anel supercondutor que contém duas junções de Josephson, efeitos de interferência fazem com que a supercorrente total dependa da intensidade do campo magnético (Figura 10-55). Este efeito, que permite medir campos magnéticos extremamente fracos, é usado em um dispositivo conhecido como *SQUID* (as iniciais de *S*uperconducting *Q*uantum *I*nterference *D*evice, ou seja, Dispositivo Supercondutor de Interferência Quântica), que é capaz de detectar campos magnéticos da ordem de 10^{-14} T. Os magnetômetros baseados no efeito SQUID são os equipamentos mais sensíveis que já foram desenvolvidos para a medição de campos magnéticos.

Um SQUID extremamente pequeno, feito de um supercondutor de alta temperatura crítica e montado na extremidade de uma ponta de prova, é empregado em um microscópio de varredura SQUID capaz de medir a intensidade do campo magnético na superfície de amostras com altíssima resolução. Microscópios de varredura SQUID foram usados para confirmar a supercondutividade de vários novos supercondutores de alta temperatura através da observação do efeito Meissner.

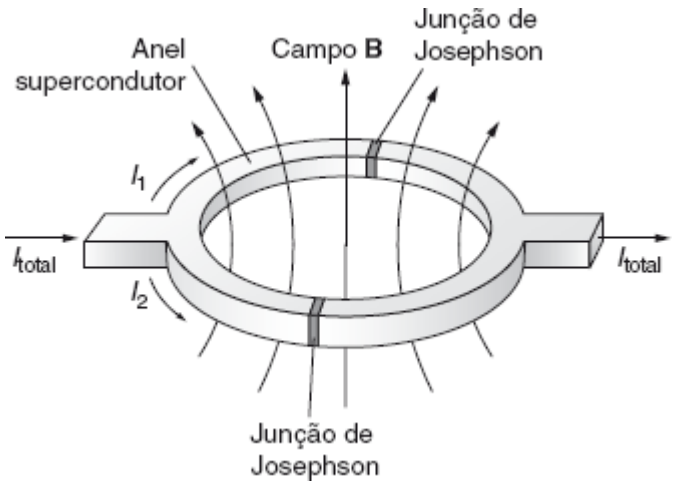


FIGURA 10-55 Anel supercondutor com duas junções de Josephson. Na ausência de campo magnético, as correntes I_1 e I_2 estão em fase. Basta um pequeno campo magnético para produzir uma diferença de fase significativa entre as duas correntes, o que reduz a corrente

total.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Estrutura dos sólidos	Os sólidos são frequentemente encontrados na forma cristalina, em que uma pequena estrutura, conhecida como célula unitária, é repetida indefinidamente em todas as direções. A estrutura da célula unitária depende do tipo de ligação entre os átomos, íons ou moléculas que formam o cristal.
Sólidos iônicos e covalentes	A parte atrativa da energia potencial de um íon em um cristal iônico é dada por $$U_{att} = -\alpha\frac{ke^2}{r} \qquad \textbf{10-1}$$ onde r é a distância entre íons vizinhos e α é a constante de Madelung, que depende da geometria do cristal. No caso de cristais cúbicos de faces centradas, a constante α é igual a 1,7476. Nos cristais covalentes, as ligações entre os átomos são semelhantes às que existem nas moléculas covalentes. Na ligação metálica, que não é observada em moléculas isoladas, um ou mais elétrons de valência estão livres para vagar por todo o cristal e são compartilhados por *todos* os átomos. Existe, portanto, alguma semelhança entre a ligação metálica e a ligação covalente, na qual os átomos de uma molécula compartilham um ou mais elétrons.
2. Teoria clássica dos elétrons livres	A resistividade elétrica r e a condutividade s são dadas por $$\rho = \frac{m_e\langle v\rangle}{ne^2\lambda} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{ne^2\lambda}{m_e\langle v\rangle} \qquad \textbf{10-13}$$ onde $\langle v\rangle$ é a velocidade média dos elétrons e λ é o livre caminho médio entre colisões, dado por $$\lambda = \frac{1}{n_a\pi r^2} \qquad \textbf{10-12}$$ onde n_a é a concentração de íons. As Equações 10-12 e 10-13 permitem deduzir a lei de Ohm, mas levam a uma variação da resistividade com a temperatura que não está de acordo com os resultados experimentais.
3. O gás de elétrons em metais	A energia média dos elétrons à temperatura ambiente é muito maior que kT:

$$\langle E \rangle = \frac{3}{5} E_F \qquad \textbf{10-22}$$

onde E_F é da ordem de 1 ou 2 eV.

4. Teoria quântica da condução de eletricidade

Esta teoria é o resultado de duas correções importantes da teoria clássica dos elétrons livres. Em primeiro lugar, a distribuição de energias no gás de elétrons é descrita pela distribuição de Fermi e não pela distribuição clássica de Boltzmann. Em segundo lugar, são considerados os efeitos das propriedades ondulatórias dos elétrons quando são espalhados pelos íons da rede. Os resultados experimentais concordam muito bem com as previsões da teoria quântica.

5. Magnetismo em sólidos

O magnetismo nos sólidos se deve aos spins dos elétrons e momentos magnéticos associados.

6. Bandas de energia em sólidos

Quando muitos átomos se unem para formar um sólido, os níveis de energia dos átomos isolados se desdobram em bandas de energias permitidas. Esse desdobramento depende do tipo de ligação e da distância interatômica. Nos condutores, a banda ocupada de maior energia está apenas parcialmente ocupada e, portanto, existem muitos estados disponíveis para elétrons excitados. Nos isolantes, a banda ocupada de maior energia, conhecida como banda de valência, está completa e existe uma larga banda proibida entre a banda de valência e a banda seguinte, que está totalmente vazia e recebe o nome de banda de condução. Nos semicondutores, a largura da banda proibida é menor que nos isolantes e por isso, à temperatura ambiente, existe um número considerável de elétrons excitados termicamente na banda de condução.

O sólido é representado por um potencial periódico. Nesse caso, as funções de onda são dadas por

$$\psi(x) = u_k(x) e^{ikx} \qquad \textbf{10-36}$$

onde a função $u_k(x)$ é periódica, com um período igual à distância entre os poços de potencial, e e^{ikx} é uma onda plana que representa um elétron livre. Existem bandas proibidas para

Modelo de Kronig-Penney

$$ka = \pm n\pi \qquad \textbf{10-41}$$

onde n é um número inteiro e a é a distância interatômica.

7. Semicondutores dopados

A dopagem pode aumentar consideravelmente a condutividade de um semicondutor. Nos semicondutores tipo n, uma impureza doadora cede elétrons para a banda de condução; nos semicondutores tipo p, uma impureza aceitadora recebe elétrons da banda de valência. As junções entre semicondutores tipo n e tipo p são usadas em muitos dispositivos, como diodos retificadores, células solares e diodos fotemissores. O transistor é formado por duas regiões de um tipo de semicondutor separadas por uma região estreita do tipo oposto. Os transistores funcionam como amplificadores porque uma pequena variação da corrente de base produz uma grande variação na corrente de coletor.

8. Supercondutividade

Nos supercondutores, a resistência elétrica se anula bruscamente abaixo de uma temperatura crítica T_c. Nos semicondutores tipo I, o campo magnético é expelido do material, um fenômeno conhecido como efeito Meissner. A

supercondutividade em baixas temperaturas é descrita pela teoria BCS, segundo a qual os elétrons livres formam pares de Cooper. O comportamento dos supercondutores de alta temperatura, descobertos mais recentemente, não pode ser inteiramente explicado pela teoria BCS.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Anderson, B., *Fundamentals of Semiconductor Devices*, McGraw-Hill, New York, 2005.
Blatt, F., *Modern Physics*, McGraw-Hill, New York, 1992.
Eisberg, R., e R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms*, *Molecules*, *Solids*, *Nuclei*, *and Particles*, 2d ed., Wiley, New York, 1985.
Fermi, E., *Molecules*, *Crystals*, *and Quantum Statistics* (traduzido para o inglês por M. Ferro-Luzzi), W. A. Benjamin, New York, 1966.
Holden, A., *The Nature of Solids*, Columbia University Press, New York, 1968. Um excelente tratamento não matemático das propriedades dos sólidos.
Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, 8th ed., Wiley, New York, 2005.
Shockley, W., *Electrons and Holes in Semiconductors*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1950.

Notas

1. A constante n é conhecida como *expoente de Born*.

2. O carbono tem uma quarta forma sólida, o carvão, que não possui uma estrutura cristalina bem definida.

3. Observe que este modelo dos metais satisfaz a definição de plasma apresentada no início do capítulo. Na verdade, embora normalmente não sejam vistos desta forma, os metais podem ser considerados plasmas frios.

4. Felix Bloch (1905-1983), físico suíço naturalizado americano. Inventou um método para medir campos magnéticos atômicos em líquidos e sólidos que levou ao desenvolvimento da técnica da Ressonância Magnética Nuclear. Por essa invenção, recebeu (juntamente com E. M. Purcell) o Prêmio Nobel de Física de 1952. Foi o primeiro diretor-geral do CERN, o Centro Europeu de Pesquisa Nuclear.

5. O gráfico de bandas permitidas e proibidas da Figura 10-19*b* foi gerado a partir de uma versão simplificada da equação que relaciona k, k' e α, na qual $b \rightarrow 0$ e $U_0 \rightarrow \infty$. Nesse limite, a distância entre os íons da rede é a e não $a + b$, como na Figura 10-18.

6. Esta mistura, conhecida como hibridização, foi discutida na Seção 9-2.

7. Veja, por exemplo, P. Tipler e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed. (W. H. Freeman and Co., New York, 2008.)

8. O fato de que o raio do quinto elétron é várias vezes maior que a distância interatômica ajuda a justificar nossa suposição implícita de que o quinto elétron "enxerga" uma constante dielétrica uniforme no cristal.

9. Klaus von Klitzing (1943-), físico alemão. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1985 por sua descoberta.

10. Daniel Chee Tsui (1939-), físico chinês naturalizado americano. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1998 (com H. L. Stormer e R. B. Laughlin) por sua descoberta.

11. William Bradford Shockley (1910-1989), John Bardeen (1908-1991) e Walter Houser Brattain (1902-1987), físicos americanos. Shockley descobriu que cristais de germânio dopados com impurezas eram excelentes retificadores; mais tarde, os três colegas do Bell Laboratories descobriram que, combinando dois desses retificadores, era possível produzir um dispositivo, o transistor, capaz de amplificar correntes elétricas. Os três pesquisadores receberam o Prêmio Nobel de Física de 1956 por sua descoberta.

12. Na verdade, o campo diminui exponencialmente à medida que penetra no material supercondutor, anulando-se a uma distância de aproximadamente 10 nm da superfície.

13. Isótopos são átomos que possuem o mesmo número atômico e números de massa diferentes. Os isótopos serão discutidos no Capítulo 11.

14. John Bardeen (1908-1991), Leon Neil Cooper (1930-) e John Robert Schrieffer (1931-), físicos americanos que desenvolveram na Universidade de Illinois a teoria BCS da supercondutividade. Os três pesquisadores receberam o Prêmio Nobel de Física de 1972 por esse trabalho e Bardeen se tornou a única pessoa até o momento a receber dois prêmios Nobel de física (veja a nota 11).

15. À primeira vista, pode parecer que o par de Cooper é um bóson e a supercondutividade é mais um exemplo de condensação de Bose-Einstein (veja a Seção 8-3). Entretanto, o fato de que os elétrons que formam um par de Cooper estão muito distantes um do outro (veja o Exemplo 10-13) significa que muitos pares ocupam a mesma região do espaço e, portanto, a simetria de um par em relação à permuta de elétrons deve levar em conta a troca de elétrons com outros pares. Em consequência, o par de Cooper não se comporta nem como um bóson puro nem como um férmion puro.

16. Brian David Josephson (1940-), físico inglês. Por sua descoberta, realizada quando ainda estava fazendo o curso de doutorado, compartilhou o Prêmio Nobel de Física de 1973 com L. Esaki e I. Giaever. Bardeen se recusou a acreditar nas previsões de Josephson até que os experimentos de Giaver (que também estava fazendo o curso de doutorado na ocasião) comprovaram que o tunelamento dos pares de Cooper era uma realidade.

Problemas

NÍVEL I

Seção 10-1 Estrutura dos Sólidos

10-1. Calcule o valor de n na Equação 10-6 para o qual a energia de dissociação do LiCl, que tem a mesma estrutura cristalina do NaCl e uma distância de equilíbrio $r_0 = 0{,}257$ nm, é igual ao valor experimental, 741 kJ/mol.

10-2. Calcule a distância r_0 entre os íons K^+ e Cl^- no KCl, supondo que cada íon ocupa o volume de um cubo de aresta r_0. A massa molar do KCl é 74,55 g/mol e a massa específica é 1,984 g/cm^3.

10-3. A distância entre os íons Li^+ e Cl^- no LiCl é 0,257 nm. Use este dado e a massa molecular do LiCl (42,4 g/mol) para determinar a densidade do LiCl.

10-4. A estrutura cristalina do KCl é a mesma do NaCl. (*a*) Determine a energia potencial de atração eletrostática do KCl, supondo que $r_0 = 0{,}314$ nm. (*b*) Supondo que $n = 9$ na Equação 10-6, calcule a energia de dissociação em eV por par de íons e em kcal/mol. (*c*) O valor experimental da energia de dissociação é 165,5 kcal/mol. Use este dado para determinar o valor de n na Equação 10-6.

10-5. O valor experimental da energia de dissociação do LiBr sólido é 788 kJ/mol. Calcule a energia coesiva do LiBr e compare o resultado com o valor que aparece na Tabela 10-1. (As energias de ionização do Li e do Br são dadas na Tabela 9-1.)

10-6. A massa específica do NaCl (um cristal cfc) é 2,16 g/cm^3. Calcule a distância entre os íons vizinhos mais próximos na rede cristalina do NaCl.

10-7. A distância entre os íons vizinhos mais próximos no KCl (um cristal fcc) é 0,315 nm. Use esta informação para determinar a massa específica do KCl.

10-8. Usando os dados da Tabela 10-1, (*a*) faça um gráfico da energia coesiva em função do ponto de fusão e ajuste uma reta aos pontos do gráfico. (*b*) Determine as energias coesivas do cobalto, da prata e do sódio, cujas temperaturas de fusão são 1495 ºC, 962 ºC e 98 ºC, respectivamente. (Os valores experimentais são os seguintes: cobalto, 4,43 eV; prata, 2,97 eV; sódio, 1,13 eV.)

10-9. A Figura 10-56 mostra uma rede iônica unidimensional formada por íons positivos duplamente ionizados e um número duas vezes maior de íons negativos monoionizados. Calcule a constante de Madelung deste "cristal" com uma precisão de 1%.



FIGURA 10-56 Problema 10-9.

Seção 10-2 Teoria Clássica da Condução de Eletricidade

10-10. (*a*) Sabendo que os elétrons livres do cobre a 300 K têm um livre caminho médio $\lambda = 0{,}4$ nm e uma velocidade média $\langle v \rangle = 1{,}17 \times 10^5$ m/s, calcule o valor clássico da resistividade ρ do cobre a 300 K. (*b*) No modelo clássico, o livre caminho médio não depende da temperatura e $\langle v \rangle$ depende da temperatura. De acordo com este modelo, qual seria o valor de ρ a 100 K?

10-11. Determine (*a*) a densidade de corrente e (*b*) a velocidade de deriva para uma corrente de 1 mA em um fio de cobre nº 14. (O diâmetro do fio nº 14, muito usado em instalações residenciais, é 0,163 cm.)

10-12. Uma medida da densidade do gás de elétrons livres em um metal é a distância r_s, definida como o raio da esfera cujo volume é igual ao volume por elétron de condução. (*a*) Mostre que $r_s = (3/4\pi n_a)^{1/3}$, na qual n_a é a concentração de elétrons livres. (*b*) Calcule o valor de r_s, em nanômetros, para o caso do cobre.

10-13. Calcule a concentração de elétrons livres (*a*) na prata ($\rho = 10{,}5$ g/cm^3) e (*b*) no ouro ($\rho = 19{,}3$ g/cm^3), supondo que existe

um elétron livre por átomo. Compare os resultados com os valores da Tabela 10-2.

10-14. Calcule a concentração de elétrons livres (*a*) no magnésio ($\rho = 1{,}74$ g/cm^3) e (*b*) no zinco ($\rho = 7{,}1$ g/cm^3), supondo que existem dois elétrons livres por átomo. Compare os resultados com os valores da Tabela 10-2.

10-15. (*a*) Supondo que $\lambda = 0{,}37$ nm e $\langle v \rangle = 1{,}08 \times 10^5$ m/s para $T = 300$ K, determine os valores de σ e ρ para o cobre com o auxílio das Equações 10-13. Usando o mesmo valor de λ, calcule os valores de σ e ρ (*b*) para $T = 200$ K; (*c*) para $T = 100$ K.

Seção 10-3 Gás de Elétrons Livres nos Metais

10-16. Determine a energia média dos elétrons em $T = 0$ K (*a*) no cobre ($E_F = 7{,}06$ eV); (*b*) no lítio ($E_F = 4{,}77$ eV).

10-17. Calcule a energia de Fermi para um fio fino e comprido feito de magnésio.

10-18. Calcule (*a*) a energia de Fermi e (*b*) a temperatura de Fermi da prata e do ferro. Compare os resultados com os valores da Tabela 10-2.

10-19. Mostre que, para $T = 300$ K, cerca de 0,1% dos elétrons livres da prata possuem uma energia maior que E_F.

Seção 10-4 Teoria Quântica da Condução de Eletricidade

10-20. Qual é a velocidade de Fermi, ou seja, a velocidade de um elétron de condução cuja energia é igual à energia de Fermi E_F, (*a*) no Na; (*b*) no Au; (*c*) no Sn? (*Sugestão*: Consulte a Tabela 10-2.)

10-21. As resistividades do Na, Au e Sn para $T = 273$ K são 4,2 $\mu\Omega\cdot$ cm, 2,04 $\mu\Omega\cdot$ cm e 10,6 $\mu\Omega\cdot$ cm, respectivamente. Use estes dados e as velocidades de Fermi calculadas no Problema 10-20 para determinar o livre caminho médio dos elétrons de condução nesses elementos.

10-22. A que temperatura a contribuição do gás de elétrons do cobre para o calor específico é igual a 10% da contribuição das vibrações da rede cristalina?

10-23. Use a Equação 10-29 com $\alpha = \pi^2/4$ para calcular a energia média de um elétron no cobre em $T = 300$ K. Compare o resultado com a energia média em $T = 0$ e com o resultado clássico, $3kT/2$.

10-24. Determine qual é a maior contribuição percentual para o calor específico do ferro sólido que pode ser feita pelos elétrons livres.

Seção 10-5 Magnetismo em Sólidos

10-25. A polarização magnética P de um material é definida através da equação

$$P = \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ + \rho_-}$$

em que ρ_+ e ρ_- são as concentrações de átomos com spin para cima e com spin para baixo, respectivamente. Determine a polarização magnética de um sólido paramagnético à temperatura $T = 200$ K na presença de um campo magnético de 2,0 T.

10-26. Mostre que a susceptibilidade magnética χ é uma grandeza adimensional.

Seção 10-6 Bandas de Energia em Sólidos

10-27. (*a*) A largura da banda proibida que separa a banda de valência da banda de condução no silício é 1,14 eV à temperatura ambiente. Qual é o comprimento de onda de um fóton capaz de excitar um elétron do topo da banda de valência para a base da banda de condução? Repita o cálculo (*b*) para o germânio, no qual a largura da banda proibida é 0,72 eV, e (*c*) para o diamante, no qual a largura da banda proibida é 7,0 eV.

10-28. (*a*) A largura da banda proibida no germânio é 0,72 eV. Quais são os comprimentos de onda de luz visível para os quais um cristal de germânio é transparente? (Pense bem antes de responder!) (*b*) Responda à mesma pergunta para um cristal com uma banda proibida de 3,6 eV. (*c*) Justifique as respostas dos itens (*a*) e (*b*).

10-29. Um fóton com um comprimento de onda de 3,35 μm tem exatamente a energia necessária para excitar um elétron da banda de valência para a banda de condução de um cristal de sulfeto de chumbo. (*a*) Determine a largura da banda proibida do sulfeto de chumbo. (*b*) Determine a temperatura T para a qual kT é igual à largura da banda proibida.

10-30. Considere um pequeno cristal de silício com 100 nm de aresta. (*a*) Calcule o número total N de átomos de silício no cristal. (A massa específica do silício é 2,33 g/cm^3.) (*b*) Sabendo que a banda de condução do silício tem uma largura de 13 eV e lembrando que existem $4N$ estados na banda, estime o valor da distância entre estados vizinhos da banda de condução.

Seção 10-7 Semicondutores Dopados

10-31. O arsênio tem cinco elétrons de valência. Se o arsênio é usado como impureza doadora no silício, determine (*a*) a energia de ionização e (*b*) o raio orbital do quinto elétron de valência do arsênio. A massa efetiva dos elétrons no silício é $0{,}2m_e$. (*c*) Qual é a razão entre a energia de ionização do quinto elétron e a largura da banda proibida do silício?

10-32. O gálio tem três elétrons de valência. Se o gálio é usado como impureza aceitadora no germânio, determine (*a*) a energia de ionização; (*b*) o raio orbital do buraco. A massa efetiva dos buracos no germânio é $0{,}34m_e$.

10-33. Que tipo de semicondutor é obtido quando o silício é dopado (*a*) com alumínio; (*b*) com fósforo? (As configurações eletrônicas desses elementos podem ser encontradas no Apêndice C.)

10-34. O nível dos doadores em um semicondutor tipo *n* está 0,01 eV abaixo da banda de condução. Determine a temperatura para a qual $kT = 0{,}01$ eV.

10-35. Uma fita de estanho tem 10 mm de largura e 0,2 mm de espessura. Quando a fita está sendo atravessada por uma corrente de 20 A e um campo magnético uniforme de 0,25 T é aplicado perpendicularmente ao plano da fita, uma tensão de Hall de 2,20 μV aparece entre os lados da fita. Determine (*a*) a concentração de portadores e (*b*) o número de portadores por átomo de estanho. A massa específica do estanho é $5{,}75 \times 10^3$ kg/m^3 e a massa molecular é 118,7.

Seção 10-8 Junções e Dispositivos Semicondutores

10-36. Para uma temperatura $T = 300$ K, use a Equação 10-49 para determinar a tensão de polarização V_b para a qual o termo exponencial (*a*) é igual a 10; (*b*) é igual a 0,1.

10-37. Para que valor de tensão de polarização V_b a exponencial da Equação 10-49 (*a*) é igual a 5; (*b*) é igual a 0,5 para $T = 200$ K?

10-38. Calcule a variação percentual da corrente em uma junção *pn* polarizada diretamente quando a tensão de polarização aumenta de 0,1 V para 0,2 V.

10-39. Para uma temperatura $T = 300$, use a Equação 10-49 para determinar a tensão de polarização V_b para a qual o termo exponencial é igual a (*a*) 10; (*b*) 0,1.

10-40. Determine a largura da banda proibida do CdS a partir da informação de que uma fotocélula de CdS só produz energia elétrica quando o comprimento de onda da luz incidente é menor que 484 nm.

Seção 10-9 Supercondutividade

10-41. O chumbo tem três isótopos naturais, o ^{206}Pb, o ^{207}Pb e o ^{208}Pb. Use as massas atômicas do Apêndice A e o valor de α da Tabela 10-6 para calcular as temperaturas críticas abaixo das quais os três isótopos, na forma pura, se tornam supercondutores.

10-42. Calcule (*a*) a largura da banda proibida do estado supercondutor do índio e (*b*) o comprimento de onda máximo de um fóton capaz de romper um par de Cooper no índio a 0 K.

10-43. (*a*) Use a Equação 10-56 para calcular a largura da banda proibida do estado supercondutor do estanho e compare o resultado com o valor experimental, 6×10^{-4} eV. (*b*) Use o valor experimental para calcular o comprimento de onda máximo de um fóton capaz de romper um par de Cooper no estanho em $T = 0$.

10-44. Use a curva teórica da Figura 10-53 para estimar a largura da banda proibida do estado supercondutor (*a*) do estanho; (*b*) do nióbio; (*c*) do alumínio; (*d*) do zinco, todas em $T = 0{,}5T_c$.

10-45. De acordo com a teoria BCS, para que valor da razão T/T_c o campo magnético crítico B_c é igual a (*a*) $0{,}1B_c(0)$; (*b*) $0{,}5B_c(0)$; (*c*) $0{,}9B_c(0)$?

NÍVEL II

10-46. Aproximando os átomos de um cristal cfc por esferas rígidas de raio *r* e chamando de *a* o lado da célula unitária cúbica, que fração do volume da célula unitária (e, portanto, do cristal) é ocupada por átomos?

10-47. Estime a fração de elétrons livres do cobre que se encontram em estados excitados (*a*) a 300 K e (*b*) a 1000 K.

10-48. Um modelo unidimensional de um cristal iônico consiste em uma linha de íons alternadamente positivos e negativos, separados por uma distância r_0. (*a*) Mostre que a energia potencial de atração de um dos íons do cristal é dada por

$$V = -\frac{2ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

(*b*) Usando a expansão em série

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

mostre que a constante de Madelung para este modelo unidimensional é $\alpha = 2 \ln 2 = 1{,}386$.

10-49. Estime a energia de Fermi do zinco a partir da contribuição dos elétrons para o calor específico molar, $(3{,}74 \times 10^{-4}\ T)$ J/mol · K, para o qual T é a temperatura absoluta.

10-50. A concentração de estados eletrônicos em um metal pode ser escrita na forma $g(E) = AE^{1/2}$, na qual A é uma constante e a energia E é medida em relação à base da banda de condução. (*a*) Mostre que o número total de estados é $2AE_F^{3/2}/3$. (*b*) Qual é a fração de elétrons de condução cuja energia está no intervalo $E_F - kT/2 < E < E_F + kT/2$? (*c*) Calcule essa fração para o cobre a 300 K.

10-51. Cristais de germânio de alta pureza podem ser usados como detectores de raios X e raios gama. Como a banda proibida do germânio tem uma largura de apenas 0,72 eV, um fóton de alta energia pode produzir muitos pares elétron-buraco ao excitar elétrons da banda de valência para banda de condução. O decaimento do radioisótopo ^{60}Co é acompanhado pela emissão de dois raios gama com energias de 1,17 MeV e 1,33 MeV (veja o Capítulo 11). (*a*) Calcule o número de elétrons excitados para a banda de condução pelo raio gama de 1,17 MeV, N_1, e pelo raio gama de 1,33 MeV, N_2. (*b*) Os números N_1 e N_2 apresentam flutuações estatísticas de $\pm\sqrt{N_1}$ e $\pm\sqrt{N_2}$. Calcule a indeterminação relativa de N_1 e N_2. (*c*) Calcule a indeterminação correspondente da energia dos dois raios gama. Estes valores podem ser considerados uma medida da resolução de energia do cristal de germânio de alta pureza.

10-52. Uma amostra de silício tipo n com 10^{16} elétrons por centímetro cúbico na banda de condução tem uma resistividade de $5 \times 10^{-3}\ \Omega \cdot$ m a 300 K. Determine o livre caminho médio dos elétrons, supondo que a massa efetiva dos elétrons é $0{,}2m_e$. Compare o resultado com o livre caminho médio dos elétrons no cobre a 300 K.

10-53. Os físicos e engenheiros usam a massa específica de uma amostra metálica para determinar a estrutura cristalina provável do material. A massa específica do cobre é 8,96 g/cm^3 e o raio atômico do cobre é 0,128 nm. É mais provável que um cristal de cobre seja cúbico de corpo centrado ou cúbico de faces centradas? (*Sugestão*: Veja a Figura 10-57.)

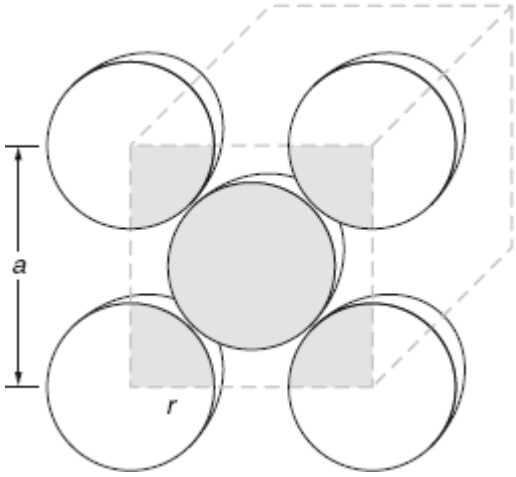


FIGURA 10-57 Problema 10-53.

10-54. A curva característica corrente-tensão de um diodo "ideal" de silício é dada por

$$I = I_0\left(e^{eV_b/kT} - 1\right)$$

Supondo que $kT = 0{,}025$ eV (temperatura ambiente) e $I_0 = 1$ nA, (*a*) mostre que a resistência do diodo é 25 MΩ para pequenas tensões inversas. (*Sugestão*: Faça uma expansão em série de Taylor da função exponencial ou use uma calculadora e escolha um valor pequeno e negativo para V_b.) (*b*) Calcule a resistência estática do diodo para uma tensão inversa de 0,5 V. (*c*) Calcule a resistência estática para uma tensão direta de 0,5 V. Qual é a corrente neste caso? (*d*) Calcule a resistência dinâmica dV/dI para uma tensão direta de 0,5 V.

10-55. A energia de ligação do elétron adicional do átomo de arsênio que substitui um átomo de silício ou germânio pode ser estimada a partir do cálculo da primeira órbita de Bohr para o elétron nesses materiais. Como quatro dos elétrons de valência do arsênio formam ligações covalentes, o quinto elétron "enxerga" uma única carga positiva no centro de atração. Este modelo é, portanto, uma versão modificada do átomo de hidrogênio. No modelo de Bohr do átomo de hidrogênio, o elétron se move no espaço livre a uma distância do núcleo dada por

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}$$

Quando um elétron está se movendo no interior de um cristal, podemos levar em conta o efeito dos outros átomos substituindo a permissividade do vácuo ϵ_0 por $\kappa\epsilon_0$, na qual κ é a constante dielétrica do material, e a massa do elétron m_e por uma massa efetiva. No caso do silício, $\kappa = 12$ e a massa efetiva dos elétrons é $0{,}2m_e$; no caso do germânio, $\kappa = 16$ e a massa efetiva dos elétrons é $0{,}1m_e$. Estime o raio de Bohr do quinto elétron do arsênio quando é usado para dopar cristais de silício e de germânio.

10.56. O InSb é um semicondutor com uma largura da banda proibida $E_g = 0{,}23$ eV e uma constante dielétrica $\kappa = 18$. A massa efetiva dos elétrons no InSb é $m^* = 0{,}015m_e$. (*a*) Calcule a energia de ionização de uma impureza doadora no InSb. (*b*) Qual é a o raio da órbita do elétron adicional da impureza doadora no estado fundamental? (c) Para que concentração de doadores, aproximadamente, as órbitas de doadores vizinhos começam a se superpor?

10-57. O livre caminho médio dos elétrons em um metal depende tanto das vibrações dos íons da rede cristalina quanto das vibrações dos íons de impurezas, de acordo com a equação $1/\lambda = 1/\lambda_m + 1/\lambda_i$. A resistividade do cobre de alta pureza aumenta de $1{,}2 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m quando uma certa impureza é dispersa no metal com uma concentração de 1% (em número de átomos). (*a*) Estime o valor de λ_i a partir desses dados. (*b*) Do ponto de vista dos elétrons livres, os íons da impureza têm um diâmetro efetivo d. Use a Equação 10-12, com $r = d/2$, para estimar a seção de choque d^2 da impureza.

NÍVEL III

10-58. Quando o arsênio é usado para dopar cristais de silício, o quinto elétron do arsênio e o íon As^+ se comportam como um átomo de hidrogênio, exceto pelo fato de que a função energia potencial $V(r)$ e a massa do elétron devem ser modificadas para levar em conta a existência da rede cristalina (veja a Seção 10-7). Com estas modificações, (*a*) resolva a equação de Schrödinger, usando como modelo a solução apresentada no Capítulo 7; (*b*) demonstre a Equação 10-43; (*c*) desenhe, em escala, o diagrama de níveis de energia do quinto elétron para n de 1 a 5.

10-59. O parâmetro K é a constante elástica de uma "mola" constituída por uma linha de íons alternadamente positivos e negativos. Quando os íons são deslocados ligeiramente da distância de equilíbrio r_0, começam a vibrar com uma frequência

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

na qual

$$K = \frac{\alpha(n-1)ke^2}{r_0^3}$$

(*a*) Use os valores de α, n e r_0 do NaCl e a massa reduzida da molécula de NaCl para calcular o valor de f. (*b*) Calcule o comprimento de onda da radiação eletromagnética correspondente a essa frequência e compare o resultado com os dados experimentais, segundo os quais o NaCl apresenta bandas de absorção na faixa do infravermelho nas vizinhanças de $\lambda = 61$ μm.

10-60. Considere o modelo de um metal no qual a rede de íons positivos constitui um recipiente para um gás clássico de elétrons com n elétrons por unidade de volume. Em equilíbrio, a velocidade média é zero, mas a aplicação de um campo elétrico produz uma aceleração dos elétrons. Quando usamos um tempo de relaxação τ para levar em conta as colisões elétron-rede, obtemos a equação

$$m\frac{dv}{dt} + \frac{m}{\tau}v = -eE$$

(*a*) Resolva a equação acima para obter a velocidade de deriva na direção do campo elétrico aplicado. (*b*) Mostre que a lei de Ohm é obedecida e determine a resistividade em função de n, e, m e τ.

10-61. Imagine um cristal cúbico como o NaCl, com uma carga positiva no centro de um sistema de coordenadas cartesianas no qual a unidade das escalas é igual à distância interatômica. (*a*) Mostre que a carga de um íon de coordenadas (r, s, t) é $e(-1)^r(-1)^s(-1)^t = e(-1)^{r+s+t}$, na qual e é a unidade fundamental de carga. (*b*) Usando a Equação 10-2 como guia, calcule a constante de Madelung para um cubo com 2 unidades de aresta. Faça o mesmo para cubos com 4, 6, 8, 10, 12, 16 e 20 unidades de aresta. (Talvez seja uma boa ideia programar os cálculos em uma planilha eletrônica.) Verifique que os valores tendem para $\alpha = 1{,}7476$.

10-62. (*a*) Mostre que, no caso de um sólido paramagnético em que a energia dos elétrons é dada pela Equação 10-33, a magnetização M é dada por

$$M = \mu\rho \tanh(\mu B/kT)$$

(*b*) Mostre que, para $\mu_B B << kT$, a susceptibilidade magnética é dada pela Equação 10-35.

***Do inglês giant magnetoresistance. (N.T.)**

***Do inglês *l*ight-*e*mitting *d*iode. (N.T.)**

*** Os supercondutores de alta temperatura também são supercondutores tipo II. (N.T.)**

***A massa média dos átomos de um cristal é a média ponderada das massas dos isótopos dos elementos de que o cristal é composto. (N.T.)**

*** Johannes Georg Bednorz (1950-), físico alemão, e Karl Alex Müller (1927-), físico suíço, receberam o Prêmio Nobel de Física de 1987 pela descoberta dos supercondutores de alta temperatura. (N.T.)**

CAPÍTULO 11

Física Nuclear

11-1 A Composição do Núcleo
11-2 Propriedades dos Núcleos no Estado Fundamental
11-3 Radioatividade
11-4 Decaimentos Alfa, Beta e Gama
11-5 A Força Nuclear
11-6 O Modelo de Camadas
11-7 Reações Nucleares
11-8 Fissão e Fusão
11-9 Aplicações

A primeira indicação da existência do núcleo atômico foi a radioatividade natural, descoberta por A. H. Becquerel[1] em 1896. Depois de tomar conhecimento da existência dos raios X, que tinham sido observados por Roentgen no ano anterior, Becquerel decidiu investigar a possibilidade de que os minerais que exibiam a propriedade da fluorescência depois de serem expostos à luz solar também emitissem raios X. Para isso, utilizou a técnica simples de colocar uma amostra de um desses minerais, o sulfato duplo de urânio e potássio, em cima de uma placa fotográfica embrulhada em papel preto e expor o conjunto à luz solar no peitoril de uma janela. Nos primeiros experimentos, uma imagem da amostra apareceu na placa revelada, o que parecia indicar que o material realmente emitia raios X depois de ser exposto à luz. Em uma semana de tempo nublado, porém, uma amostra que tinha sido guardada em uma gaveta, sem ser exposta à luz, também impressionou uma chapa fotográfica, o que levou Becquerel a concluir que o material estava emitindo espontaneamente uma radiação penetrante até então desconhecida; o cientista acabara de descobrir a radioatividade.[2]

Os raios emitidos pelos núcleos radioativos foram estudados por muitos físicos nas primeiras décadas do século XX. Inicialmente, foram classificados por Rutherford como α, β e γ, de acordo com a capacidade de penetrar na matéria e ionizar o ar: os raios α eram os menos penetrantes e os que produziam mais ionização; os raios γ eram os mais penetrantes e os que produziam menos ionização; os raios β apresentavam propriedades intermediárias. Logo foi descoberto, em um experimento clássico realizado por Rutherford, que os raios α eram núcleos de ^{4}He. Também foi descoberto que os raios β eram elétrons e que os raios γ eram uma forma de radiação eletromagnética de comprimento de onda muito pequeno. Os experimentos de espalhamento de partículas α realizados por Geiger e Marsden em 1911 (veja a Seção 4-2) e o sucesso do modelo de Bohr para o átomo levaram os físicos à conclusão de que o átomo era constituído por um núcleo compacto, com um raio de 1 a 10 femtômetros (fm; 1 fm = 10^{-15} m), cercado por uma nuvem de elétrons a uma distância relativamente grande, da ordem de 0,1 nm = 100.000 fm.

Em 1928, a explicação correta da radioatividade α como um fenômeno quântico de tunelamento foi proposta por G. Gamow, R. W. Gurney e E. W. Condon. Em 1932, em rápida sucessão, o *nêutron* foi descoberto por J. Chadwick, o *pósitron* foi descoberto por C. D. Anderson, e a primeira reação nuclear usando partículas aceleradas artificialmente (prótons) foi observada por J. D. Cockcroft e E. T. S. Walton.[3] Assim, é razoável considerar esse ano como o do início da física nuclear moderna.

Muitas informações a respeito do núcleo são obtidas bombardeando-os com partículas e observando os resultados. A criação dos aceleradores de partículas, o gerador eletrostático Van de Graaff em 1931 e o cíclotron em 1932, permitiu a realização de muitos estudos experimentais sem as limitações de energia e tipo de partícula impostas pelas fontes radioativas naturais. Desde aquela época, houve um grande progresso tecnológico nos campos da aceleração e detecção de partículas, e muitas reações nucleares e interações entre partículas foram estudadas.

Entre as reações nucleares, existem dois tipos que merecem uma atenção especial: as reações de *fissão* e as reações de *fusão*. Ambas são processos nos quais parte da massa do núcleo é convertida em outras formas de energia, como energia térmica, da mesma forma como uma pequena parte da massa dos átomos é convertida em energia em reações químicas exotérmicas como as de combustão. As reações de fissão constituem uma fonte de energia importante, embora controvertida, para a geração de energia elétrica em mais de 30 países e responderam por 5,2% da produção mundial de energia em 2010.[4] As reações de fusão ainda não são exploradas comercialmente em nosso planeta, mas é graças a essas reações que as estrelas produzem luz e calor. A triste realidade de que tanto a fissão como a fusão podem ser usadas para fabricar armas de enorme poder de destruição significa que esta aplicação das reações nucleares influencia os debates políticos em maior grau do que talvez qualquer outra descoberta científica da história humana.

Neste capítulo, estudaremos algumas propriedades gerais dos núcleos atômicos e os aspectos mais importantes da radioatividade. Embora por necessidade as discussões sejam apenas semi-quantitativas, vamos considerar a natureza da força nuclear como é atualmente compreendida e descrever um dos modelos mais úteis em termos do qual muitas propriedades nucleares podem ser analisadas. As aplicações da radioatividade e das reações nucleares não se limitam à fissão e à fusão. As radiações emitidas por radioisótopos vêm sendo usadas há muito tempo para diagnóstico e tratamento de doenças. Essas contribuições aumentaram consideravelmente com a invenção, na década de 1970, da *tomografia computadorizada*[5] (CAT),* uma técnica sofisticada de radiografia que deu origem, mais tarde, à *tomografia por emissão de pósitrons* (PET).** As reações nucleares induzidas por nêutrons são aproveitadas em uma técnica extremamente sensível, a *análise por ativação de nêutrons* (NAA),*** que permite detectar quase todos os elementos da tabela periódica em baixíssimas concentrações. Essas e muitas outras aplicações serão discutidas neste capítulo.

11-1 A Composição do Núcleo

Os experimentos de Moseley (veja a Seção 4-4) mostraram que a carga nuclear é igual a Z vezes a carga do próton, onde Z é o *número atômico*, que, por sua vez, é aproximadamente igual à metade do *número de massa* A (exceto no caso do hidrogênio, em que $Z = A$). Assim, o núcleo tem uma massa aproximadamente igual à de A prótons, mas uma carga de apenas $Z \approx A/2$ prótons. Antes da descoberta do nêutron, era difícil compreender este fato, a não ser supondo que existem $A - Z$ elétrons no núcleo para diminuir a carga sem aumentar muito a massa. A ideia de que o núcleo continha elétrons era apoiada pela observação do decaimento β, no qual elétrons são ejetados por alguns núcleos radioativos. Entretanto, o modelo apresentava sérios problemas. Um cálculo relativamente simples a partir do princípio de indeterminação (veja o Problema 11-2) mostra que um elétron terá uma energia mínima de aproximadamente 100 MeV se for confinado a uma região de $r < 10^{-14}$ m; entretanto, a energia dos elétrons emitidos no decaimento β é da ordem de apenas 1 ou 2 MeV. Também não existem indícios de uma intensa força atrativa entre o núcleo e o elétron, como seria de se esperar no caso de uma energia potencial negativa de 50 a 100 MeV no interior do núcleo. Além do mais, como a energia potencial eletrostática entre o elétron e o núcleo é negativa, não existe uma barreira de largura finita, como no caso do decaimento α (veja a Figura 11-1). Se a energia potencial do elétron fosse positiva, como o decaimento β parece exigir, o elétron escaparia imediatamente do núcleo e a maioria dos emissores β naturais já teria desaparecido há muito tempo. Outro problema é a observação de que os momentos magnéticos dos núcleos são da ordem do magnéton nuclear, $\mu_N = e\hbar/2m_p$, cerca de 2000 vezes menor que um magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar/2m_e$, o que seria difícil de explicar se houvesse elétrons no interior do núcleo.

Outro argumento convincente contra a existência de elétrons no núcleo tem a ver com o momento angular. Os prótons e os elétrons são férmions de spin 1/2 e, portanto, obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Entretanto, o desdobramento das linhas espectrais do átomo de nitrogênio causado pelo spin do núcleo, conhecido como *estrutura hiperfina* (veja a Seção 11-2), mostra que o número quântico de spin do núcleo do nitrogênio é igual a 1 e, portanto, o núcleo de nitrogênio é um bóson, o que é confirmado pelos espectros moleculares (veja a Seção 9-4). Se o ^{14}N contivesse 14 prótons e 7 elétrons, cada um com spin 1/2, o spin total teria que ser fracionário e o núcleo se comportaria como um férmion e não como um bóson.

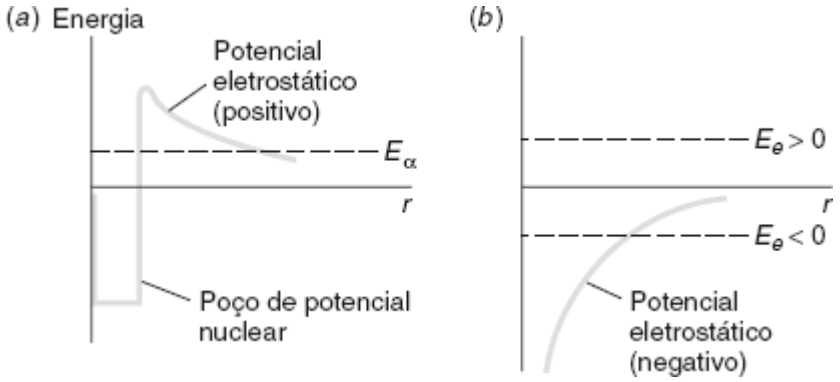


FIGURA 11-1 Comparação entre (*a*) o potencial experimentado por uma partícula α e (*b*) o potencial experimentado por um elétron no interior de um núcleo atômico. Como não existe uma barreira de largura finita para o elétron, o elétron não está ligado ao núcleo, a menos que a energia total seja negativa, caso em que ficaria permanentemente impedido de escapar. O aumento brusco do potencial que ocorre em (*a*) nas proximidades de $r = 0$ representa o "caroço duro" do núcleo.

Em 1920, Rutherford propôs a existência no núcleo de uma partícula neutra, possivelmente formada pela combinação de um próton e um elétron, que ele chamou de *nêutron*. Quando uma partícula como a descrita por Rutherford foi descoberta por Chadwick em 1932, a ideia de que poderia haver elétrons no interior do núcleo foi definitivamente abandonada e passou-se a supor que um núcleo de número de massa A contém N nêutrons e Z prótons, com $N + Z = A$. O número N é chamado de *número de nêutrons*. A ideia de que o nêutron é uma combinação de um próton com um elétron também foi descartada, já que o spin do nêutron é 1/2. Assim, hoje se sabe que o núcleo é composto de prótons e nêutrons, conhecidos coletivamente como *núcleons*, que ocupam um volume total da ordem de 1 a 10 fm. Os núcleos de todos os elementos são constituídos apenas por esses dois tipos de partículas. A Tabela 11-1 mostra algumas propriedades dos dois núcleons, juntamente com as propriedades de dois núcleos simples (o dêuteron, composto por um pró-ton e um nêutron, e o tríton, composto por um próton e dois nêutrons) e do elétron. Devemos observar neste ponto que os núcleons não são partículas elementares; tanto o próton quanto o nêutron são formados por três *quarks*, partículas elementares mantidas unidas pela *interação forte*, que também é responsável pela coesão do núcleo. Os quarks e suas interações serão discutidos no Capítulo 12.

11-2 Propriedades dos Núcleos no Estado Fundamental

O comportamento dos núcleos, como o comportamento dos átomos, só pode ser compreendido à luz dos princípios da física quântica. Do mesmo modo como as regularidades dos espectros atômicos levaram à teoria de Bohr e, mais tarde, à mecânica ondulatória, foi o estudo dos espectros nucleares, ou seja, das radiações e partículas emitidas espontaneamente pelos núcleos radioativos, que revelou a existência de níveis de energia, momentos angulares e momentos magnéticos quantizados nos núcleos. A interpretação dos espectros nucleares é mais difícil que a interpretação dos espectros atômicos por causa da existência de dois tipos diferentes de núcleons, da possível emissão de várias partículas (além de fótons) pelos núcleos excitados e do nosso conhecimento imperfeito da função energia potencial dos núcleos atômicos. Nesta seção, vamos discutir algumas propriedades dos núcleos no estado fundamental e mencionar alguns métodos usados para determinar essas propriedades. Na Seção 11-3 vamos estudar a radioatividade, que fornece informações a respeito dos estados excitados dos núcleos. Várias referências citadas na bibliografia desde capítulo contêm descrições dos métodos experimentais usados para medir propriedades nucleares. Nas seções que se seguem, vamos usar a seguinte terminologia: a letra N representa o número de nêutrons no núcleo e a letra Z o número de prótons ou número atômico; $A = N + Z$ é o número total de núcleons ou número de massa. O número de massa é o número inteiro mais próximo da massa atômica. Um tipo específico de núcleo é chamado de *nuclídeo*. Os nuclídeos são representados pelo símbolo químico do elemento precedido por um índice superior que indica o valor de A, como em ^{16}O e ^{15}O. Às vezes, o valor de Z é indicado por um índice inferior, como em $^{15}{}_{8}O$, mas isso não é necessário, já que existe uma correspondência direta entre o número atômico e o símbolo do elemento. Ocasionalmente, o valor de N também é indicado por um índice inferior, como em $^{15}{}_{8}O_{7}$, embora isso também seja desnecessário, pois $N = A - Z$. Nuclídeos com o mesmo valor de Z, como ^{15}O e ^{16}O, são chamados de *isótopos*. Nuclídeos com o mesmo valor de N, como $^{13}{}_{6}C_{7}$ e $^{14}{}_{7}N_{7}$, recebem o nome de *isótonos*, enquanto nuclídeos com o mesmo valor de A, como ^{14}C e ^{14}N, são conhecidos como *isóbaros*.

Tabela 11-1 Propriedades de algumas partículas atômicas

Partícula	Carga	Massa (u)	Massa (kg)	Spin	Momento magnético

Próton	$+e$	1,007276	$1,6726 \times 10^{-27}$	1/2	2,79285 μ_N
Nêutron	0	1,008665	$1,6749 \times 10^{-27}$	1/2	−1,91304 μ_N
Dêuteron	$+e$	2,013553	$3,3436 \times 10^{-27}$	1	0,85744 μ_N
Tríton	$+e$	3,015501	$5,0074 \times 10^{-27}$	1/2	2,97896 μ_N
Elétron	$-e$	$5,4858 \times 10^{-4}$	$9,1094 \times 10^{-31}$	1/2	1,00116 μ_B

Tamanho e Forma dos Núcleos

Raios Nucleares Todos os métodos usados para medir os raios nucleares mostram que os raios são proporcionais à raiz cúbica do número de massa. O raio nuclear pode ser determinado através de experimentos de espalhamento semelhantes aos executados por Rutherford ou, em alguns casos, por medidas de radioatividade. Na verdade, como vimos na Seção 4-2 e está ilustrado na Figura 11-2, a primeira medida do raio nuclear foi feita por Rutherford, usando o espalhamento de partículas α. Um método interessante, quase clássico, de determinar o raio nuclear envolve a medida da energia do decaimento β em *nuclídeos especulares*, que são pares de nuclídeos em que o número de prótons de um é igual ao número de nêutrons do outro (veja a Figura 11-3). Assim, por exemplo, o ^{15}O, com oito prótons e sete nêutrons, e o ^{15}N, com oito nêutrons e sete prótons, são nuclídeos especulares. Supondo que a interação forte entre os núcleons é independente do tipo de núcleon, a única diferença de energia entre o ^{15}O e o ^{15}N é de natureza eletrostática. É possível demonstrar que a energia potencial eletrostática de uma esfera uniformemente carregada é dada por

$$U = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{R} \qquad \textbf{11-1}$$



em que q é a carga total e R é o raio da esfera. O nuclídeo ^{15}O é radioativo e, como veremos daqui a pouco, emite um pósitron e um neutrino, transformando-se em ^{15}N. A diferença de energia entre o ^{15}O e o ^{15}N, a energia do decaimento β, é, portanto,

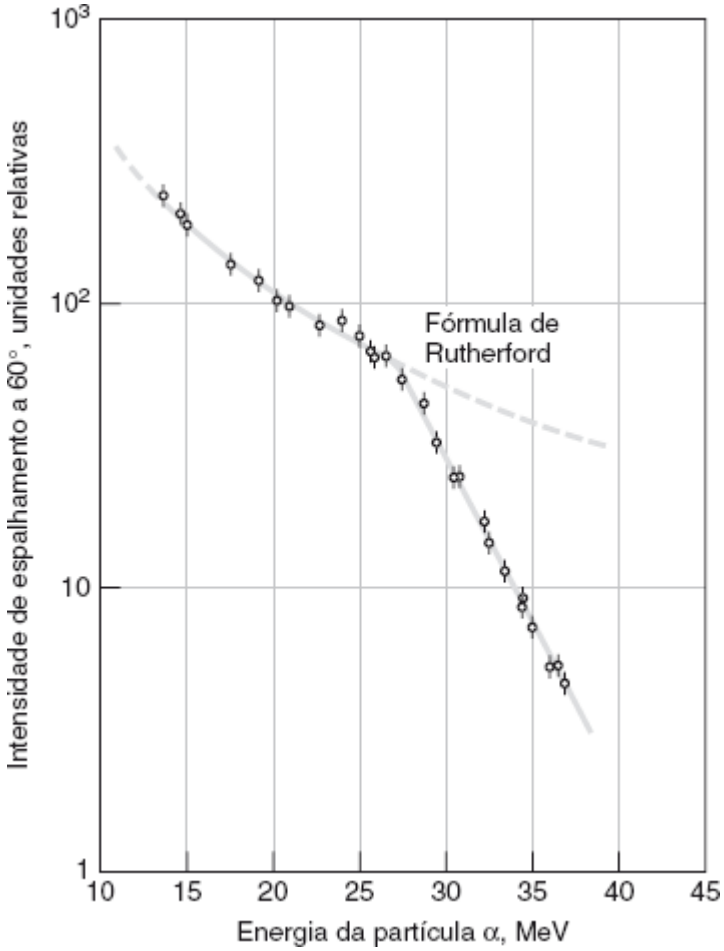


FIGURA 11-2 A fórmula de espalhamento de Rutherford (Equação 4-6) está indicada pela linha tracejada. Partículas α incidentes em um alvo de chumbo sofrem o espalhamento previsto pela fórmula de Rutherford, contanto que a energia não exceda 27 MeV. Para energias maiores, as partículas α se aproximam tanto dos núcleos de Pb que os núcleons da partícula α interagem com os núcleons do Pb através da força nuclear, que é atrativa, e a intensidade do espalhamento se torna menor que a prevista pela equação de Rutherford. [*Fonte*: R. M. Eisberg e C. E. Porter, *Rev. Mod. Phys*., **33**, 190 (1961).]

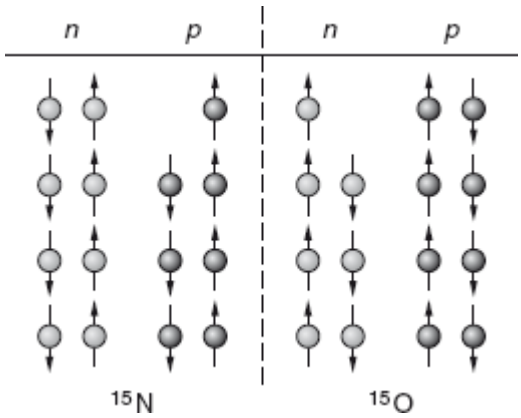


FIGURA 11-3 Nuclídeos especulares. Se todos os nêutrons são substituídos por prótons e todos os prótons são substituídos por nêutrons, o ^{15}N se transforma no nuclídeo especular ^{15}O. A diferença entre as energias dos estados fundamentais de dois nuclídeos especulares se deve apenas à energia eletrostática.

$$\Delta U = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{R}\left[Z^2 - (Z-1)^2\right] \qquad \textbf{11-2}$$

com $Z = 8$. A medida da energia do decaimento, igual a ΔU, fornece, portanto, uma estimativa de R. Supondo uma distribuição uniforme de carga, a medida das energias de decaimento dos pósitrons (veja a Seção 11-4) para 18 pares de nuclídeos especulares mostra que o raio nuclear obedece à equação

$$R = R_0 A^{1/3} \text{ em que } R_0 = 1{,}2 \pm 0{,}2 \text{ fm} \qquad \textbf{11-3}$$

na qual A é o número de massa. O valor de R_0 na Equação 11-3 inclui o efeito de uma correção quântica calculada a partir do

modelo de camadas discutido na Seção 11-6. A coincidência deste resultado com o obtido por outros métodos de determinar o valor de R é uma forte indicação de que a parte da energia potencial associada à interação forte é a mesma para os dois nuclídeos em todos os pares especulares.

As medidas mais completas dos raios nucleares foram realizadas por Robert Hofstadter e colaboradores em uma série de experimentos iniciada em 1953.[6] Nesses experimentos, executados no Stanford Linear Accelerator (SLAC), núcleos foram bombardeados por elétrons com energias entre 200 e 500 MeV. O comprimento de onda de um elétron de 500 MeV é 2,5 fm, menor que o raio dos núcleos mais pesados. Assim, é possível obter informações a respeito da distribuição de carga no interior dos núcleos analisando a curva de difração que resulta do espalhamento dos elétrons. A análise é complicada pelo fato de que os elétrons são relativísticos. A Figura 11-4 mostra as curvas de difração de elétrons espalhados por núcleos de ^{16}O e ^{12}C. Considerando o feixe incidente de elétrons como uma onda plana de comprimento de onda λ, o processo de espalhamento é semelhante à difração da luz por um furo circular de raio R, discutida nos livros de física básica, nos quais R no caso é o raio nuclear. O primeiro mínimo da curva de difração é dado aproximadamente por

$$\operatorname{sen}\theta = 0{,}16\lambda/R \qquad \textbf{11-4}$$

O Exemplo 11-2 mostra como o raio nuclear pode ser calculado a partir da Equação 11-4 e de resultados como os da Figura 11-4. A Figura 11-5*a* mostra algumas distribuições de carga obtidas através da análise detalhada dos resultados desses experimentos. O raio eletromagnético médio R e a espessura da superfície t, definidos na Figura 11-5*b*, são dados por

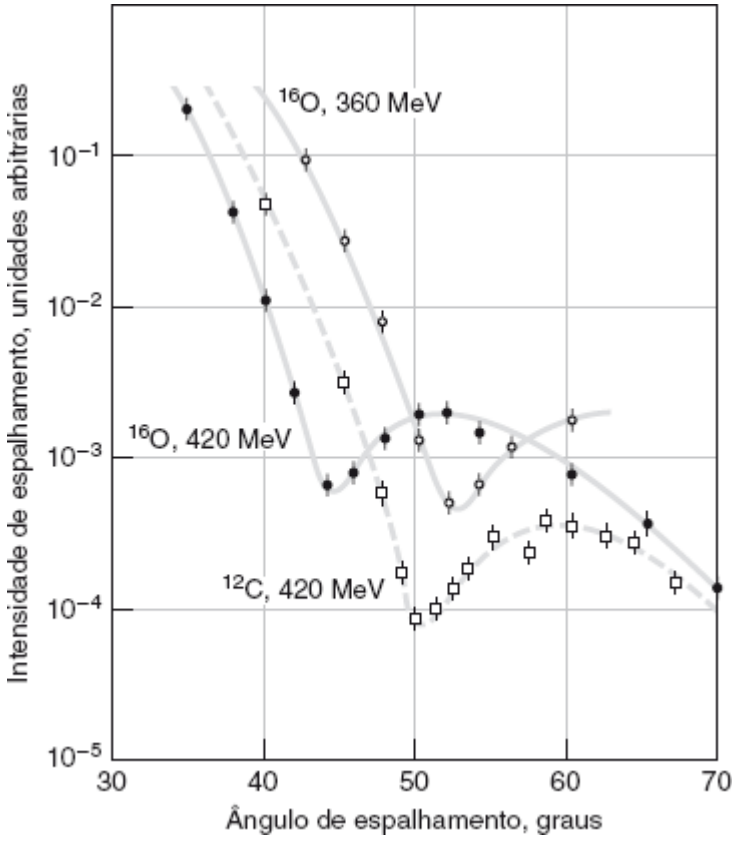


FIGURA 11-4 Curvas de difração de elétrons de alta energia espalhados pelo ^{16}O e pelo ^{12}C. O ângulo para o qual a intensidade de espalhamento é mínima é dado pela Equação 11-4.

$$R = (1{,}07 \pm 0{,}02)A^{1/3}\ \text{fm}$$
$$t = 2{,}4 \pm 0{,}3\ \text{fm} \qquad \textbf{11-5}$$

Esses resultados concordam com os resultados obtidos a partir do estudo do decaimento β em núcleos especulares.

EXEMPLO 11-1 **Raios Nucleares do ^{4}He e do ^{238}U** Use a Equação 11-3 para determinar os raios do ^{4}He e do ^{238}U.

SOLUÇÃO

Para o ^{4}He:

$$R_{He} = 1{,}2(4)^{1/3} = 1{,}90\ \text{fm}$$

Para o ^{238}U:

$$R_U = 1{,}2\,(238)^{1/3} = 7{,}42\ \text{fm}$$

Assim, os raios dos nuclídeos mais pesados são apenas quatro vezes maiores, aproximadamente, que os raios dos nuclídeos mais leves.

EXEMPLO 11-2 **Raio Nuclear do ^{16}O** Determine o raio do núcleo de ^{16}O usando os dados da Figura 11-4 para elétrons de 420 MeV espalhados por núcleos de ^{16}O.

SOLUÇÃO

1. O raio R do núcleo de ^{16}O pode ser calculado a partir da Equação 11-4:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{0{,}61\lambda}{R} \quad \text{ou} \quad R = \frac{0{,}61\lambda}{\operatorname{sen}\theta}$$

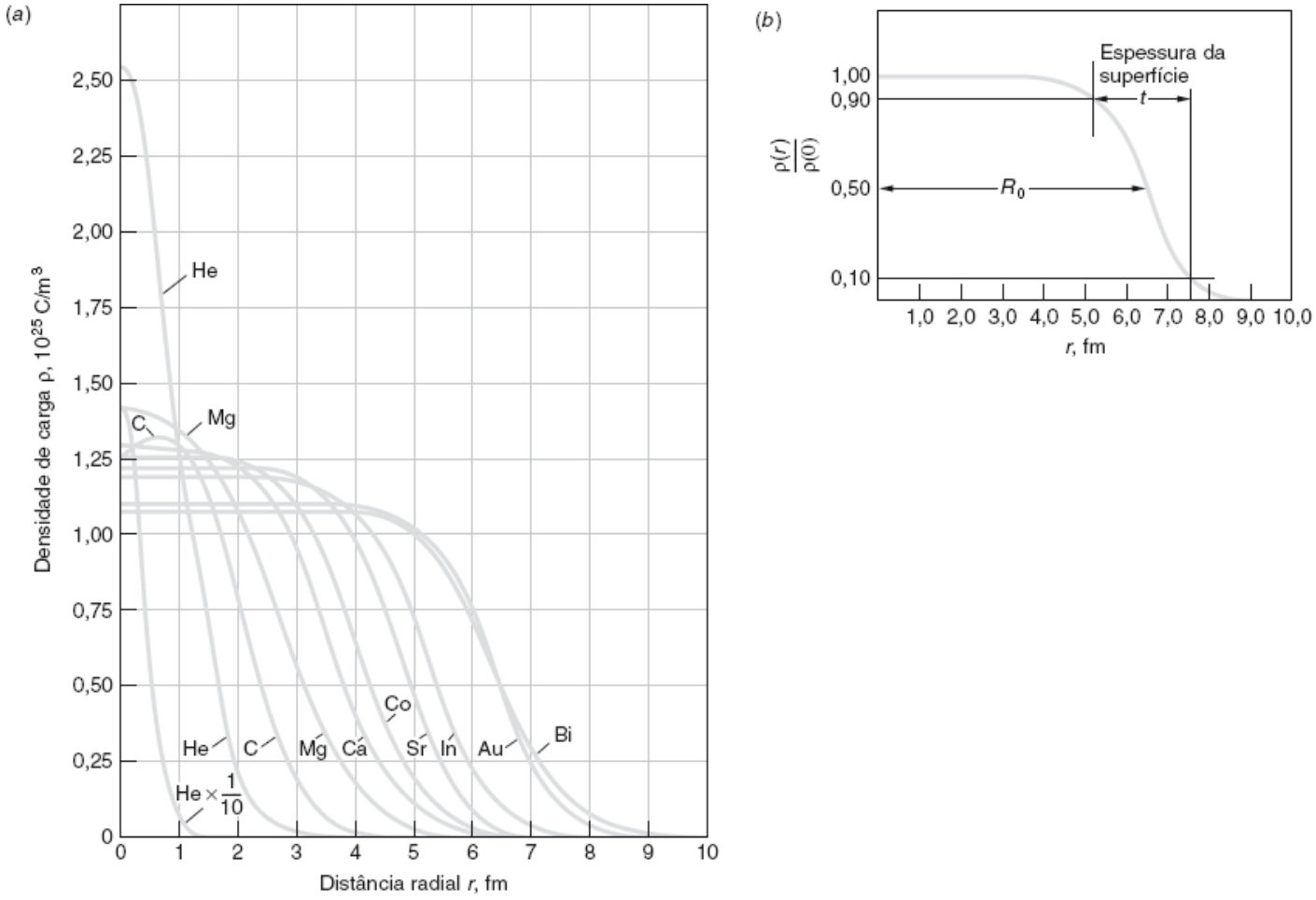


FIGURA 11-5 (*a*) Densidade de carga em função da distância para vários núcleos, medida por difração de elétrons de alta energia. (*b*) Definição dos parâmetros R_0 e t usados para descrever a densidade de carga nuclear. A espessura da superfície t é a distância entre os pontos correspondentes a 10% e 90% da densidade do caroço central. [*Fonte*: R. Hofstadter, *Annual Review of Nuclear Science*, **7**, 231 (1957).]

2. O ângulo θ da Equação 11-4 corresponde ao primeiro mínimo na figura de difração. De acordo com a Figura 11-4, o primeiro mínimo ocorre em

$$\theta = 44°$$

3. O comprimento de onda λ dos elétrons é dado por

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

4. O momento p dos elétrons de 420 MeV deve ser calculado a partir da expressão relativística, Equação 2-32:

$$p^2c^2 = E^2 - (mc^2)^2$$
$$= (420)^2 - (0{,}511)^2$$
$$\approx (420\ \text{MeV})^2$$

ou

$$p = 420\ \text{MeV}/c = 2{,}24 \times 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

5. Substituindo este valor na equação obtida no item 3, temos:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \times 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{2{,}24 \times 10^{-19}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}$$
$$= 2{,}96 \times 10^{-15}\ \text{m} = 2{,}96\ \text{fm}$$

6. O raio R pode ser determinado substituindo θ e λ por seus valores na equação obtida no item 1:

$$R = \frac{(0{,}61)(2{,}96\ \text{fm})}{\text{sen}\ 44^\circ} = 2{,}60\ \text{fm}$$

Observação: *Este resultado concorda com os valores de R_0 para os núcleos de baixo Z da Figura 11-5a.*

O raio nuclear também pode ser medido a partir da atenuação de um feixe de nêutrons rápidos. É possível mostrar que a seção de choque total para atenuação é dada por

$$\sigma = 2\pi\left(R + \frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \qquad \textbf{11-6}$$

na qual R é o raio nuclear e λ o comprimento de onda de de Broglie do nêutron. Para que seja possível obter informações a respeito de R a partir da medida de σ, é preciso que os nêutrons sejam suficientemente rápidos para que $\lambda/2\pi < R$. Em experimentos desse tipo, o que é medido não é a distribuição de carga e sim o "raio" da interação entre um nêutron e o núcleo. De acordo com os resultados obtidos, o raio nuclear obedece à equação

$$R = R_0 A^{1/3} \text{ em que } R_0 = 1{,}4\ \text{fm} \qquad \textbf{11-7}$$

Esses diferentes tipos de experimentos fornecem, portanto, resultados da mesma ordem de grandeza, mas que não são exatamente iguais, o que é compreensível, já que alguns se baseiam na interação nuclear (entre o núcleo e um nêutron) e outros na interação eletromagnética (entre o núcleo e um elétron). O fato de que o raio é proporcional a $A^{1/3}$ em todos os experimentos sugere que o volume do núcleo é proporcional a A. Como a massa do núcleo também é aproximadamente proporcional a A, as densidades de todos os núcleos são aproximadamente iguais. A densidade de uma gota de líquido também não depende do tamanho da gota; esta semelhança levou a um modelo no qual o núcleo é tratado como uma gota de líquido. O modelo foi usado para calcular massas nucleares e para explicar certos comportamentos dos núcleos, particularmente a fissão de elementos pesados. O valor numérico da densidade da matéria nuclear é 10^{17} kg/m^3. Esta densidade extremamente alta (a densidade dos átomos é apenas 10^3 kg/m^3) é uma consequência do fato de que quase toda a massa do átomo está concentrada em uma região cujo raio é 100.000 vezes menor que o raio atômico. Um milímetro cúbico de matéria nuclear tem uma massa de 200.000 toneladas, comparável à de a um superpetroleiro carregado!

EXEMPLO 11-3 **Raio de uma Estrela de Nêutrons** Em um tipo de supernova, as camadas externas da estrela são ejetadas, deixando um caroço constituído exclusivamente de nêutrons. A densidade deste resíduo, conhecido como *estrela de nêutrons*, é aproximadamente igual à dos núcleos atômicos. Determine o raio de uma estrela de nêutrons cuja massa é igual à do Sol, $1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

SOLUÇÃO

A massa da estrela de nêutrons é $M = \rho V$, na qual V é o volume e a densidade ρ é 10^{17} kg/m^3. Supondo que a estrela de nêutrons tem forma esférica,

$$M = 1{,}99 \times 10^{30}\ \text{kg} = \rho V = (10^{17}\ \text{kg/m}^3)(4\pi R^3/3)$$

na qual R é o raio da estrela em metros. Explicitando R^3 na equação acima, temos:

$$R^3 = \frac{(3)(1{,}99 \times 10^{30}\,\text{kg})}{(4\pi)(10^{17}\,\text{kg/m}^3)} = 4{,}75 \times 10^{12}\,\text{m}^3$$

Extraindo a raiz cúbica, obtemos:

$$R = 1{,}68 \times 10^4\,\text{m} = 16{,}8\,\text{km}$$

Observação: *Para efeito de comparação, o raio médio do Sol é 6,96 × 10^5 km.*

Forma dos Núcleos Os núcleos são aproximadamente esféricos, com raras exceções. Quase todas essas exceções ocorrem na região das terras-raras da tabela periódica (números atômicos entre $Z = 57$ e $Z = 71$), em que os núcleos têm forma elipsoidal; mesmo assim, a diferença entre o comprimento do eixo maior e o comprimento do eixo menor não é maior que 20%. Nesses nuclídeos pesados, as funções de onda dos elétrons internos penetram no núcleo e os desvios da forma esférica, que são acompanhados por desvios da distribuição de carga do núcleo, produzem pequenas mudanças nos níveis de energia dos elétrons. Em direta analogia com o fato de que o potencial em pontos do lado de fora de uma distribuição estática de cargas é determinado pela geometria da distribuição[7] e, inversamente, a medida do potencial fornece informações a respeito da geometria da distribuição de cargas, a medida de pequenas mudanças nos níveis de energia dos elétrons fornece informações a respeito da distribuição de cargas do núcleo, que não pode ser medida diretamente. Se o núcleo tem a forma de uma melancia (Figura 11-6*a*) com o eixo z mais comprido que os eixos x e y, o valor médio de z^2 é maior que o valor médio de x^2 e que o valor médio de y^2. Nesse caso, o *momento quadrupolar elétrico* Q, que é proporcional a $3(z^2)_{\text{med}} - (x^2 + y^2 + z^2)_{\text{med}}$, é positivo. Este é o caso mais comum para núcleos não esféricos. Os núcleos com momento quadrupolar negativo têm forma de abóbora, com os dois eixos iguais mais compridos que o terceiro eixo (Figura 11-6*b*). O valor médio do momento quadrupolar elétrico é dado por

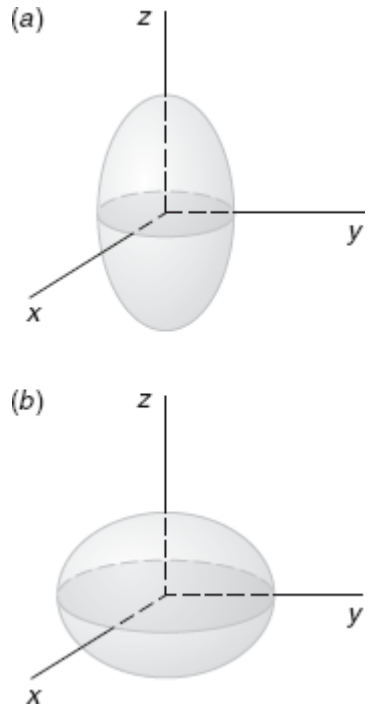


FIGURA 11-6 Núcleos de forma não esférica. (*a*) Os núcleos com momento quadrupolar positivo têm $(z^2)_{\text{med}} > (x^2)_{\text{med}}$, ou $(y^2)_{\text{med}}$ e a forma de melancia. (*b*) Os núcleos com momento quadrupolar negativo têm $(z^2)_{\text{med}} < (x^2)_{\text{med}}$, ou $(y^2)_{\text{med}}$ e a forma de abóbora.

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle &= Z\int \psi^*\left[3(z^2)_{\text{med}} - (x^2 + y^2 + z^2)_{\text{med}}\right]\psi\, dV \\
&> 0 \quad \text{para } z^2 > x^2, y^2 \qquad (\text{Figura 11-6}a) \qquad \textbf{11-8} \\
&= 0 \quad \text{para } z^2 = x^2 = y^2 \qquad (\text{esférico}) \\
&< 0 \quad \text{para } z^2 < x^2, y^2 \qquad (\text{Figura 11-6}b)
\end{aligned}$$

A Figura 11-7 mostra os valores experimentais do momento quadrupolar elétrico para núcleos com A ímpar, ou seja, núcleos nos quais Z ou N é ímpar. Os físicos usam a Equação 11-8 para determinar o valor de $\langle Q \rangle$ para funções de onda correspondentes às distribuições de carga previstas por vários modelos teóricos do núcleo e comparam os resultados com os valores mostrados na Figura 11-7. Como o leitor pode imaginar, os cálculos são muito complicados!

Estabilidade dos Núcleos

Dos mais de 3000 nuclídeos conhecidos, existem apenas 257 cujos estados fundamentais são estáveis.[8] Todos os outros possuem estados fundamentais instáveis e, portanto, sofrem algum tipo de decaimento radioativo, transformando-se em outros nuclídeos. A Figura 11-8 mostra um gráfico do número de nêutrons N em função do número de prótons Z para os nuclídeos estáveis e para os nuclídeos instáveis conhecidos cujo tempo de vida é maior que um milissegundo. A linha reta corresponde a $N = Z$. A forma geral da *linha de estabilidade*, a curva contínua que passa pelo meio dos núcleos estáveis na Figura 11-8, pode ser compreendida em termos do princípio de exclusão e da energia eletrostática dos prótons. Considere a energia cinética de A partículas em um poço quadrado unidimensional, que é um modelo adequado para demonstrar a ideia. A energia é mínima, se $A/2$ partículas forem nêutrons e $A/2$ partículas forem prótons, e máxima se todas as partículas forem do mesmo tipo (Figura 11-9). Existe, portanto, uma tendência, devido ao princípio de exclusão, para que N e Z sejam iguais. O resultado muda um pouco quando incluímos a energia eletrostática de repulsão dos prótons. Essa energia é proporcional a Z^2. Para grandes valores de A, a energia aumenta menos quando acrescentamos dois nêutrons do que quando acrescentamos um nêutron e um próton; assim, a diferença $N - Z$ aumenta à medida que Z aumenta.

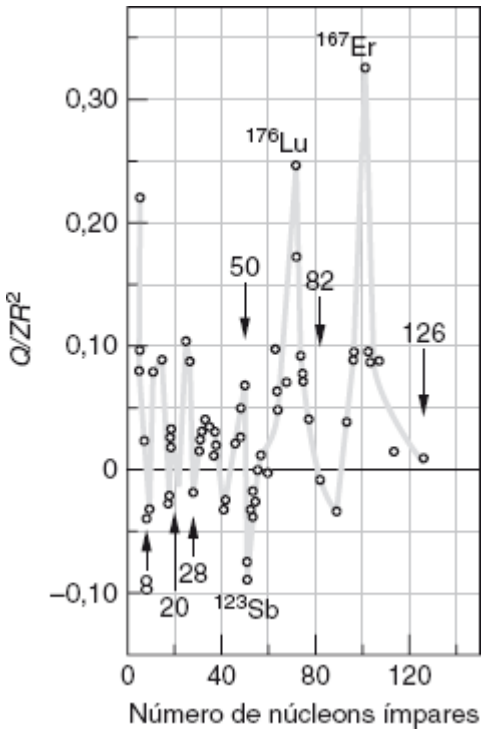


FIGURA 11-7 Gráfico de Q/ZR^2 em função do número de núcleons ímpares (Z ou N), em que R é o raio nuclear médio. As setas indicam os pontos nos quais $Q/ZR^2 = 0$, o que corresponde à forma esférica.

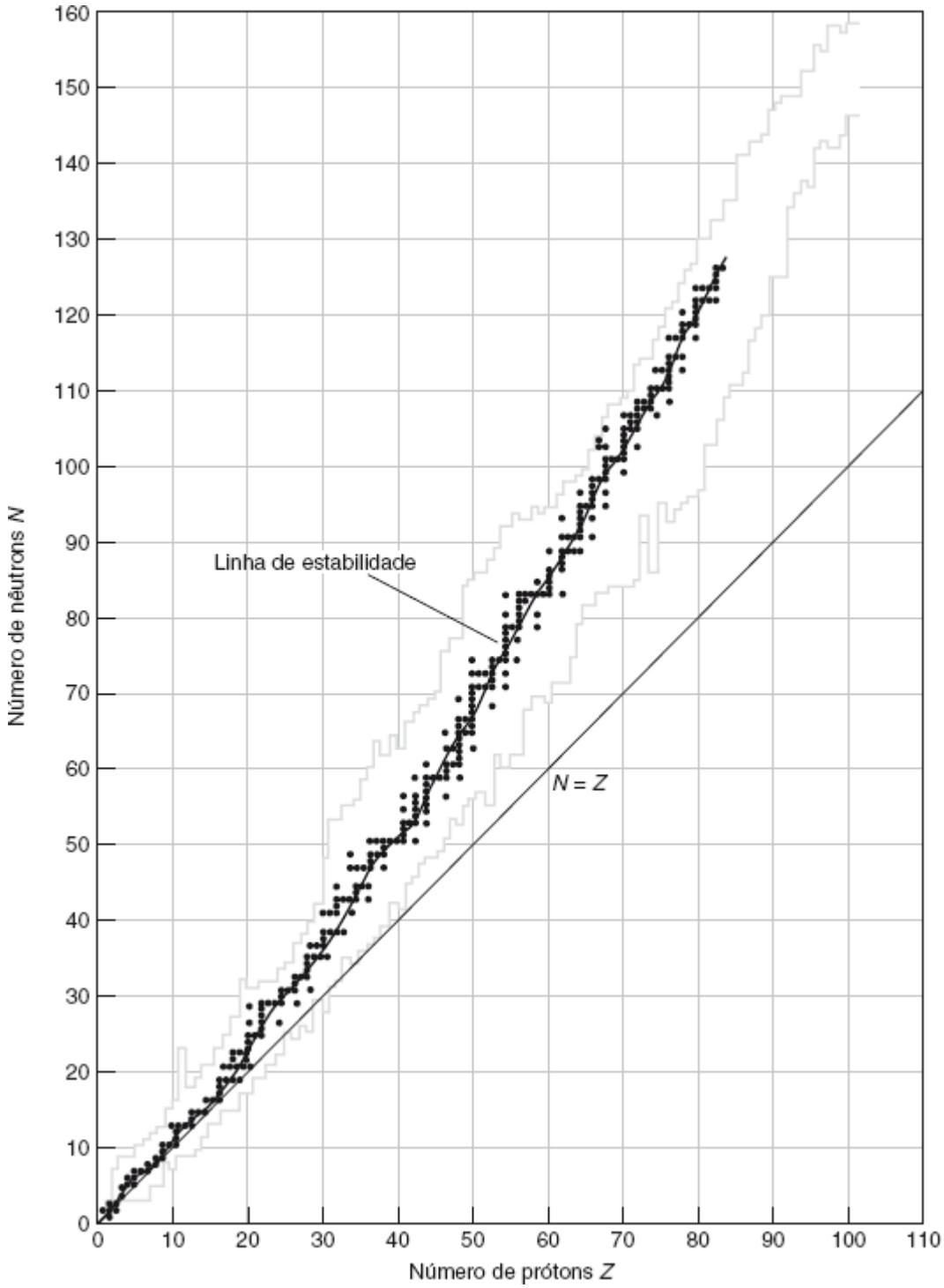


FIGURA 11-8 Gráfico do número de nêutrons *N* em função do número de prótons *Z* para os nuclídeos conhecidos. Os pontos indicam os 257 nuclídeos estáveis. A região entre as linhas irregulares representa os nuclídeos instáveis conhecidos com um tempo de vida maior que um milissegundo. A linha contínua que passa pelo meio dos nuclídeos estáveis é chamada *linha de estabilidade*.

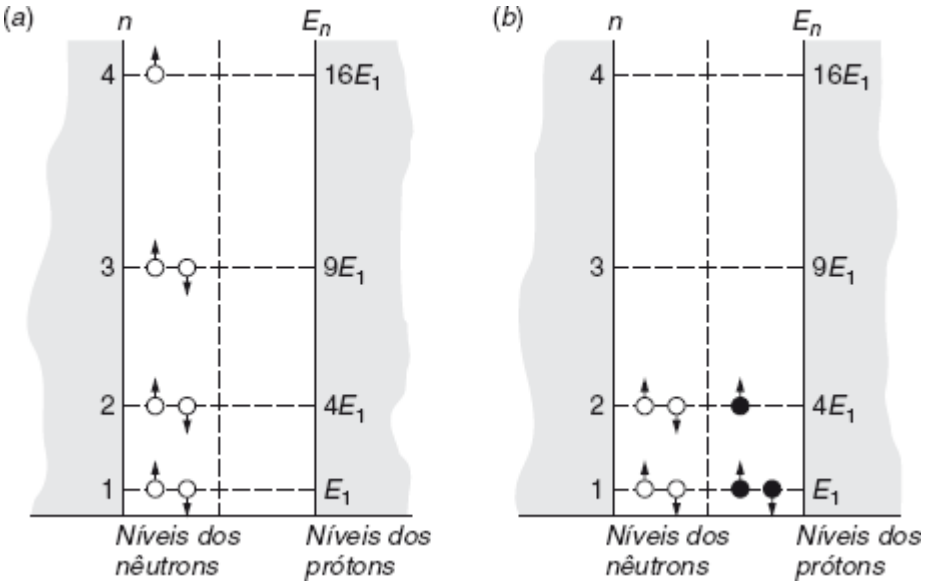


FIGURA 11-9 (*a*) Sete nêutrons em um poço quadrado infinito. De acordo com o princípio de exclusão, apenas dois nêutrons podem ocupar o mesmo estado espacial. A energia total é $16E_1 + (2 \times 9E_1) + (2 \times 4E_1) + (2 \times E_1) = 44E_1$. (*b*) Quatro nêutrons e três prótons no mesmo poço quadrado infinito. Como os prótons e os nêutrons não são iguais, quatro partículas (dois nêutrons e dois prótons) podem ocupar o estado $n = 1$. A energia total é $(3 \times 4E_1) + (4 \times E_1) = 16E_1$, um valor muito menor que o obtido em (*a*). Os números à esquerda de cada poço são os números quânticos principais do poço quadrado infinito.

Existe também uma tendência dos núcleons para formar pares com núcleons iguais. Dos 257 nuclídeos estáveis, 150 têm um número par de nêutrons e de prótons, 48 têm um número ímpar de prótons e um número par de nêutrons, 54 têm um número par de prótons e um número ímpar de nêutrons e apenas 5 têm um número ímpar de nêutrons e de prótons (veja a Tabela 11-2).

Como existem aproximadamente 100 elementos diferentes e cerca de 260 nuclídeos estáveis, a média é de 2,6 isótopos estáveis por elemento. Os núcleos com $Z = 20$, 28, 50 e 82 possuem um número de isótopos estáveis maior que a média. Assim, por exemplo, o estanho, com $Z = 50$, tem 10 isótopos estáveis. Os núcleos com $N = 20$, 28, 50 e 82 também apresentam um número de isótonos maior que a média. Esses números, conhecidos como *números mágicos*, são a manifestação de uma estrutura de camadas, do mesmo modo como os "números mágicos" 2, 10, 18 e 36 correspondem a camadas completas de elétrons na estrutura dos átomos. Como vamos ver com mais detalhes na Seção 11-6, os números mágicos nucleares, entre os quais também estão incluídos os números 2, 8 e 126, representam configurações particularmente estáveis. Os físicos acreditam que exista uma *ilha de estabilidade* no entorno de $Z = 126$. Até o momento, alguns poucos átomos com número atômico até 118 foram criados nesta região.

Tabela 11-2Número de nêutrons e de prótons em isótopos estáveis

	Z	
N	**Par**	**Ímpar**
Par	150	48
Ímpar	54	5

Os nuclídeos que estão na região entre as duas linhas irregulares da Figura 11-8, mas não foram indicados por pontos, são radioativos. A radioatividade será discutida na Seção 11-3.

Massa e Energia de Ligação

A massa de um átomo pode ser medida com precisão com o auxílio de um instrumento conhecido como espectrômetro de massa, que determina o valor de q/M a partir da trajetória de íons na presença de um campo magnético.[9] A massa de qualquer átomo é ligeiramente menor que a soma das massas do núcleo e dos elétrons por causa da energia de ligação dos elétrons. A energia de ligação dos elétrons é definida por meio da equação

$$L_{\text{atômica}} = M_N c^2 + Z m_e c^2 - M_A c^2 = \Delta m c^2 \qquad \textbf{11-9}$$

na qual M_N é a massa do núcleo, M_A é a massa do átomo, m_e é a massa de um elétron e Δm é a massa equivalente à energia $L_{\text{atômica}}$ (veja a Seção 2-3). Como as energias de ligação dos átomos são da ordem de keV, muito menores, portanto, que as energias de ligação dos núcleos, que são da ordem de MeV, as energias de ligação dos átomos são quase sempre ignoradas nos estudos de física nuclear. A energia de ligação de um núcleo com Z prótons e N nêutrons é definida por meio da equação

$$L_{\text{núcleo}} = Z m_p c^2 + N m_n c^2 - m_A c^2 \qquad \textbf{11-10}$$

na qual m_p é a massa do próton, m_n é a massa de um nêutron e m_A é a massa do núcleo. Como a massa de um átomo é praticamente igual à soma das massas do núcleo e dos elétrons (já que a energia de ligação do átomo é pequena), a energia de ligação do núcleo é dada aproximadamente por

$$L_{\text{núcleo}} = Z M_{\text{H}} c^2 + N m_n c^2 - M_A c^2 \qquad \textbf{11-11}$$

na qual M_H é a massa de um átomo de hidrogênio e M_A é a massa do átomo. Observe que as massas dos Z elétrons se cancelam, pois estão incluídas tanto no valor de M_H como no valor de M_A. A Equação 11-11 é mais conveniente que a Equação 11-10 porque a grandeza medida nos espectrômetros de massa não é a massa do núcleo e sim a massa do átomo. As massas de todos os nuclídeos estáveis e de muitos nuclídeos instáveis aparecem no Apêndice A.

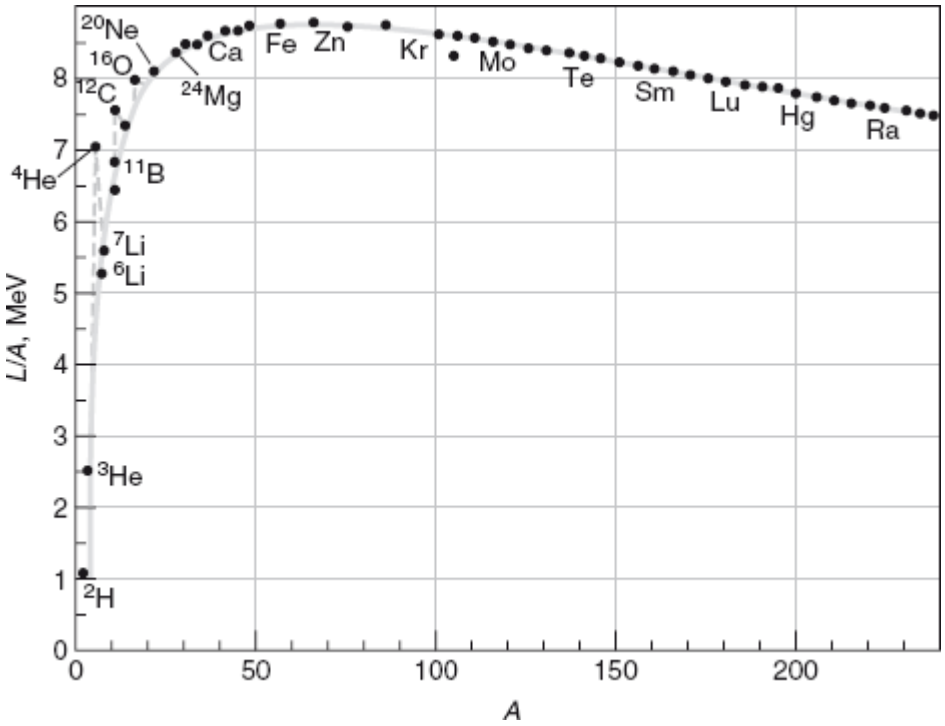


FIGURA 11-10 Energia de ligação por núcleon em função do número de massa A. A curva representa a fórmula semiempírica de Weizsäcker, Equação 11-12.

Uma vez conhecida a massa de um núcleo ou de um átomo, a energia de ligação pode ser calculada com o auxílio da Equação 11-10 ou da Equação 11-11. A Figura 11-10 mostra a energia de ligação por núcleon, B/A, em função de A, para o isótopo mais estável de cada elemento. O valor médio é aproximadamente 8,3 MeV/núcleon. O fato de que a curva é aproximadamente constante (para $A > 16$) indica que a força nuclear é uma força *saturada*. Este fato é explicado, pelo menos em parte, pelo pequeno alcance da interação forte (veja a Seção 11-5). Se cada núcleo interagisse com todos os outros núcleons, haveria $A - 1$ interações para cada núcleon e a energia de ligação por núcleon seria proporcional a $A - 1$ em vez de ser constante. De acordo com a Figura 11-10, existe um número fixo de interações por núcleon, o que sugere que cada núcleon é atraído apenas pelos vizinhos mais próximos. Esta situação também leva a uma densidade constante para a matéria nuclear, o que está de acordo com as medidas do raio nuclear. Se a energia de ligação por núcleon fosse proporcional ao número de núcleons, o raio nuclear seria aproximadamente constante, como acontece com o raio atômico.



Leitura Suplementar

Entre os modelos do núcleo criados pelos físicos, o modelo da gota de líquido tem sido um dos mais frutíferos. Foi usado com sucesso para descrever o processo de fissão, muitas reações nucleares e, em particular, para prever a energia de ligação (ou seja, a massa) de vários isótopos e de núcleons individuais

no interior do núcleo. Esses tópicos são discutidos na Leitura Suplementar *O Modelo da Gota de Líquido e a Equação de Weizsäcker*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 11-12 a 11-14, a Tabela 11-3 e os Exemplos 11-4 a 11-6.

Momentos Angulares e Momentos Magnéticos Nucleares

Tanto o nêutron como o próton têm um momento angular intrínseco (spin) igual a 1/2; o momento angular do núcleo é a soma dos spins e dos momentos angulares orbitais de todos os nêutrons e prótons que o compõem. O momento angular resultante é chamado de *spin nuclear* e representado pelo símbolo **I**. Os núcleons também possuem momentos magnéticos, que se combinam para produzir o *momento magnético nuclear*. Os indícios da existência do spin nuclear e do momento magnético nuclear foram observados pela primeira vez nos espectros atômicos. O spin nuclear se combina com o momento angular **J** = **L** + **S** dos elétrons para formar o momento angular total **F**:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J} \qquad \textbf{11-15}$$

De acordo com a regra usual para combinar momentos angulares, os números quânticos possíveis para F são $I + J$, $I + J - 1$, . . . , $|I - J|$. F obedece à regra de seleção $\Delta F = \pm 1$ ou 0, mas a transição $F = 0 \rightarrow F = 0$ não é permitida. O número de valores possíveis de F é $2J + 1$ ou $2I + 1$, dependendo de qual dos dois valores é menor. Devido à energia da interação entre o momento magnético eletrônico e o momento magnético nuclear, cada linha do espectro atômico é desdobrada em $2J + 1$ ou $2I + 1$ linhas. Este desdobramento é apenas um dos muitos efeitos que resultam da interação dos spins e momentos magnéticos nucleares com outras partículas existentes nas vizinhanças do núcleo, conhecidos coletivamente pelo nome de *estrutura hiperfina*.[11] O desdobramento hiperfino das linhas espectrais associado ao momento magnético nuclear ocorre através de um mecanismo análogo ao acoplamento spin-órbita discutido na Seção 7-5, que é responsável pelo desdobramento fino das linhas espectrais. Devido ao acoplamento entre **I** e **J**, expresso pela Equação 11-15, ao termo devido ao acoplamento spin-órbita que aparece na Equação 7-68 deve ser somado um termo ΔE dado pela relação análoga

$$\Delta E = g_N m_I \mu_N B_e \qquad \textbf{11-16}$$

na qual g_N é o fator de Landé nuclear, m_I é o número quântico magnético da componente z de **I**, $\mu_N = e\hbar/2m_p$ é o magnéton nuclear e B_e é o campo magnético produzido pelos elétrons na posição do núcleo (Tabela 11-4). O momento magnético nuclear é dado pelo produto $g_N m_I \mu_N$. Com exceção de μ_N, que é aproximadamente 1000 vezes menor que μ_B, as grandezas que aparecem do lado direito da Equação 11-16 são da mesma ordem que as grandezas correspondentes da Equação 7-68; assim, o desdobramento hiperfino das linhas espectrais de um átomo é muito pequeno, cerca de 1000 vezes menor que o desdobramento fino. A Figura 11-11 mostra, por exemplo, o desdobramento hiperfino das transições $^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$, $^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ do sódio (Figura 7-30), responsável pelas linhas amarelas do sódio (linhas D). Este desdobramento só pode ser observado com instrumentos de altíssima resolução. Nos últimos anos, o uso de lasers sintonizáveis de corante e da espectroscopia de fluorescência por feixe atômico tornou possível a medida desses pequenos desdobramentos com boa precisão.

Tabela 11-4 Campo magnético B_e produzido pelos elétrons na posição do núcleo, para alguns elementos com um elétron na última camada

Elemento	n	B_e, $^2S_{1/2}$ (T)	B_e, $^2P_{1/2}$ (T)	B_e, $^2P_{3/2}$ (T)
H	1	17	–	–
Li	2	13	–	–
Na	3	44	4,2	2,5
K	4	63	7,9	4,6
Rb	5	130	16	8,6
Cs	6	210	28	13

Fonte: E. Segrè, *Nuclei and Particles*, 2d ed. (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1977), p. 259.

A degeneração dos níveis hiperfinos nos núcleos com spin diferente de zero, como, por exemplo, o núcleo do hidrogênio (próton), é removida por um campo magnético externo **B**, em um efeito análogo ao efeito Zeeman. Transições entre esses níveis, que, no caso do hidrogênio, podem ser induzidas por uma radiação com uma energia igual a $2\mu_p B$, são usadas para obter imagens do interior de organismos vivos a partir da absorção de energia por parte dos prótons existentes na água dos tecidos, uma técnica conhecida como IRM (Imagem por Ressonância Magnética).

Nos casos em que $I \leq J$, existem $2I + 1$ estados F diferentes; assim, o valor do spin nuclear pode ser determinado simplesmente contando o número de linhas do desdobramento hiperfino. O spin de todos os nuclídeos par-par (nuclídeos com um número par de prótons e um número par de nêutrons) é zero no estado fundamental. Nesse caso, portanto, os núcleons se emparelham de tal forma que os momentos angulares se cancelam aos pares; um fenômeno análogo acontece frequentemente com os elétrons atômicos. Se o número de prótons e/ou o número de nêutrons é ímpar, não existe uma regra simples para determinar o valor do spin total. Entre os sucessos do modelo de camadas, que será discutido na Seção 11-6, está a previsão correta dos spins de muitos núcleos.

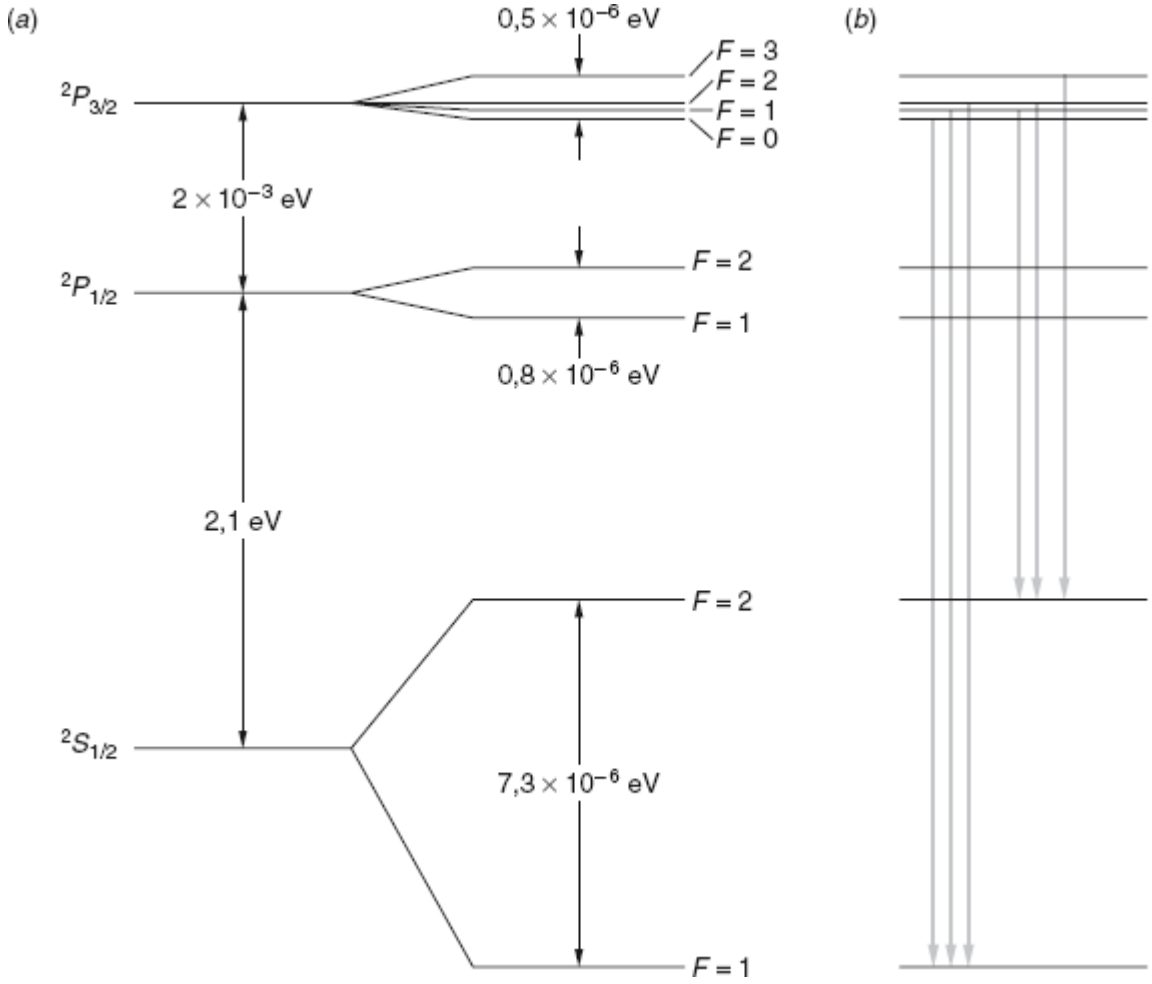


FIGURA 11-11 (*a*) As transições entre os níveis do dubleto do sódio produzem as linhas amarelas do sódio (linhas *D*): a transição $^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ é responsável pela linha D_1 e a transição $^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$, pela linha D_2. O acoplamento entre o momento angular atômico J e o spin nuclear $I = 3/2$ produz um desdobramento hiperfino; cada nível possui um momento angular total $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{J}$. Observe que o desdobramento hiperfino de cada dubleto é aproximadamente 1000 vezes menor que o desdobramento fino do nível ^2P. (*b*) A regra de seleção $\Delta F = \pm 1$ ou 0 faz com que a linha D_2 tenha seis componentes. A linha D_1 tem quatro componentes, que não estão indicados na figura.

O momento magnético do núcleo, $g_N m_I \mu_N$, é da ordem do magnéton nuclear, $\mu_N = e\hbar/2m_p$, já que g_N normalmente é um número entre 1 e 5 e o valor máximo de $|m_I|$ é I. O valor exato é difícil de prever, pois depende do movimento dos núcleons. Se os prótons e os nêutrons se comportassem como os elétrons, que obedecem à equação de onda relativística de Dirac, o momento magnético associado ao spin seria 1 magnéton nuclear no caso do próton e 0 no caso do nêutron, que não possui carga elétrica.[12] Os valores experimentais dos momentos magnéticos dos núcleons são

$$(\mu_p)_z = +2{,}79285\ \mu_N$$
$$(\mu_n)_z = -1{,}91304\ \mu_N$$

Como vamos ver no Capítulo 12, o próton e o nêutron são partículas mais complexas que o elétron. É interessante notar que os desvios desses momentos em relação aos valores previstos pela equação de Dirac são da mesma ordem de grandeza, −1,91 no caso do nêutron e +1,79 no caso do próton. Os motivos pelos quais os momentos magnéticos dos núcleons possuem esses valores ainda não são perfeitamente compreendidos; a diferença entre os valores teóricos e os valores experimentais de μ_p e μ_n é da ordem de 1%.

EXEMPLO 11-7 **Spin Nuclear do Tálio 205** Estudos espectroscópicos de alta resolução do ^{205}Tl mostram que todos os componentes do dubleto $^2P_{1/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ (377,7 nm), $^2P_{3/2} \rightarrow {}^2S_{1/2}$ (535,2 nm) apresentam três componentes hiperfinos. Isso significa que existem dois níveis hiperfinos para cada valor de J. Determine o spin do nuclídeo ^{205}Tl.

SOLUÇÃO

Se $I \leq J$, existem $2I + 1$ níveis F; se $I > J$, existem $2J + 1$ níveis F. Como o desdobramento hiperfino indica que existem dois níveis para cada J, para o nível $^2P_{3/2}$ devemos ter

$$2I + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad 2J + 1 = 2$$

Entretanto, já sabemos que $J = 3/2$ e, portanto, $2J + 1$ não pode ser igual a 2. Assim, $2I + 1 = 2$ e o spin do ^{205}Tl (no estado fundamental) deve ser 1/2.

Note que, para os níveis $^2P_{1/2}$ e $^2S_{1/2}$, as duas equações acima são satisfeitas, já que, nos dois casos, $I = J$.

Exercícios

1. Por que N é aproximadamente igual a Z nos núcleos estáveis? Por que N é maior que Z nos núcleos pesados?
2. Por que não existem isótopos estáveis com $Z > 83$?
3. De acordo com a definição de unidade unificada de massa, a massa do ^{12}C, que contém 6 prótons e 6 nêutrons, é exatamente 12,000 u. Por que a massa do ^{16}O, que contém 8 prótons e 8 nêutrons, não é exatamente igual a 16,000 u?

11-3 Radioatividade

Dos mais de 3000 nuclídeos conhecidos, apenas 257 são estáveis. Todos os outros são radioativos, ou seja, se transformam espontaneamente em outros nuclídeos emitindo radiação. Neste contexto, o termo *radiação* se refere tanto a partículas quanto a ondas eletromagnéticas. Em 1900, Rutherford descobriu que a taxa de emissão de radiação por parte de uma amostra de uma substância radioativa não era constante, mas diminuía exponencialmente com o tempo. Essa variação exponencial com o tempo é característica dos fenômenos que envolvem a radioatividade e indica que se trata de um processo estatístico. Como os núcleos estão bem isolados uns dos outros pelos elétrons atômicos, as variações de pressão e temperatura não têm nenhum efeito sobre a radioatividade.[13]

No caso de um decaimento estatístico (no qual o decaimento de um núcleo em particular é um evento aleatório), o número de núcleos que decaem em um intervalo de tempo dt é proporcional a dt e ao número de núcleos presentes. Se $N(t)$ é o número de núcleos radioativos no instante t e $-dN$ é o número de núcleos que decaem no intervalo dt (o sinal negativo é necessário porque N diminui), temos:

$$-dN = \lambda N\, dt \qquad \textbf{11-17}$$

na qual a constante de proporcionalidade, λ, conhecida como *constante de decaimento*, é a probabilidade por unidade de tempo de que um dos núcleos decaia. A solução da Equação 11-17 é

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{11-18}$$

na qual N_0 é o número de núcleos no instante $t = 0$. A taxa de decaimento (conhecida como *atividade*) é dada por

$$R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{11-19}$$

Observe que *tanto o número de núcleos N como a atividade R diminuem exponencialmente com o tempo*. É a diminuição da atividade que é medida experimentalmente. A Figura 11-12 mostra o gráfico de N em função de t; para obter o gráfico de R em função de t, basta multiplicar por λ a escala vertical do gráfico.

Não é difícil calcular o *tempo médio de vida* do núcleo a partir da Equação 11-18. Como o número de núcleos com tempo de vida entre t e $t + dt$ é o número de núcleos que decaem no intervalo de tempo dt, que é dado por $\lambda N dt$, a fração de núcleos com tempos de vida entre t e $t + dt$ é dada por

$$f(t)\,dt = \frac{\lambda N\,dt}{N_0} = \lambda e^{-\lambda t}\,dt \qquad \textbf{11-20}$$

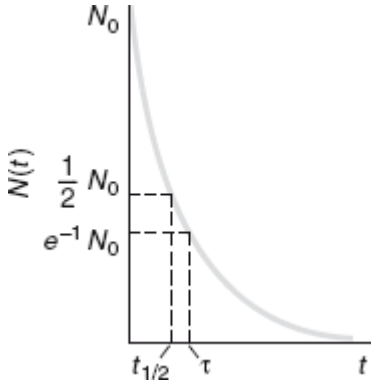


FIGURA 11-12 Decaimento exponencial das substâncias radioativas. O número de núcleos existentes no instante t diminui exponencialmente com t. A meia-vida $t_{1/2}$ e o tempo médio de vida $\tau = 1/\lambda$ estão indicados na figura. A atividade $R(t) = \lambda N(t)$ também diminui exponencialmente com o tempo.

Usando esta distribuição para calcular o tempo médio de vida, obtemos:

$$\tau = \int_0^\infty t f(t)\,dt = \int_0^\infty t\,\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \frac{1}{\lambda} \qquad \textbf{11-21}$$

que é o inverso da constante de decaimento λ. A *meia-vida* $t_{1/2}$ é definida como o tempo necessário para que o número de núcleos radioativos se reduza à metade do valor inicial. De acordo com a Equação 11-18, temos:

$$\frac{1}{2}N_0 = N_0\,e^{-\lambda t_{1/2}} \quad \text{ou} \quad e^{\lambda t_{1/2}} = 2$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = (\ln 2)\tau = \frac{0{,}693}{\lambda} = 0{,}693\,\tau \qquad \textbf{11-22}$$

Depois de um intervalo de uma meia-vida, tanto o número de núcleos que restam na amostra como a atividade estão reduzidos a metade do valor inicial. Assim, por exemplo, se a atividade no instante inicial é R_0, a atividade será $R_0/2$ após transcorrida uma meia-vida, $R_0/4$ após transcorridas duas meias-vidas, e assim por diante. Depois de um intervalo de um tempo médio de vida, o número de núcleos que restam na amostra e a atividade estão reduzidos a $1/e$ do valor inicial, em que $e = 2{,}71828...$ é a base dos logaritmos naturais. Assim, se a atividade no instante inicial é R_0, a atividade será R_0/e após transcorrido um tempo τ, R_0/e^2 após transcorrido um tempo 2τ, e assim por diante. A unidade de atividade no sistema SI é o *becquerel* (Bq), definido como uma atividade de um decaimento por segundo:

$$1\ \text{Bq} = 1\ \text{decaimento/s} \qquad \textbf{11-23}$$

Uma unidade de atividade mais antiga, o *curie* (Ci), também é usada com frequência. O curie é definido da seguinte forma:

$$1\ \text{Ci} = 3{,}7 \times 10^{10}\ \text{decaimentos/s} = 3{,}7 \times 10^{10}\ \text{Bq} \qquad \textbf{11-24}$$

Um curie corresponde à atividade de 1 g do elemento rádio. Como se trata de uma unidade muito grande, costuma-se usar os submúltiplos milicurie (mCi), microcurie (μCi) e picocurie (pCi).

EXEMPLO 11-8 **Taxa de Contagem de uma Amostra Radioativa** Uma fonte radioativa tem uma meia-vida de 1 minuto. No instante $t = 0$, a fonte é colocada nas proximidades de um detector e verifica-se que a taxa de contagem (número de partículas registradas pelo detector por unidade de tempo) é 2000 contagens/segundo. (*a*) Determine o tempo médio de vida e a constante de

decaimento da fonte. (*b*) Determine a taxa de contagem nos instantes t = 1 min, 2 min, 3 min e 10 min.

SOLUÇÃO

1. A relação entre o tempo médio de vida τ e a meia-vida $t_{1/2}$ é dada pela Equação 11-22:

$$t_{1/2} = (\ln 2)\tau$$

ou

$$\tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = \frac{1\text{ min}}{0{,}693} = 1{,}44\text{ min} = 86{,}6\text{ s}$$

2. De acordo com a Equação 11-21, a constante de decaimento é dada por:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{86{,}6\text{ s}} = 1{,}16 \times 10^{-2}\text{ s}^{-1}$$

3. *Método 1*. A taxa de contagem e a taxa de decaimento R da Equação 11-19 são numericamente iguais. Como a taxa de contagem em t = 0 é 2000 contagens por segundo, podemos tomar R_0 na Equação 11-19 como igual a 2000 e escrever:

$$\begin{aligned} R &= 2000e^{-\lambda t} = 2000e^{-(1{,}16\times 10^{-2})t} \\ &= 2000e^{-(\ln 2)\,t/t_{1/2}} \\ &= 2000e^{-(0{,}693)t} \end{aligned}$$

em que t é o tempo em minutos.

4. Podemos agora calcular a taxa de contagem R para os diferentes instantes de tempo que aparecem no enunciado:

$$\begin{aligned} R(1\text{ min}) &= 2000e^{-(0{,}693)(1)} = 2000 \times 0{,}50 \\ &= 1000\text{ contagens/s} \\ R(2\text{ min}) &= 2000e^{-(0{,}693)(2)} = 500\text{ contagens/s} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R(3\text{ min}) &= 250\text{ contagens/s} \\ R(10\text{ min}) &= 1{,}95\text{ contagem/s} \end{aligned}$$

5. *Método 2*. Como a meia-vida é 1 min, a taxa de contagem em t = 1 min é metade do que era em t = 0; em t = 2 min, é metade do que era em t = 1; e assim por diante. No caso geral, em $t = n$ min a taxa de contagem será

$$R = (1/2)^n R_0$$

e, portanto,

$$R(1\text{ min}) = (1/2)^1 2000 = 1000\text{ contagens/s}$$

e

$$\begin{aligned} R(10\text{ min}) &= (1/2)^{10}2000 \\ &= (0{,}0010)(2000) = 1{,}95\text{ contagem/s} \end{aligned}$$



Leitura Suplementar

Em muitos casos, o decaimento de um núcleo radioativo dá origem a um núcleo que também é radioativo, com outra constante de decaimento. Existem sequências de decaimentos que produzem mais de uma dúzia de nuclídeos diferentes. A forma de calcular a atividade total e a taxa de criação desses nuclídeos é discutida na Leitura Suplementar *Sequências de Decaimentos*, disponível no site da LTC Editora para este

livro na Internet, onde também se encontram as Equações 11-25 a 11-29, as Figuras 11-13 e 11-14, os Exemplos 11-9 e 11-10 e os Exercícios 4 e 5.

11-4 Decaimentos Alfa, Beta e Gama

Desde a época em que a descoberta da radioatividade natural por Becquerel forneceu os primeiros indícios da existência de um núcleo atômico, boa parte do que os físicos conhecem a respeito da estrutura nuclear provém do estudo de nuclídeos radioativos, ou seja, do estudo das transições dos núcleos de um estado quântico para outro de menor energia. Além dos mais de 2800 isótopos radioativos conhecidos, quase todos os 2000 isótopos que foram previstos teoricamente e ainda não foram observados são radioativos. Os radioisótopos podem decair pelo menos de nove formas diferentes; entretanto, a maioria dos decaimentos acontece através de um, ou ocasionalmente dois, dos seguintes modos: alfa, beta e gama. Os decaimentos restantes ocorrem através de mecanismos menos comuns, como a emissão de um próton, a emissão de um nêutron e a fissão espontânea. Uns poucos podem decair através de processos extremamente raros, como o duplo decaimento beta, que no momento está despertando um interesse considerável, tanto do ponto de vista teórico como experimental. Um dos principais objetivos dos estudos do decaimento de nuclídeos radioativos é obter informações a respeito da estrutura dos núcleos, da natureza da interação nuclear forte e das propriedades das partículas elementares.

Nas próximas subseções, vamos discutir principalmente os três tipos mais comuns de decaimento, referindo-nos de passagem a outros tipos quando necessário. Nessas discussões, é interessante não perder de vista dois aspectos da questão. O primeiro é que a linha de estabilidade da Figura 11-8 corresponde à parte mais profunda do vale que aparece em um gráfico tridimensional quando a energia de ligação é plotada em um eixo perpendicular aos eixos N e Z (Figura 11-15*a*). Na Figura 11-15*a*, a energia foi limitada artificialmente a um certo valor (100 MeV); entretanto, existem limites teóricos para o número de prótons e nêutrons que podem ser incorporados a um núcleo, mesmo um núcleo altamente instável. Esses limites, conhecidos pelo nome esdrúxulo de linhas de gotejamento,* são as linhas irregulares externas que aparecem na Figura 11-15*b* e definem uma região no diagrama N-Z no interior da qual se encontram os 5000 e tantos isótopos que, pelo menos em princípio, podem existir. Os limites são definidos pelas energias para as quais os núcleos emitem espontaneamente um próton ou um nêutron.

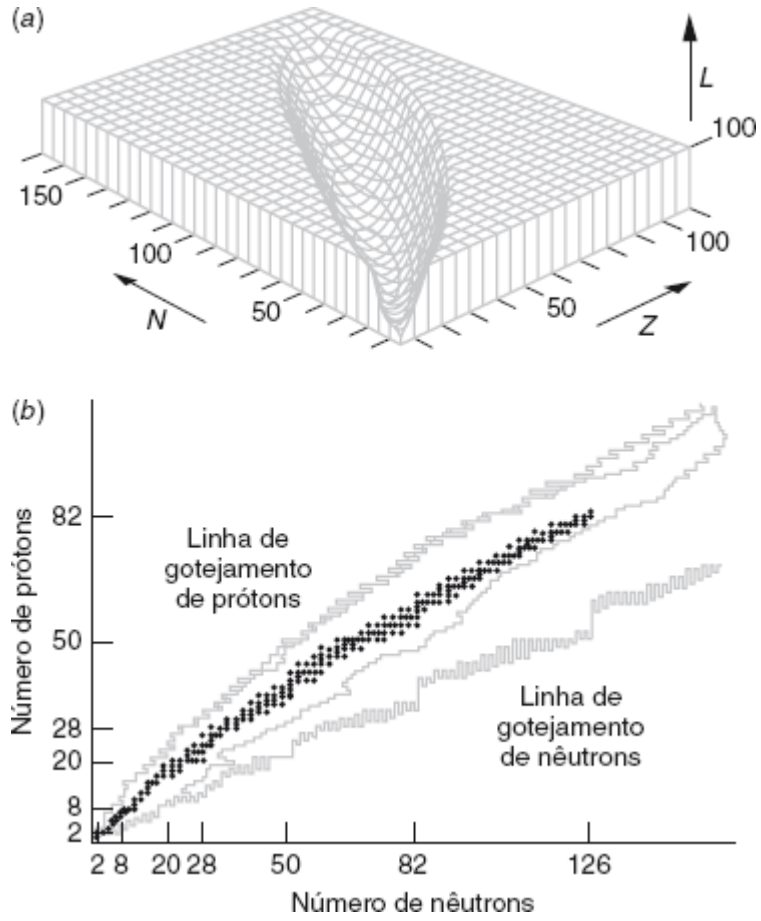


FIGURA 11-15 (*a*) Gráfico tridimensional da energia de ligação nuclear L (em MeV) em função de Z e de N. A superfície assim formada foi truncada em 100 MeV para tornar o vale de energia mais visível. (*b*) Teoricamente, existem mais de 5000 nuclídeos entre as linhas de gotejamento de prótons e de nêutrons, mas apenas 3000 (região entre as linhas irregulares internas) existem na natureza ou foram criados em laboratório, e apenas 257 são estáveis (pontos). As bordas do vale de energia em (*a*) são análogas às linhas de gotejamento em (*b*).

O segundo aspecto que não devemos esquecer é que os processos de decaimento obedecem às mesmas leis de conservação que se aplicam a todos os processos físicos. Em particular, as seis grandezas a seguir são conservadas: (1) massa-energia relativística; (2) carga elétrica; (3) momento linear; (4) momento angular; (5) número de núcleons; (6) número de léptons.[14] As primeiras quatro leis de conservação são discutidas exaustivamente nos cursos de física básica; as outras duas estão relacionadas especificamente às interações e decaimentos das partículas elementares e serão discutidas no Capítulo 12. Voltaremos a falar das leis de conservação durante a discussão dos três tipos mais comuns de decaimento.

Decaimento Alfa

Em um tipo de detector de fumaça, partículas α emitidas por uma pequena quantidade de ^{241}Am ionizam o ar, permitindo a passagem de uma corrente elétrica entre dois eletrodos. Em caso de incêndio, a fumaça neutraliza parte dos íons e a redução da corrente elétrica faz soar um alarme. Este detector é mais sensível que os modelos que usam sensores fotelétricos.

Para que uma substância radioativa seja encontrada na natureza, é preciso que a meia-vida não seja muito menor que a idade da Terra (cerca de $4{,}5 \times 10^9$ anos) ou que a substância seja produzida continuamente a partir do decaimento de outra substância radioativa. Para que um nuclídeo seja radioativo, é preciso que sua massa seja maior que a soma das massas dos produtos do decaimento. Muitos núcleos pesados decaem emitindo partículas α. Como a barreira de Coulomb se opõe ao processo de decaimento (a partícula α precisa passar por uma região na qual a energia é menor que a energia potencial, como na Figura 11-1*a*, o que só é possível graças ao efeito túnel), a meia-vida associada ao decaimento alfa pode ser muito grande se a energia do decaimento for pequena, ou seja, se a largura da barreira a ser atravessada for grande. Na verdade, a relação entre a meia-vida de um emissor α e a energia da partícula α emitida é tão evidente que foi notada pela primeira vez por dois assistentes de Rutherford, Geiger e Nuttall em 1911, isto é, no mesmo ano em que Rutherford descobriu o núcleo. A relação geral, conhecida como regra de *Geiger-Nuttall*, está representada graficamente na Figura 11-16 e pode ser expressa pela equação

$$\log t_{1/2} = AE_\alpha^{-1/2} + B \qquad \textbf{11-30}$$

na qual E_α é a energia cinética da partícula α emitida e A e B são constantes determinadas experimentalmente.

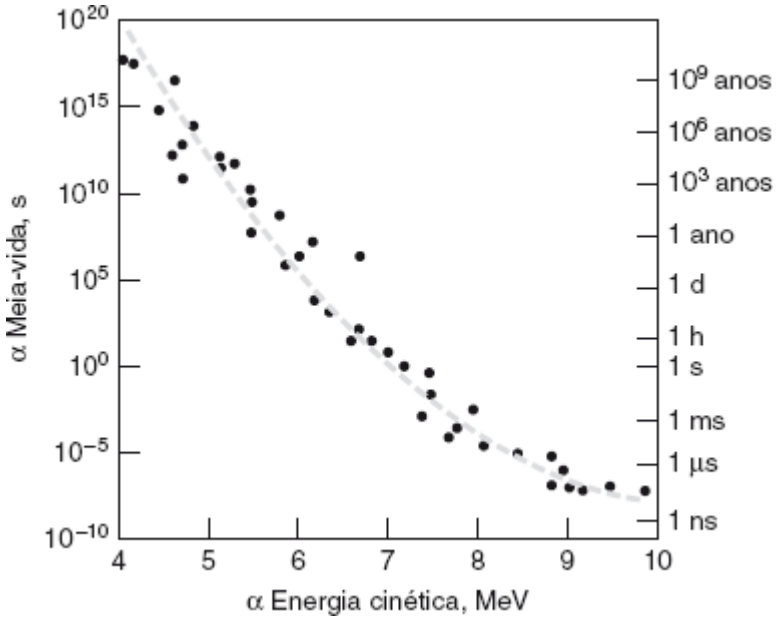


FIGURA 11-16 A relação de Geiger-Nuttall aparece claramente em um gráfico semilog da meia-vida dos emissores α naturais em função da energia cinética das partículas α emitidas. A curva tracejada representa a regra empírica de Geiger-Nuttall, dada pela Equação 11-30.

Mais tarde, foi demonstrado que era possível chegar a uma expressão para a meia-vida dos emissores α a partir da equação de Schrödinger, tratando o decaimento α como um fenômeno de penetração de barreira. A boa concordância com os resultados experimentais foi um dos primeiros sucessos da mecânica ondulatória. Basicamente, a solução consiste em imaginar que as partículas α são mantidas no interior do núcleo por uma barreira de potencial, como na Figura 11-1. A Figura 11-17 mostra as funções de onda de duas partículas com diferentes energias. O potencial para $r > R$ é tomado como a função de Coulomb $V(r) = zZe^2/4\pi\varepsilon_0 r$, na qual $z = 2$ para uma partícula α, com uma transição suave para o potencial nuclear. A probabilidade de que a partícula α atravesse a barreira é igual ao coeficiente de transmissão T que foi calculado na Seção 6-6, Equações 6-75 e 6-76. A

constante de decaimento $\lambda = 1/\tau = 0{,}693/t_{1/2}$ é igual ao produto do coeficiente de transmissão pela frequência com a qual a partícula α se choca com a barreira. A frequência, dada pela Equação 6-78, depende da velocidade v da partícula α, que, por sua vez, é função da energia cinética da partícula e do raio do núcleo. Assim,

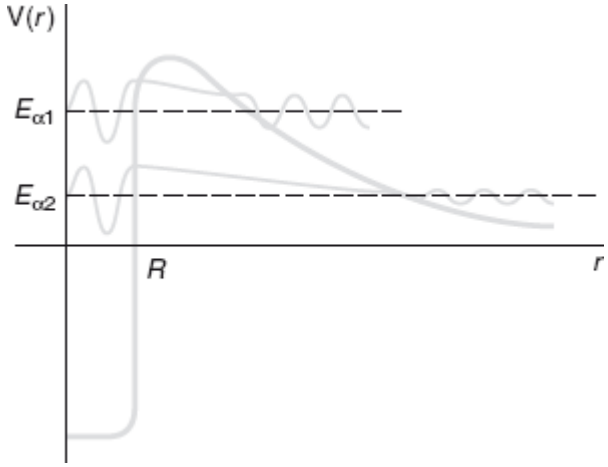


FIGURA 11-17 Representação esquemática das funções de onda de duas partículas α com energias $E_{\alpha 1}$ e $E_{\alpha 2}$ no interior do poço de potencial. A probabilidade de a partícula de energia $E_{\alpha 1}$ penetrar na barreira é maior porque a barreira é mais estreita para a energia $E_{\alpha 1}$ do que para a energia $E_{\alpha 2}$. Assim, a amplitude de $\psi(\alpha 1)$ é maior do lado de fora do núcleo que a amplitude de $\psi(\alpha 2)$ e, portanto, $\lambda(\alpha 1) > \lambda(\alpha 2)$ e $t_{1/2}(\alpha 1) < t_{1/2}(\alpha 2)$.

$$\lambda = \frac{Tv}{2R} \qquad \textbf{11-31}$$

O resultado final, obtido por B. Taagepera e M. Nurmia, é o seguinte:

$$\log t_{1/2} = 1{,}61\left(ZE_\alpha^{-1/2} - Z^{2/3}\right) - 28{,}9 \qquad \textbf{11-32}$$

na qual $t_{1/2}$ é a meia-vida em anos, E_α é a energia das partículas α em MeV e Z é o número de prótons do nuclídeo filho. Note que, como λ (e, portanto, $t_{1/2}$) depende do raio nuclear, a medida da meia-vida e da energia das partículas α emitidas por um nuclídeo permite obter uma estimativa do raio nuclear que é independente dos métodos mencionados na Seção 11-2.

Todos os núcleos muito pesados ($Z > 82$) são teoricamente instáveis em relação ao decaimento α porque a massa do núcleo pai é maior do que a soma das massas dos produtos do decaimento: o núcleo filho e uma partícula α. Quando um núcleo emite uma partícula α, os valores de N e Z diminuem de duas unidades e o valor de A diminui de quatro unidades. Existem quatro possíveis cadeias ou sequências de decaimentos α, dependendo de se A é igual a $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ ou $4n + 3$, e n é um número inteiro. As cadeias começam com $n = 58$ para a primeira e a quarta cadeias e $n = 59$ para a segunda e a terceira cadeias. Todas as cadeias, exceto uma, são encontradas na natureza. A cadeia $4n + 1$ não existe naturalmente porque o membro com meia-vida mais longa (com exceção, é claro, do produto final, ^{205}Tl, que é estável), o ^{237}Np, tem uma meia-vida de apenas 2×10^6 anos, muito menor que a idade da Terra; assim, todo o ^{237}Np que existia quando a Terra se formou já decaiu há muito tempo.

A Figura 11-18 mostra a série do tório, para a qual $A = 4n$, que começa com o decaimento α de ^{232}Th para ^{228}Ra. Cada vez que n diminui de 1, A diminui de 4, até que o nuclídeo resultante seja estável. O nuclídeo filho de um decaimento α fica à esquerda (do lado rico em nêutrons) da linha de estabilidade (reta tracejada) e, por isso, muitas vezes sofre um decaimento β^-, no qual um nêutron se transforma em um próton emitindo um elétron. Na Figura 11-18, o ^{228}Ra sofre um decaimento β^- e se transforma em ^{228}Ac, que sofre outro decaimento β^- e se transforma em ^{228}Th. Ocorrem então quatro decaimentos α sucessivos, dando origem ao nuclídeo ^{212}Pb, que se transforma em ^{212}Bi por um decaimento β^-. Em seguida, a cadeia se ramifica; o ^{212}Bi pode sofrer um decaimento α, transformando-se em ^{208}Tl, ou um decaimento β^-, transformando-se em ^{212}Po. Os dois ramos se encontram no isótopo estável do chumbo ^{208}Pb. A série $4n + 2$ começa com o ^{238}U e acaba com o ^{206}Pb; a série $4n + 3$ começa com o ^{235}U e acaba com o ^{209}Pb. A Figura 11-19 mostra o espectro de um decaimento α típico.

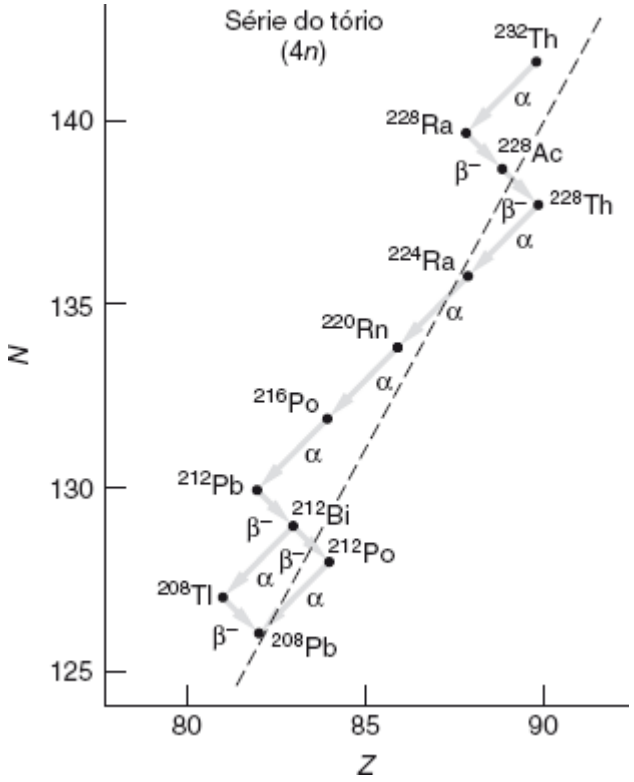


FIGURA 11-18 Série de decaimentos α do tório (4*n*). A reta tracejada é a linha de estabilidade (parte mais funda do vale de energia) que aparece nas Figuras 11-8 e 11-15.



Leitura Suplementar

O espectro de energia das partículas α emitidas por um núcleo pesado apresenta uma série de picos. A maior energia corresponde à transição do núcleo pai para o estado fundamental do núcleo filho; as outras correspondem a transições do núcleo pai para estados excitados do núcleo filho. O uso do espectro de energia do decaimento α para determinar os estados excitados do núcleo filho é discutido na Leitura Suplementar *Níveis de Energia do Decaimento Alfa*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram cópias das Figuras 11-19 e 11-20, as Equações 11-33 a 11-36 e o Exemplo 11-11.

Decaimento Beta

Existem três processos de decaimento radioativo nos quais o número de massa A permanece constante, enquanto Z e N variam de uma unidade: a emissão β^-, em que um elétron é emitido e um dos nêutrons do núcleo se transforma em um próton; a emissão β^+, em que um pósitron é emitido e um dos prótons do núcleo se transforma em um nêutron; e a captura eletrônica, em que um dos elétrons do átomo (em geral um elétron 1s) é capturado e um dos prótons do núcleo se transforma em um nêutron. Os núcleos que se encontram no lado rico em nêutrons do vale de estabilidade da Figura 11-15 tendem decair por emissão β^-, enquanto os núcleos que estão no lado rico em prótons tendem a decair por emissão β^+ ou captura eletrônica. Vamos discutir separadamente cada um desses processos.

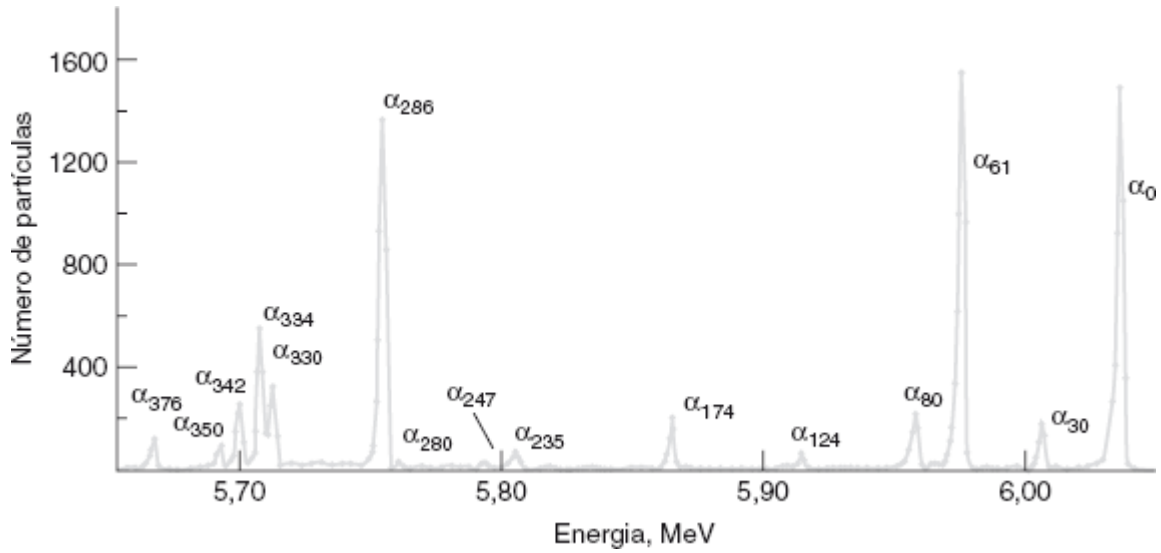


FIGURA 11-19 Espectro de energia das partículas alfa emitidas pelo ^{227}Th. As partículas α de maior energia (α_0) correspondem a transições para o estado fundamental do ^{223}Ra com uma energia Q = 6,04 MeV. As partículas de energia um pouco menor (α_{30}) correspondem a transições para o primeiro estado excitado do ^{223}Ra, 30 keV acima do estado fundamental. Os níveis de energia do núcleo filho, ^{223}Ra, podem ser determinados a partir do espectro de energia das partículas α.

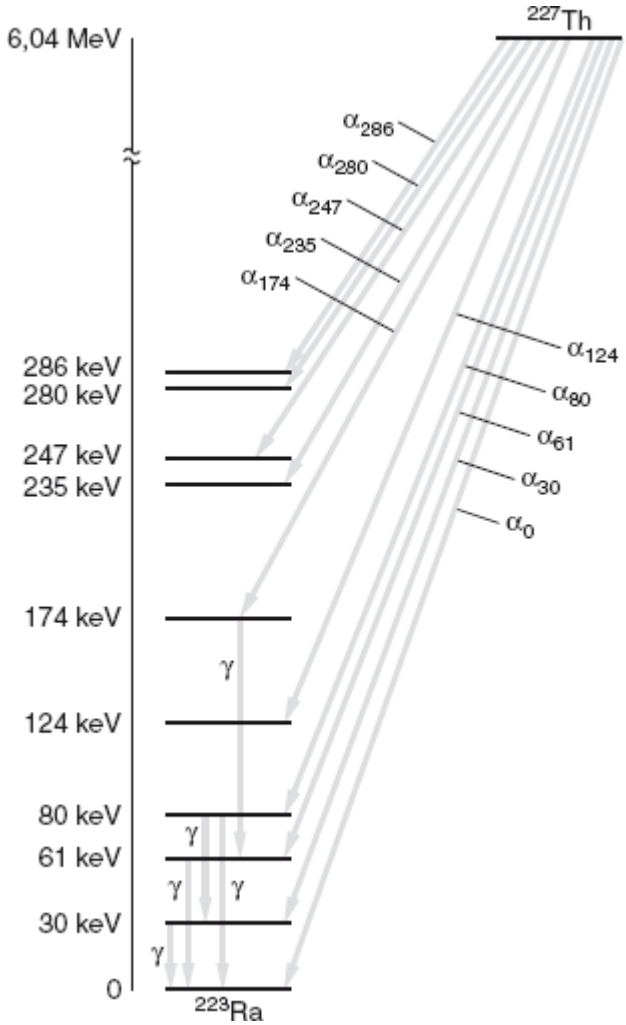


FIGURA 11-20 Níveis de energia do ^{223}Ra, determinados a partir do espectro de energia das partículas α emitidas pelo ^{227}Th (Figura 11-19). Apenas os níveis de energia até 286 keV e alguns decaimentos γ *s*ão mostrados na figura.

Emissão β^- O exemplo mais simples de emissão β^- é o do nêutron livre, que decai em um próton e um elétron com uma meia-vida de 10,8 minutos. A energia liberada no decaimento é 0,78 MeV, a diferença entre a energia de repouso do nêutron (939,57 MeV) e a soma das energias de repouso do próton e do elétron (938,28 + 0,51 = 938,79 MeV). Nos decaimentos β^-, um núcleo de número de massa A, número atômico Z e número de nêutrons N se transforma em um núcleo de número de massa A, número atômico $Z' = Z + 1$ e número de nêutrons $N' = N - 1$, emitindo um elétron para que a lei de conservação da carga seja respeitada.

A energia do decaimento, Q, é igual à diferença entre a massa do núcleo pai e a soma das massas dos produtos do decaimento multiplicada por c^2. Somando as massas dos Z elétrons à massa do núcleo pai e às massas dos produtos do decaimento, podemos escrever Q em termos das massas *atômicas* do átomo pai e do átomo filho:

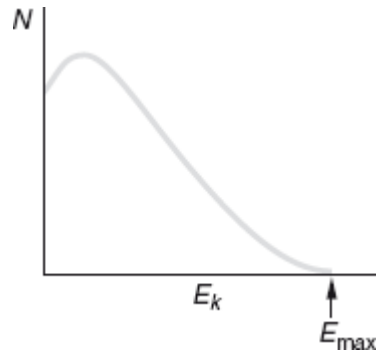


FIGURA 11-21 Espectro de energia dos elétrons emitidos no decaimento β. A curva mostra o número N de elétrons por intervalo de energia em função da energia cinética E_k. O fato de que os elétrons não são todos emitidos com a energia cinética E_{max} revela que outra partícula é emitida e divide com o elétron a energia disponível.

$$\frac{Q}{c^2} = M_P - M_D \qquad \textbf{11-37}$$

Outra forma de interpretar este resultado é observar que, na emissão β^-, os produtos finais são um elétron livre e um *íon* de carga nuclear $Z + 1$ com Z elétrons atômicos. Como a massa de um átomo *neutro* de carga nuclear $Z + 1$ é a soma da massa desse íon com a massa de um elétron, a variação total de massa é igual à diferença entre as massas do átomo pai e do *átomo* filho. Se a energia do decaimento, Q, fosse compartilhada apenas pelo átomo filho e pelo elétron emitido, a energia do elétron teria, como no caso do decaimento α, um valor definido, determinado pelas leis de conservação da energia e do momento. Os experimentos revelam, porém, que a energia do elétron emitido pode ter qualquer valor entre zero e a energia máxima disponível, E_{max}. A Figura 11-21 mostra um espectro de energia típico do decaimento β^-; compare este espectro com o espectro de energia do decaimento α (Figura 11-19). Nos decaimentos em que a energia cinética do elétron é menor que a energia E_{max}, parece estar havendo uma violação da lei de conservação da energia, já que, nesses decaimentos, $Q/c^2 < M_P - M_F$. É fácil mostrar que o momento linear aparentemente também não é conservado nestes decaimentos, nem o momento angular, já que o nêutron, o próton e o elétron são partículas de spin 1/2.

Uma solução para esta aparente violação múltipla das leis de conservação foi proposta por Wolfgang Pauli em 1930. Segundo Pauli, o decaimento β envolveria a emissão de uma terceira partícula com os valores de energia, momento linear e momento angular necessários para que as três grandezas fossem conservadas no processo de decaimento. A partícula não teria carga elétrica, uma vez que a carga era conservada, mesmo na sua ausência. A massa da partícula deveria ser muito menor que a do elétron, já que a energia máxima dos elétrons emitidos no decaimento β era praticamente igual a Q, a energia total disponível para o decaimento. Em 1933, Enrico Fermi formulou uma teoria altamente satisfatória para o decaimento β que incluía a partícula postulada por Pauli, chamada por Fermi de *neutrino* ("pequeno neutro", em italiano) para distingui-la de uma partícula neutra com massa comparável à do próton, o nêutron, que tinha sido descoberto por Chadwick no ano anterior. Os neutrinos só foram observados em laboratório no ano de 1956, em um experimento realizado por Clyde Cowan e Frederick Reines. Hoje se sabe que existem seis tipos de neutrinos, um (ν_e) associado aos elétrons, um (ν_μ) associado aos múons, um (ν_τ) associado aos táuons e as *antipartículas* correspondentes, representadas pelos símbolos, $\overline{\nu_e}$, $\overline{\nu_\mu}$ e $\overline{\nu_\tau}$. Os elétrons, múons e táuons, juntamente com os neutrinos, formam uma família de partículas chamadas *léptons*, que serão discutidas no Capítulo 12. O decaimento de um nêutron livre pode ser expresso através da equação

$$n \rightarrow p + \beta^- + \overline{\nu_e} \qquad \textbf{11-38}$$

e o do ^{198}Au, um emissor β^- mais ou menos típico, através da equação

$$^{198}\text{Au} \rightarrow {}^{198}\text{Hg} + \beta^- + \overline{\nu_e} \qquad \textbf{11-39}$$

na qual, de acordo com a lei de conservação do número de léptons (veja a Seção 12-3), a emissão de um elétron (β^-) deve ser acompanhada pela emissão de um antineutrino. De acordo com os resultados experimentais mais recentes, a massa do neutrino do elétron deve ser maior que zero e menor que 2,2 eV/c^2, um valor equivalente a 4×10^{-6} vezes a massa do elétron.

Emissão β^+ Na emissão β^+, um próton se transforma em nêutron com a emissão de um pósitron e um neutrino. Um próton livre não pode decair por emissão β^+ por causa da lei de conservação de energia (a energia de repouso do nêutron é maior que a

do próton), mas, graças ao efeito da energia de ligação, um próton no interior de um núcleo pode emitir um pósitron. Um decaimento por emissão β^+ típico é o seguinte:

$$^{13}_{7}\mathrm{N} \rightarrow {}^{13}_{6}\mathrm{C} + \beta^+ + \nu_e \qquad \textbf{11-40}$$

O único emissor β^+ natural conhecido é o ^{40}K, que também pode decair por emissão β^- e por captura eletrônica! A reação é a seguinte:

$$^{40}_{19}\mathrm{K} \rightarrow {}^{40}_{18}\mathrm{Ar} + \beta^+ + \nu_e \qquad \textbf{11-41}$$

Como em todas as transformações nucleares, existe uma relação entre a energia do decaimento Q e a diferença entre a massa do núcleo pai e a soma das massas dos produtos do decaimento. Observe que, quando somamos as massas dos Z elétrons às massas dos núcleos ($Z = 7$ no caso da Equação 11-40 e $Z = 19$ no caso da Equação 11-41), obtemos do lado direito de cada equação a massa do átomo filho mais duas massas eletrônicas (o pósitron e o elétron têm massas iguais). A relação entre a energia do decaimento β^+ e as massas atômicas do átomo pai e do átomo filho é, portanto,

$$\frac{Q}{c^2} = M_P - (M_D + 2m_e) \qquad \textbf{11-42}$$

Outra forma de interpretar este resultado é observar que, na emissão β^+, os produtos finais são um pósitron (que possui a mesma massa que um elétron) e um íon de carga nuclear $Z - 1$ com Z elétrons atômicos. Como a massa de um átomo neutro de carga nuclear $Z - 1$ é a massa desse íon menos a massa de um elétron, a variação total de massa é igual à diferença entre as massas do átomo pai e do átomo filho mais a massa de dois elétrons. Assim, a emissão β^+ não pode ocorrer, a menos que a diferença de energia seja pelo menos $2m_ec^2 = 1{,}022$ MeV.

Como já observamos, elétrons e pósitrons não podem existir no interior do núcleo antes de um decaimento; assim como os fótons são criados quando um átomo sofre uma transição para um estado de menor energia, essas partículas são criadas, pela conversão de energia em massa, durante o processo de decaimento. Sob este aspecto, o decaimento β é mais parecido com a emissão de fótons do que com o decaimento α. Existe, porém, uma diferença fundamental entre a emissão de elétrons (e neutrinos) por um núcleo excitado e a emissão de fótons por um átomo excitado. Os átomos emitem fótons quando um elétron ligado ao núcleo pela interação eletromagnética passa para um estado de menor energia. Acontece que a interação eletromagnética não pode ser responsável por processos como o decaimento de um nêutron, pois o nêutron não possui carga elétrica. Assim, para explicar o decaimento β, temos que admitir a existência de um novo tipo de interação. Como os tempos de vida associados ao decaimento β são muito maiores que o tempo característico dos fenômenos nucleares (que é da ordem de 10^{-23} s, o tempo que uma partícula que se move com a velocidade da luz leva para percorrer uma distância igual ao diâmetro do núcleo), a nova interação deve agir durante um longo tempo (em comparação com o tempo característico dos fenômenos nucleares) para produzir o decaimento. Isso significa que é muito mais fraca que a interação entre os núcleons e, por essa razão, foi denominada *interação fraca*. Existem, portanto, duas interações nucleares distintas: a interação forte e a interação fraca. Ao contrário da interação eletromagnética, as duas interações são de curto alcance.

A Tomografia por Emissão de Pósitrons, também conhecida como PET, as iniciais do nome da técnica em inglês, Positron Emission Tomography, produz imagens do interior do corpo humano com base na detecção dos raios gama emitidos nos locais onde os pósitrons produzidos pelo decaimento β^+ de uma substância radioativa sofrem aniquilação ao se encontrarem com elétrons dos tecidos do organismo.

Captura Eletrônica Na captura eletrônica, um próton no interior do núcleo captura um elétron atômico e se transforma em um nêutron, ao mesmo tempo que emite um neutrino; assim, o efeito sobre o número atômico é o mesmo da emissão β^+. A energia disponível para o processo é dada por

$$\frac{Q}{c^2} = M_P - M_D \qquad \textbf{11-43}$$

Para que a captura eletrônica seja possível, basta que a massa de um átomo de número atômico Z seja maior que a massa de um átomo de número atômico $Z - 1$. Quando a diferença entre as massas é maior que $2m_e$, a emissão β^+ também é possível e os dois processos competem entre si. A probabilidade de captura eletrônica é proporcional à integral do quadrado da função de onda do elétron na região ocupada pelo núcleo e, portanto, tem um valor significativo apenas para os elétrons 1s da camada K e, em alguns casos, para os elétrons 2s da camada L. Um exemplo típico de captura eletrônica é a reação

$$^{51}_{24}\mathrm{Cr} \rightarrow {}^{51}_{23}\mathrm{V} + \nu_e \qquad \textbf{11-44}$$

para a qual $Q = 0{,}751$ MeV. Observe que a emissão de um neutrino é necessária para conservar o número de léptons, já que o elétron capturado desaparece.

Podemos compreender melhor os processos de decaimento β analisando-os a partir do vale de energia que aparece em gráficos tridimensionais como o da Figura 11-15, nos quais dois eixos correspondem ao número de nêutrons e ao número de prótons e o terceiro eixo à energia calculada com o auxílio da equação de Weizsäcker (Equação 11-14). Cortes no sólido da Figura 11-15*a* mantendo o valor de A constante resultam em parábolas, já que a Equação 11-14 é do segundo grau em Z. Quando A é ímpar, existe apenas uma parábola, já que $a_5 = 0$; quando A é par, existem duas parábolas, uma para $a_5 = 12$ MeV/c^2, se N e Z forem pares, e outra para $a_5 = -12$ MeV/c^2, se N e Z forem ímpares. A Figura 11-22 mostra dois exemplos. Os decaimentos β sempre ocorrem ao longo das paredes do vale, em direção ao ponto de menor energia, no fundo do vale, que corresponde a um isótopo estável. Observe na Figura 11-22*b* que existe a possibilidade de um duplo decaimento β, do ^{60}Fe para o ^{60}Ni. Como seria de se esperar, a probabilidade de que duas partículas β^- sejam produzidas simultaneamente é muito pequena. Até 1985, a existência do duplo decaimento β era conhecida apenas indiretamente, através da análise da abundância relativa de produtos de decaimento em amostras geológicas. Em 1985, Steven Elliott e colaboradores observaram este tipo de decaimento em ^{82}Se. A reação é a seguinte:

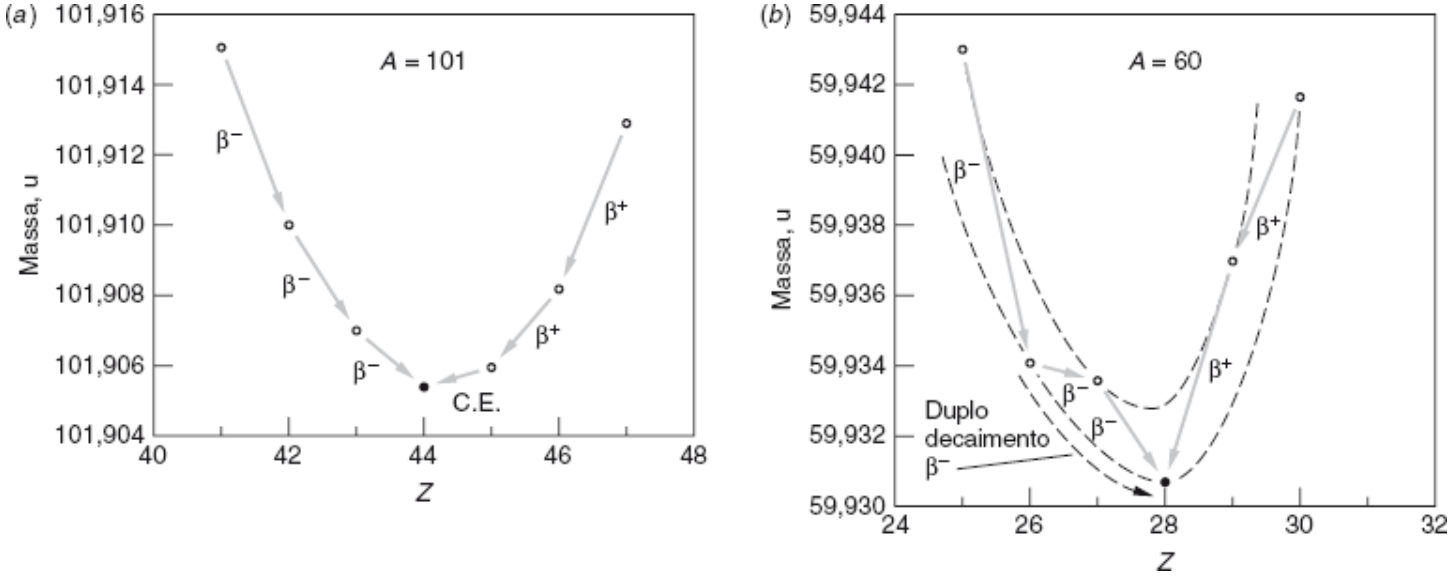


FIGURA 11-22 Gráficos de A constante representam cortes no vale de energia da Figura 11-15*a*. A energia, calculada a partir da equação de Weizsäcker, está expressa em unidades de massa. (*a*) Para os núcleos com A ímpar, como o núcleo com $A = 101$ mostrado na figura, Z é ímpar e N é par ou Z é par e N é ímpar; nos dois casos, $a_5 = 0$. (*b*) Para os núcleos com A par, como o núcleo com $A = 60$ mostrado na figura, Z e N são pares, caso em que $a_5 = 12$ MeV/c^2, ou Z e N são ímpares, caso em que $a_5 = -12$ MeV/c^2. A parábola par-par é a debaixo.

$$^{82}_{34}\text{Se} \rightarrow {}^{82}_{36}\text{Kr} + \beta^- + \beta^- + \overline{\nu}_e + \overline{\nu}_e \qquad \textbf{11-45}$$

A meia-vida para o duplo decaimento β medida por Elliott é $1{,}1 \times 10^{20}$ anos! Mais recentemente, o duplo decaimento β foi observado em outros nuclídeos. Teoricamente, se o neutrino possui uma pequena massa de repouso, como mostram os resultados experimentais mais recentes, a reação da Equação 11-45 pode ocorrer sem emissão de neutrinos. A observação de um duplo decaimento β sem emissão de neutrinos poderia ter importantes consequências tanto para a física das partículas elementares quanto para a cosmologia. Até o momento, porém, este tipo de decaimento ainda não foi observado.

EXEMPLO 11-12 **Energia Máxima da Emissão β^+ no ^{40}K** Um dos modos de decaimento do ^{40}K é a emissão de pósitrons (Equação 11-41). Qual é a energia máxima dos pósitrons?

SOLUÇÃO

1. A energia máxima Q dos pósitrons é dada pela Equação 11-42 com o ^{40}K como pai e o ^{40}Ar como filho:

$$\frac{Q}{c^2} = M_P - (M_D + 2m_e)$$

2. As massas atômicas aparecem no Apêndice A:

$$M(^{40}\mathrm{K}) = 39{,}964000\ \mathrm{u}$$
$$M(^{40}\mathrm{Ar}) = 39{,}962384\ \mathrm{u}$$
$$m_e = 5{,}4858 \times 10^{-4}\ \mathrm{u}$$

3. Substituindo estes valores na equação do item 1, temos:

$$\frac{Q}{c^2} = 39{,}964000\ \mathrm{u} - [39{,}962384 + 2 \times 3{,}4858 \times 10^{-4}]\ \mathrm{u}$$
$$= 0{,}000519\ \mathrm{u} \times 931{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2 \cdot \mathrm{u}$$
$$= 0{,}483\ \mathrm{MeV}/c^2$$

Observação: *A energia máxima dos pósitrons foi calculada desprezando o recuo do núcleo de Ar.*

EXEMPLO 11-13 **Decaimento do $^{233}_{93}$Np** Determine os modos permitidos para o decaimento do $^{233}_{93}$Np.

SOLUÇÃO

Os quatro modos possíveis de decaimento são os seguintes:

$$\text{Decaimento } \alpha: \quad {}^{233}_{93}\mathrm{Np} \longrightarrow {}^{229}_{91}\mathrm{Pa} + \alpha$$
$$\text{Decaimento } \beta^-: \quad {}^{233}_{93}\mathrm{Np} \longrightarrow {}^{233}_{94}\mathrm{Pu} + \beta^- + \overline{\nu_e}$$
$$\text{Decaimento } \beta^+: \quad {}^{233}_{93}\mathrm{Np} \longrightarrow {}^{233}_{92}\mathrm{U} + \beta^+ + \nu_e$$
$$\text{Captura eletrônica:} \quad {}^{233}_{93}\mathrm{Np} \longrightarrow {}^{233}_{92}\mathrm{U} + \nu_e$$

As energias de decaimento correspondentes são as seguintes:

Decaimento α (Equação 11-34)

$$\frac{Q}{c^2} = 233{,}040805 - (229{,}032085 + 4{,}002603)$$
$$= 0{,}006117\ \mathrm{u} = 5{,}70\ \mathrm{MeV}/c^2$$

Como este valor é positivo, o decaimento α é permitido.

Decaimento β^- (Equação 11-37)

$$\frac{Q}{c^2} = 233{,}040805 - 233{,}042963$$
$$= -0{,}002158\ \mathrm{u} = -2{,}01\ \mathrm{MeV}/c^2$$

Como este valor é negativo, o decaimento β^- é proibido.

Decaimento β^+ (Equação 11-42)

$$\frac{Q}{c^2} = 233{,}040805 - (233{,}039630 + 2 \times 5{,}4858 \times 10^{-4})$$
$$= 0{,}000078\ \mathrm{u} = 0{,}073\ \mathrm{MeV}/c^2$$

O decaimento β^+ é permitido.

Captura eletrônica (Equação 11-43)

$$\frac{Q}{c^2} = 233{,}040805 - 233{,}039630$$
$$= 0{,}001175\ \mathrm{u} = 1{,}09\ \mathrm{MeV}/c^2$$

A captura eletrônica é permitida.

Assim, o decaimento α, o decaimento β^+ e a captura eletrônica são permitidos, mas a energia disponível para o decaimento β^+ é muito pequena. O decaimento β^- é proibido. Na prática, o ^{233}Np decai mais de 99% das vezes por captura eletrônica e 0,3% das vezes por decaimento α. O decaimento β^+ nunca foi observado.

Decaimento Gama

No decaimento γ, um núcleo em um estado excitado decai para um estado de menor energia do mesmo isótopo por emissão de um fóton. Este tipo de decaimento é o análogo nuclear da emissão de luz pelos átomos. Como o espaçamento dos níveis de energia nucleares é da ordem de MeV (e não de eV, como no caso dos átomos), os comprimentos de onda dos fótons emitidos são da ordem de

$$\lambda = \frac{hc}{E} \approx \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{1\ \text{MeV}} = 1{,}24 \times 10^{-3}\ \text{nm}$$

Os decaimentos α e β são frequentemente seguidos por um decaimento γ. Quando um núcleo radioativo decai por emissão beta para um estado excitado do núcleo filho, por exemplo, muitas vezes o núcleo filho decai para o estado fundamental emitindo um ou mais raios γ. O tempo médio de vida para o decaimento γ é em geral muito pequeno, da ordem de 10^{-11} s. É difícil medir diretamente tempos de vida tão curtos, mas, às vezes, o tempo de vida pode ser determinado de forma indireta, medindo a largura de linha natural Γ da transição e usando a relação de incerteza $\tau = \hbar/\Gamma$ para calcular o tempo de vida. Alguns emissores γ apresentam tempos de vida extremamente longos, da ordem de horas ou mesmo anos, em casos raros. Estados instáveis com tempos de vida anormalmente longos recebem o nome de *estados metaestáveis*. A existência destes estados é uma consequência das regras de seleção da mecânica quântica que governam as transições entre níveis de energia, tanto nos átomos como nos núcleos. De acordo com uma dessas regras de seleção, grandes variações de momento angular (spin) são proibidas para os decaimentos γ, ou seja, a probabilidade de que ocorra uma transição com essa característica é muito pequena. É por isso que, por exemplo, o primeiro estado excitado do ^{93}Nb decai para o estado fundamental com uma meia-vida de 13,6 anos. O spin do estado metaestável é 1/2, enquanto o do estado fundamental é 9/2. Para que o decaimento ocorra, é preciso que o raio γ seja emitido com $4\hbar$ de momento angular, um evento extremamente improvável, o que explica a longa meia-vida do estado excitado.

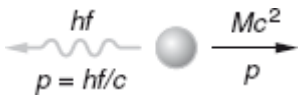


FIGURA 11-23 Um núcleo com energia de repouso Mc^2 emite um fóton de energia hf e momento $p = hf/c$. De acordo com a lei de conservação do momento, o núcleo deve sofrer um recuo tal que o momento após a emissão seja igual a p.

Energia do Decaimento A energia hf do raio γ emitido é igual à diferença de energia entre os estados envolvidos:

$$hf = E_{\text{sup}} - E_{\text{inf}} \qquad \textbf{11-46}$$

em que E_{sup} é a energia do nível superior e E_{inf} a energia do nível inferior. A Figura 11-20 mostra os decaimentos gama entre alguns dos estados excitados do ^{223}Ra que resultam do decaimento α do ^{227}Th. Assim, por exemplo, um núcleo de ^{223}Ra que se encontra em um estado 174 keV acima do estado fundamental emite um raio γ e decai para um estado 61 keV acima do estado fundamental. De acordo com a Equação 11-46, a energia desse raio γ é 174 − 61 = 113 keV. Na verdade, de acordo com a lei de conservação do momento linear, o núcleo de ^{223}Ra sofre um recuo ao emitir o fóton, o que faz com que absorva parte da energia (veja a Figura 11-23). A energia do recuo, E_r, é dada por

$$E_r = \frac{p^2}{2M} = \frac{(hf)^2}{2Mc^2} \qquad \textbf{11-47}$$

na qual M é a massa do núcleo. Na prática, a energia do raio gama emitido é sempre muito menor que a energia de repouso do núcleo, ou seja, $hf << Mc^2$ ou $hf/Mc^2 << 1$. Assim, $E_r << hf$ e a Equação 11-46 é uma excelente aproximação para a energia do raio gama.

A extrema precisão das medidas de frequência que o efeito Mössbauer possibilita tem aplicação prática em muitas áreas, como a medida do desvio gravitacional para o vermelho, o estudo de impurezas e imperfeições nos sólidos cristalinos e a medida do efeito Doppler transversal (veja a Seção 1-5), para dar apenas três exemplos.

Conversão Interna Quando um processo de decaimento produz um núcleo em um estado excitado, uma importante alternativa para a emissão de raios gama é o processo de conversão interna. Neste processo, a energia em excesso do núcleo é transferida para um elétron orbital, que é ejetado do átomo. Em geral, o elétron ejetado pertence a uma das camadas mais próximas do núcleo, a camada *K* ou a camada *L*. A energia cinética com a qual o elétron é ejetado é igual à diferença de energia entre os estados nucleares envolvidos menos a energia de ligação do elétron. Como as energias de ligação dos elétrons são conhecidas para quase todos os elementos, a medida da energia cinética desses *elétrons de conversão* pode ser usada para determinar a energia de muitos estados nucleares. Embora, de acordo com a mecânica quântica, a conversão interna seja um processo de apenas um estágio, foi visto inicialmente como a emissão de um fóton seguida por uma interação do fóton com um elétron do mesmo átomo, semelhante ao efeito fotelétrico; esta é a razão pela qual o fenômeno recebeu o nome de *conversão interna*.



Leitura Suplementar

Em 1958, Rudolf Mössbauer[15] observou um efeito notável: a emissão de raios γ sem recuo por átomos excitados de ^{191}Ir. Esta descoberta, que ele realizou enquanto trabalhava em sua tese de doutorado e logo foi utilizada em muitas aplicações práticas, é descrita na Leitura Suplementar *O Efeito Mössbauer*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Figuras 11-24 a 11-26.

Exercícios

6. O decaimento do nuclídeo ^{93}Nb do primeiro estado excitado para o estado fundamental exige que o raio γ transporte $4\hbar$ unidades de momento angular. Como isso é possível, se o momento angular intrínseco do raio γ é $1\hbar$?

7. Por que a série de decaimentos $A = 4n + 1$ não existe naturalmente?

8. Os decaimentos por emissão α são frequentemente seguidos por decaimentos por emissão β. Quando isso ocorre, quase sempre o decaimento é do tipo β^-. Por quê?

9. De que forma a aplicação de uma alta pressão a uma amostra pode afetar o tempo de vida de um núcleo que decai por captura eletrônica? Por que os outros tipos de decaimento não são afetados?

11-5 A Força Nuclear

O estudo da física nuclear é muito diferente do estudo da física atômica. O átomo mais simples, o de hidrogênio, pode ser descrito com exatidão resolvendo a equação de Schrödinger e tomando como energia potencial a energia de interação entre o elétron e o próton, $V(r) = -ke^2/r$ (embora, como vimos, a matemática envolvida seja bastante sofisticada). O núcleo mais simples (depois do próton isolado) é o dêuteron, constituído por um próton e um nêutron. Não podemos resolver a equação de Schrödinger para este problema porque, embora muitas de suas características tenham sido determinadas, a função matemática exata da energia potencial da interação, *V*, não é conhecida. Não existe um método macroscópico para medir a força entre um nêutron e um próton. O fato de que muitos núcleos são estáveis é uma prova concreta de que os núcleos estão sujeitos a interações muito mais fortes que a interação gravitacional e a interação eletromagnética. Tomando o ^{4}He como exemplo, a energia potencial eletrostática de dois prótons separados por uma distância de 1 fm é dada por

$$V = \frac{ke^2}{r} = \frac{1{,}44\ \text{MeV} \cdot \text{fm}}{1\ \text{fm}} = 1{,}44\ \text{MeV}$$

Note que a energia potencial é positiva, ou seja, a força eletrostática entre os prótons é repulsiva, como seria de se esperar. Por outro lado, a energia necessária para remover um próton ou um nêutron do ^{4}He é aproximadamente 20 MeV. A força que mantém os núcleons unidos deve ser atrativa e muito maior que a força de Coulomb, pois os nêutrons são eletricamente neutros e, portanto, não estão sujeitos à força de Coulomb, enquanto os prótons, como vimos, estão sujeitos a uma força eletrostática repulsiva. Não é possível atribuir a estabilidade dos núcleos à atração gravitacional, já que, como mostra o Exemplo 11-14, a força gravitacional entre dois prótons no interior do núcleo é muito menor que a repulsão eletrostática. A conclusão é de que a interação atrativa que mantém os núcleos coesos deve ser muito forte. Essa interação é conhecida como *força nuclear*.

Características da Força Nuclear

A determinação das características da força nuclear é um dos principais objetivos da física nuclear. Muitas informações a

respeito desta força têm sido obtidas a partir de experimentos de espalhamento envolvendo prótons, nêutrons e outras partículas. Acontece que, enquanto os resultados de um experimento de espalhamento podem ser previstos com base no conhecimento das forças envolvidas, a recíproca não é verdadeira, ou seja, as forças não podem ser determinadas com exatidão a partir dos resultados de experimentos de espalhamento. Entretanto, os resultados dos experimentos de espalhamento revelam que (1) a força nuclear não depende do tipo de núcleon, ou seja, é a mesma para interações do tipo *n-n*, *p-p* e *n-p*; (2) a força é muito grande quando as partículas estão próximas, mas se torna praticamente nula quando a distância entre as partículas é maior que alguns femtômetros; (3) a força é do tipo saturado. A energia potencial da interação núcleo-núcleo pode ser representada, em primeira aproximação, como um poço de potencial quadrado com uma profundidade de 40 MeV e uma largura de alguns femtômetros.

EXEMPLO 11-14 **Razão F_{grav}/F_{elet} para Dois Prótons** Compare a força de atração gravitacional com a força de repulsão eletrostática no caso de dois prótons.

SOLUÇÃO

A repulsão eletrostática entre dois prótons separados por uma distância r é dada por

$$F_{elet} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = \frac{(1{,}60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

e a atração gravitacional é dada por

$$F_{grav} = G\frac{m_p^2}{r^2} = \frac{G(1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})^2}{r^2}$$

A razão entre as duas forças não depende de r e é dada por

$$\frac{F_{grav}}{F_{elet}} = \frac{Gm_p^2}{(1/4\pi\epsilon_0)e^2}$$

$$= \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2/kg^2})(1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})^2}{(8{,}99 \times 10^{9}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1{,}60 \times 10^{-19})^2}$$

$$\frac{F_{grav}}{F_{elet}} = 8{,}1 \times 10^{-37} \approx 10^{-36}$$

A solução da equação de onda para o núcleo atômico apresenta todas as dificuldades matemáticas encontradas em nossos estudos anteriores de sistemas atômicos e moleculares e algumas dificuldades ainda maiores. Como os sistemas atômicos e moleculares, o núcleo (a não ser no caso do ^{1}H e do ^{2}H) é um sistema de muitos corpos, e os sistemas de muitos corpos são sabidamente difíceis de estudar. Além disso, a interação nuclear é muito mais complexa que a interação eletromagnética. Pior ainda: os físicos ainda não sabem como expressar a interação nuclear através de uma função. Em outras palavras, ainda não conhecemos uma lei para a força nuclear que seja equivalente à lei de Coulomb para a força eletrostática. Isso significa que não podemos usar uma equação semelhante à equação de Schrödinger para determinar as funções de onda nucleares e as energias correspondentes.

Nos últimos anos, os cientistas conseguiram alguns progressos no sentido de obter uma expressão analítica para a interação. Por exemplo, é possível estimar a profundidade do poço de potencial supondo que o poço é quadrado e calculando a energia de um núcleon no estado fundamental com base em uma estimativa da largura do poço. Tomando 2 fm como a largura típica do poço para núcleos leves (veja a Figura 11-5), o potencial $-V$ de um núcleon é aproximadamente

$$-V \approx E_1 \approx \frac{h^2}{8ma^2}$$

$$= \frac{(6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})^2}{(8)(1{,}67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})(2 \times 10^{-15}\,\mathrm{m})^2(1{,}60 \times 10^{-13}\,\mathrm{J/MeV})}$$

$$V \approx -50\,\mathrm{MeV}$$

Dois prótons separados pela mesma distância experimentam uma força de repulsão eletrostática dada por

$$V_{\text{elet}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a} = \frac{(9\times10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}60\times10^{-19}\,\text{C})^2}{(2\times10^{-15}\,\text{m})(1{,}60\times10^{-13}\,\text{J/MeV})}$$

$$V_{\text{elet}} = 0{,}72\,\text{MeV}$$

Assim, a aproximação do poço quadrado sugere que, a uma distância de 2 fm, a interação nuclear é aproximadamente 100 vezes maior que a interação eletrostática.[16]

Dois tipos de experimentos permitem obter conhecimentos mais detalhados a respeito da natureza da força nuclear e da forma e profundidade do poço de potencial. Em primeiro lugar, assim como a espectroscopia atômica forneceu informações que permitiram determinar as energias, spins e momentos magnéticos dos elétrons atômicos, a espectroscopia nuclear, ou seja, o estudo da emissão e absorção de partículas e radiação pelos núcleos, fornece informações importantes a respeito das energias, momentos magnéticos, momentos elétricos quadrupolares e spins dos núcleos, tanto no estado fundamental como em estados excitados. A segunda fonte de informações a respeito da estrutura dos núcleos são os experimentos de espalhamento. Nesses experimentos, partículas sujeitas à força nuclear, como prótons e partículas alfa, são "disparadas" contra núcleos usados como alvos. O comprimento de onda de um próton com uma energia cinética de 20 MeV é da ordem das dimensões atômicas:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

$$= \frac{6{,}63\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2\times1{,}67\times10^{-27}\,\text{kg}\times1{,}60\times10^{-13}\,\text{J/MeV}}}$$

$$\lambda = 6\times10^{-15}\,\text{m} = 6\,\text{fm}$$

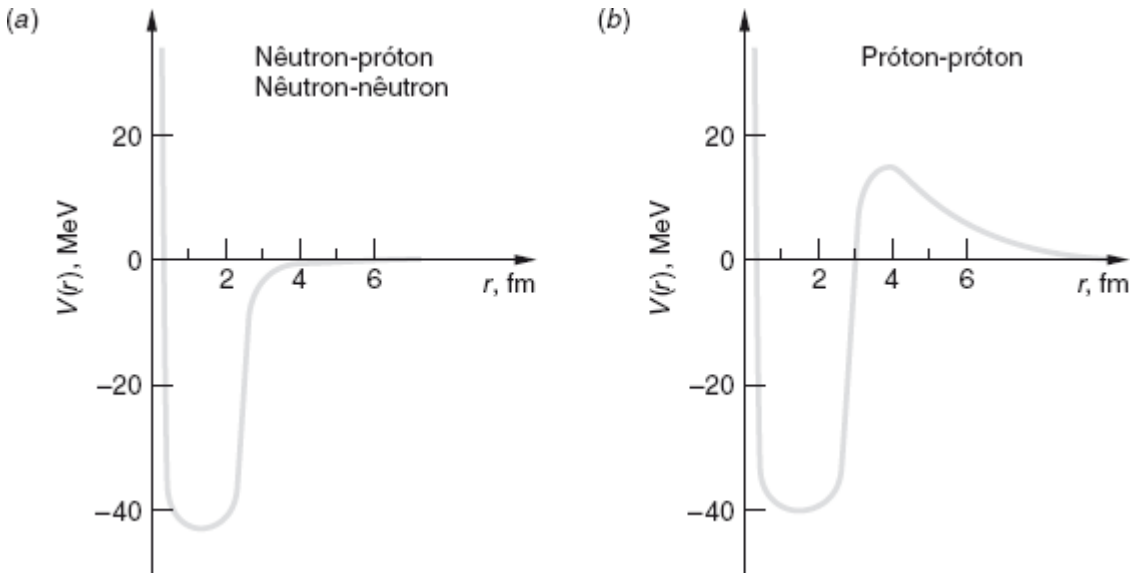


FIGURA 11-27 (*a*) Forma aproximada do potencial entre um nêutron e um próton e entre dois nêutrons. O caroço duro tem um raio de aproximadamente 0,5 fm. (*b*) O potencial entre dois prótons é diferente do potencial representado em (*a*) porque inclui a repulsão eletrostática, que se torna dominante para distâncias maiores que aproximadamente 3 fm. Note que o poço de potencial em (*a*) é ligeiramente mais profundo por causa da ausência da repulsão eletrostática.

Assim, prótons com energias dessa ordem sofrem difração ao colidirem com os núcleos usados como alvos. A análise das figuras de difração resultantes fornece informações detalhadas a respeito da interação entre os prótons e os alvos. Muitos desses experimentos, particularmente os de espalhamento de prótons por prótons, conhecido como espalhamento *p-p*, e os de espalhamento de nêutrons por prótons, conhecidos como espalhamento *n-p*, revelam que os potenciais nucleares para interações *p-p* e interações *n-p* têm as formas indicadas na Figura 11-27. Embora a forma do potencial para pares nêutron-nêutron seja conhecida apenas indiretamente, já que os nêutrons livres são radioativos e não sabemos como fabricar alvos constituídos exclusivamente por nêutrons (como a substância de que são compostas as estrelas de nêutrons), tudo indica que é idêntica à do potencial para pares nêutron-próton. Na verdade, quando a componente de repulsão eletrostática do potencial *p-p* da Figura 11-27*b* é subtraída do potencial total $V(r)$, verifica-se que o potencial *p-p* nuclear é igual ao potencial *n-p* (e, presumivelmente, ao potencial *n-n*). Este fato leva à importante conclusão de que *a força nuclear é independente da carga dos núcleons*. Isso sugere que o próton e o nêutron podem ser considerados estados diferentes da mesma partícula, o núcleon. A questão será examinada mais de perto no Capítulo 12.

Como vimos na Seção 11-2, o raio do próton é aproximadamente 1 fm. O nêutron é aproximadamente do mesmo tamanho. Como mostra a Figura 11-27, dois núcleos experimentam uma interação atrativa quando se encontram a uma distância de menos de 2,5 fm, mas a força diminui rapidamente para distâncias maiores que 2,5 fm e se torna praticamente nula para distâncias maiores que 3 fm. Assim, podemos concluir que *a força nuclear é uma força de curto alcance.* Pares de núcleons também experimentam uma interação nuclear repulsiva extremamente forte para distâncias menores que aproximadamente 0,5 fm. A existência deste *caroço duro* está de acordo com a observação experimental de que a densidade da região central dos núcleos é aproximadamente igual para todos os núcleos (veja a Figura 11-27). Em outras palavras, o fato de que os núcleos que contêm um número maior de núcleons possuem um volume maior sugere que os núcleons não podem se aproximar uns dos outros além de um certo limite. O curto alcance da força nuclear, combinado com a repulsão do caroço duro, faz com que, para núcleos com dimensões maiores que 2,5 a 3 fm, cada núcleon só interaja com um número limitado de outros núcleons. Este fenômeno é análogo ao fato de que cada átomo só pode estabelecer um número limitado de ligações covalentes com outros átomos. Um átomo de carbono, por exemplo, pode estabelecer no máximo quatro ligações covalentes com átomos vizinhos. Quando o número de ligações covalentes de um átomo é igual ao número máximo (o que acontece, por exemplo, com os átomos de carbono em um cristal de diamante), dizemos que as ligações estão saturadas. Da mesma forma, *a força nuclear é uma força saturada.*

A Força Nuclear de Câmbio

Mesmo sem conhecer uma função matemática que descreva a energia potencial nuclear, podemos afirmar que a força nuclear é de curto alcance, saturada, independente da carga, dependente do spin, apresenta um caroço duro e uma pequena componente não central e é cerca de cem vezes mais intensa que a força eletrostática. Uma explicação para a origem de uma força com essas características foi proposta por H. Yukawa[17] em 1935.

Segundo Yukawa, a força nuclear é uma consequência da troca de partículas entre os núcleons. Ele baseou sua teoria em uma analogia com a explicação da mecânica quântica para a interação eletrostática, um dos dois mecanismos de câmbio que o leitor já estudou, embora este aspecto do fenômeno provavelmente não tenha sido ressaltado na ocasião. Classicamente, toda distribuição de cargas produz um campo elétrico $\mathscr{E}$, e a força experimentada por uma carga q em uma região onde existe um campo elétrico é igual ao produto $q\mathscr{E}$. Qualquer mudança na distribuição de cargas modifica o valor de $\mathscr{E}$; entretanto, a informação de que uma mudança ocorreu não aparece instantaneamente em todos os pontos do espaço, mas se propaga em todas as direções com a velocidade da luz. Variações periódicas da distribuição de cargas dão origem a variações periódicas de $\mathscr{E}$, isto é, a ondas eletromagnéticas.[18] Vimos também que a radiação eletromagnética pode ser descrita em termos de partículas conhecidas como fótons. De acordo com a mecânica quântica, toda carga, mesmo que não se encontre em movimento, está constantemente emitindo e absorvendo fótons. Estes fótons são chamados de *fótons virtuais* porque não podem ser observados diretamente. De acordo com o princípio de indeterminação, uma partícula carregada pode emitir um fóton de energia hf sem perder energia e sem sofrer recuo, ou seja, sem violar as leis de conservação da energia e do momento, contanto que o fóton seja reabsorvido em um intervalo de tempo Δt menor ou igual a $\hbar/\Delta E$, em que $\Delta E = hf$. A distância que o fóton virtual percorre no intervalo de tempo Δt, conhecida como *alcance* e representada pelo símbolo R, é dada por

$$R = c\Delta t = c\hbar/\Delta E \qquad \textbf{11-48}$$

Substituindo ΔE pelo seu valor, obtemos:

$$R = c\hbar/hf = c/2\pi f = \lambda/2\pi \qquad \textbf{11-49}$$

Uma segunda carga situada a uma distância da primeira menor que R pode absorver o fóton e um fóton semelhante emitido pela segunda carga pode ser absorvido pela primeira sem que haja violação das leis de conservação da energia e do momento. De acordo com a mecânica quântica, a força eletrostática entre duas cargas estacionárias é uma consequência desta troca de fótons virtuais. Observe que não há limite para o comprimento de onda do fóton da Equação 11-49, já que, como um fóton não possui massa de repouso, pode ter uma energia arbitrariamente pequena. Isso significa que, no caso da força eletrostática, o alcance R é infinito, o que está de acordo com a teoria clássica.

Um mecanismo de câmbio também foi proposto na teoria BCS para explicar a força de atração entre os elétrons que formam um par de Cooper (veja a Seção 10-8). Nesse caso, as partículas trocadas são fônons e o alcance da força não é infinito, mas determinado pela condição de que $\Delta E \approx E_g$, na qual E_g é a largura da banda proibida do estado supercondutor.

De acordo com Yukawa, a força nuclear podia ser explicada em termos da troca de partículas virtuais pelos núcleons. Essas partículas, que ele chamou de *mésons*, desempenhariam o mesmo papel que os fótons na interação eletromagnética. O mecanismo proposto para a força nuclear era um intercâmbio de um méson por um par de núcleons, como na Figura 11-28. Para explicar o curto alcance da força nuclear, Yukawa supôs que o méson, ao contrário do fóton, possuía uma massa de repouso diferente de zero. Nesse caso, a indeterminação da energia ΔE na Equação 11-48 teria um limite mínimo, dado por

$$\Delta E \geq mc^2$$

na qual m é a massa do méson e mc^2 sua energia de repouso. O alcance R do méson, portanto, e a força nuclear mediada por ele não poderiam ser maiores que

$$R = c\Delta t = c\hbar/\Delta E = \hbar/mc \qquad \textbf{11-50}$$

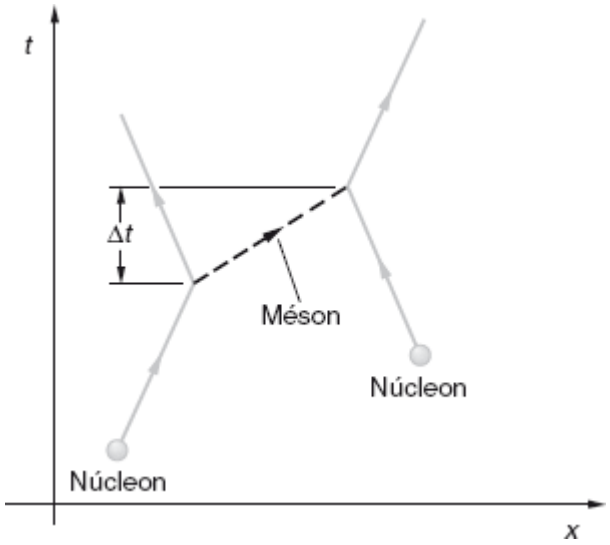


FIGURA 11-28 Representação esquemática da troca de um méson entre um par de núcleons. O méson é emitido pelo núcleon da esquerda, que, em consequência, sofre um recuo, e é absorvido após um intervalo de tempo Δt pelo núcleon da direita, que também sofre um recuo. O efeito global é como se os núcleons tivessem interagido diretamente. Este tipo de diagrama espaço-tempo é conhecido como diagrama de Feynman (veja a Seção 12-1). Os eixos x e t são normalmente omitidos.

já que a velocidade do méson não poderia ser maior que a velocidade da luz. Convém lembrar que h/mc é o comprimento de onda de Compton λ_c de uma partícula cuja massa é m, de modo que $R = \lambda_c/2\pi$. Quando Yukawa formulou sua teoria, já se sabia que o alcance da força nuclear era da ordem de 1 fm, o que lhe permitiu estimar o valor da massa do méson usando a Equação 11-50:

$$m \approx 3{,}5 \times 10^{-28}\,\text{kg} \approx 380m_e \approx 200\,\text{MeV}/c^2$$

Para explicar o fato de que a força nuclear não depende da carga elétrica, Yukawa postulou a existência de três tipos de mésons, com cargas $+e$, 0 e $-e$. Assim, em uma interação como a da Figura 11-28, a troca de um méson neutro deixaria os dois núcleons com a carga original, enquanto a troca de um méson com carga elétrica faria com que a carga dos dois núcleons mudasse. Observe que o fato de que $m = 0$ na Equação 11-50 para o caso dos fótons explica por que o alcance da força eletromagnética é infinito.

Se o núcleon que emite o méson interage com outra partícula (ou com um núcleo) que possui energia cinética suficiente no referencial do núcleon para fornecer a energia de repouso do méson e mais o momento de recuo do núcleon, permitindo assim a conservação da energia e do momento, o méson virtual pode se tornar real e ser observado experimentalmente. Esta situação está representada, de forma esquemática, na Figura 11-29. Observe a analogia com a emissão de fótons (bremstrahlung) por elétrons acelerados em um tubo de raios X (veja a Seção 3-4). Foi em interações como a que aparece na Figura 11-29 que os mésons de Yukawa, hoje conhecidos como *píons*, foram observados pela primeira vez nos raios cósmicos, em 1947, mais de uma década depois de serem postulados por Yukawa.[19] O valor experimental da massa dessas partículas era 140 MeV/c^2, em boa concordância com a estimativa de Yukawa de que a massa dos mésons deveria ser da ordem de 200 MeV/c^2, e mais tarde verificou-se que havia três tipos de partículas, positivas, negativas e neutras, o que constituiu uma confirmação adicional da teoria. Desde então, foram descobertos vários outros tipos de mésons e as teorias da força nuclear foram modificadas para incluir os efeitos da troca dessas outras partículas, mas os píons ainda são considerados os principais portadores da força nuclear. Como veremos no Capítulo 12, o Modelo-padrão da física de partículas sustenta que tanto os núcleons como os mésons são feitos de partículas ainda menores chamadas *quarks*. As interações entre os quarks para formar os núcleons e os mésons são mediadas por uma partícula, o *glúon*, que é trocada pelos quarks em um processo análogo ao que acabamos de discutir.

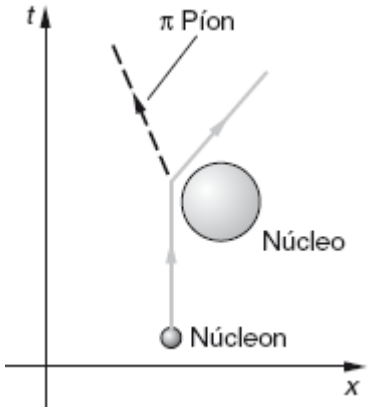


FIGURA 11-29 Diagrama de Feynman de um núcleon emitindo um píon virtual na vizinhança de um núcleo. Se o núcleo fornecer uma energia pelo menos igual à energia de repouso do píon e participar da conservação do momento, o píon deixará de ser virtual e se tornará real, ou seja, poderá ser detectado externamente.

EXEMPLO 11-15 **Alcance da Força Nuclear** Estime o alcance da força nuclear usando o valor experimental da massa do píon, 140 MeV/c^2.

SOLUÇÃO

De acordo com a Equação 11-50, o alcance R não pode ser maior que $\hbar c/mc^2$. Assim, temos:

$$R = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{(1{,}06 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})(3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(140\,\mathrm{MeV}/c^2)(c^2)(1{,}60 \times 10^{-13}\,\mathrm{J/MeV})}$$

$$R = 1{,}4 \times 10^{-15}\,\mathrm{m} = 1{,}4\,\mathrm{fm}$$

Exercícios

10. Que propriedade da força nuclear é indicada pelo fato de que todos os núcleos possuem aproximadamente a mesma densidade?

11. Qual é a principal diferença entre a força nuclear e a força eletromagnética?

12. Nos últimos anos foram descobertos muitos mésons que possuem uma massa maior que a do píon. O que isso significa em relação ao alcance das forças mediadas por essas partículas?

Uma Oportunidade PARA VOCÊ A física nuclear está passando por uma fase empolgante. Apenas cerca de metade dos 5000 e tantos núcleons mostrados na Figura 11-15 foram estudados com detalhes. Nos últimos anos, tornou-se possível investigar melhor os núcleos com um número de nêutrons muito maior que o número de prótons, conhecidos como *núcleos exóticos*, especialmente os que possuem um tempo de vida muito curto. Com os novos recursos, questões interessantes, tanto teóricas como experimentais, puderam ser levantadas. O processo de captura rápida de nêutrons, que os astrofísicos chamam de *processo r*, é importante para a síntese de elementos pesados no interior das estrelas e ocorre quase exclusivamente no território inexplorado dos núcleos exóticos, perto da linha de gotejamento de nêutrons. O estudo sistemático dos núcleos exóticos permitirá compreender melhor a força nuclear, a matéria nuclear e a estrutura das estrelas de nêutrons. Ajudando os físicos a formular modelos melhores para o núcleo que o modelo das camadas, esse estudo sistemático poderá contribuir para o desenvolvimento de novos reatores de fissão e fusão nuclear e para a descoberta de novas aplicações dos isótopos radioativos na medicina. Existem claras oportunidades para a execução de trabalhos, tanto teóricos como experimentais, que podem levar à tão sonhada função da energia potencial do núcleo atômico.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Densidade de Probabilidade dos Mésons Virtuais

Um núcleon está continuamente emitindo e absorvendo mésons virtuais. O intervalo de tempo Δt durante o qual um méson virtual existe pode ser estimado a partir da Equação 11-50:

$$\Delta t = \frac{\hbar}{mc^2} = \frac{(1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s})}{(140\,\mathrm{MeV}/c^2)\,(c^2)\,(1{,}60 \times 10^{-13}\,\mathrm{J/MeV})}$$

$$\Delta t = 5 \times 10^{-24}\,\mathrm{s}$$

A densidade de probabilidade dos mésons pode ser determinada usando resultados do Capítulo 2 e do Capítulo 6. A expressão relativística que relaciona a energia total E e o momento p, o módulo do quadrivetor energia-momento, é

$$(mc^2)^2 = E^2 - (pc)^2 \qquad \textbf{2-32}$$

De acordo com a Tabela 6-1, a energia e o quadrado do momento podem ser substituídos pelos seguintes operadores:

$$E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad p^2 \rightarrow -\hbar^2\nabla^2 \qquad \textbf{11-51}$$

Nesse caso, a Equação 2-32 se torna:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi(\mathbf{r},t) \qquad \textbf{11-52}$$

na qual $\Phi(\mathbf{r}, t)$ é a função de onda do méson. A Equação 11-52 é uma equação de onda relativística, proposta por Oskar Klein e Walter Gordon em 1926, o mesmo ano em que Schrödinger apresentou sua equação de onda não relativística.

O fato de que a extensão espacial do campo associado aos mésons está relacionada à força nuclear dada pela Equação 11-50 pode ser demonstrado calculando a densidade de probabilidade dos mésons, $|\Phi|^2$, para uma distribuição estática, ou seja, independente do tempo. O problema é análogo ao do cálculo da distribuição de fótons virtuais, ou seja, da intensidade do campo elétrico, nas vizinhanças de uma carga elétrica estacionária. Neste caso, a derivada de Φ em relação ao tempo é nula e a Equação 11-52 se torna

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{R}\Phi(\mathbf{r}) \qquad \textbf{11-53}$$

cuja solução é

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Ae^{-r/R}}{\mathbf{r}} \qquad \textbf{11-54}$$

na qual A é uma constante de normalização. A densidade de probabilidade é, portanto,

$$|\Phi(\mathbf{r})|^2 = \frac{|A|^2e^{-2r/R}}{\mathbf{r}^2} \qquad \textbf{11-55}$$

e vemos que a densidade de probabilidade dos mésons diminui exponencialmente a uma taxa que depende de R. Em outras palavras, o alcance dos mésons é função de R, como já havíamos concluído a partir da Equação 11-50. A Figura 11-30 mostra a função distribuição de probabilidade $P(r) = |\Phi|^2r^2$ dos mésons virtuais. Para valores de r maiores que $0{,}5R$, a curva está de acordo com os resultados experimentais; para valores menores de r, porém, o valor experimental da concentração de mésons é muito menor que o indicado na Figura 11-30. Na verdade, se a concentração de mésons para pequenos valores de r fosse igual à concentração teórica, os núcleos teriam algumas propriedades peculiares que não são observadas na prática. Os físicos acreditam que a criação de píons virtuais é suprimida para pequenos valores de r, provavelmente em consequência de interações entre quarks e glúons. O assunto tem sido muito estudado nos últimos anos, mas ainda não existe uma conclusão definida.

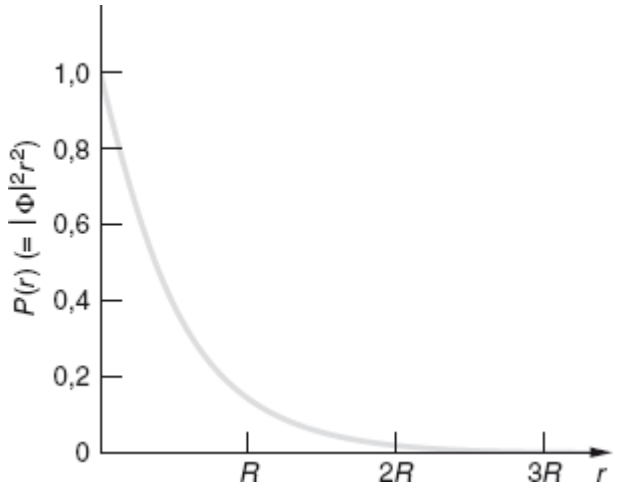


FIGURA 11-30 Distribuição de probabilidade $P(r)$ dos mésons virtuais emitidos por um núcleon. O eixo das distâncias foi normalizado em termos do alcance $R = \hbar/mc$, o comprimento de onda de Compton dos mésons dividido por 2π. A probabilidade de que um méson seja encontrado a uma distância $r > 3R$ é praticamente nula.

11-6 O Modelo de Camadas

O fato de que 126 é um número mágico motivou a busca de isótopos de meia-vida excepcionalmente longa com Z próximo de 126. A descoberta desses isótopos seria uma confirmação de que nosso entendimento da estrutura do núcleo está correto. Entretanto, até o momento, os cientistas não conseguiram sintetizar elementos com $Z > 118$.

Embora os aspectos gerais da estrutura dos núcleos sejam explicados pelo modelo da gota de líquido, a energia de ligação e outras propriedades não variam de forma suave de núcleo para núcleo. Não é de admirar que a curva suave prevista pela Equação 11-12 não se ajuste bem aos dados experimentais para pequenos valores de A, já que, nesse caso, a inclusão de um próton ou nêutron faz uma grande diferença. Entretanto, mesmo para valores médios e grandes de A, as propriedades dos núcleos variam de forma descontínua com o número de núcleons. Considere a energia de ligação do último nêutron de um núcleo. (Note que esta energia não é igual à energia média de ligação por núcleon.) Podemos calcular esta energia a partir da equação de Weizsäcker determinando o valor de $M[(A-1), Z] + m_n - M(A, Z)$. A Figura 11-31 mostra um gráfico da diferença entre os valores experimentais da energia de ligação e os valores calculados a partir da Equação 11-12 em função de N, o número de nêutrons. São observadas grandes diferenças nas proximidades de N = 28, 50, 82 e 126. Esses são também os números de nêutron de núcleos que possuem um número anormalmente grande de isótonos. Núcleos com estes números de prótons (com exceção do elemento com Z = 126, que nunca foi observado) possuem um número anormalmente grande de isótopos.

Esses números são os "números mágicos" mencionados na Seção 11-2. Nas regiões entre os números mágicos, a energia de ligação do último nêutron pode ser calculada com boa precisão usando a equação de Weizsäcker. A Figura 11-31 é análoga à Figura 7-20, que mostra a energia de ligação do último elétron de um átomo em função do número atômico Z. A semelhança entre as duas figuras sugere que o núcleo possui uma estrutura de camadas semelhante à estrutura de camadas dos elétrons em um átomo. Existem muitas outras provas da existência desses números mágicos, como as variações irregulares do momento quadrupolar elétrico com o número de núcleons (Figura 11-7), da seção de choque para captura de nêutrons com o número de nêutrons (Figura 11-32) e da energia de ligação do último nêutron com o número de nêutrons para um dado valor de Z (Figura 11-33). Outras provas da existência de uma estrutura de camadas no núcleo são discutidas em Mayer, M. G. e J. H. D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, Wiley, New York, 1955.

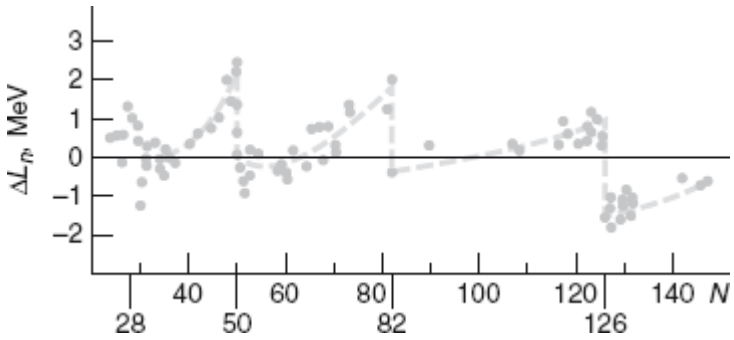


FIGURA 11-31 Diferença entre o valor experimental da energia de ligação do último nêutron e o valor teórico em função do número de nêutrons. Note a semelhança entre esta curva e a curva da energia de ionização dos átomos em função de Z (Figura 7-20). Os números de nêutrons 28, 50, 82 e 126 correspondem a camadas completas. De acordo com os dados, a energia de ligação de um nêutron com N = número mágico + 1 é muito menor que a de um nêutron com N = número mágico.

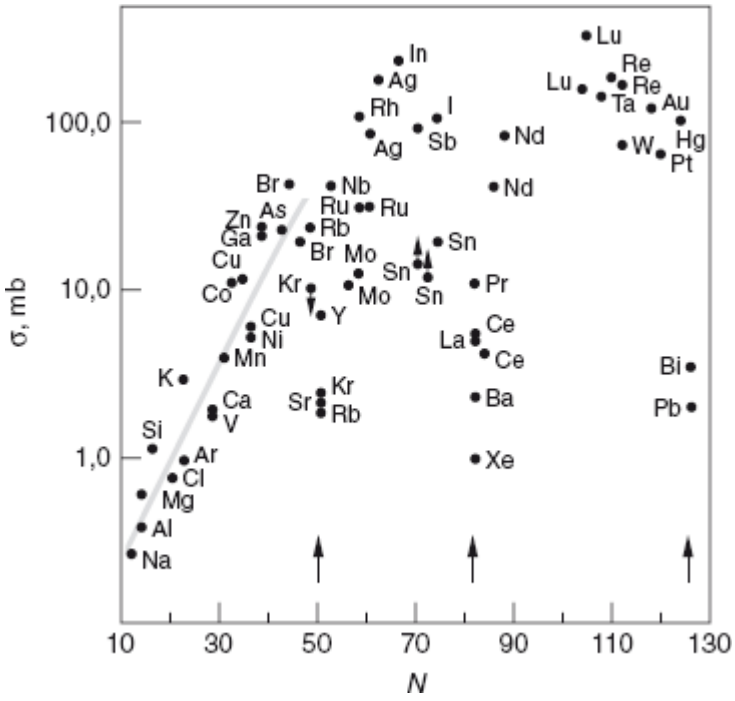


FIGURA 11-32 A seção de choque para captura, σ, é uma medida da probabilidade de que um nêutron que se aproxima de um núcleo seja capturado. A reta mostra o valor médio. Há uma queda da probabilidade de captura de quase duas ordens de grandeza em $N = 50$, 82 e 126. Os valores de σ estão expressos em milibarns (mb) (1 milibarn = 10^{-27} cm^2).

Embora a instabilidade incomum dos núcleos, nos quais N ou Z é igual a um dos números mágicos, tenha sido notada na década de 1930, a primeira explicação bem-sucedida em termos de um modelo de camadas surgiu apenas em 1949. Quando discutimos os átomos no Capítulo 7, começamos com uma carga positiva fixa $+Ze$ e calculamos as energias dos elétrons uma a uma, desprezando a influência dos outros elétrons, a não ser pelo fato de exigirmos que o princípio de exclusão fosse respeitado. A interação dos elétrons externos com o caroço central foi determinada supondo uma carga nuclear efetiva menor que Z por causa da blindagem dos elétrons internos. Este método funciona muito bem porque os níveis de energia eletrônicos estão afastados uns dos outros. Sendo assim, podemos usar os estados quânticos do átomo de hidrogênio, descritos por n, ℓ, m_ℓ e m_s como uma primeira aproximação para os níveis de energia dos elétrons em átomos complexos. Os números mágicos atômicos surgem naturalmente por causa da grande diferença de energia entre uma camada ou subcamada e a camada ou subcamada seguinte. Para calcular com precisão as funções de onda e energias dos elétrons em átomos complexos é preciso usar aproximações analíticas ou métodos numéricos, mas isso pode ser feito de forma rotineira porque as forças envolvidas são bem conhecidas.

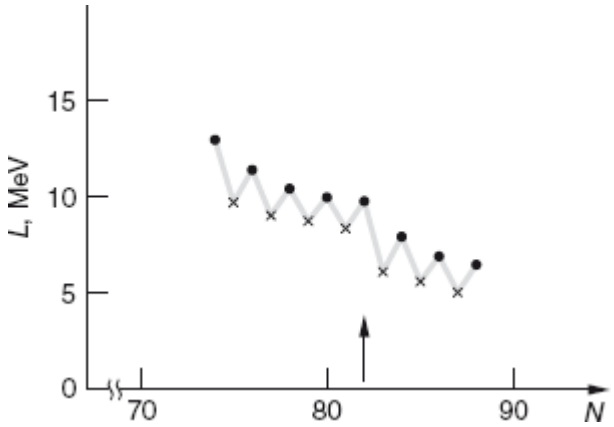


FIGURA 11-33 Energia de ligação L do último nêutron para vários isótopos do cério ($Z = 58$). Os dados são típicos de núcleos com $Z > 20$. O valor de L diminui bruscamente (cerca de 2 MeV) para $N = 82 + 1$. Este gráfico mostra também o efeito da energia de emparelhamento associada ao parâmetro a_5 da equação de Weizsäcker (veja a Leitura Suplementar *O Modelo da Gota de Líquido e a Equação de Weizsäcker*), que faz com que a energia de ligação do último nêutron seja maior quando N é par do que quando N é ímpar.

No caso do modelo de camadas do núcleo, porém, a situação é diferente. Em primeiro lugar, não existe um potencial central análogo à carga positiva fixa do átomo. As interações dos núcleons uns com os outros são as únicas presentes. A situação é complicada ainda mais pelo fato de que não sabemos muita coisa a respeito da interação nuclear além do que já foi dito: que é saturada, que tem um alcance limitado, que não depende da carga e que depende do spin. À primeira vista, é difícil imaginar um

nêutron ou um próton se movendo quase livremente em uma órbita bem definida quando existem $A - 1$ partículas nas vizinhanças interagindo fortemente com a partícula considerada. Mesmo assim, as propriedades observadas, como as que aparecem nas Figuras 11-7, 11-31, 11-32 e 11-33, sugerem que vale a pena experimentar um modelo no qual cada núcleon se move mais ou menos livremente no potencial médio produzido pelos outros núcleons. A Figura 11-34 mostra de que forma este potencial médio pode ser gerado. A hipótese de que cada núcleon descreve uma órbita regular sem colidir com outros núcleons pode ser explicada pelo princípio de exclusão. Considere N nêutrons no interior de um poço de potencial. No estado fundamental, os N níveis de menor energia estão ocupados. Uma colisão entre dois nêutrons que não resulte em uma simples troca de estados é proibida pelo princípio de exclusão se não existirem estados vazios disponíveis. Uma colisão que resulte na troca de partículas iguais não tem nenhum efeito. Assim, apenas os núcleons que se encontram nos níveis mais altos ocupados, próximos dos níveis vazios, podem colidir entre si. A situação é análoga à dos elétrons de condução dos metais, a maioria dos quais não pode absorver energia em colisões com os íons da rede cristalina porque todos os níveis de energia próximos estão ocupados. Como os elétrons, os núcleons também possuem um nível de Fermi.

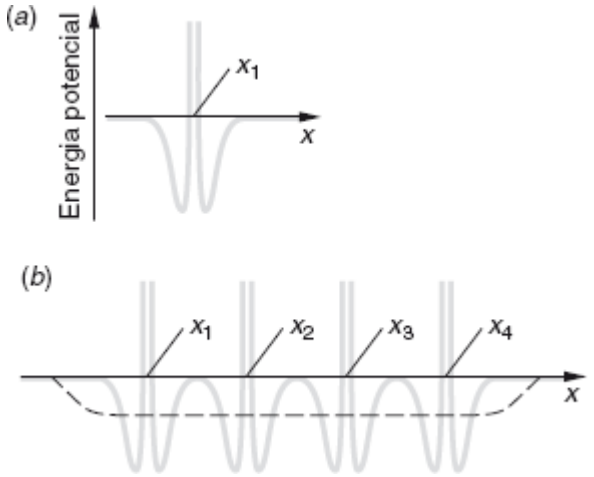


FIGURA 11-34 (*a*) Um núcleon que está se movendo ao longo do eixo dos x encontra o potencial produzido por um segundo núcleon situado em $x = x_1$. (*b*) Potencial produzido por quatro núcleons como o que está representado em (*a*). A média dos quatro potenciais pode ser aproximada pela curva tracejada, um poço finito com cantos arredondados.

Os primeiros cálculos usando o modelo de camadas foram executados supondo um poço de potencial quadrado com 40 MeV de profundidade, mas não foi possível prever corretamente os números mágicos. Em 1949, M. G. Mayer e J. H. D. Jensen[20] mostraram independentemente que, com uma modificação desses cálculos, os números mágicos podiam ser obtidos a partir de um modelo de camadas relativamente simples. Mayer e Jensen resolveram o problema propondo que, no caso do núcleo, a interação spin-órbita é tão forte que acopla o spin de cada núcleon ao seu momento angular orbital. Assim, a interação spin-órbita nuclear leva a um acoplamento *j-j*[21] em vez do acoplamento *L-S* que caracteriza a interação spin-órbita eletrônica (veja a Seção 7-5). Esta forte interação spin-órbita faz com que a energia de cada núcleo seja bem menor, se o spin e o momento angular orbital estiverem alinhados paralelamente, do que se o spin e o momento angular orbital estiverem alinhados antiparalelamente. A Figura 11-35 mostra os níveis de energia calculados de acordo com o modelo de camadas de Mayer e Jensen, que prevê corretamente os números mágicos. Dependendo dos detalhes da interação spin-órbita nos elementos superpesados, pode existir uma ilha de estabilidade nas vizinhanças de $Z = 114$ ou $Z = 120$, com estados metaestáveis de vida média da ordem de horas ou dias. O modelo de camadas do núcleo é discutido com mais detalhes na Leitura Suplementar *A Busca de um Modelo de Camadas* "*Correto*" *para o Núcleo*. Para calcular as funções de onda e energias dos núcleons, é preciso recorrer a uma série de aproximações, que até hoje continuam a ser objeto de estudo por parte dos físicos nucleares.



Leitura Suplementar

As várias abordagens que foram propostas para o modelo de camadas do núcleo atômico e seus sucessos (e insucessos) na previsão de spins e momentos magnéticos nucleares são discutidos qualitativamente na Leitura Suplementar *A Busca de um Modelo de Camadas* "*Correto*" *para o Núcleo*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 11-56 e 11-57, e as Figuras 11-36 a 11-38.

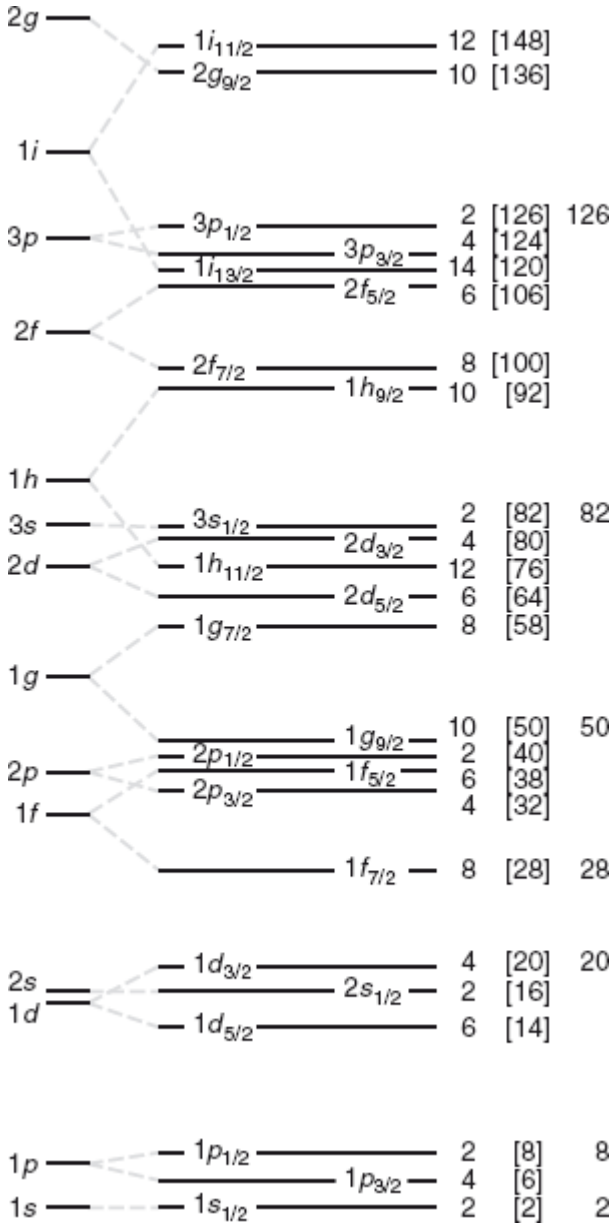


FIGURA 11-35 Níveis de energia de uma partícula em um poço nuclear, incluindo o desdobramento spin-órbita. O número de estados em cada nível aparece à direita, seguido pelo número total de estados com energia menor ou igual à do nível correspondente. Os números totais que precedem uma grande distância entre níveis são os números mágicos. O espaçamento mostrado na figura é para o caso dos prótons; como os nêutrons não estão sujeitos à repulsão eletrostática, o espaçamento é ligeiramente diferente (menor).

11-7 Reações Nucleares

Quando uma partícula se choca com um núcleo, várias coisas diferentes podem acontecer. A partícula pode ser espalhada elástica ou inelasticamente (no segundo caso, o núcleo é promovido para um estado excitado e decai para o estado fundamental emitindo fótons ou outras partículas); a partícula pode ser absorvida; uma ou mais partículas podem ser emitidas.

A Figura 11-39 mostra, de forma esquemática, os vários estágios possíveis de uma reação nuclear. O *espalhamento elástico* acontece quando a partícula incidente é refletida na borda do poço de potencial do núcleo. Este é o tipo de espalhamento que foi discutido na Seção 4-2. Quando a partícula incidente interage com um único núcleon e o núcleon é arrancado do núcleo, a reação é conhecida como *interação direta*. As interações diretas são mais prováveis em altas energias, já que, nesse caso, a partícula incidente penetra mais profundamente no núcleo. Quando o núcleon não é arrancado do núcleo, mas interage com vários outros núcleons, estados excitados complexos podem ser formados. Se a energia da partícula incidente é compartilhada por muitos núcleons, o núcleo excitado recebe o nome de *núcleo composto*. O núcleo composto pode decair emitindo uma partícula igual à partícula incidente (o que também é considerado um caso de espalhamento) ou por emissão de uma ou mais partículas (incluindo fótons). Como no caso de um núcleo radioativo, o decaimento de um núcleo composto pode ser considerado um processo estatístico, independente do modo como o núcleo foi formado.

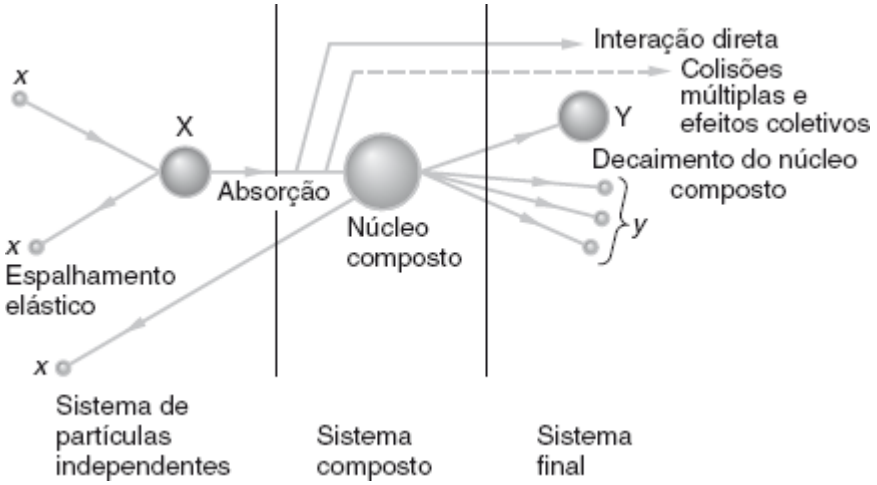


FIGURA 11-39 Representação esquemática dos vários estágios possíveis da reação X(x,y)Y, segundo a teoria proposta por V. Weisskopf e H. Feshbach.

Nesta seção, vamos examinar alguns métodos usados para estudar as reações nucleares e algumas reações típicas induzidas por nêutrons, prótons e dêuterons. Limitaremos a discussão a energias menores do que 140 MeV, já que energias mais elevadas muitas vezes levam à criação de mésons e outras partículas. O estudo de reações de alta energia, que, em geral, tem por objetivo investigar as propriedades das partículas elementares e não as propriedades do núcleo, será discutido no Capítulo 12.

Conservação da Energia

Considere uma reação na qual uma partícula x se choca com um núcleo X, produzindo um núcleo Y e uma partícula y. A reação pode ser escrita na forma

$$x + \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y} + y + Q$$

ou, de modo mais compacto, na forma X(x, y)Y. A grandeza Q, definida por meio da equação

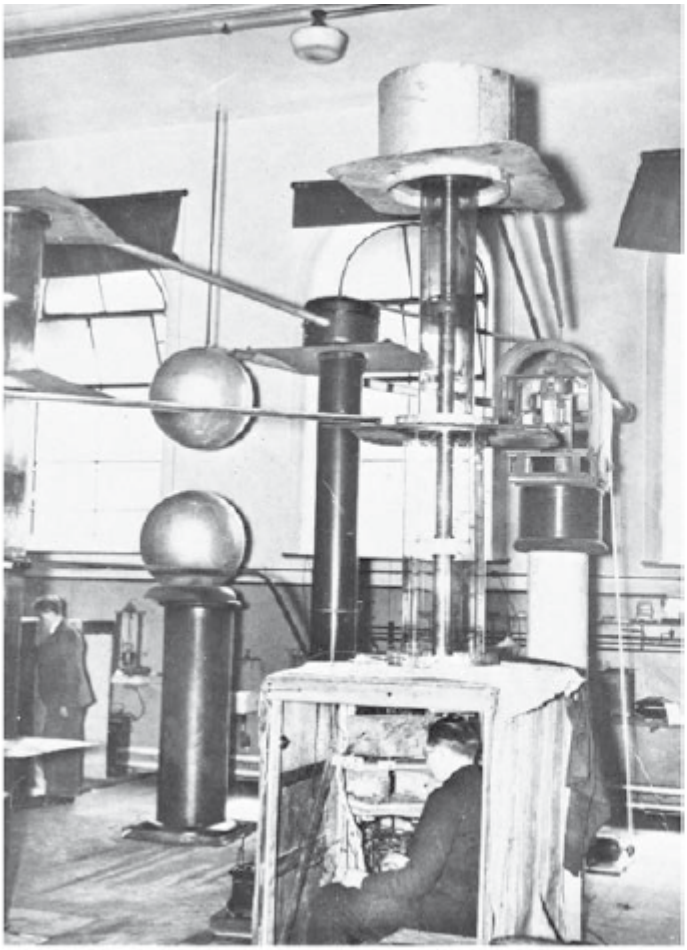
$$Q = (m_x + m_\mathrm{X} - m_y - m_\mathrm{Y})c^2 \qquad \textbf{11-58}$$

é a energia liberada na reação e é chamada de *valor de Q* da reação.

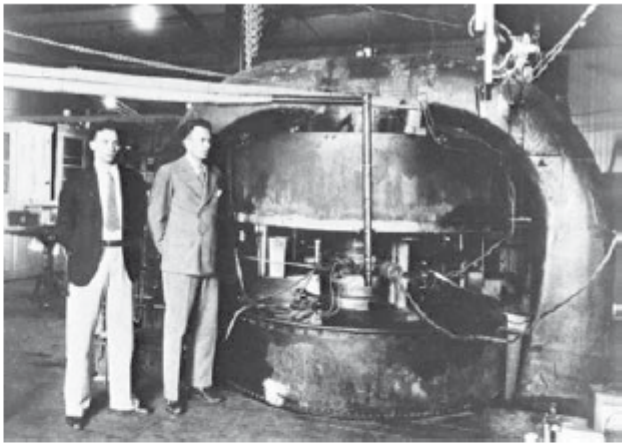
Se uma reação nuclear libera energia, dizemos que se trata de uma reação *exotérmica*. Nas reações exotérmicas, a soma das massas das partículas iniciais é maior que a soma das massas das partículas finais e o valor de Q é positivo. Se a soma das massas das partículas iniciais é menor que a soma das massas das partículas finais, o valor de Q é negativo; neste caso, dizemos que se trata de uma reação *endotérmica*.

Eis dois exemplos:

$$n + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^2\mathrm{H} + \gamma + 2{,}22\ \mathrm{MeV} \quad (\text{exotérmica})$$
$$\gamma + {}^2\mathrm{H} \rightarrow {}^1\mathrm{H} + n - 2{,}22\ \mathrm{MeV} \quad (\text{endotérmica})$$

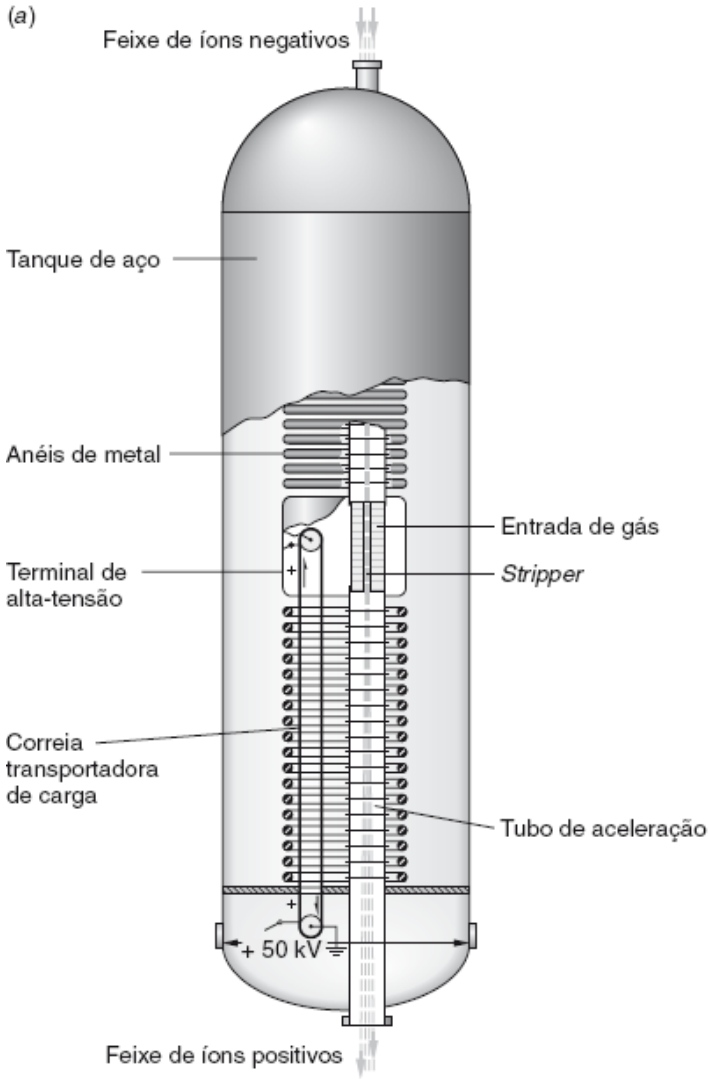


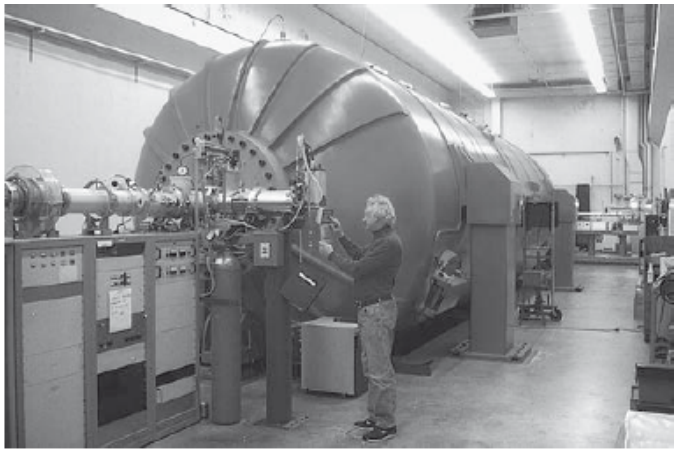
(*a*)



(*b*)

(*a*) O acelerador de Cockcroft-Walton. A pessoa sentada no compartimento blindado em primeiro plano é Walton. Em 1932, J. D. Cockcroft e E. T. S. Walton produziram a primeira transmutação de núcleos com partículas aceleradas artificialmente; por este trabalho, receberam o Prêmio Nobel de Física de 1951. (*b*) M. S. Livingston e E. O. Lawrence ao lado do cíclotron de 27 polegadas construído por eles em 1934. Lawrence recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1939 pela invenção do cíclotron. [(*a*) *Cortesia do Cavendish Laboratory*. (*b*) *Cortesia do Lawrence Radiation Laboratory*, *University of California*, *Berkeley*.]





(*a*) Diagrama esquemático de um acelerador Van de Graaff de dois estágios. Íons negativos no potencial da terra (os átomos de muitos elementos formam íons negativos estáveis) entram no aparelho pela parte de cima e são acelerados em direção ao terminal positivo de alta-tensão localizado no centro, adquirindo uma energia cinética igual a eV. No *stripper*, os íons perdem elétrons em colisões com moléculas de gás, transformando-se em íons positivos com cargas até +Ze. Os íons positivos são acelerados de volta para o potencial da terra, adquirindo uma energia cinética adicional que pode chegar a ZeV. Nos aceleradores Van de Graaff de grande porte, a tensão V ultrapassa 16 milhões de volts. Nesse caso, átomos de oxigênio multiplamente ionizados podem adquirir uma energia de mais de 100 MeV. (*b*) Parte do acelerador Van de Graaff de dois estágios da Purdue University. O terminal de alta-tensão está na parte central do tanque, isolado do resto do aparelho por um gás inerte sob pressão. Depois de saírem do acelerador, os íons são dirigidos para o alvo por ímãs defletores. O acelerador de Purdue é muito usado em experimentos de espectrometria de massa com acelerador (veja a Seção 11-9). [*Cortesia de David Elmore, Purdue University.*]

Para que uma reação endotérmica aconteça, é preciso que uma certa energia mínima seja fornecida ao sistema. No referencial em que o momento total é nulo (o referencial do centro de massa), a energia mínima é igual a $|Q|$. Entretanto, muitas reações ocorrem com o núcleo X em repouso em relação ao laboratório. Neste referencial, conhecido como *referencial do laboratório*, a partícula incidente x deve ter uma energia maior que $|Q|$ porque, de acordo com a lei de conservação do momento, a energia cinética de y e Y não pode ser nula. Considere o caso não relativístico em que uma partícula x de massa m se choca com um núcleo X de massa M (Figura 11-40). No referencial do centro de massa, as duas partículas possuem momentos iguais e opostos e a energia cinética total é dada por

$$E_{\text{CM}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{p^2}{2M} = \frac{1}{2}p^2\left(\frac{m+M}{mM}\right) \qquad \textbf{11-59}$$

em que $p = mv = MV$. Para passar para o referencial do laboratório, somamos às velocidades do núcleo e da partícula uma velocidade V tal que M fique em repouso; nesse caso, a velocidade de m muda para $v + V$. O momento de m no referencial do laboratório é dado por

$$p_{\text{lab}} = m(v + V) = mv\left(1 + \frac{m}{M}\right) = p\left(\frac{m + M}{M}\right)$$

e a energia é dada por

$$E_{\text{lab}} = \frac{p_{\text{lab}}^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}\left(\frac{m + M}{M}\right)^2 = \frac{m + M}{M}E_{\text{CM}} \quad \textbf{11-60}$$

A energia mínima no referencial do laboratório para que ocorra uma reação endotérmica é, portanto,

$$E_{\text{mim}} = \frac{m + M}{M}|Q| \qquad \textbf{11-61}$$

(Nas Equações 11-59 e 11-60, $p = h\nu/c$ se a partícula incidente for um fóton. Se a velocidade da partícula incidente não for muito menor que a velocidade da luz, devem ser usadas expressões relativísticas para a energia e o momento.)

EXEMPLO 11-16 **Valor de *Q* de uma Reação Nuclear** Determine o valor de Q da reação

$$p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^4\text{He} + {}^4\text{He}$$

e verifique se a reação é exotérmica ou endotérmica. A massa atômica do ^{7}Li é 7,016003 u.

SOLUÇÃO

De acordo com o Apêndice A, a massa do ^{1}H é 1,007825 u e a massa do ^{4}He é 4,002602; assim, a massa total das partículas iniciais é

$$m_i = 1{,}007825\ \text{u} + 7{,}016003\ \text{u} = 8{,}023828\ \text{u}$$

e a massa total das partículas finais é

$$m_f = 2(4{,}002602\ \text{u}) = 8{,}005204\ \text{u}$$

A diferença entre a massa inicial e a massa final é

$$\Delta m = m_i - m_f = 8{,}023828\ \text{u} - 8{,}005204\ \text{u} = 0{,}018624\ \text{u}$$

Como a diferença é positiva, parte da massa inicial é convertida em energia e a reação é exotérmica. O valor de Q é positivo e dado por

$$Q = (\Delta m)c^2 = (0{,}018624\ \text{u})c^2(931{,}5\ \text{MeV/u}\cdot c^2) = \\ = 17{,}35\ \text{MeV}$$

Observe que usamos a massa do átomo de hidrogênio em lugar da massa do próton e as massas dos átomos de ^{7}Li e ^{4}He em lugar das massas dos núcleos correspondentes, mas as massas dos quatro elétrons estão presentes nos dois lados da reação e se cancelam.

EXEMPLO 11-17 **Energia Mínima no Referencial do Laboratório** Determine a energia mínima que um próton deve ter para produzir a reação endotérmica ^{13}C(p,n)^{13}N ao incidir em um núcleo de ^{13}C em repouso no referencial do laboratório.

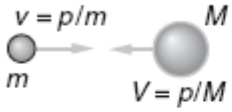
SOLUÇÃO

1. A energia mínima do próton incidente, no referencial do laboratório, é dada pela Equação 11-61:

$$E_{\text{min}} = \frac{m + M}{M}|Q|$$

2. O módulo do valor de Q da reação é dado por:

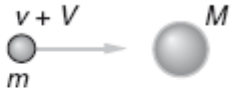
$$\frac{|Q|}{c^2} = m_{\text{final}} - m_{\text{inicial}} \\ = [M(^{13}\text{N}) + m_n] - [M(^{13}\text{C}) + M(^1\text{H})]$$



Referencial do centro de massa

$p = mv = MV$

$E_{CM} = p^2/2m + p^2/2M = (m + M)p^2/2mM$



Referencial do laboratório

$$p_{lab} = m(v + V) = mv(1 + m/M) = \frac{M + m}{M}p$$

$$E_{lab} = \frac{p_L^2}{2m} = \left(\frac{p^2}{2m}\right)\left(\frac{M + m}{M}\right)^2 = \frac{M + m}{M}E_{CM}$$

FIGURA 11-40 Energia de uma reação nuclear no referencial do centro de massa e no referencial do laboratório.

3. As massas das partículas envolvidas aparecem no Apêndice A:

$$M(^{13}\text{C}) = 13{,}003355\ \text{u} \quad M(^{1}\text{H}) = 1{,}007825\ \text{u}$$
$$M(^{13}\text{N}) = 13{,}005738\ \text{u} \quad m_n = 1{,}008665\ \text{u}$$

4. Substituindo esses valores na equação do item 2, temos:

$$\begin{aligned} |Q| &= (14{,}014403 - 14{,}011180)\ \text{u} \cdot c^2 \\ &= 0{,}003223\ \text{u} \cdot c^2 \times 931{,}5\ \text{MeV/u} \cdot c^2 \\ &= 3{,}00\ \text{MeV} \end{aligned}$$

5. Substituindo estes valores na equação do item 1, temos:

$$\begin{aligned} E_{\text{min}} &= \frac{1{,}007825 + 13{,}003355}{13{,}003355} \times 3{,}00 \\ &= 3{,}23\ \text{MeV} \end{aligned}$$

Seção de Choque

A probabilidade de que uma partícula incidente em um núcleo seja espalhada ou induza uma reação depende da energia da partícula e do tipo de partícula e de núcleo envolvidos na reação. É como se, ao se aproximarem de um dado núcleo, diferentes tipos de partículas ou partículas do mesmo tipo, mas com energias diferentes, "enxergassem" alvos de tamanhos diferentes. Este efeito é consequência do fato de que os níveis de energia do núcleo são discretos. Um parâmetro muito usado para medir o tamanho efetivo de um núcleo em um dado processo de espalhamento ou reação nuclear é a *seção de choque*, representada pelo símbolo σ. Se I é o número de partículas incidentes por unidade de tempo e por unidade de área (ou seja, a intensidade incidente) e R é o número de reações por unidade de tempo e por núcleo, a seção de choque é definida por meio da equação

$$\sigma = \frac{R}{I} \qquad \textbf{11-62}$$

Considere, por exemplo, o bombardeio do ^{13}C por prótons. Várias reações podem ocorrer. O espalhamento elástico pode ser representado pela reação $^{13}C(p, p)^{13}C$; o primeiro p indica o próton incidente; e o segundo mostra que a partícula que deixa o local do choque também é um próton. Quando o espalhamento é inelástico, o segundo próton é indicado como p' e o núcleo excitado que resulta do choque como $^{13}C^*$, de modo que a reação se torna $^{13}C(p, p')^{13}C^*$. Eis algumas outras reações possíveis:

$$(p,n) \quad {}^{13}\mathrm{C}(p,n)^{13}\mathrm{N}$$
$$\text{captura} \quad {}^{13}\mathrm{C}(p,\gamma)^{14}\mathrm{N}$$
$$(p,\alpha) \quad {}^{13}\mathrm{C}(p,\alpha)^{10}\mathrm{B}$$

Nos casos em que vários espalhamentos ou reações são possíveis, cada espalhamento ou reação tem a sua seção de choque conhecida como *seção de choque parcial*. A seção de choque parcial também é definida pela Equação 11-62, com R igual ao número de eventos do tipo considerado por unidade de tempo e por núcleo. A seção de choque total é igual à soma das seções de choque parciais:

$$\sigma = \sigma_{p,p} + \sigma_{p,p'} + \sigma_{p,n} + \sigma_{p,\gamma} + \sigma_{p,\alpha} + \cdots$$

As seções de choque têm dimensão de área. Como as seções de choque nucleares são da ordem do quadrado do raio do núcleo (10^{-14} m^2), uma unidade conveniente para medir seções de choque é o *barn*, definido da seguinte forma:

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2 \qquad \textbf{11-63}$$

A seção de choque de uma reação depende da energia. No caso das reações endotérmicas, a seção de choque é zero para energias menores que a energia mínima.

Núcleos Compostos

Em 1936, Niels Bohr observou que muitas reações nucleares de baixa energia podem ser descritas como um processo de dois estágios: a formação de um núcleo composto e o decaimento desse núcleo. No modelo proposto por Bohr, a partícula incidente é absorvida pelo núcleo original e sua energia é compartilhada por todos os núcleons do núcleo composto. Depois de um intervalo de tempo muito maior que o tempo necessário para a partícula incidente atravessar o núcleo, uma parcela significativa da energia de excitação do núcleo composto se concentra em um único núcleon, fazendo-o escapar. Nessas circunstâncias, a emissão do núcleon é um processo estatístico, que não depende da forma como o núcleo composto foi formado. Um próton incidente de 1 MeV tem uma velocidade de 10^7 m/s, e, portanto, leva um tempo da ordem de $R/v \approx 10^{-14}/10^7 = 10^{-21}$ s para atravessar o núcleo, enquanto o tempo de vida de um núcleo composto é da ordem de 10^{-16} s. Esse tempo é tão longo em comparação com 10^{-21} s que é razoável supor que o decaimento não depende do modo como o núcleo composto foi formado.

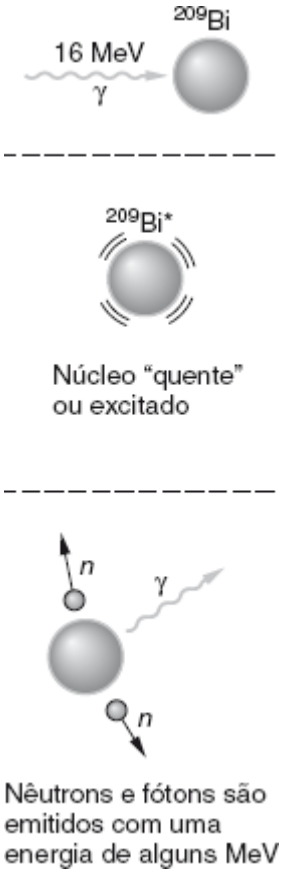


FIGURA 11-41 Reação nuclear com a formação de um núcleo composto. O fóton de 16 MeV é absorvido por um núcleo de ^{209}Bi, produzindo um núcleo excitado que sobrevive por um tempo suficiente para que a energia de excitação seja compartilhada por muitos núcleons. Em seguida, o núcleo excitado decai, emitindo nêutrons e fótons com energias da ordem de alguns MeV.

No caso da reação de um próton com o ^{13}C, já mencionada, o núcleo composto é o ^{14}N*, que pode ser formado por muitas outras reações, como, por exemplo,

$$\begin{aligned} {}^{10}\mathrm{B} + \alpha &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N}^* \rightarrow {}^{12}\mathrm{C} + d \\ {}^{13}\mathrm{N} + n &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N}^* \rightarrow {}^{10}\mathrm{B} + \alpha \\ {}^{14}\mathrm{N} + \gamma &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N}^* \rightarrow {}^{14}\mathrm{N} + \gamma \\ {}^{12}\mathrm{C} + d &\rightarrow {}^{14}\mathrm{N}^* \rightarrow {}^{13}\mathrm{N} + n \end{aligned} \qquad \textbf{11-64}$$

As reações da esquerda são conhecidas como *canais de entrada* e os decaimentos da direita como *canais de saída*.

Como o decaimento do ^{14}N* não depende do modo de formação, podemos escrever a seção de choque para uma reação como ^{13}C(p,n)^{13}N como o produto da seção de choque para a formação do núcleo composto, σ_c, pela probabilidade relativa de decaimento por emissão de um nêutron, P_n:

$$\sigma_{p,n} = \sigma_c P_n \qquad \textbf{11-65}$$

A distribuição de energia dos nêutrons emitidos pelo ^{209}Bi na reação abaixo ilustra o comportamento dos núcleos compostos (veja a Figura 11-41).

$$\gamma + {}^{209}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{208}\mathrm{Bi} + n$$

A seção de choque σ para esta reação apresenta um pico relativamente largo entre 14 e 20 MeV e o nêutron "evapora" quando o ^{209}Bi decai para o estado fundamental.

Estados Excitados dos Núcleos

Os estados excitados de um núcleo podem ser determinados de duas formas a partir de reações nucleares. Um pico no gráfico da seção de choque em função da energia indica um estado excitado do núcleo composto, já que a presença desse pico é sinal de

que existe uma probabilidade relativamente alta de que toda a energia da partícula incidente seja usada para promover o núcleo a um nível permitido de maior energia (o fenômeno é análogo ao que ocorre no experimento de Franck-Hertz, discutido na Seção 4-5). Informações a respeito dos tempos de vida dos estados excitados do núcleo composto podem ser obtidas medindo a largura Γ desses picos, ou *ressonâncias*, e usando a relação de indeterminação $\tau\Gamma \approx \hbar$. A Figura 11-42 mostra a seção de choque para a formação de ^{14}N através da reação $^{10}\text{B} + \alpha \rightarrow {}^{14}\text{N}^*$ em função da energia da partícula α. Os picos da curva indicam níveis de energia do núcleo de ^{14}N. O valor de Q para esta reação é $M(^{10}\text{B})c^2 + M(\alpha)c^2 - M(^{14}\text{N})c^2 = 11{,}61$ MeV; assim, o núcleo de ^{14}N é gerado em um estado excitado com uma energia de 11,61 MeV mais um valor que depende da energia cinética da partícula α. Como valor de Q é igual à energia de ligação da partícula incidente no núcleo composto, que é sempre da ordem de 6 a 10 MeV, os núcleos compostos são gerados em estados excitados pelo menos 6 MeV acima do estado fundamental; estados excitados com energia menor que aproximadamente 6 MeV não podem ser estudados por este método.

A energia cinética da partícula α no referencial do centro de massa está relacionada à energia cinética no referencial do laboratório através da equação

$$E_{\text{CM}} = \frac{M}{M+m}E_{\text{lab}} = \frac{10}{14}E_{\text{lab}}$$

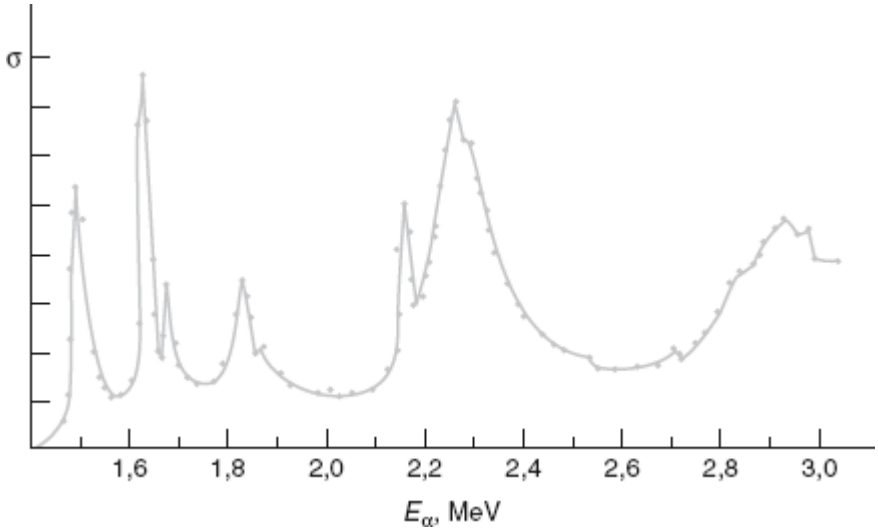


FIGURA 11-42 Seção de choque para a reação $^{10}\text{B} + \alpha \rightarrow {}^{14}\text{N}^*$ em função da energia cinética da partícula α. As ressonâncias estão associadas aos níveis de energia do núcleo composto ^{14}N*.

O pico da Figura 11-42 em $E_{\text{lab}} = 1{,}63$ MeV corresponde a um estado excitado do ^{14}N com uma energia $E = 11{,}61 + (10/14)(1{,}63) = 12{,}77$ MeV. O mesmo estado excitado pode ser criado pela reação $^{12}\text{C} + {}^{2}\text{H} \rightarrow {}^{14}\text{N}^*$. Nesse caso, o valor de Q é 10,26 MeV. Assim, a energia do dêuteron no referencial do laboratório deve ser

$$E_d = \left(\frac{14}{12}\right)(12{,}77 - 10{,}26) = 2{,}93\ \text{MeV}$$

Uma segunda forma de determinar os níveis de energia de um núcleo se baseia na análise das energias de partículas espalhadas inelasticamente. Nesse caso, os níveis de energia do núcleo são determinados diretamente. A Figura 11-43 mostra o espectro de energia dos prótons resultantes da reação $p + {}^{14}\text{N} \rightarrow {}^{14}\text{N}^* + p'$, usando prótons incidentes com uma energia de 6,92 MeV. (A escala horizontal da figura está em unidades de momento dos prótons espalhados, que é a grandeza medida experimentalmente.) Os picos da curva correspondem a perdas de energia de 2,31 e 3,75 MeV, o que mostra que o ^{14}N possui níveis excitados 2,31 e 3,75 MeV acima do estado fundamental. O núcleo excitado volta ao estado fundamental por emissão γ. O método do espalhamento inelástico permite observar estados excitados relativamente próximos do estado fundamental, enquanto os níveis excitados do núcleo composto estão mais distantes do estado fundamental por causa da energia associada à formação do núcleo composto.

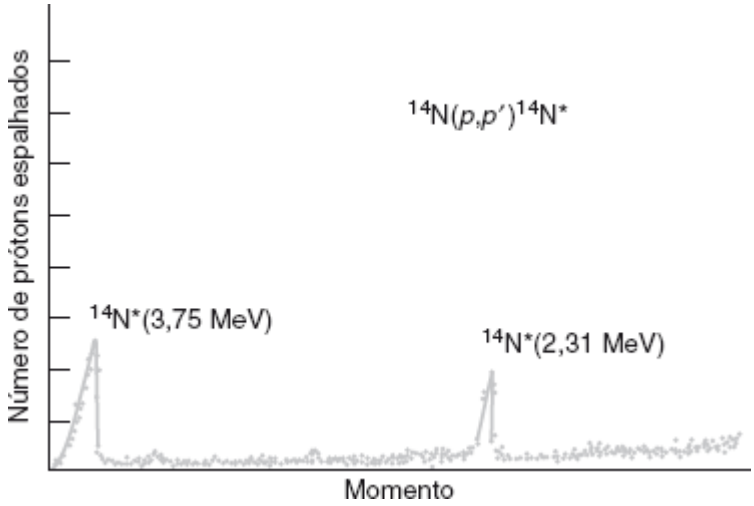


FIGURA 11-43 Espectro dos prótons espalhados por núcleos de ^{14}N na reação $p + {}^{14}N \rightarrow {}^{14}N^* + p'$. Os níveis de energia do ^{14}N estão indicados no gráfico.

Reações com Nêutrons

Os nêutrons são usados para dopar o silício com fósforo mais uniformemente do que pelo método tradicional de difusão. A irradiação do silício com nêutrons produz fósforo através de uma reação seguida por um decaimento: $n + {}^{30}Si \rightarrow {}^{31}Si \rightarrow {}^{31}P + \beta^- + \bar{\nu}$. Os retificadores fabricados com silício dopado desta forma podem operar com potências maiores que os retificadores feitos com silício dopado por difusão.

O estudo das reações nucleares que envolvem nêutrons é importante por várias razões, entre elas o desenvolvimento de novas técnicas analíticas, como a análise por ativação neutrônica, e melhor compreensão do funcionamento dos reatores nucleares. A reação mais provável entre um nêutron com uma energia maior que 1 MeV e um núcleo é o espalhamento. Mesmo que o espalhamento seja elástico, o nêutron perde parte da energia para o núcleo porque, de acordo com a lei de conservação do momento, o núcleo sofre um recuo após o choque. Quando um nêutron é espalhado muitas vezes em um material, a energia diminui até se tornar da mesma ordem que a energia térmica kT, em que k é a constante de Boltzmann e T a temperatura absoluta. (O valor de kT à temperatura ambiente é 0,025 eV.) Os nêutrons com energia da ordem de kT são conhecidos como *nêutrons térmicos*. Quando um nêutron térmico sofre espalhamento elástico, as probabilidades de que ganhe ou perca energia na colisão são iguais.

Quando um nêutron de baixa energia se choca com um núcleo, a reação mais provável é a captura, seguida pela emissão de um raio γ pelo núcleo excitado:

$$n + {}^{A}_{Z}M \rightarrow {}^{A+1}_{Z}M + \gamma$$

Por exemplo:

$$n + {}^{107}_{47}Ag \rightarrow {}^{108}_{47}Ag + \gamma$$

Como a energia de ligação de um nêutron é da ordem de 6 a 10 MeV, muito maior que a energia cinética do nêutron, a energia de excitação do núcleo composto também é da ordem de 6 a 10 MeV; esta energia é liberada na forma de raios γ. A Figura 11-44 mostra a seção de choque para captura de nêutrons por uma amostra de prata em função da energia dos nêutrons. A não ser pelas ressonâncias, a seção de choque $\sigma(n,\gamma)$ diminui quando a energia cinética dos nêutrons aumenta. Essa variação é aproximadamente proporcional a $1/v$, onde v é a velocidade dos nêutrons; isso se deve ao fato de que a seção de choque é proporcional ao tempo que um nêutron passa nas proximidades do núcleo, que, por sua vez, é proporcional a $1/v$. A variação da seção de choque com $1/v$ está representada por uma linha tracejada na Figura 11-44.[22] No pico de ressonância maior, o valor da seção de choque é muito grande ($\sigma > 5000$ barns) em comparação com o valor perto da ressonância, que é apenas 10 barns. Ressonâncias semelhantes na seção de choque para captura de nêutrons podem ser observadas em muitos nuclídeos. A seção de choque do ^{113}Cd, por exemplo, apresenta um pico de 57.000 barns. Isto significa que o ^{113}Cd absorve muitos nêutrons, o que o torna um excelente material para blindagens de proteção contra nêutrons de baixa energia e para barras de controle de reatores nucleares (veja a Seção 12-2).[23]

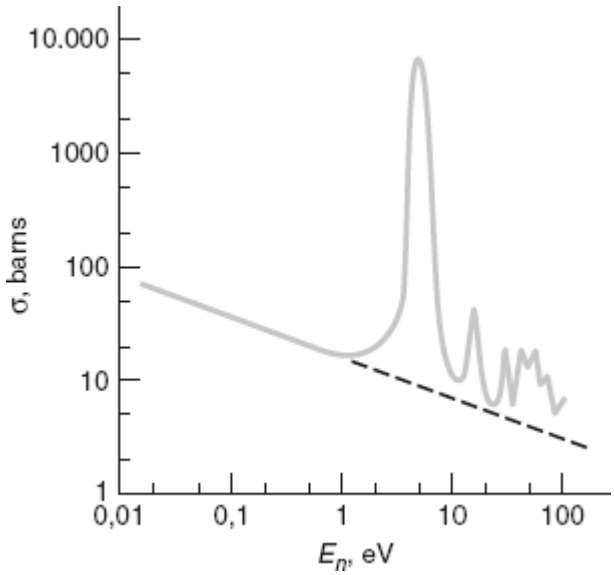


FIGURA 11-44 Seção de choque para captura de nêutrons por uma amostra de prata em função da energia cinética dos nêutrons. A reta tracejada mostra o comportamento esperado se não houvesse ressonâncias e se a seção reta fosse simplesmente proporcional ao tempo que o nêutron passa nas proximidades do núcleo, ou seja, proporcional a $1/v$. A largura das ressonâncias é da ordem de alguns elétrons-volts, o que indica que o tempo de vida dos estados correspondentes é da ordem de $h/\Gamma \times 10^{-16}$ s.

Exercícios

13. O que significa seção de choque de uma reação nuclear?

14. Por que a seção de choque para captura de nêutrons (a não ser pelas ressonâncias) é proporcional a $1/v$?

15. O que significa o valor de Q de uma reação? Por que a energia mínima para que uma reação ocorra não é igual a Q?

16. Por que os níveis excitados de baixa energia (1 a 2 MeV acima do estado fundamental) não podem ser estudados por captura de nêutrons?

EXEMPLO 11-18 **Determinação de uma Taxa de Reação** A seção de choque para a reação $^{91}Zr(n,\gamma)^{92}Zr$ é 900 milibarns para nêutrons térmicos. A reação é produzida na chamada coluna térmica de um reator, onde o *fluxo* de nêutrons térmicos é $6,5 \times 10^{12}$ nêutrons/cm^2·s. A amostra de Zr natural é uma folha circular com 1,0 cm de diâmetro e 20,0 μm de espessura. A massa específica do Zr é 6,506 g/cm^3 e o ^{91}Zr constitui 11,27% do Zr natural. Calcule a taxa da reação.

SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, precisamos calcular o número de átomos de ^{91}Zr na amostra. Este número é dado por

$$N(^{91}\text{Zr}) = \frac{N_A V \rho_{Zr}}{M_{Zr}} \times 0,1127$$

em que $V = \pi r^2 h = \pi \times (0,5)^2 \times 2,00 \times 10^{-3}$ cm^3 é o volume da amostra e $M_{Zr} = 91,22$ g/mol é a massa molecular do Zr. Assim,

$$N(^{91}\text{Zr}) = \frac{(6,02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})(\pi \times 0,5 \times 10^{-3} \text{ cm}^3)(6,506)(0,1127)}{91,22 \text{ g/mol}}$$

$$N(^{91}\text{Zr}) = 7,6 \times 10^{18} \text{ átomos}$$

De acordo com a definição de seção de choque (Equação 11-62), o número de reações (n, γ) por unidade de tempo e por núcleo de ^{91}Zr é dado por

$R = \sigma I = (900 \times 10^{-3} \text{ barns} \times 10^{-24} \text{ cm}^2/\text{barn}) \times 6,5 \times 10^{12}$ nêutrons/cm^2·s

$R = 5,9 \times 10^{-12}$ s^{-1} por núcleo de ^{91}Zr

A taxa $\mathcal{R}$ da reação $^{91}Zr(n, \gamma)^{92}Zr$ é, portanto,

$\mathcal{R} = N(^{91}Zr)R = (7,6 \times 10^{18}$ núcleos de $^{91}Zr)(5,9 \times 10^{-12}$ s^{-1} por núcleo de $^{91}Zr)$

$\mathcal{R} = 4,5 \times 10^7$ s^{-1}

Observação: *Esta taxa relativamente baixa, mesmo para um alto fluxo de nêutrons, que também é observada para os outros isótopos naturais do Zr, se deve à pequena seção de choque e é a razão pela qual os invólucros dos elementos combustíveis dos reatores nucleares são feitos com ligas de zircônio.*

11-8 Fissão e Fusão

Duas reações nucleares, a fissão e a fusão, são particularmente importantes. Na fissão do ^{235}U, por exemplo, o núcleo de urânio é excitado pela captura de um nêutron e se divide em dois núcleos, cada um com aproximadamente metade da massa original. Uma reação típica de fissão é a seguinte:

$$^{235}U + n \rightarrow {}^{92}Kr + {}^{142}Ba + 2n + 179{,}4\ \text{MeV} \quad \textbf{11-66}$$

A força de repulsão eletrostática faz com que os fragmentos sejam arremessados em direções opostas com energia cinética elevada. Colisões com outros átomos transformam subsequentemente essa energia em energia térmica.

Na fusão, dois núcleos leves, como os de deutério e trítio (^2H e ^3H), se fundem para formar um núcleo pesado (neste caso, ^4He mais um nêutron). Uma reação típica é a seguinte:

$$^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He + n + 17{,}6\ \text{MeV} \qquad \textbf{11-67}$$

A Figura 11-45 mostra um gráfico da diferença de massa por núcleon $(M - Zm_p - Nm_n)/A$ em função de A, em unidades de MeV/c^2. A curva é o negativo da curva de energia de ligação da Figura 11-10. De acordo com a Figura 11-45, tanto para nuclídeos muito pesados ($A \approx 200$) como para nuclídeos muito leves ($A \leq 20$), a energia de repouso por partícula é maior que para nuclídeos de massa intermediária. Assim, tanto na fissão como na fusão, a massa total diminui e uma certa quantidade de energia é liberada. Como, para $A = 200$, a energia de repouso é cerca de 1 MeV por núcleon maior que para $A = 100$, a fissão de um núcleo pesado libera uma energia de aproximadamente 200 MeV. A energia liberada na fusão depende da reação. No caso da reação $^2H + {}^3H$ da Equação 11-67, são liberados 17,6 MeV. Embora, neste caso, a energia liberada por núcleo seja menor que em uma fissão típica, a energia liberada por unidade de massa pode ser maior, como mostra o Exemplo 11-19. Nesta seção, vamos examinar alguns aspectos da fissão e da fusão que são importantes para o uso desses processos na geração de energia elétrica.

EXEMPLO 11-19 **Energia Liberada na Fissão e na Fusão** Compare a energia liberada por unidade de massa na fusão de deutério e trítio (Equação 11-67) com a energia liberada em uma reação típica de fissão, como a do ^{235}U, dada pela Equação 11-66.

SOLUÇÃO

(*a*) Para fazer uma comparação rápida, baseada em uma aproximação grosseira, basta notar que a diferença de energia por núcleon entre o ^{235}U e os produtos de fissão é aproximadamente 1,0 MeV. Na fusão de ^2H e ^3H, a diferença de energia por núcleon é 17,6 MeV/5 = 3,5, ou seja, 3,5 vezes maior. Isso significa que a energia liberada por quilograma é aproximadamente 3,5 vezes maior no caso da fusão.

(*b*) Para uma comparação mais precisa, as diferenças de massa por núcleon para o ^{235}U e para os dois produtos da fissão da Equação 11-66 podem ser estimadas na Figura 11-45 ou calculadas com o auxílio da Equação 11-12 e os resultados usados para calcular as diferenças de massa dos núcleos envolvidos na reação:

$$^{235}U: -7{,}6\ \text{MeV}/c^2\ \text{por núcleon} \rightarrow -1797{,}1\ \text{MeV}/c^2\ \text{por núcleo}$$

$$^{92}Kr: -8{,}7\ \text{MeV}/c^2\ \text{por núcleon} \rightarrow -800{,}9\ \text{MeV}/c^2\ \text{por núcleo}$$

$$^{142}Ba: -8{,}4\ \text{MeV}/c^2\ \text{por núcleon} \rightarrow -1189{,}5\ \text{MeV}/c^2\ \text{por núcleo}$$

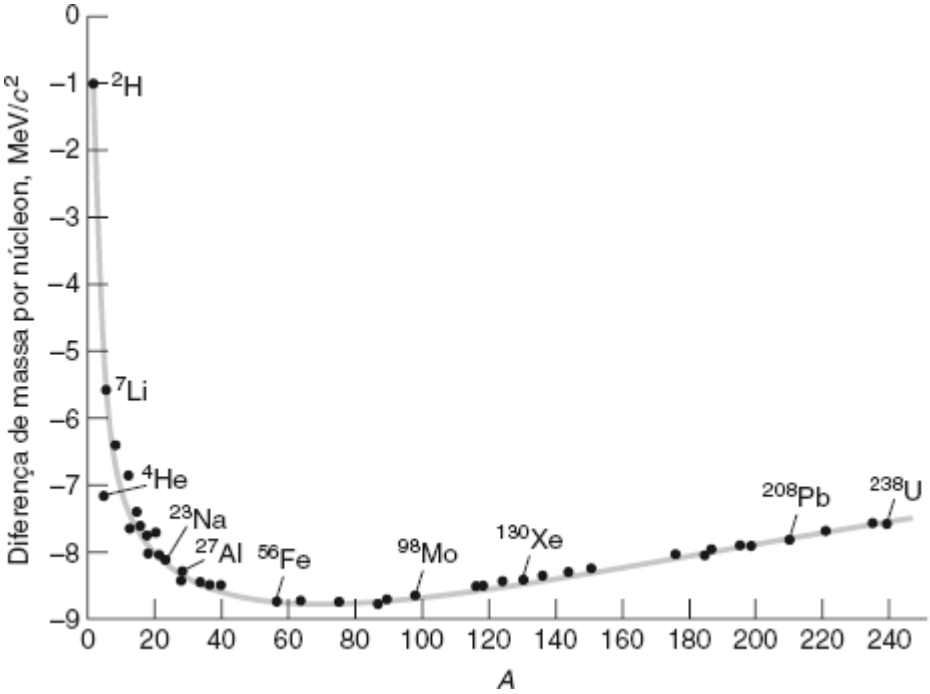


FIGURA 11-45 Gráfico da diferença de massa por núcleon $(M - Zm_p - Nm_n)/A$ em função de A. A energia de repouso por núcleon é menor para núcleos de massa intermediária do que para núcleos muito leves ou muito pesados.

A diferença entre a massa do ^{235}U e a soma das massas dos produtos de fissão é, portanto, 193,3 MeV/c^2. Assim, a energia liberada por fissão (no caso destes produtos em particular) é 193,3 MeV/c^2. A massa do ^{235}U (veja o Apêndice A) é 235,043924 u = 3,9030 × 10^{-25} kg. A energia liberada por unidade de massa na fissão do ^{235}U é, portanto,

$$\frac{\left(\frac{193{,}3\ \text{MeV}}{^{235}\text{U}}\right)}{\left(\frac{3{,}903 \times 10^{-25}\ \text{kg}}{^{235}\text{U}}\right)} = 4{,}95 \times 10^{26}\ \text{MeV/kg}$$

A energia liberada por unidade de massa na reação de fusão deutério/trítio é dada por

$$\frac{17{,}6\ \text{MeV}}{\text{M}_d + \text{M}_t} = \frac{17{,}6\ \text{MeV}}{8{,}353 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 2{,}11 \times 10^{27}\ \text{MeV/kg}$$

Assim, a reação de fusão libera 4,3 vezes mais energia por quilograma que a reação de fissão.

Fissão

A fissão do urânio foi descoberta em 1938 por O. Hahn e F. Strassmann,[24] ao observarem, por meio de análises químicas muito sensíveis, que elementos de massa intermediária (especialmente o bário) eram produzidos pelo bombardeio de urânio com nêutrons. A descoberta de que o processo de fissão envolve a liberação de vários nêutrons levou a especulações quanto à possibilidade de que esses nêutrons pudessem produzir novas fissões, dando origem a uma reação em cadeia. Quando o ^{235}U captura um nêutron térmico, existe uma probabilidade de 85% de que o núcleo de ^{236}U sofra um processo de fissão; nos outros 15% dos casos, o núcleo excitado se limita a emitir raios gama para voltar ao estado fundamental. O processo de fissão é análogo à oscilação de uma gota de líquido (Figura 11-46). Quando as oscilações são suficientemente intensas, a gota se divide em duas. Usando o modelo da gota de líquido, A. Bohr e J. Wheeler calcularam a energia crítica E_c necessária para que o núcleo de ^{236}U sofra fissão. (O ^{236}U é o núcleo composto formado pela captura de um nêutron pelo ^{235}U.) A energia crítica é igual à altura da barreira eletrostática encontrada pelos fragmentos (Figura 11-47). No caso do ^{236}U, essa energia é aproximadamente 6,2 MeV, menor que a energia de excitação, 6,5 MeV, produzida quando o ^{235}U captura um nêutron. A captura de um nêutron pelo ^{235}U produz, portanto, um estado excitado do ^{236}U que possui energia mais do que suficiente para dividi-lo em dois fragmentos. Por outro lado, a energia crítica para a fissão do ^{239}U é 5,9 MeV, mas a captura de um nêutron por um núcleo de ^{238}U produz uma energia de excitação de apenas 5,2 MeV. Assim, quando um nêutron térmico é capturado pelo ^{238}U para formar ^{239}U, a energia de excitação não é suficiente para que a fissão ocorra. Nesse caso, o núcleo excitado de ^{239}U volta ao estado fundamental emitindo raios gama ou uma partícula α. Os núcleos que podem se fissionar ao capturarem um nêutron lento

são conhecidos como *núcleos físseis*.

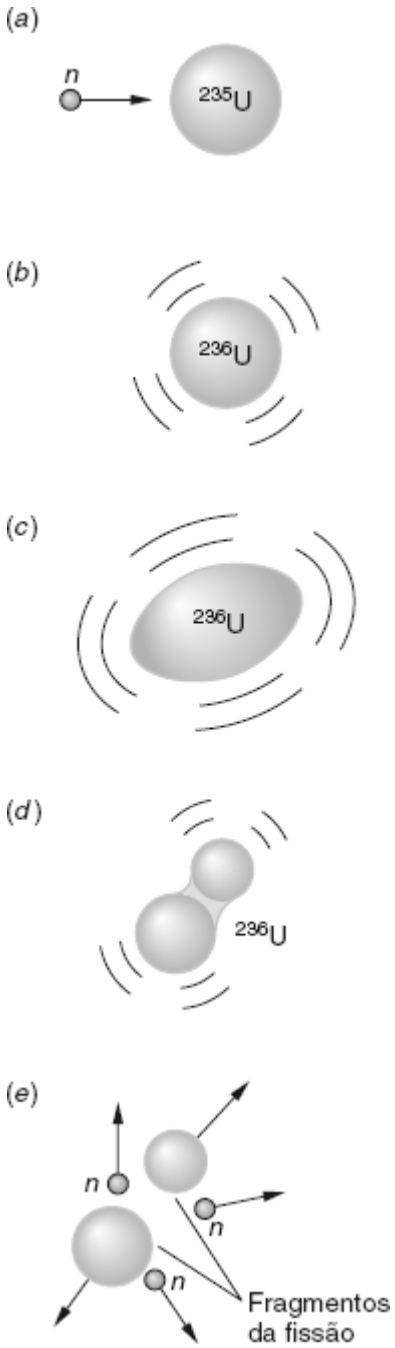


FIGURA 11-46 Ilustração esquemática da fissão nuclear. (*a*) A reação entre um nêutron e um núcleo de ^{235}U produz (*b*) um núcleo de ^{236}U em um estado excitado. (*c*) O núcleo de ^{236}U excitado sofre oscilações que o deformam. (*d*) As oscilações tornam o núcleo instável. (*e*) O núcleo se divide em dois núcleos de massa intermediária, além de emitir vários nêutrons, que podem produzir outras fissões.

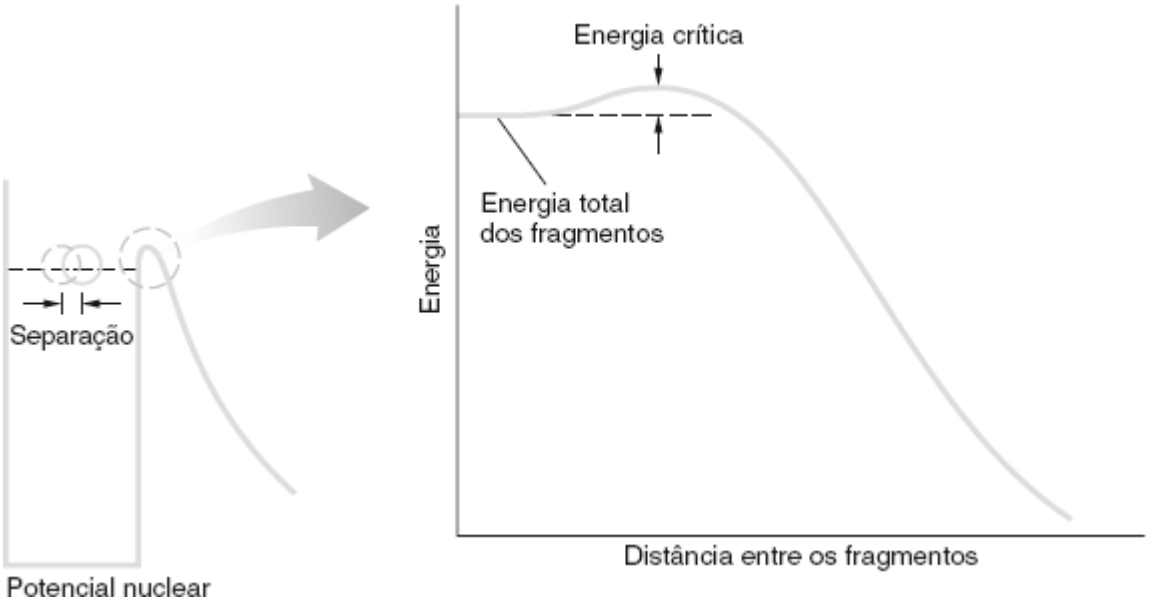


FIGURA 11-47 Um núcleo atômico pode se dividir espontaneamente em dois fragmentos, como na ilustração da esquerda; entretanto, a barreira eletrostática impede que os fragmentos se separem. Para que ocorra fissão, é preciso que o núcleo receba uma energia igual ou maior que uma certa energia crítica.

Como vimos na Seção 11-4, todos os núcleos com $Z > 82$ são radioativos. Entre os vários modos possíveis de decaimento dos núcleos muito pesados ($Z > 90$) está a fissão espontânea. Esses núcleos podem se dividir em dois fragmentos, mesmo que não absorvam um nêutron. Podemos compreender a fissão espontânea usando a analogia de uma gota de líquido com cargas positivas. Quando a gota não é muito grande, a tensão superficial é suficiente para manter a gota coesa, apesar das forças de repulsão que existem entre as cargas. Existe, porém, um tamanho máximo a partir do qual a gota se torna instável e se divide espontaneamente em duas, já que a força de repulsão é proporcional ao número de cargas, que por sua vez é proporcional ao volume e, portanto, ao cubo do raio da gota, enquanto a tensão superficial é proporcional à área da superfície e, portanto, ao quadrado do raio da gota (veja a Seção 11-2). A possibilidade de fissão espontânea estabelece um limite superior para o tamanho dos núcleos e, portanto, para o número de elementos da tabela periódica. É preciso observar que a probabilidade de fissão espontânea dos núcleos naturais é muito pequena em relação aos outros modos possíveis de decaimento. Assim, por exemplo, a meia-vida do ^{238}U para o decaimento α é $4{,}5 \times 10^9$ anos, enquanto a meia-vida para a fissão espontânea é 10^{16} anos. Isso acontece porque a fissão, como o decaimento α, é inibida pela barreira eletrostática, com a diferença de que a probabilidade de tunelamento dos fragmentos de fissão é muito menor, já que eles possuem cargas positivas muito maiores que uma partícula α.

O mesmo núcleo pode se fissionar de muitas formas diferentes, produzindo fragmentos de diferentes tamanhos (veja a Figura 11-48) e nêutrons isolados, cujo número varia de um a três, dependendo da reação. O número médio de nêutrons emitidos na fissão do ^{235}U induzida por nêutrons térmicos é 2,4. A Equação 11-66 representa uma reação típica de fissão. O motivo pelo qual são emitidos nêutrons é que os fragmentos de fissão contêm nêutrons em excesso, como mostra a Figura 11-49. Em consequência, alguns nêutrons são emitidos espontaneamente imediatamente após a fissão, e outros são convertidos em prótons por emissão β^-. A força de repulsão eletrostática faz com que os fragmentos sejam arremessados em direções opostas com energia cinética elevada; colisões com outros átomos transformam subsequentemente essa energia em energia térmica. Como vimos, a fissão libera uma energia de aproximadamente 200 MeV por núcleo. Trata-se de uma quantidade muito grande de energia. Em uma reação de combustão, por exemplo, apenas 4 eV são liberados por molécula de oxigênio consumida.

Os fragmentos de fissão e os produtos do decaimento desses fragmentos, que se acumulam nos reatores nucleares, constituem a fonte principal de muitos radioisótopos utilizados na medicina e na indústria. Um dos mais importantes é o ^{99}Mo, que se transforma em ^{99}Tc, o radioisótopo mais usado na medicina nuclear.

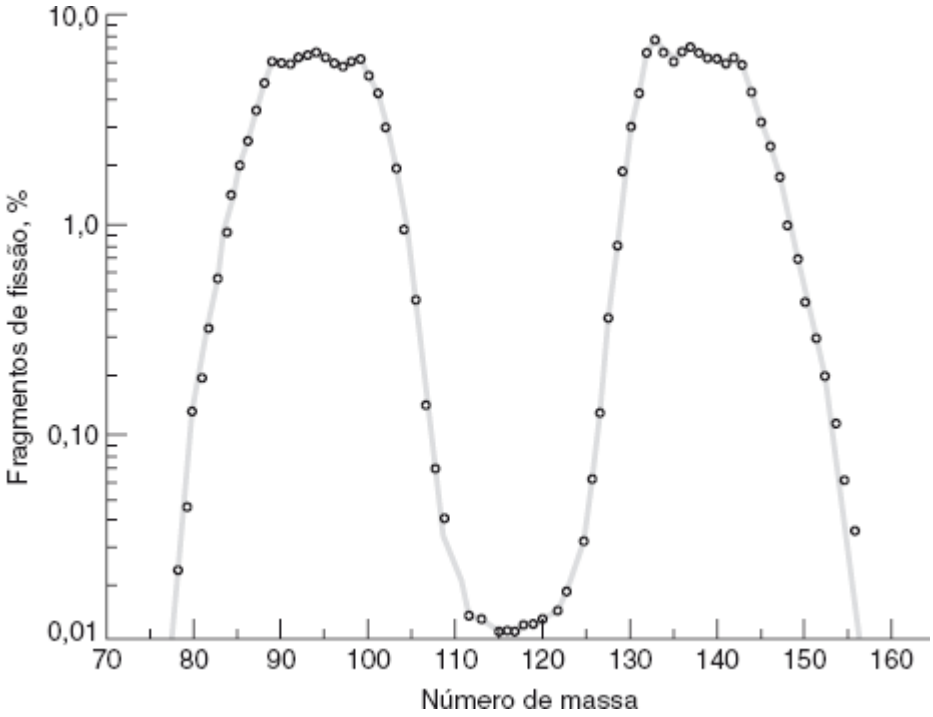


FIGURA 11-48 Distribuição dos fragmentos resultantes da fissão do ^{235}U por nêutrons térmicos. A fissão simétrica, na qual o núcleo de urânio se divide em dois núcleos de massas aproximadamente iguais, é muito menos provável que a fissão assimétrica, em que os fragmentos têm massas diferentes. Observe a simetria dos dois lobos da distribuição, que existe até em detalhes como as pequenas variações nas proximidades do máximo e a convexidade da parte externa das curvas. [*Fonte*: G. J. Dilorio, *Direct Physical Measurement of Mass Yields in Thermal Fission of Uranium-235*, Garland, New York, 1979.]

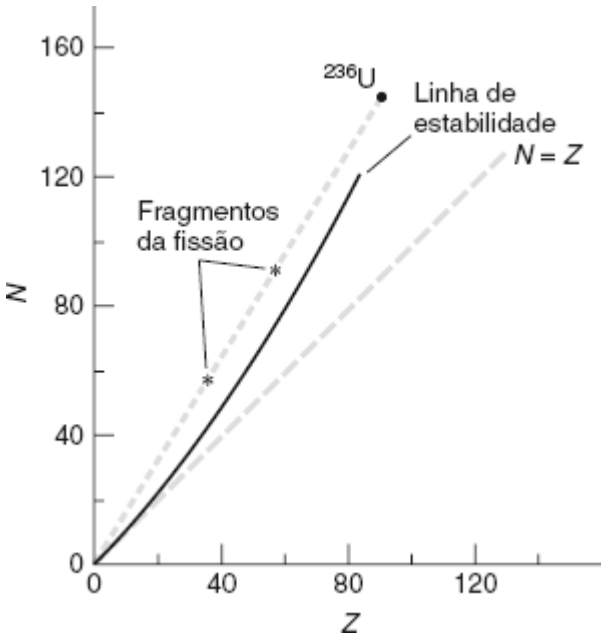


FIGURA 11-49 A fissão do ^{236}U ($^{235}U + n$) produz fragmentos ricos em nêutrons, muito à esquerda da linha de estabilidade. Em consequência, a fissão é acompanhada pela emissão imediata de um ou mais dos nêutrons em excesso, seguida pelo decaimento β^- dos fragmentos de fissão para reduzir ainda mais o número de nêutrons.

EXEMPLO 11-20 **Energia Produzida pela Fissão do ^{235}U** Calcule a energia por unidade de massa, em quilowatts-horas por grama, que pode ser produzida pela fissão de ^{235}U, supondo que a energia liberada seja 200 MeV por fissão.

SOLUÇÃO

Como 1 mol de ^{235}U tem uma massa de 235 g e contém $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}$ núcleos, o número de núcleos de ^{235}U em 1 g é

$$N = \frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{núcleos/mol}}{235\ \text{g/mol}} = 2{,}56 \times 10^{21}\ \text{núcleos/g}$$

A energia produzida por grama é, portanto,

$$\frac{200\ \text{MeV}}{\text{núcleo}} \times \frac{2{,}56 \times 10^{21}\ \text{núcleos}}{1\ \text{g}} \times \frac{1{,}6 \times 10^{-13}\ \text{J}}{1\ \text{MeV}} \times$$

$$\frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \times \frac{1\ \text{kW}}{1000\ \text{J/s}} = 2{,}28 \times 10^{4}\ \text{kW} \cdot \text{h/g}$$

Observação: *A energia gerada por 1 g de ^{235}U corresponde aproximadamente à energia consumida por uma residência americana típica durante 15 meses.**

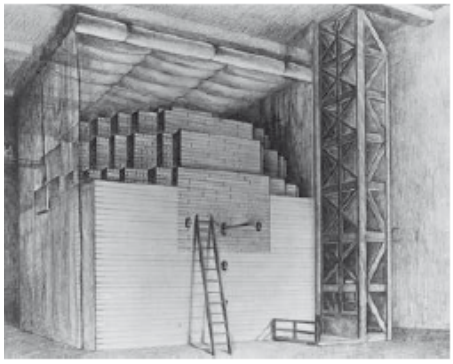
A descoberta de que vários nêutrons eram emitidos no processo de fissão levou a especulações quanto à possibilidade de usar esses nêutrons para produzir outras fissões, iniciando assim uma *reação em cadeia*. Em 2 de dezembro de 1942, menos de quatro anos depois da descoberta da fissão, um grupo liderado por Enrico Fermi produziu a primeira reação em cadeia autossustentada em um reator nuclear que havia sido construído na Universidade de Chicago.[25]

O uso da fissão e da fusão em armas nucleares teve uma grande influência sobre os destinos do mundo nos últimos 70 anos. A utilização pacífica dessas reações para geração de energia poderá ter uma influência ainda maior no futuro, contanto que sejam encontradas soluções satisfatórias para problemas de segurança dos reatores e armazenamento dos rejeitos radioativos. Com o aumento da demanda mundial de energia e o esgotamento dos combustíveis fósseis, um número cada vez maior de reatores nucleares provavelmente será construído para geração de eletricidade. Os reatores nucleares são discutidos, juntamente com assuntos correlatos, na Leitura Suplementar *Energia Nuclear*.

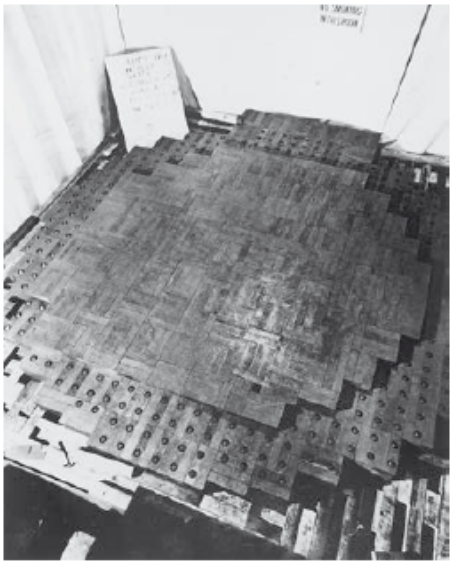


Leitura Suplementar

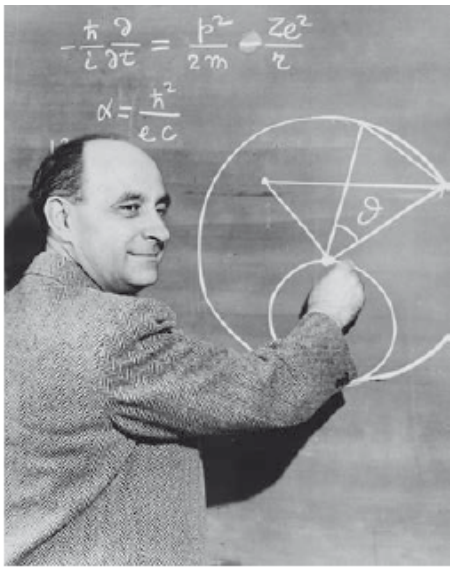
Em 2010, 5,2% da energia consumida no mundo teve origem nuclear. Os reatores nucleares, o ciclo de combustível nuclear e a segurança nuclear são os temas da Leitura Suplementar *Energia Nuclear*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 11-68 a 11-70, as Tabelas 11-5 e 11-6, as Figuras 11-50 a 11-54 e os Exemplos 11-21 a 11-23.



(*a*)



(*b*)



(*c*)

(*a*) O desenho mostra o primeiro reator nuclear do mundo, o CP-1 (Chicago Pile número 1). Projetando-se para fora da estrutura, perto do alto da escada, pode-se ver uma das barras revestidas com cádmio usadas para controlar a reação nuclear. A finalidade da cortina de plástico que envolvia o reator, que no desenho aparece aberta na parte da frente, era conter os gases radioativos gerados durante a operação do reator. A notícia de que o reator havia sido testado com sucesso foi transmitida por telefone por A. H. Compton ao conselheiro do Presidente Roosevelt (e reitor da Universidade de Harvard) J. B. Conant, com as seguintes palavras: "O navegador italiano [ou seja, Fermi] chegou ao Novo Mundo". "Como eram os nativos?" – perguntou Conant. "Muito amigáveis" – respondeu Compton. (*b*) A única fotografia conhecida do CP-1, tirada quando a 19ª camada de grafita estava sendo colocada. Camadas de grafita contendo urânio metálico e/ou óxido de urânio eram separadas por blocos de grafita pura. A camada 18, quase coberta na foto, continha óxido de urânio. (*c*) Enrico Fermi, líder do grupo de cientistas responsável pela primeira reação nuclear produzida pelo homem, em 2 de dezembro de

1942. [(*a*) *e* (*b*) *American Institute of Physics*, *Emilio Segrè Visual Archives*; *cortesia do Argonne National Laboratory*, *University of Chicago*. (*c*) *Cortesia do Argonne National Laboratory*.]

Fusão

A produção de energia a partir da fusão de núcleos leves vem sendo investigada com grande interesse por causa da abundância do combustível e da ausência de alguns riscos associados aos reatores de fissão. Na fusão, dois núcleos leves como o deutério (^{2}H) e o trítio (^{3}H) se fundem para formar um núcleo mais pesado. Uma reação típica de fusão é a seguinte:

$$^2\text{H} + {}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + n + 17{,}6\ \text{MeV} \qquad \textbf{11-71}$$

Como vimos no Exemplo 11-19, esta reação de fusão libera 4,3 vezes mais energia por quilograma que uma reação típica de fissão; entretanto, a tecnologia necessária para fazer da fusão uma fonte prática de energia ainda não foi criada. Nos parágrafos que se seguem, vamos discutir apenas a reação de fusão da Equação 11-71, mas outras reações apresentam problemas semelhantes.

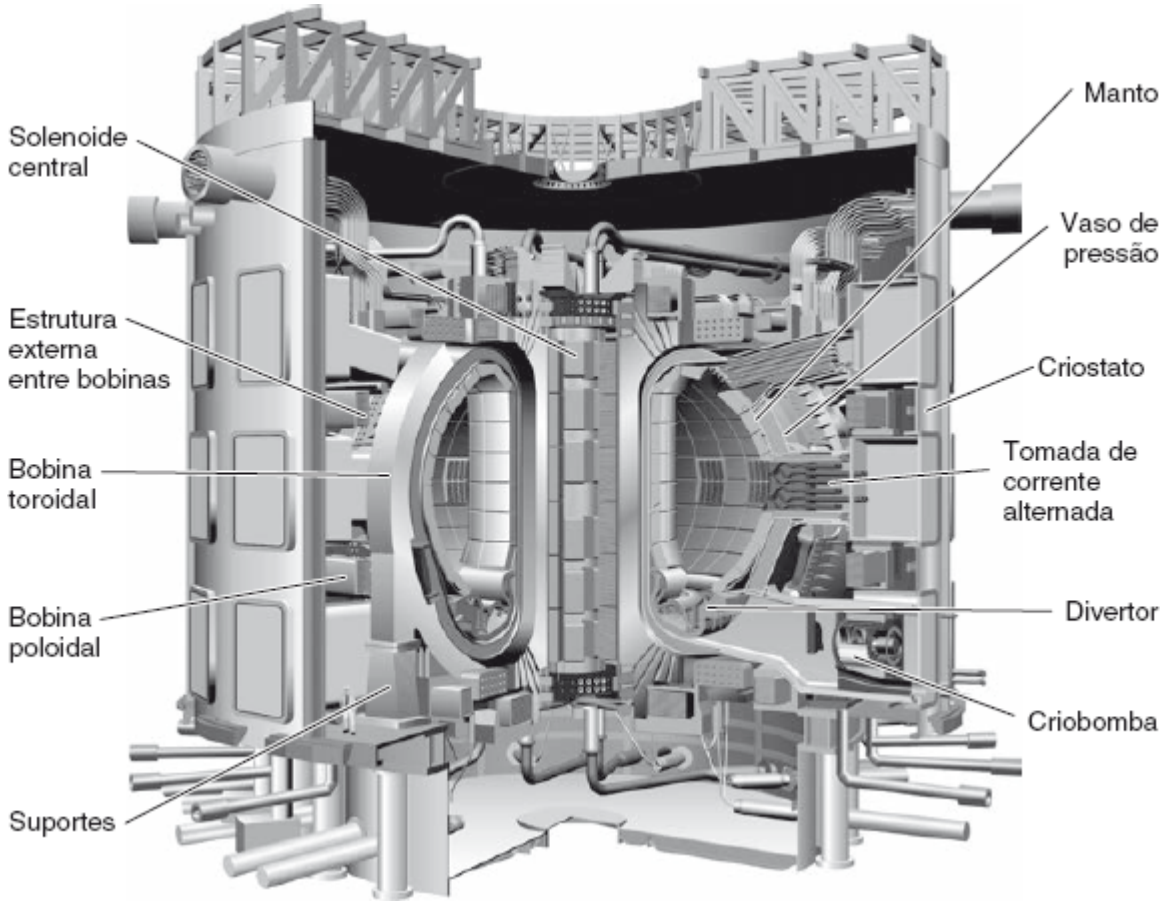
Experimentos de Fusão Controlada Por causa da repulsão eletrostática, os núcleos de ^{2}H e ^{3}H só se aproximam o suficiente para que as forças nucleares predominem e promovam a fusão se tiverem uma energia cinética extremamente elevada, da ordem de 1 MeV. Energias dessa ordem de grandeza podem ser obtidas em um acelerador de partículas; acontece, porém, que o processo de espalhamento é muito mais provável que o de fusão e, por isso, o bombardeio de um núcleo por outro em um acelerador consome muito mais energia do que produz. Para obter energia a partir da fusão, é preciso aquecer os nuclídeos a uma temperatura suficientemente elevada para que as reações de fusão ocorram em consequência de colisões aleatórias. Como um número significativo de partículas possui uma energia cinética maior que o valor médio de $3kT/2$ e algumas partículas podem atravessar a barreira de Coulomb por tunelamento, uma temperatura T correspondente a $kT \approx 10$ keV é suficiente, na prática, para assegurar um número adequado de reações de fusão, contanto que a concentração de partículas não seja muito baixa. A temperatura correspondente a $kT = 10$ keV é 10^8 K. Temperaturas dessa ordem são encontradas no interior das estrelas, onde as reações de fusão são comuns. Nessas temperaturas, a matéria existe na forma de um gás de elétrons livres e íons positivos conhecido como *plasma* (veja o Capítulo 10). Um dos maiores problemas dos reatores de fusão é manter o plasma confinado por um tempo suficiente para que as reações ocorram. No interior de uma estrela como o Sol, o plasma é confinado pelo enorme campo gravitacional do astro. Na Terra, porém, o confinamento é um problema difícil de resolver.

A energia necessária para aquecer um plasma é proporcional à concentração de íons, n, enquanto o número de fusões é proporcional a n^2, já que depende da distribuição de energia cinética e da seção de choque para fusão e os dois parâmetros são proporcionais a n. Se τ é o tempo de confinamento, a energia produzida é proporcional a $n^2\tau$. Para que a energia gerada seja maior que a energia fornecida, é preciso que

$$C_1 n^2 \tau > C_2 n$$

em que C_1 e C_2 são constantes. Em 1957, o físico inglês J. D. Lawson calculou os valores dessas constantes a partir de estimativas da eficiência de vários reatores de fusão hipotéticos e chegou à seguinte relação entre concentração e tempo de confinamento, conhecida como *critério de Lawson*:

$$n\tau > 10^{20}\ \text{s} \cdot \text{partículas/m}^3 \qquad \textbf{11-72}$$

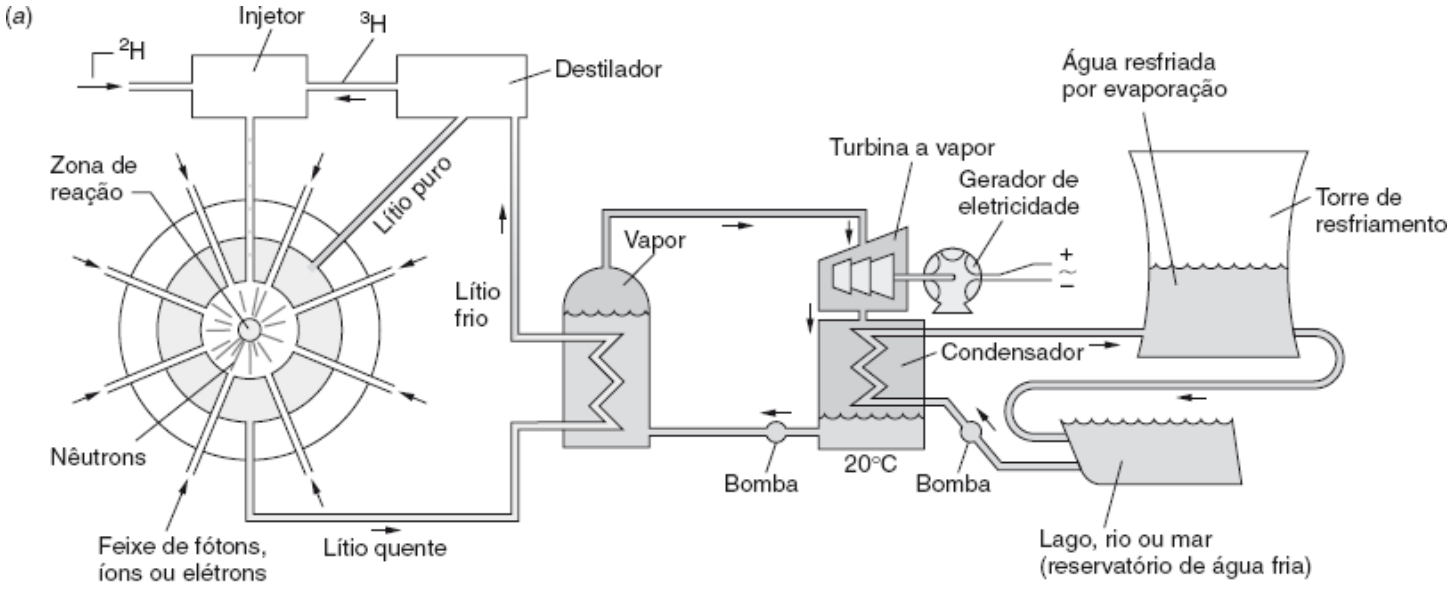


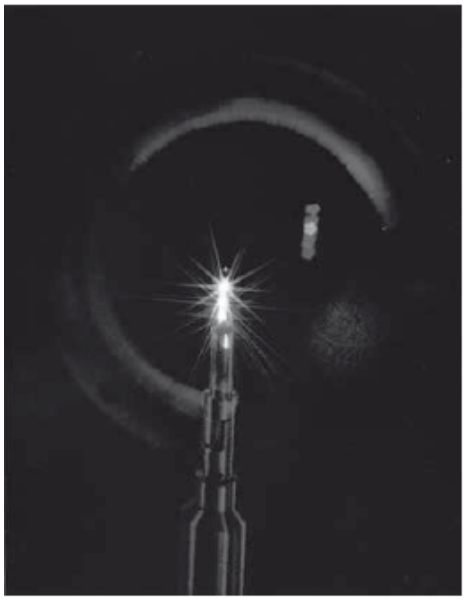
O reator experimental de fusão ITER, atualmente em construção no sul da França. Um plasma de trítio e deutério é injetado em uma câmara de forma toroidal, na qual uma corrente elétrica é induzida pelo solenoide central. As bobinas toroidais são usadas para confinar o plasma. As bobinas poloidais, perpendiculares às bobinas toroidais, mantêm o plasma afastado das paredes da câmara e ajudam a aquecê-lo. Para uma descrição mais completa do sistema, visite o site *www.iter.org*. [*ITER Organization.*]

Se o critério de Lawson é atendido por uma pequena margem e a energia térmica dos íons é apenas suficiente para que as reações de fusão ocorram ($kT \approx 10$ keV), a energia produzida por um reator de fusão é igual à energia necessária para fazê-lo funcionar (o que corresponde ao chamado *ponto de equilíbrio*). Naturalmente, para que um reator de fusão seja comercialmente viável, a produção de energia tem que ser muito maior que este valor.

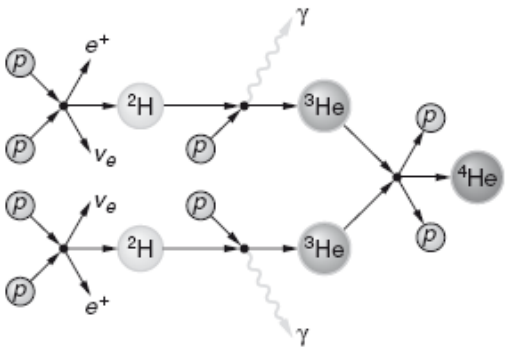
Dois métodos bem diferentes para satisfazer ao critério de Lawson estão sendo investigados atualmente. No *confinamento magnético*, um campo magnético é usado para confinar o plasma.[26] No sistema mais comum, inventado na Rússia e conhecido como *tokamak*, o plasma é gerado no interior de um grande toroide. O campo magnético é uma combinação do campo magnético produzido pela corrente nos enrolamentos do toroide e o campo produzido pelo movimento do próprio plasma. Um consórcio internacional está atualmente construindo na França um tokamak denominado International Thermonuclear Experimental Reactor (ITER). A produção do primeiro plasma neste tokamak está programada para 2020. Na China, o Experimental Advanced Superconducting Tokamak (EAST), que usa enrolamentos supercondutores, considerados essenciais para uma produção contínua de energia, começou a funcionar no final de 2006. O ponto de equilíbrio usando confinamento magnético foi atingido faz alguns anos, mas ainda estamos longe de construir um reator comercial de fusão.

No segundo método, denominado *confinamento inercial* (Figura 11-55), uma bolinha contendo uma mistura de deutério e trítio congelados é bombardeada de todos os lados por pulsos de laser com uma energia da ordem de 10^6 J e uma duração menor que 10^{-8} s. (Também são usados íons e elétrons em lugar de pulsos luminosos.) Simulações em computador mostram que o momento transferido para os núcleos de hidrogênio pode ser suficiente para fazer com que a densidade da bolinha atinja um valor 10.000 vezes maior que o normal, e a temperatura aumente para mais de 10^8 K. Com isso, seria possível produzir cerca de 10^6 J de energia de fusão em 10^{-10} s, um intervalo de tempo tão curto que a simples inércia bastaria para manter o plasma confinado (veja a Figura 11-55*b*). Na teoria, depois que o pulso de energia de fusão fosse absorvido por um fluido de transferência de calor, como lítio líquido, outra bolinha seria injetada na confluência dos pulsos e o processo poderia ser repetido várias vezes.





(b)



(c)

FIGURA 11-55 (*a*) Diagrama esquemático de um possível reator de fusão utilizando confinamento inercial e a reação $^2H + {}^3H \rightarrow {}^4He + n$. A reação produz 17,6 MeV por fusão e o nêutron resultante reage com ^{6}Li (nêutron lento) ou ^{7}Li (nêutron rápido) para gerar novos núcleos de ^{3}H. A última reação produz mais um nêutron lento; assim, cada dois nêutrons produzidos por fusão podem gerar três núcleos de ^{3}H. Em outras palavras, o sistema se comporta como um reator regenerador de trítio. (*b*) O reator Nova é um reator de fusão por confinamento inercial que utiliza 10 lasers de alta potência focalizados em uma bolinha de hidrogênio de 0,5 mm de diâmetro. A reação de fusão resultante, visível na fotografia como um ponto claro, dura 10^{-10} s e libera 10^{13} nêutrons. (*c*) A reação próton-próton é a principal fonte de energia do Sol. O neutrino criado na reação inicial escapa para o espaço. A energia produzida por ciclo é 26,7 MeV. [(*b*) *Cortesia do Lawrence Livermore National Laboratory, U.S. Department of Energy.*]

Como o ponto de equilíbrio foi atingido apenas recentemente nos reatores de confinamento magnético e a construção de um reator de fusão envolve muitos problemas práticos que ainda permanecem sem solução, como, por exemplo, o fato de que o bombardeio de nêutrons tende a tornar radioativas as paredes do reator, não é provável que a fusão nuclear venha a ser explorada comercialmente nas próximas décadas.

EXEMPLO 11-24 **Temperatura da Reação de Fusão** $^1H + {}^1H \rightarrow {}^2H + e^+ + \nu$ Para que haja fusão entre dois prótons, é preciso que as partículas se aproximem o suficiente para que a força nuclear se torne maior que a força de repulsão eletrostática, o que acontece para distâncias menores que 3×10^{-15} m. Determine (*a*) a temperatura mínima de um plasma de hidrogênio no qual um próton com a energia média do plasma é capaz de vencer a repulsão eletrostática; (*b*) a energia liberada na reação de fusão.

SOLUÇÃO

(*a*) A altura da barreira de potencial que os prótons têm que vencer é dada por

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r} = \frac{(9\times10^9\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2})(1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{3{,}0\times10^{-15}\,\mathrm{m}}$$

$$U = 7{,}76\times10^{-14}\,\mathrm{J}$$

Para que esta barreira seja superada, é preciso que a energia média dos elétrons, $3kT/2$, seja igual a pelo menos metade deste valor. Assim,

$$(3/2)kT = 3{,}84\times10^{-14}\,\mathrm{J}$$

e, portanto,

$$T = \frac{2\times3{,}84\times10^{-14}\,\mathrm{J}}{3\times1{,}38\times10^{-23}\,\mathrm{J/K}} = 1{,}9\times10^9\,\mathrm{K}$$

(*b*) A energia liberada, que corresponde ao valor de Q da reação de fusão, é dada por

$$\begin{aligned} Q &= [2m(^1\mathrm{H}) - m(^2\mathrm{H}) - 2m_e]c^2 \\ &= [2\times1{,}007825\,\mathrm{u} - 2{,}014102\,\mathrm{u} - 0{,}001097\,\mathrm{u}]c^2 \\ &= 0{,}000451\,\mathrm{u}\cdot c^2\times931{,}5\,\mathrm{MeV/u}\cdot c^2 = 0{,}42\,\mathrm{MeV} \end{aligned}$$

em que foram usados os valores das massas atômicas que aparecem no Apêndice A. A energia liberada na reação de fusão $^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H}$, 0,42 MeV, é muito menor que os 17,6 MeV liberados na reação $^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H}$ (veja a Equação 11-67). É por isso que a segunda reação é usada em praticamente todos os experimentos de fusão controlada.

A Fonte de Energia do Sol De acordo com as leis da termodinâmica, o tempo necessário para que a energia térmica atualmente contida no Sol se dissipe por irradiação é aproximadamente 3×10^7 anos. Como a vida existe na Terra há pelo menos 3×10^9 anos, a taxa de irradiação do Sol não deve ter mudado muito nesse período. Isso significa que o Sol deve dispor de uma fonte capaz de produzir uma quantidade de energia muito maior que a energia térmica contida no plasma e no campo de radiação solar. Essa fonte de energia é a fusão nuclear. Ao que tudo indica, quando o Sol se formou a partir da uma nuvem de gás, a contração fez com que a temperatura aumentasse até atingir um valor suficientemente elevado para que alguns núcleos de hidrogênio (prótons) se fundissem para formar núcleos de hélio. Esta reação (na verdade, uma série de reações) foi proposta por H. A. Bethe e é conhecida como *ciclo próton-próton*. A primeira reação da série é a seguinte:

$$^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^2\mathrm{H} + e^+ + \nu_e + 0{,}42\,\mathrm{MeV}$$

Para a temperatura estimada no centro do Sol, $1{,}5\times10^7$ K, a energia média dos prótons é aproximadamente 3×10^{-16} J, um valor muito menor que a altura da barreira da repulsão eletrostática, que é da ordem de 8×10^{-14} J (veja o Exemplo 11-24). Assim, a fusão pode ocorrer apenas por tunelamento ou para os poucos prótons que se encontram na extremidade de altas energias da distribuição de Maxwell-Boltzmann, o que significa que a probabilidade de fusão é muito pequena. Isso estabelece um limite para a rapidez com a qual o Sol pode produzir energia, assegurando uma longa vida para o Sol e estrelas semelhantes. Este limite é chamado por alguns de "gargalo" do ciclo de fusão solar. Depois que o $^2\mathrm{H}$ (deutério) se forma, a seguinte reação se torna muito provável:

$$^2\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma + 5{,}49\,\mathrm{MeV}$$

logo seguida por

$$^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\,{}^1\mathrm{H} + \gamma + 12{,}86\,\mathrm{MeV}$$

Este processo, através do qual núcleos de hidrogênio são "queimados" para produzir núcleos de hélio, está representado esquematicamente na Figura 11-55*c*. Existem outras reações capazes de converter o $^3\mathrm{He}$ em $^4\mathrm{He}$, todas com o mesmo valor de Q, mas com diferentes velocidades, dependendo da composição e temperatura do plasma.

Os neutrinos produzidos no ciclo próton-próton escapam para o espaço e constituem o único meio de observar o que está acontecendo no interior do Sol. É possível calcular a velocidade da reação a partir da potência total irradiada pelo Sol e do valor de Q do ciclo próton-próton. Além disso, as reações alternativas para formação de $^4\mathrm{H}$ apresentam diferentes espectros de neutrinos, o que permite determinar a contribuição relativa de cada reação e obter informações a respeito da composição e

temperatura do plasma. Para surpresa dos cientistas, o número de neutrinos solares que chegam à Terra é menos de metade do valor calculado com base no modelo-padrão da atividade solar. A razão desta discrepância, conhecida como *problema dos neutrinos solares*, foi descoberta recentemente, quando os resultados obtidos nos observatórios de neutrinos Sudbury, no Canadá, e Super-Kamiokande, no Japão, mostraram que os neutrinos possuem uma pequena massa de repouso e podem mudar de um tipo para outro no trajeto até a Terra (veja a Seção 12-5).

Exercícios

17. Explique por que a água é mais eficaz que o chumbo para absorver a energia dos nêutrons rápidos.
18. O que acontece com os nêutrons produzidos na fissão que não produzem outra fissão?
19. Por que a fusão ocorre espontaneamente no Sol, mas não na Terra?



Leitura Suplementar

Para compreender os efeitos biológicos da radiação ionizante e o princípio de funcionamento dos detectores de radiação, é preciso saber o que acontece quando partículas carregadas, nêutrons e fótons atravessam um material. Esse é o tema da Leitura Suplementar *Interações de Partículas com a Matéria*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 11-73 a 11-83, as Figuras 11-56 a 11-61 e o Exemplo 11-25.

Uma oportunidade PARA VOCÊ A descoberta de novos materiais tem sido um fator importante para o progresso da humanidade desde que o homem primitivo substituiu a madeira pela pedra para fazer ferramentas mais eficazes e duráveis. Por volta de 1400 a.C., o homem aprendeu a misturar cobre e estanho fundidos para fabricar uma liga de alta resistência mecânica (o bronze) e, logo depois, descobriu que o ferro aquecido com carvão (carbono) formava um material ainda mais duro e resistente (o aço). Essas descobertas ainda são úteis hoje em dia, quase 3500 anos depois. O uso de reatores nucleares para atender à demanda crescente de energia trouxe novos desafios no campo da ciência dos materiais, como o desenvolvimento de ligas capazes de resistir a danos causados por radiação, especialmente por parte de nêutrons. Nas ligas convencionais, os defeitos induzidos por radiação migram para a superfície, fazendo com que o material aumente de volume. As lacunas deixadas por esses defeitos se aglomeram para formar cavidades que fragilizam o material. Os mecanismos responsáveis por esses fenômenos ainda não são bem conhecidos, mas tudo indica que necessitamos de materiais de autocura. Para criar materiais desse tipo, será necessária uma boa dose de imaginação. A qualidade do nosso futuro depende, em boa parte, da pesquisa de novos materiais. Existem inúmeras oportunidades para prestar contribuições valiosas nessa área.

11-9 Aplicações

As aplicações mais importantes das reações e interações nucleares estão sem dúvida na medicina, principalmente no campo do diagnóstico, mas também no tratamento do câncer e de outras doenças. A disponibilidade de detectores mais sensíveis e computadores mais potentes certamente contribuiu para o grande progresso observado nos últimos anos na medicina nuclear. Também importante para um largo espectro de disciplinas, desde a arte até a química, passando pela geologia e a zoologia, é um conjunto de técnicas analíticas extremamente precisas, como a *análise por ativação de nêutrons* e a *espectrometria de massa com aceleradores*. Os antropólogos, arqueólogos e geólogos usam rotineiramente o decaimento de radioisótopos para determinar a idade de rochas e artefatos e avaliar o potencial de campos de petróleo. O capítulo termina com uma breve descrição dessas técnicas.

Regiões ricas em petróleo e gás natural em poços exploratórios podem ser localizadas introduzindo no poço uma fonte de nêutrons (em geral, uma mistura de ^{239}Pu e ^{9}Be ou ^{241}Am e ^{9}Be) e um detector de raios gama. Os nêutrons produzem raios gama através de reações do tipo $X(n,\gamma)Y$ com rochas vizinhas. A análise do espectro de raios gama permite identificar elementos na rocha que normalmente estão associados ao petróleo e ao gás natural.

Análise por Ativação de Nêutrons

Este método, que permite detectar elementos e discriminar isótopos, é extremamente sensível e preciso. Alguns elementos e isótopos são mais fáceis de observar que outros, mas o método é mais usado no caso dos muitos elementos que não podem ser detectados, em pequenas concentrações, por meios convencionais. A análise por ativação de nêutrons (NAA) tem sido usada em uma grande variedade de aplicações, como a identificação de poluentes no ar, o controle de qualidade de dispositivos semicondutores e a autenticação de obras de arte.

O método consiste em expor a amostra a ser analisada a um fluxo intenso de nêutrons lentos. O isótopo ${}^{A}_{Z}\mathrm{M}$ do elemento de interesse sofre a reação ${}^{A}_{Z}\mathrm{M}(n, y){}^{A+1}_{Z}\mathrm{M}$ (veja a Seção 11-7), na qual ${}^{A+1}_{Z}\mathrm{M}$ é um nuclídeo radioativo. O nuclídeo ${}^{A+1}_{Z}\mathrm{M}$ pode ser identificado por sua meia-vida e pela energia dos raios beta e gama emitidos. A atividade do material irradiado é dada por

$$R(t) = \lambda N(t) = R_0(1 - e^{-\lambda t}) \qquad \textbf{11-84}$$

na qual t é o tempo de irradiação, λ é a constante de decaimento do nuclídeo ${}^{AA+1}_{Z}\mathrm{M}$ e R_0 é a taxa (constante) de produção do isótopo. A atividade $R(t)$ é medida experimentalmente e R_0 pode ser calculada com o auxílio da Equação 11-62, já que $R_0 = N_0R$, em que N_0 é o número de núcleos de ${}^{A}_{Z}\mathrm{M}$ na amostra. Assim,

$$R_0 = N_0R = N_0\sigma I \qquad \textbf{11-85}$$

em que σ é a seção de choque para a reação ${}^{A}_{Z}\mathrm{M}(n, y){}^{A+1}_{Z}\mathrm{M}$ em cm^2 e I é o fluxo de nêutrons em nêutrons/s·cm^2. A Equação 11-84 pode, portanto, ser escrita na forma

$$R(t) = N_0\sigma I(1 - e^{-\lambda t}) \qquad \textbf{11-86}$$

Nos casos em que a meia-vida é suficientemente pequena, costuma-se irradiar a amostra até saturá-la, ou seja, até que $R(t) \approx R(\infty) = N_0\sigma I$. A Tabela 11-7 mostra as atividades de saturação por μg de alguns isótopos. Na saturação, o número de núcleos de ${}^{A}_{Z}\mathrm{M}$ é dado por

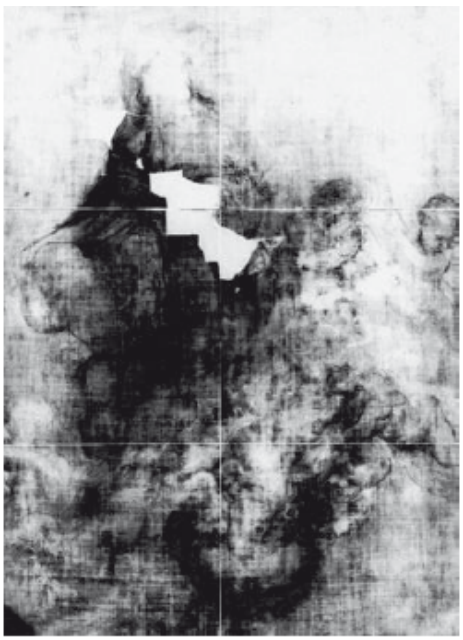
$$N_0 = \frac{R(\infty)}{\sigma I}$$

Tabela 11-7 Atividades de saturação de alguns isótopos ($I = 10^{12}$ nêutrons/min·cm^2)

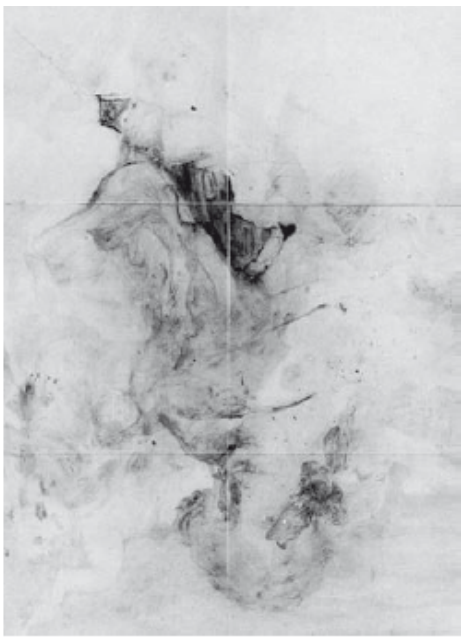
${}^{A}_{Z}\mathrm{M}$	${}^{A+1}_{Z}\mathrm{M}$	Atividade de saturação $R(\infty)$ decaimentos/min·μg
${}^{55}\mathrm{Mn}$	${}^{56}\mathrm{Mn}$	$8{,}8 \times 10^6$
${}^{63}\mathrm{Cu}$	${}^{64}\mathrm{Cu}$	$1{,}7 \times 10^6$
${}^{127}\mathrm{I}$	${}^{128}\mathrm{I}$	$1{,}6 \times 10^6$
${}^{197}\mathrm{Au}$	${}^{198}\mathrm{Au}$	$1{,}7 \times 10^7$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Uma das aplicações da análise por ativação de nêutrons. Pinturas ocultas por outras pinturas podem ser observadas bombardeando o quadro com nêutrons e observando as partículas emitidas pelos núcleos que capturaram um nêutron. Diferentes elementos usados nas tintas possuem meias-vidas diferentes. (*a*) O quadro de Van Dyck *Santa Rosalie Intercedendo pelas Vítimas da Peste de Palermo*. Para as imagens que aparecem em (*b*) e (*c*), foi usado um filme especial sensível aos elétrons emitidos por elementos radioativos. A imagem (*b*), tomada algumas horas após a irradiação do quadro com nêutrons, revela a presença de manganês, encontrado no umbro, um pigmento cor de terra usado na pintura. (A região clara assinala o lugar onde foi feita uma restauração com tintas modernas, que não contêm manganês.) A imagem (*c*) foi tomada quatro dias mais tarde, depois que as emissões do manganês haviam diminuído de intensidade e as emissões predominantes eram as do fósforo, encontrado no carvão animal e vegetal. A imagem mostra um esboço do próprio Van Dyck, de cabeça para baixo. O autorretrato, executado em carvão, foi oculto pelo artista quando reaproveitou a tela. (Veja o Problema 11-83.) [(*a*) *Cortesia do Metropolitan Museum of Art*, *New York City*. (*b*) *e* (*c*) *Cortesia do Painting Conservation Department, Metropolitan Museum of Art*, *New York City.*]

e a massa de ${}^{A}_{Z}\mathrm{M}$ na amostra é dada por

$$m\left({}^{A}_{Z}\mathrm{M}\right) = \frac{N_0 W}{N_A} = \frac{R(\infty) W}{N_A \sigma I} \qquad \textbf{11-87}$$

em que W é o peso atômico do elemento e N_A é o número de Avogadro.

EXEMPLO 11-26 **O Cordão de "Ouro"** Depois de comprar um cordão anunciado como feito de uma liga com 10% de ouro, um comprador desconfiado irradia um elo de 25 mg do cordão com um fluxo constante de 10^{10} nêutrons/s·cm^2 por um tempo suficientemente longo para que a atividade do ouro sature. Em seguida, o comprador mede a atividade do elo com um detector cuja eficiência é 12% e obtém um valor de $7{,}5 \times 10^4$ decaimentos/s. Qual é a porcentagem em massa de ouro no cordão? (A seção de choque para ativação por nêutrons do ^{197}Au é 98,8 barns.)

SOLUÇÃO

Como a eficiência do detector é 12%, o verdadeiro valor de $R(\infty)$ é

$$R(\infty) = \frac{7{,}5 \times 10^4 \text{ decaimentos/s}}{0{,}12} = 6{,}3 \times 10^5 \text{ decaimentos/s}$$

De acordo com a Equação 11-87, temos:

$$m\left({}^{197}\mathrm{Au}\right) = \frac{(6{,}3 \times 10^5 \text{ decaimentos/s})\,(197 \text{ g/mol})}{(6{,}02 \times 10^{23} \text{ átomos/mol})\,(98{,}8 \times 10^{-24} \text{ cm}^2) \times (10^{10} \text{ nêutrons/s/cm}^2)}$$

$$m\left({}^{197}\mathrm{Au}\right) = 2{,}1 \times 10^{-4} \text{ g}$$

Assim, a porcentagem em massa de ouro no cordão é dada por

$$\%\mathrm{Au} = \left(\frac{2{,}1 \times 10^{-4} \text{ g}}{25 \times 10^{-3} \text{ g}}\right) \times 100 = 0{,}8\%$$

O teor de ouro no cordão é, portanto, aproximadamente 10 vezes menor que o anunciado.

Ressonância Magnética Nuclear

Como vimos na Seção 7-7, a aplicação de um campo magnético externo produz um desdobramento dos níveis de energia do átomo (efeito Zeeman) por causa da interação entre os momentos magnéticos eletrônicos e o campo aplicado. Como muitos núcleos também possuem um momento magnético, os níveis de energia nucleares também podem ser desdobrados por um campo magnético. Vamos limitar nossa discussão ao caso mais simples, o do átomo de hidrogênio, no qual o núcleo é constituído por um próton isolado.

A energia potencial de um momento magnético μ na presença de um campo magnético **B** é dada por

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \qquad \textbf{11-88}$$

A energia potencial é mínima, quando o momento magnético e o campo aplicado são paralelos, e máxima quando o momento magnético e o campo são antiparalelos. Como o número quântico de spin do próton é 1/2, o momento magnético do próton tem duas orientações possíveis em relação a um campo magnético externo: paralelo ao campo (spin para cima) e antiparalelo (spin para baixo). A diferença de energia entre as duas orientações (Figura 11-62) é dada por

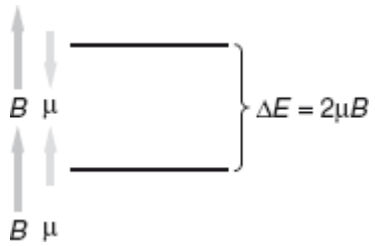


FIGURA 11-62 Um próton tem dois estados de energia na presença de um campo magnético, correspondentes às duas orientações possíveis do momento magnético do próton em relação ao campo.

$$\Delta E = 2(\mu_z)_p B \qquad \textbf{11-89}$$

Quando uma coleção de átomos de hidrogênio é irradiada com fótons de energia ΔE, alguns núcleos são induzidos a realizar transições do estado inferior para o estado superior por absorção ressonante. Em seguida, esses núcleos decaem para o estado inferior, emitindo fótons de energia ΔE. A frequência dos fótons absorvidos e emitidos pode ser calculada a partir da relação

$$hf = \Delta E = 2(\mu_z)_p B$$

Em um campo magnético de 1 T, a energia é dada por

$$\begin{aligned}\Delta E &= 2(\mu_z)_p B \\ &= 2(2{,}79\ \mu_N)\left(\frac{3{,}15 \times 10^{-8}\ \text{eV/T}}{1\ \mu_N}\right)(1\ \text{T}) \\ &= 1{,}76 \times 10^{-7}\ \text{eV}\end{aligned}$$

e a frequência dos fótons é

$$\begin{aligned}f = \frac{\Delta E}{\hbar} &= \frac{1{,}76 \times 10^{-7}\ \text{eV}}{4{,}14 \times 10^{-15}\ \text{eV} \cdot \text{s}} \\ &= 4{,}25 \times 10^{7}\ \text{Hz} = 42{,}5\ \text{MHz}\end{aligned}$$

Esta frequência está na faixa de ondas de rádio do espectro eletromagnético, também conhecida como *faixa de RF* (radiofrequência). A medida da frequência de ressonância de prótons livres pode ser usada para determinar o momento magnético do próton.

Quando um átomo de hidrogênio faz parte de uma molécula, o campo magnético na posição do próton é a soma do campo magnético externo com o campo magnético produzido pelos elétrons e núcleos vizinhos. Como a frequência de ressonância é proporcional ao campo magnético total a que está submetido o próton, a medida da frequência pode fornecer informações a respeito do campo magnético interno da molécula. Esta técnica de investigação, conhecida como *ressonância magnética nuclear*, é muito usada para investigar a estrutura magnética dos materiais.

A ressonância magnética nuclear também é usada na medicina, como alternativa para os exames de raios X e ultrassom. Para isso, o paciente é submetido simultaneamente a um campo magnético não homogêneo, produzido por eletroímãs supercondutores, e a um espectro de radiofrequências. A frequência dos fótons absorvidos e emitidos depende do valor do campo magnético, que pode ser associado a uma região específica do corpo do paciente. Como a energia dos fótons é muito menor que a energia das ligações moleculares e a intensidade é suficientemente pequena para que não ocorra um aquecimento significativo, os danos biológicos causados pela radiação são mínimos ou inexistentes. Os exames de ressonância magnética nuclear são não invasivos e mais sensíveis que os outros tipos de exames para a detecção de tumores moles.

Tomografia Computadorizada

Wilhelm Roentgen recebeu o primeiro Prêmio Nobel de Física, em 1901, por haver descoberto os raios X em 1895, um evento que também assinalou o início da *radiografia*, o uso de radiações e feixes de partículas para obter imagens internas de objetos

opacos. Durante meio século, os raios X foram o único tipo de radiação utilizado. No final da década de 1940, a introdução de radioisótopos no corpo dos pacientes tornou possível investigar seletivamente o funcionamento de certos órgãos, uma técnica que hoje faz parte de uma especialidade conhecida como medicina nuclear. Os isótopos usados são em geral emissores gama, de meia-vida relativamente curta, já que a penetração de partículas alfa e beta em tecidos biológicos é quase sempre insuficiente. Os detectores mais usados são cristais cintiladores (cristais que emitem pulsos luminosos ao serem atingidos por raios gama), geralmente acoplados a um colimador para que seja possível determinar a posição da fonte (veja a Figura 11-63). A imagem é gerada por um computador a partir do sinal de saída da fotomultiplicadora usada para detectar os pulsos luminosos produzidos pelo cristal.

Como as radiografias comuns, produzidas com raios X, as radiografias obtidas com emissores gama são projeções bidimensionais da atenuação causada por um objeto tridimensional. Assim, nos dois casos, as radiografias não contêm informações a respeito do relevo dos objetos. No caso dos raios X, G. Hounsfield e A. Cormack resolveram o problema em 1972 com a invenção da tomografia computadorizada.[27] Nesta técnica, faz-se girar um feixe de raios X colimados, com uma espessura de alguns milímetros, em torno do paciente; o feixe transmitido é registrado por um arco de detectores situado do lado oposto (Figura 11-64). Os sinais dos detectores são usados para reconstruir matematicamente a imagem de uma seção reta do objeto (e *não* uma projeção).

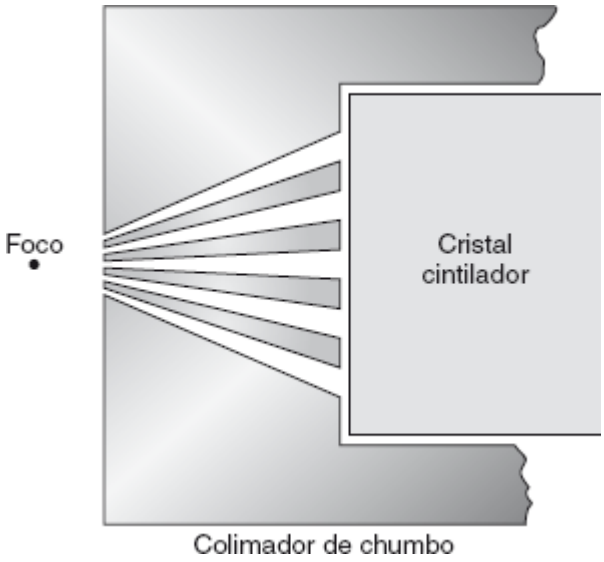


FIGURA 11-63 Diagrama esquemático de uma câmara de raios gama, constituída por um cristal cintilador e um invólucro de chumbo, que funciona como colimador. A câmara é colocada em várias posições em relação ao paciente e a intensidade dos raios gama, registrada pelo detector, fornece informações a respeito da localização e concentração de um radioisótopo no interior do organismo, que podem ser usadas por um computador para gerar uma imagem da distribuição do radioisótopo. Os colimadores das câmaras modernas contêm centenas ou mesmo milhares de pequenos canais, através dos quais os raios gama podem chegar ao cristal.

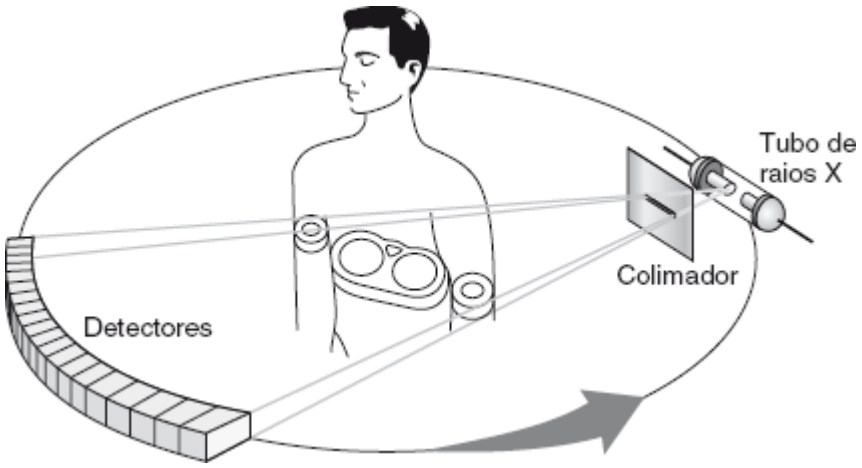


FIGURA 11-64 O tomógrafo pode ser usado para obter imagens de seções retas do corpo humano. O feixe de raios X em forma de leque, com alguns milímetros de espessura, e o banco de detectores, normalmente constituído por contadores proporcionais ou de fio, gira em torno de um eixo para produzir cada imagem completa. Deslocando o paciente para cima e para baixo enquanto o aparelho produz imagens sucessivas, é possível obter uma representação tridimensional completa.

Obtendo várias projeções bidimensionais com uma câmara de raios gama e processando os resultados em computador, também é possível determinar a distribuição de radioisótopos em uma seção reta do objeto. Este método é conhecido como

tomografia computada por emissão de fóton único, ou SPECT.*

O tecnécio ($Z = 43$), previsto por Moseley em 1914 e descoberto por Carlo Perrier e Emilio Segrè em 1937, em uma amostra de molibdênio bombardeada com núcleos de deutério em um cíclotron, não é encontrado na natureza e foi o primeiro elemento a ser produzido artificialmente. Um dos isótopos do tecnécio, o ^{99}Tc, é, de longe, o radioisótopo mais usado na medicina para fins de pesquisa e diagnóstico. O nuclídeo é formado em um estado excitado conhecido como tecnécio 99m, que decai para o estado fundamental com uma meia-vida de aproximadamente 6 horas, emitindo um raio gama de 140 keV facilmente detectável por cintilômetros.

Embora fossem essenciais para o funcionamento dos tomógrafos computadorizados, os colimadores reduziam consideravelmente a sensibilidade dos aparelhos. Uma forma de eliminar os colimadores seria utilizar radioisótopos que fossem emissores de pósitrons. Isso porque os pósitrons viajam apenas alguns milímetros nos tecidos vivos antes de encontrar elétrons, e as duas partículas se aniquilam mutuamente, com a emissão de dois fótons de 0,511 MeV em direções opostas. A observação simultânea desses fótons por dois detectores permite determinar com precisão o ponto de aniquilação (veja a Figura 11-65). Para que a técnica fosse viável, porém, seria preciso contar com um detector que fosse sensível aos fótons de 0,511 MeV e suficientemente pequeno para indicar a posição dos fótons com uma precisão de aproximadamente um milímetro. O problema foi resolvido em meados da década de 1980, quando C. Thompson e colaboradores desenvolveram detectores à base de germanato de bismuto (BGO). Atualmente, quase todos os equipamentos de tomografia por emissão de pósitrons (PET) utilizam anéis de detectores feitos de BGO (Figura 11-65*a*).* A Figura 11-65*b* mostra uma imagem da atividade do cérebro obtida com detectores de BGO. Um dos fatores que limitam o uso da tomografia por emissão de pósitrons é a necessidade de que exista um acelerador de partículas nas redondezas, já que os emissores de pósitrons mais interessantes para pesquisas biológicas, o ^{11}C, o ^{13}N, o ^{15}O e o ^{18}F, possuem meias-vidas de apenas 20 min, 10 min, 2 min e 110 min, respectivamente, e, portanto, devem ser constantemente substituídos.

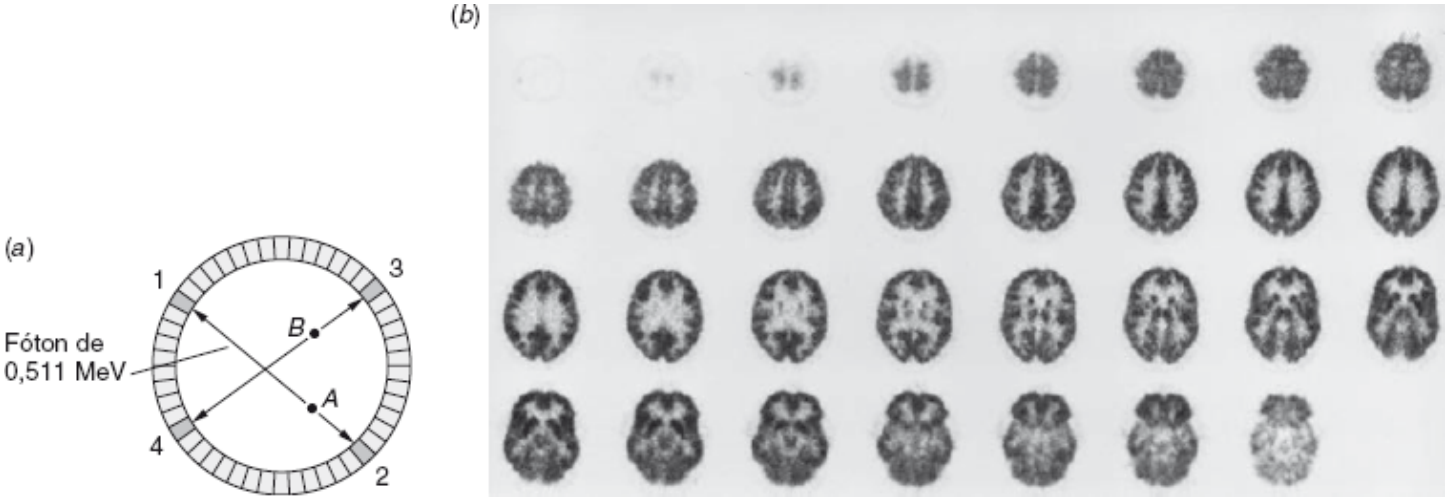


FIGURA 11-65 (*a*) Dois núcleos de um radioisótopo introduzido no corpo de um paciente (omitido na ilustração) emitem pósitrons em *A* e *B*. Os dois fótons de 0,511 MeV produzidos pela aniquilação de um desses pósitrons se propagam em sentidos opostos e são detectados por um par de detectores de germanato de bismuto localizados em um anel que envolve o paciente. Circuitos de coincidência permitem determinar a trajetória dos fótons. (*b*) Os sinais colhidos pelos detectores são usados por um computador para gerar uma imagem da distribuição do radioisótopo no plano do anel. Esta sequência de imagens mostra o consumo de glicose nas células do cérebro, indicado pelo uso de um emissor de pósitrons com uma atividade de 7 mCi. A sequência começa no canto superior esquerdo. [*Cortesia de D.W. Townsend*, *Divisão de Medicina Nuclear*, *Hospital Universitário de Genebra*, *Genebra*, *Suíça*.]

Datação Através de Nuclídeos Radioativos

A radioatividade ocorre na natureza em consequência (1) da existência de nuclídeos instáveis associados às três cadeias que têm como ponto de partida nuclídeos pesados emissores α (veja a Seção 11-4); (2) da existência de radioisótopos de longa vida, como o ^{40}K ($t_{1/2} = 1{,}25 \times 10^9$ anos); (3) da produção de radioisótopos por reações entre prótons e nêutrons dos raios cósmicos e núcleos da atmosfera. Os três processos podem ser usados para estimar a idade de rochas e artefatos arqueológicos. Como era de se esperar, os isótopos de meia-vida muito grande, como o ^{40}K e o ^{232}Th ($t_{1/2} = 1{,}24 \times 10^{10}$ anos), são usados para determinar a idade de rochas "antigas", enquanto os isótopos de meia-vida menor, como o ^{14}C, são usados para determinar a idade de rochas mais "novas", outros materiais inorgânicos e amostras arqueológicas, como restos de antigas fogueiras, que contêm carbono.

A técnica usada para determinar a idade de uma amostra através de nuclídeos radioativos consiste em medir a razão entre as abundâncias de dois nuclídeos, pelo menos um dos quais é radioativo ou o produto final estável de uma cadeia de decaimentos,

e compará-la com a razão conhecida (ou presumida) das abundâncias dos mesmos nuclídeos na ocasião em que o material se formou. A Tabela 11-8 mostra a abundância natural de alguns radioisótopos usados para datação.

Datação com ^{14}C Uma técnica muito usada para determinar a idade de amostras arqueológicas que contêm carbono, como pedaços de osso ou carvão, se baseia na medida da razão entre o número de átomos de ^{14}C e o número de átomos de ^{12}C na amostra. O ^{14}C, que é radioativo, é produzido continuamente na atmosfera pela reação $^{14}N(n,p)^{14}C$. Os nêutrons são produzidos por raios cósmicos. O ^{14}C é um emissor β^- que decai novamente para ^{14}N através da reação

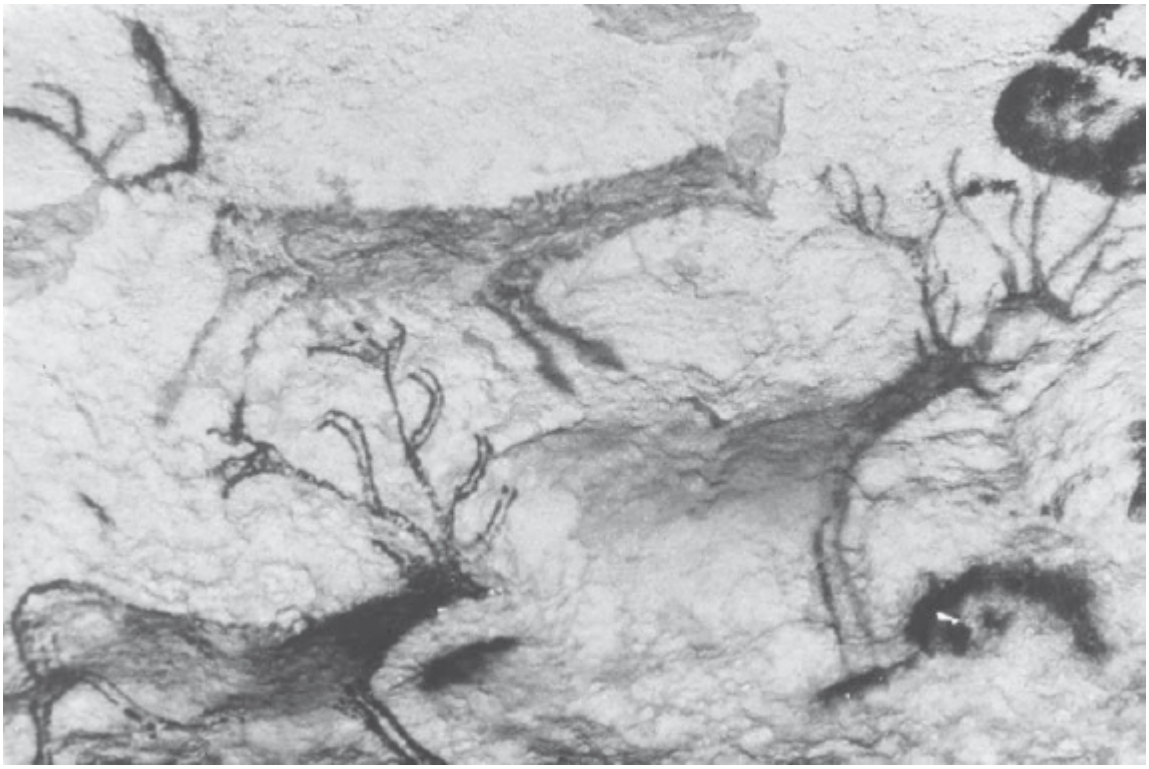
Tabela 11-8Abundância natural de alguns radioisótopos

Nuclídeo	$t_{1/2}$ (anos)	Abundância (%)	Filho
^{14}C	5730	$1,35 \times 10^{-10}$	^{14}N
^{40}K	$1,25 \times 10^{9}$	0,0117	^{40}A
^{87}Rb	$4,88 \times 10^{10}$	27,83	^{87}Sr
^{147}Sm	$1,06 \times 10^{11}$	15,0	^{143}Nd
^{176}Lu	$3,59 \times 10^{10}$	2,59	^{176}Hf
^{187}Re	$4,30 \times 10^{10}$	62,60	^{187}Os

$$^{14}C \rightarrow {}^{14}N + \beta^- + \overline{\nu_e} \qquad \textbf{11-90}$$

com uma meia-vida $t_{1/2} = 5730$ anos.[28]

Como as propriedades químicas dos átomos de ^{14}C são as mesmas dos átomos de carbono comum (^{12}C), os átomos de ^{14}C se combinam com oxigênio para formar moléculas de CO_2. Como os organismos vivos trocam CO_2 continuamente com a atmosfera, a razão $^{14}C/^{12}C$ nos organismos vivos é igual à relação de equilíbrio na atmosfera, que atualmente é igual a $1,35 \times 10^{-12}$. Quando um organismo morre, deixa de absorver ^{14}C da atmosfera, e a razão $^{14}C/^{12}C$ começa a diminuir por causa do decaimento do ^{14}C. Como ilustra o Exemplo 11-27, a taxa de decaimento do ^{14}C por grama de carbono pode ser usada para estimar quanto tempo se passou desde a morte do organismo.



"Grupo de veados", pintura rupestre na caverna de Lascaux, França. Pinturas pré-históricas como esta foram datadas pelo método do carbono 14; as mais antigas encontradas até agora têm entre 33.000 e 38.000 anos de idade, dependendo da razão $^{14}C/^{12}C$ utilizada nos cálculos. [*Art Resource.*]

EXEMPLO 11-27 **Taxa de Decaimento do ^{14}C em Seres Vivos** Calcule a taxa de decaimento do ^{14}C por grama de carbono em um organismo vivo, supondo que $^{14}C/^{12}C = 1{,}35 \times 10^{-12}$. A meia-vida do ^{14}C é 5730 anos.

SOLUÇÃO

1. Combinando a Equação 11-19 com a Equação 11-22, podemos expressar a taxa de decaimento R em função da meia-vida $t_{1/2}$ e do número de átomos radioativos, N:

$$R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{0{,}693}{t_{1/2}} N$$

2. Para determinar o valor de N, calculamos primeiro o número de átomos de ^{12}C por grama:

$$N_{^{12}C} = \frac{N_A}{M} = \frac{6{,}02 \times 10^{23}\ \text{átomos/mol}}{12\ \text{g/mol}}$$
$$= 5{,}02 \times 10^{22}\ \text{núcleos/g}$$

3. O número N de núcleos de ^{14}C por grama é, portanto,

$$N_{^{14}C} = 1{,}35 \times 10^{-12}\, N_{^{12}C}$$
$$= (1{,}35 \times 10^{-12})(5{,}02 \times 10^{22})$$
$$= 6{,}78 \times 10^{10}\ \text{núcleos/g}$$

4. Substituindo este valor de N na equação obtida no item 1, temos:

$$R = \frac{(0{,}693)(6{,}78 \times 10^{10}\ \text{g}^{-1})(60\ \text{s/min})}{(5730\ \text{anos})(3{,}16 \times 10^{7}\ \text{s/anos})}$$
$$= 15{,}6\ \text{decaimentos/min} \cdot \text{g}$$

EXEMPLO 11-28 **Metabolismo Basal e a Potência do ^{14}C** No Exemplo 11-27, foi calculado que a taxa de decaimento do ^{14}C nos organismos vivos é 15,6 decaimentos por minuto. Compare a potência produzida pelo decaimento do ^{14}C presente no corpo humano com o *metabolismo basal* (potência desenvolvida pelo corpo humano para manter funções vitais).

SOLUÇÃO

1. O metabolismo basal (a "queima" de alimento no corpo humano para manter funções vitais) libera aproximadamente 4,75 quilocalorias por litro de O_2 consumido e um individuo adulto em repouso consome, em média, 16 litros de O_2 por hora.* A potência desenvolvida por um indivíduo adulto em repouso é, portanto,

$$P_{MB} = 4{,}75\,\frac{\text{kcal}}{\ell O_2} \times 16\,\frac{\ell O_2}{\text{h}} \times 10^3\,\frac{\text{cal}}{\text{kcal}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} \times 4{,}186\,\frac{\text{J}}{\text{cal}}$$

$$P_{MB} = 88\text{ J/s} = 88\text{ W}$$

2. Supondo que a massa de um adulto médio é 68 kg e sabendo que o corpo humano contém 18% de carbono, a taxa de decaimento do ^{14}C em um adulto médio é

$$R = 68\text{ kg} \times 10^3\,\frac{\text{g}}{\text{kg}} \times 15{,}6\,\frac{\text{decaimentos}}{\text{min} \cdot \text{g}} \times \frac{1\text{ min}}{60\text{ s}} \times 0{,}18$$

$$R = 3{,}18 \times 10^3\text{ decaimentos/s} = 3{,}18 \times 10^3\text{ Bq}$$

3. Como a energia associado ao decaimento de um núcleo de ^{14}C é 157 keV, a potência produzida pelo decaimento do ^{14}C presente no corpo de um adulto é

$$P_{^{14}C} = 3{,}18 \times 10^3\,\frac{\text{decaimentos}}{\text{s}} \times 157 \times 10^3\,\frac{\text{eV}}{\text{decaimentos}} \times 1{,}60 \times 10^{-19}\,\frac{\text{J}}{\text{eV}}$$

$$P_{^{14}C} = 8{,}00 \times 10^{-11}\text{ J/s} = 8{,}00 \times 10^{-11}\text{ W}$$

Os cálculos acima mostram que a potência produzida pelo decaimento do ^{14}C é muito menor que o metabolismo basal de um adulto.

EXEMPLO 11-29 **Idade de um Fragmento de Osso** Existem razões para acreditar que um fragmento de osso encontrado no planalto central do México pertenceu a um soldado do exército de Cortez, que derrotou os astecas em 1520. O fragmento contém 200 g de carbono com uma taxa de decaimento de 400 decaimentos/min. A amostra pode pertencer a uma pessoa que morreu no século XVI?

SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, vamos fazer uma estimativa grosseira. Se o osso pertencesse a um organismo vivo, a taxa de decaimento seria 200 g × 15,6 decaimentos/min·g = 3120 decaimentos/min. Como 400/3120 ≈ 1/8 = $1/2^3$ (o valor exato é 1/7,8), a amostra deve ter decaído durante aproximadamente 3 meias-vidas, ou seja, 3 × 5730 = 17.190 anos. Para calcular a idade com mais precisão, observamos que, depois de n meias-vidas, a taxa de decaimento diminui de um fator de $(1/2)^n$. Assim, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{400}{3120}$$

ou seja,

$$2^n = \frac{3120}{400} = 7{,}8$$

$$n \ln 2 = \ln 7{,}8$$

$$n = \frac{\ln 7{,}8}{\ln 2} = 2{,}96$$

A idade do fragmento é, portanto, dada por $t = nt_{1/2} = 2{,}96 \times 5730 = 16.980$ anos. Assim, o fragmento de osso tem muito mais de 500 anos e não pode pertencer a um soldado do exército de Cortez. Por outro lado, pode ser usado como prova de que havia seres humanos na região há pelo menos 17.000 anos.

Observe que o cálculo do Exemplo 11-29 se baseia na suposição de que a concentração de ^{14}N na atmosfera e a intensidade dos raios cósmicos não mudaram nos últimos 17.000 anos. Na verdade, os dois parâmetros mudaram significativamente. Para calcular a idade de uma amostra com precisão a partir de medidas de ^{14}C, é preciso levar em conta (1) as flutuações do campo magnético terrestre, que afetam o fluxo de raios cósmicos; (2) as mudanças na composição da atmosfera, produzidas por fenômenos químicos e geológicos e também por variações da temperatura média da atmosfera. Por exemplo, existem várias indicações de que, há 9.000 anos, a razão $^{14}C/^{12}C$ era 1,5 vez maior que o valor atual. A razão também mudou significativamente nos últimos cem anos por causa da queima de combustíveis fósseis, que introduz uma proporção maior de ^{14}C na atmosfera, e dos testes nucleares, que produzem diretamente o ^{14}C. Graças aos modernos espectrômetros de massa, é possível medir a razão $^{14}C/^{12}C$ com suficiente precisão para estender a aplicabilidade do método do ^{14}C a amostras com mais de 50.000 anos de idade e alguns miligramas de massa. Para determinar a idade de amostras mais antigas, é preciso usar nuclídeos com meia-vida mais longa, como certos isótopos do urânio e do potássio.

Datação de Rochas A idade de muitas rochas pode ser estimada a partir da medida da abundância relativa de dois nuclídeos. O caso mais simples é aquele no qual um dos nuclídeos é radioativo e o outro é o produto estável do seu decaimento. De acordo com a Equação 11-18, se a concentração inicial do nuclídeo filho é nula, a idade da rocha é dada por

$$t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_0}{N_P}\right) = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(\frac{N_0}{N_P}\right) \qquad \textbf{11-91}$$

em que N_0 é a concentração inicial do nuclídeo pai, N_P é a concentração no instante t, λ é a constante de decaimento e $t_{1/2}$ é a meia-vida. Como $N_P + N_F = N_0$ em qualquer instante t, a Equação 11-91 pode ser escrita na seguinte forma:

$$t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ln\left(1 + \frac{N_F}{N_P}\right) \qquad \textbf{11-92}$$

na qual N_F/N_P é a razão entre as concentrações do nuclídeo filho e do nuclídeo pai no instante t.

Várias razões entre abundâncias isotópicas podem ser usadas como "relógios" geológicos, como as seguintes: $^{238}U/^{206}Pb$, $^{87}Rb/^{87}Sr$, $^{40}K/^{40}Ar$ e a razão dupla $^{238}U/^{234}U/^{230}Th$. Medidas desse tipo foram usadas para determinar a idade de rochas terrestres, rochas lunares, meteoritos e, por inferência, do próprio sistema solar. As rochas mais antigas da Terra têm aproximadamente $4{,}5 \times 10^9$ anos. Foi nessa ocasião que as rochas se solidificaram, fixando as razões isotópicas, que, daí em diante, mudaram apenas devido aos decaimentos. Curiosamente, todos os meteoritos têm a mesma idade, $4{,}5 \times 10^9$ anos, independentemente da composição e da época em que caíram na Terra. Isso significa que são fragmentos de outros astros que se formaram ao mesmo tempo que a Terra. Este valor para a idade da Terra é confirmado por várias medições independentes, como as das razões $^{238}U/^{235}U$ e $^{238}U/^{206}Pb$ e, mais recentemente, das razões $^{40}K/^{40}Ar$ e $^{87}Rb/^{87}Sr$.

EXEMPLO 11-30 **Datação com ^{87}Rb-^{87}Sr** A razão $^{87}Rb/^{87}Sr$ em uma rocha é 40,0. Qual é a idade da rocha?

SOLUÇÃO

Observe que, na Equação 11-92, o nuclídeo radioativo aparece no denominador; nesse caso, portanto, $N_F/N_P = 1/(^{87}Rb/^{87}Sr) = 1/40{,}0 = 0{,}025$. Substituindo na Equação 11-92 este valor e o valor da meia-vida do ^{87}Rb, obtido na Tabela 11-8, temos:

$$t = \frac{4{,}88 \times 10^{10}\ \text{anos}}{\ln 2}\ln(1 + 0{,}025) = \frac{4{,}88 \times 10^{10}\ \text{anos}}{0{,}693} \times 0{,}0247 = 1{,}74 \times 10^8\ \text{anos}$$

Trata-se, portanto, de uma rocha relativamente recente, muito mais nova que a idade da Terra ($4{,}5 \times 10^9$ anos).

A idade das rochas encontradas na superfície da Terra varia de zero a $3{,}7 \times 10^9$ anos. Nunca foi encontrada uma rocha com uma idade maior que o último valor. Por outro lado, as rochas trazidas da Lua pelos astronautas do programa Apolo têm idades que variam de 3,1 a $4{,}5 \times 10^9$ anos; não foi encontrada nenhuma rocha com uma idade menor que o primeiro valor. Esses

resultados sugerem o seguinte: (1) as rochas terrestres que se formaram há mais de 3,7 × 10 anos foram destruídas pela erosão ou afundaram no manto; (2) a fonte interna de calor da Lua (gravidade e radioatividade) se tornou insuficiente para fundir as rochas cerca de $1,5 \times 10^9$ anos depois que a Lua se formou; na Terra, este ponto até hoje não foi atingido.

Espectrometria de Massa com Acelerador

Usada inicialmente para permitir a datação de amostras mais antigas e aumentar a precisão da datação por ^{14}C de materiais arqueológicos, a espectrometria de massa com acelerador (AMS*) é uma técnica analítica ultrassensível na qual os átomos de interesse em uma amostra são contados diretamente. Para demonstrar como o método funciona, vamos usar como exemplo a datação por ^{14}C. Atualmente, a razão entre o número de átomos de ^{14}C e o número de átomos de ^{12}C nos tecidos dos seres vivos é da ordem de 10^{-12}. Assim, uma amostra de 1 g de carbono contém cerca de 5×10^{10} átomos de ^{14}C. Como a meia-vida do ^{14}C é 5730 anos, uma amostra de 1 g de carvão com 20.000 anos de idade emite aproximadamente uma partícula β^- por minuto. Para observar 10.000 decaimentos (o número necessário para conseguir uma precisão estatística de 1%), seria necessário medir os decaimentos durante uma semana e o teste envolveria apenas 2×10^{-6} dos átomos de ^{14}C presentes na amostra, ou seja, o método nesse caso seria muito pouco eficiente.



A espectrometria de massa, que mede *todos* os átomos de uma amostra (veja a Seção 3-1), poderia ser uma opção. Entretanto, os espectrômetros de massa convencionais não permitem medir razões entre concentrações de nuclídeos, como $^{14}C/^{12}C$ (ou entre os outros radioisótopos da Tabela 11-9 e nuclídeos estáveis), de forma confiável, por causa da presença de isóbaros e moléculas com massa aproximadamente igual à do radioisótopo de interesse. No caso do ^{14}C, os principais problemas são o ^{14}N do ar residual no interior do espectrômetro e as moléculas $^{12}CH_2$ e ^{13}CH, que podem estar presentes na própria amostra ou ser o resultado de uma contaminação. A AMS utiliza o mesmo princípio que a espectrometria de massa convencional, mas aproveita as características operacionais de aceleradores de partículas de médio porte, particularmente os cíclotrons e os aceleradores de Van de Graaf, para reduzir consideravelmente o ruído de fundo causado por ambiguidades de massa. Vamos concentrar nossa discussão no acelerador de Van de Graaf, que já foi descrito na Seção 11-7. Na Figura 11-66, o terminal positivo de alta-tensão está no centro do acelerador e as extremidades estão no potencial da terra. Os átomos da amostra são convertidos em íons negativos na fonte de íons. Os átomos da maioria dos elementos podem formar íons negativos, mas o nitrogênio é uma das exceções. Assim, a AMS remove, logo de saída, a contaminação introduzida pelo ^{14}N. Um ímã defletor faz os íons mudarem de trajetória de acordo com a massa que possuem. Os íons negativos são acelerados em direção ao terminal positivo, onde um componente conhecido como *stripper* remove vários elétrons, formando íons positivos. A maioria das moléculas se decompõe quando três ou mais elétrons são removidos. Os íons são acelerados ainda mais (até 50 a 100 MeV) antes de passarem por outro ímã defletor, que remove os fragmentos das moléculas, cuja massa é, em geral, diferente da do íon de interesse. Depois de passar por outro íon defletor que retira os últimos fragmentos moleculares, o feixe de alta energia penetra no detector, o chamado telescópio contador E-ΔE (veja a Figura 11-66). O detector ΔE, muito delgado, mede a energia perdida pelos átomos ao atravessá-lo, que, para partículas de mesma energia, é aproximadamente proporcional a Z^2. Em seguida, os íons são recolhidos no detector E, que mede a energia de cada íon, aproximadamente proporcional a mZ^2. Combinando os dois resultados, a AMS permite medir a massa e o número atômico de todos os átomos da amostra com alta precisão e um ruído de fundo extremamente baixo, o que torna possível usar amostras de apenas alguns miligramas.

Tabela 11-9 Alguns radioisótopos que podem ser medidos com AMS

Nuclídeo	Meia-vida (anos)	Isóbaro estável	Sensibilidade
^{3}H	12,3	^{3}He	10^{-14}
^{10}Be	$1,5 \times 10^{6}$	^{10}B	10^{-15}
^{14}C	$5,730 \times 10^{3}$	^{14}N	2×10^{-15}
^{26}Al	$7,40 \times 10^{5}$	^{26}Mg	10^{-15}
^{36}Cl	$3,01 \times 10^{5}$	^{36}S	2×10^{-15}
^{41}Ca	$1,0 \times 10^{5}$	^{41}K	10^{-15}

^{129}I	$1,6 \times 10^{7}$	^{129}Xe	10^{-14}

A Tabela 11-9 mostra alguns radioisótopos de longa vida cujos átomos podem ser contados por AMS. A técnica foi usada, por exemplo, para estimar o tempo de migração da água da superfície para aquíferos profundos medindo a concentração de ^{36}Cl, um nuclídeo produzido pelo bombardeio de átomos de argônio da atmosfera por raios cósmicos. Usando a AMS para contar os átomos de ^{14}C, os cientistas precisaram apenas de algumas fibras de tecido para descobrir que o famoso Sudário de Turim foi fabricado na Idade Média, por volta de 1300. A técnica revelou que Ötzi, o Homem do Gelo, descoberto em 1991 nos Alpes tiroleses, viveu no neolítico final, há cerca de 5200 anos. Em alguns meteoritos, a concentração de ^{26}Al, um nuclídeo de meia-vida relativamente curta, é bem maior que a que se poderia esperar se o nuclídeo fosse produzido exclusivamente por raios cósmicos, o que levanta questões interessantes a respeito da sua origem.



A múmia perfeitamente preservada de Ötzi, o Homem do Gelo, foi descoberta nos Alpes tiroleses em 1991. De acordo com as medidas de espectrometria de massa com acelerador, ele viveu entre 3300 e 3200 anos a.C. Medidas mais recentes (de 2003) da concentração relativa dos isótopos de oxigênio nos dentes e ossos de Ötzi mostraram que ele passou a vida perto do local onde foi encontrado. [©*South Tyrol Museum of Archeology*, *Italy*. *www.iceman.it*.]

Emissão de Raios X Induzida por Partículas

No método de análise conhecido como emissão de raios X induzida por partículas (PIXE*), o material de interesse é bombardeado com íons de baixa energia (alguns MeV), como prótons e partículas α. A interação eletrostática faz com que elétrons da camada *K* ou da camada *L* de átomos do alvo sejam ejetados. Como tanto os projéteis como os alvos são de dimensões atômicas, a seção de choque é bastante elevada, chegando a 1000 b para átomos de baixo *Z* e diminuindo gradualmente até cerca de 1 b para $Z = 82$ (Pb). As lacunas produzidas são logo preenchidas por elétrons provenientes das camadas externas. Este processo resulta na emissão de raios X ou elétrons Auger com uma energia característica, que pode ser usada para identificar os elementos do alvo (veja a Seção 4-4). Como as partículas usadas para bombardear o alvo têm uma energia relativamente pequena, não penetram profundamente na amostra, de modo que as interações ocorrem nas vizinhanças da superfície. Assim, não há vantagem em usar amostras espessas. A Figura 11-67*a* mostra o arranjo utilizado em um experimento típico. A sensibilidade do método é semelhante à da NAA, e a PIXE apresenta a vantagem de poder ser usada para todos os elementos acima de $Z = 10$, enquanto a NAA está restrita aos nuclídeos com uma seção de choque relativamente elevada para nêutrons térmicos. A maior desvantagem da PIXE está na ambiguidade dos resultados para certas linhas de raios X. Assim, por exemplo, a energia da linha L_α do Pb é 10,55 keV, enquanto a da linha K_α do As é 10,54 keV. A resolução dos detectores resfriados de Si(Li) é da ordem de 100 eV, insuficiente, portanto, para distinguir as duas linhas. A Figura 11-67*b* mostra um espectro de PIXE típico.

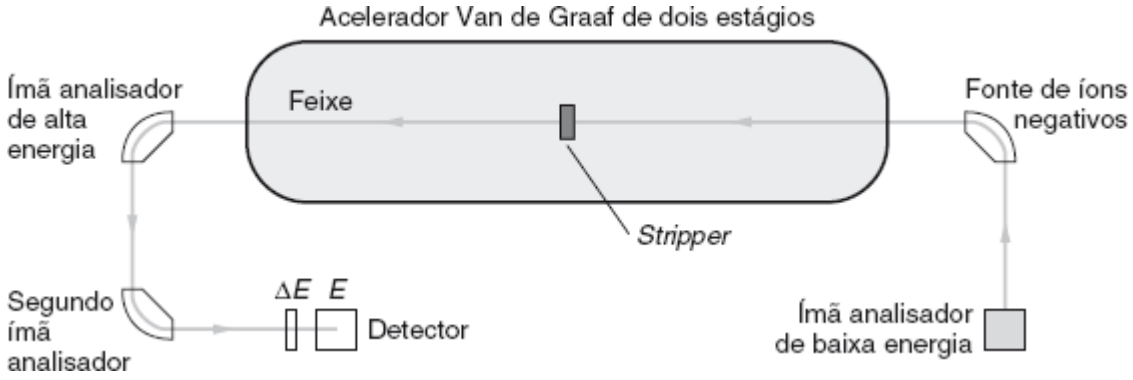


FIGURA 11-66 Diagrama esquemático de um sistema de espectrometria de massa com acelerador do tipo Van de Graaf.

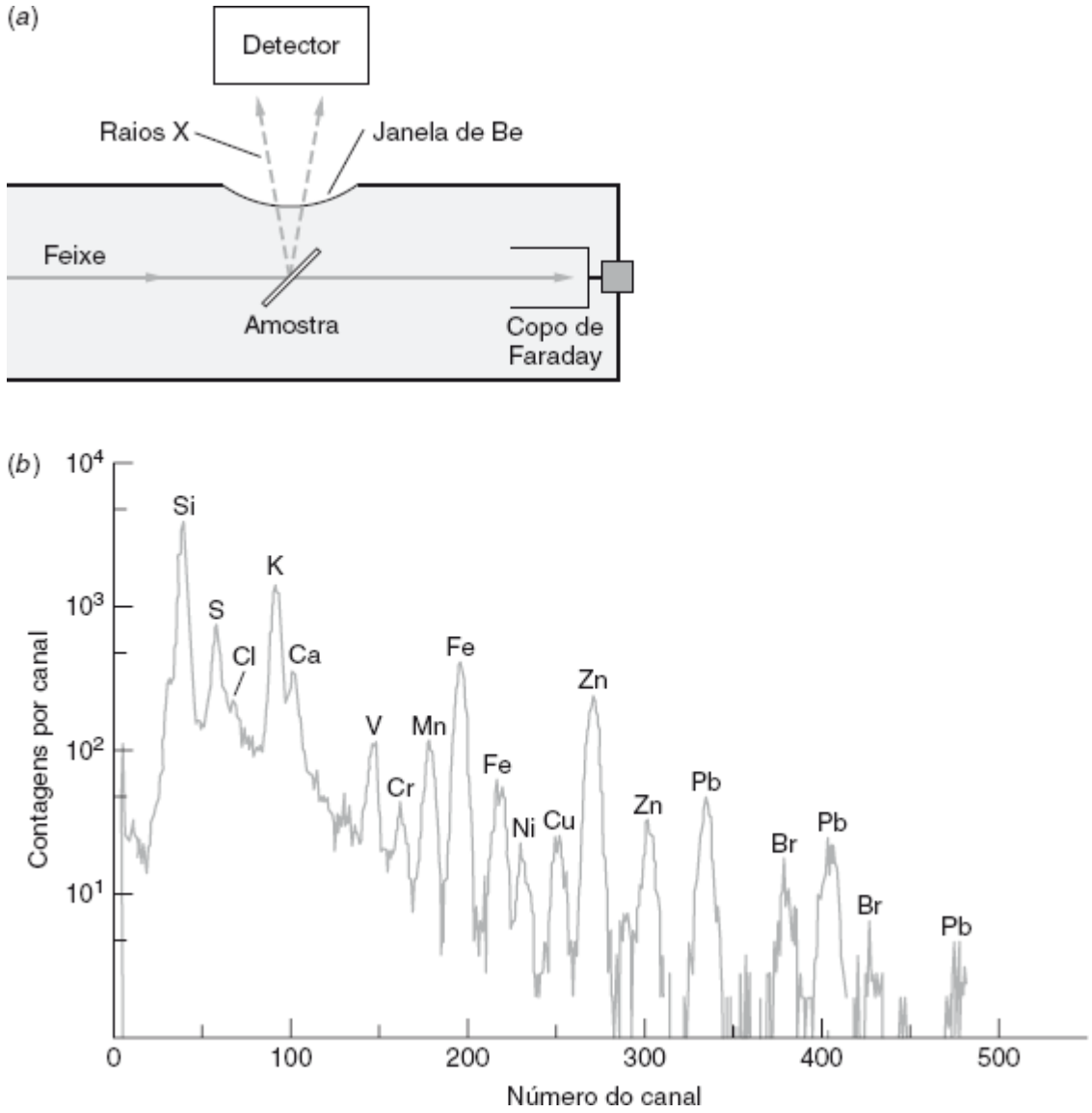


FIGURA 11-67 (*a*) Diagrama esquemático de um sistema de emissão de raios X induzida por partículas. (*b*) Espectro de PIXE de um aerossol bombardeado com prótons de 2 MeV. [S. A. E. Johansson e T. B. Johansson, *Nuclear Instruments and Methods*, **137**, 473, 1976.]

Exercícios

20. Se a razão $^{14}C/^{12}C$ fosse 1,5 vez maior que a mencionada no enunciado do Exemplo 11-28, a idade calculada no Exemplo 11-28 seria maior ou menor? Justifique sua resposta.

21. Alguns meteoritos contêm uma concentração mensurável de ^{26}Al, cuja meia-vida é apenas $7,4 \times 10^5$ anos. Apresente uma explicação viável para a presença do nuclídeo em meteoritos.

22. O ^{40}Ar é um gás em condições normais de temperatura e pressão. Explique por que, apesar disso, a idade de muitas rochas pode ser determinada a partir da razão $^{40}K/^{40}Ar$.

23. Explique por que a espectrometria de massa com acelerador permite realizar análises confiáveis usando apenas 1 mg de

material.



Leitura Suplementar

Quando os cientistas começaram a estudar a física atômica e nuclear, os efeitos biológicos da radiação ionizante (ou seja, das radiações de alta energia) eram praticamente desconhecidos. Entretanto, depois que as moças que pintavam os mostradores de relógios de pulso com tinta à base de rádio começaram a sofrer de câncer dos ossos, as pontas dos dedos dos primeiros operadores de raios X ficaram necrosadas e os jovens físicos que trabalhavam com cíclotrons tiveram catarata precoce, a sociedade começou a se preocupar com os riscos da exposição à radiação ionizante no lar, no local de trabalho e ao ar livre. A questão é discutida na Leitura Suplementar *Efeitos Biológicos da Radiação Ionizante*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 11-93 a 11-95 e as Tabelas 11-10 a 11-13.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. Composição dos núcleos	Os núcleos possuem Z prótons, N nêutrons e número de massa $A = Z + N$. Núcleos com o mesmo Z e N e A diferentes são chamados de isótopos. Os núcleons são férmions e possuem um momento magnético intrínseco.
2. Propriedades dos núcleos no estado fundamental	
Tamanho e forma	O raio médio da distribuição de carga do núcleo é dado por $$R = (1{,}07 \pm 0{,}02)A^{1/3}\ \text{fm} \qquad \textbf{11-5}$$ Os raios variam de aproximadamente 1 fm para o próton até aproximadamente 10 fm para os núcleos mais pesados. Os núcleos têm forma quase esférica, com raras exceções.
Energia de ligação e massa	A energia de ligação do núcleo é dada por $$B_{\text{nuclear}} = ZM_{\text{H}}c^2 + Nm_nc^2 - M_Ac^2 \qquad \textbf{11-11}$$
Momento magnético	Os momentos magnéticos do próton e do nêutron são dados por $$(\mu_p)_z = +2{,}79285\ \mu_N$$ $$(\mu_n)_z = -1{,}91304\ \mu_N$$ em que $\mu_N = e\hbar/2m_p$ é o magnéton nuclear.
3. Radioatividade	A taxa de decaimento R dos núcleos radioativos é dada por $$R = -\frac{dN}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t} \qquad \textbf{11-19}$$ em que λ é a constante de decaimento. N_0 e R_0 são o número de núcleos e a constante de decaimento no instante $t = 0$.

Meia-vida

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0{,}693\tau \qquad \textbf{11-22}$$

em que $\tau = 1/\lambda$ é a meia-vida.

Unidades

$$1 \text{ decaimento/s} = 1 \text{ becquerel} = 1 \text{ Bq} \qquad \textbf{11-23}$$

4. Decaimentos alfa, beta e gama

Essas são as três formas mais comuns de decaimento. As partículas alfa são núcleos de ^{4}He, as partículas beta são elétrons e pósitrons e os raios gama são ondas eletromagnéticas.

5. Força nuclear

A força nuclear é:

(*a*) Cerca de 100 vezes mais intensa que a força eletrostática

(*b*) De curto alcance (≈ 0 para $r > 3$ fm)

(*c*) Independente da carga elétrica

(*d*) Saturada

(*e*) Dependente da orientação do spin

A força nuclear é considerada uma força de câmbio na qual a atração entre um par de núcleons se deve à troca de píons virtuais. O alcance R da força, de acordo com o princípio de indeterminação, é dado por

$$R = c\Delta t = c\hbar/\Delta E = \hbar/mc \qquad \textbf{11-50}$$

em que m é a massa do píon virtual.

6. Modelo de camadas

Um modelo semelhante ao usado para classificar os elétrons atômicos, mas que leva em conta o forte acoplamento spin-órbita dos núcleons, é capaz de explicar a distribuição dos prótons e nêutrons em camadas. De acordo com o modelo, os números mágicos 2, 8, 20, 28, 50, 82 e 126 estão associados a camadas completas. O modelo de camadas permite prever com relativo sucesso os spins e os momentos magnéticos dos núcleons, particularmente nas vizinhanças de camadas completas.

7. Reações nucleares

O sinal do valor de Q de uma reação X(x,y)Y determina se a reação é endotérmica ou exotérmica. O valor de Q é dado por

Seção de choque

$$Q = (m_x + m_X - m_y - m_Y)c^2 \qquad \textbf{11-58}$$

A seção de choque σ é uma medida do tamanho efetivo de um núcleo para uma determinada reação nuclear.

$$\sigma = \frac{R}{I} \qquad \textbf{11-58}$$

em que R é o número de reações por unidade de tempo e por núcleo e I é o fluxo de partículas incidentes.

8. Fissão e fusão	Fissão é o processo através do qual núcleos pesados como o ^{235}U e o ^{239}Pu capturam um nêutron e se dividem em dois núcleos de massa intermediária. Cada fissão libera aproximadamente 1 MeV/núcleon. Fusão é a reação na qual dois núcleos leves, como ^{2}H e ^{3}H, se fundem para produzir um núcleo mais pesado. Cada fusão libera de 1 a 4 MeV/núcleon.
9. Aplicações	Entre as aplicações das reações nucleares na medicina estão o uso da radiação nuclear para o diagnóstico e tratamento de doenças. A ressonância magnética nuclear é uma alternativa para as radiografias convencionais, com a vantagem de que os danos biológicos causados pela radiação de baixa energia utilizada nos exames de ressonância magnética são mínimos ou inexistentes. A tomografia por emissão de pósitrons (PET) permite obter imagens tridimensionais do interior do corpo humano. Na datação radioativa, as concentrações relativas de certos radioisótopos naturais são usadas para determinar a idade de rochas e artefatos. A espectrometria de massa com acelerador e a análise por ativação de nêutrons são técnicas altamente sensíveis, que permitem medir concentrações muito pequenas da maioria dos elementos da tabela periódica.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Beyer, R. (ed.), *Foundations of Nuclear Physics*, Dover, New York, 1949. Esta brochura contém 13 artigos originais escritos por Anderson, Chadwick, Cockroft e Walton, Curie e Joliot, Fermi (dois artigos), Frisch e Stern, Gamow, Hahn e Strassmann, Lawrence e Livingston, Rutherford (dois artigos) e Yukawa.

Biological Effects of Ionizing Radiation (*BEIR III*), National Academy of Sciences/National Research Council, Washington, DC, 1988.

Das, A., e T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, Wiley, New York, 1994.

Fermi, E., *Nuclear Physics*, ed. rev., University of Chicago Press, Chicago, 1974.

Frauenfelder, H., *The Mössbauer Effect*, W. A. Benjamin, New York, 1962.

Frauenfelder, H. e E. M. Henley, *Subatomic Physics*, 2d ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.

Lilley, J., *Nuclear Physics*: *Principles and Applications*, Wiley, Chichester, UK, 2001.

Mayer, M. G., e J. H. D. Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, Wiley, New York, 1955.

Nero, A.V., Jr., *A Guidebook to Nuclear Reactors*, University of California Press, Berkeley, 1979.

Priest, J., *Energy: Principles*, *Problems*, *and Alternatives*, 5th ed., Kendall/Hunt, Dubuque, Iowa, 2000.

Segrè, E., *Nuclei and Particles*, 2d ed., Benjamin/Cummings, Menlo Park, Calif., 1977.

Walecka, J. D., *Theoretical Nuclear and Subnuclear Physics*, 2d ed., Imperial College Press/World Scientific, London, 2004. A Parte 1 é apropriada para este capítulo.

Yang, F. e J. H. Hamilton, *Modern Atomic and Nuclear Physics*, ed. rev., World Scientific, London, 2010. Os Capítulos 9 a 13 são apropriados para este capítulo.

Notas

1. Antoine Henri Becquerel (1852-1908), físico francês. Ocupou no Museu de História Natural de Paris o mesmo cargo de professor de física que o pai e o avô; sua pesquisa da fluorescência do sulfato duplo de urânio e potássio foi uma continuação do trabalho que o pai havia começado. Pela descoberta da radioatividade, que revolucionou as teorias existentes da estrutura atômica, recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1903, juntamente com Marie e Pierre Curie.

2. O nome “radioatividade” foi usado pela primeira vez por Marie Curie em 1898.

3. Essas descobertas foram tão importantes para a física nuclear que os quatro pesquisadores receberam mais tarde o Prêmio Nobel: James Chadwick em 1935, Carl Anderson em 1936 (com Victor Hess, o descobridor dos raios cósmicos) e John Cockcroft e Ernest Walton em 1951.

4. Os Estados Unidos foram responsáveis por cerca de 31% da produção mundial de eletricidade nuclear em 2010.

5. O termo *tomografia* vem do grego *tomos*, que significa "fatia", e *graphé*, que significa "imagem". Tomografia é a representação visual de um plano do objeto que está sendo examinado.

6. Robert Hofstadter (1915-1990), físico americano. Seus experimentos de espalhamento de elétrons também revelaram que os prótons e nêutrons possuem uma estrutura interna, abrindo caminho para uma melhor compreensão da estrutura da matéria. Por este trabalho, recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1961 juntamente com Rudolf Mössbauer.

7. Veja, por exemplo, a Seção 23-2 de P. A. Tipler e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed., W. H. Freeman, and Co. New York, 2008.

8. Este número (257) pode mudar (diminuir) porque novas observações podem mostrar que certos nuclídeos, antes considerados estáveis, são, na verdade, nuclídeos instáveis com uma meia-vida extremamente longa. Assim, por exemplo, foi descoberto em 2003 que o ^{209}Bi, que era considerado o nuclídeo estável de maior massa, é um emissor alfa com uma meia-vida de aproximadamente $2{,}0 \times 10^{19}$ anos.

9. Veja, por exemplo, a Seção 26-2 de P. A. Tipler e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed., W. H. Freeman, and Co. New York, 2008.

10. Veja P. A. Seeger, *Nuclear Physics*, **25**, 1 (1961).

11. Desdobramentos hiperfinos também podem ser causados pelo momento quadrupolar elétrico do núcleo (Equação 11-8) e por campos elétricos e magnéticos externos. O efeito da massa reduzida (efeito isotópico), discutido na Seção 4-3, também é considerado um efeito hiperfino.

12. Na verdade, o valor do momento magnético do elétron não é exatamente igual ao previsto pela equação relativística de Dirac, um magnéton de Bohr. Cálculos mais precisos, realizados com base na eletrodinâmica quântica, permitem reduzir a diferença entre os resultados teóricos e experimentais a menos de uma parte em 10^8, no que é considerado como uma das concordâncias mais notáveis entre a teoria e os experimentos em toda a física.

13. Existem algumas exceções. Uma alternativa para o decaimento β^+, discutido na Seção 11-4, é a captura eletrônica, na qual um elétron orbital é capturado pelo núcleo. A probabilidade de que este processo ocorra depende da densidade de probabilidade dos elétrons, que é ligeiramente modificada quando o material é submetido a altas pressões.

14. Entre os léptons estão o elétron e os neutrinos que são emitidos nos decaimentos β; veja o Capítulo 12.

15. Rudolf Ludwig Mössbauer (1929-), físico alemão. Sua descoberta da emissão e absorção sem recuo dos raios gama, realizada quando era estudante de doutorado em Munique, permitiu a observação do desvio gravitacional para o vermelho previsto pela teoria da relatividade geral, realizada por R. V. Pound e G. A. Rebka em 1960. Mössbauer recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1961 juntamente com Robert Hofstadter (veja a nota 6).

16. Observe que este potencial eletrostático corresponde a uma força de quase 60 N, ou seja, ao peso de uma massa de quase 6 kg! Entretanto, esta força não está agindo sobre 6 kg, mas sobre apenas $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg.

17. Hideki Yukawa (1907-1981), físico japonês. O artigo no qual apresentou a teoria da força nuclear baseada na troca de mésons foi o primeiro trabalho de sua autoria a ser publicado em uma revista científica. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1949 pela descoberta.

18. Veja, por exemplo, a Seção 30-3 de P. A. Tipler e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed., W. H. Freeman, and Co. New York, 2008.

19. Algumas partículas da massa intermediária entre a do elétron e a do próton tinham sido observadas nos raios cósmicos mais ou menos na mesma época em que Yukawa propôs sua teoria da força nuclear. Ele enviou um artigo à revista *Nature* em 1937 sugerindo que as partículas podiam ser os mésons de sua teoria, mas a revista recusou o artigo. Mais tarde verificou-se que as partículas eram múons, um produto do decaimento dos píons, os verdadeiros mésons da teoria de Yukawa.

20. Maria Goeppert-Mayer (1906-1972), física alemã naturalizada americana, e Johannes Hans Daniel Jensen (1907-1973), físico alemão. Goeppert-Mayer descendia de uma longa linhagem de professores universitários, enquanto Jensen era filho de um jardineiro. Os dois escreveram um livro famoso (pelo menos entre os físicos) no qual descreveram o modelo de camadas. Por esse trabalho, receberam o Prêmio Nobel de Física de 1963 juntamente com Eugene Wigner.

21. No acoplamento *j-j*, o spin e o momento angular orbital de cada partícula se combinam para formar o momento angular total **j** da partícula e os momentos angulares totais **j** das partículas se combinam para formar o spin total **J**; no acoplamento *L-S*, os spins de todas as partículas se combinam para formar o spin total **S**, os momentos angulares orbitais de todas as partículas se combinam para formar o momento angular total **L** e o spin total **S** e o momento angular total **L** se combinam para formar o momento total **J**.

22. Essa variação, que está presente apenas nas reações (n,γ) com nêutrons de energia relativamente baixa, foi observada pela primeira vez por Emilio Segrè em 1935.

23. A primeira dessas ressonâncias foi observada inesperadamente nos resultados de um experimento de irradiação de prata por

nêutrons executado por Edoardo Amaldi e outros na manhã de 22 de outubro de 1934. Às 3 horas da tarde, Enrico Fermi já havia encontrado a explicação correta para o estranho fenômeno. Um artigo descrevendo a descoberta foi escrito na mesma noite e enviado à revista científica *Ricerca Scientifica* na manhã seguinte, menos de 24 horas após a descoberta!

24. Otto Hahn (1879-1968), físico-químico alemão, e Fritz Strassmann (1902-1980), químico alemão. Os dois cientistas observaram que os núcleos de urânio bombardeados com nêutrons se fragmentavam, mas evitaram falar em fissão, já que o fenômeno nunca tinha sido observado anteriormente. Hahn recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1944 pela descoberta.

25. Na verdade, o reator de Fermi foi o primeiro reator nuclear de fissão *construído pelo homem*. Há cerca de 2 bilhões de anos, reações em cadeia ocorreram espontaneamente em vários depósitos naturais de urânio situados na África Ocidental, na região de Oklo, que hoje pertence ao Gabão. As reações prosseguiram por 150 milhões de anos, com uma potência média de 100 kW, antes de se extinguirem naturalmente. A história dessa descoberta, um exemplo fascinante de investigação científica, está contada em G. A. Cowan, "A Natural Fission Reactor", *Scientific American*, July 1976, p. 36. Os depósitos não estão sendo mais explorados comercialmente.

26. Uma discussão elementar de uma garrafa magnética pode ser encontrada na Seção 26-2 de P. A. Tipler e G. Mosca, *Physics for Scientists and Engineers*, 6th ed., W. H. Freeman, and Co. New York, 2008.

27. Godfrey Newbold Hounsfield (1919-2004), engenheiro inglês, e Allan McLeod Cormack (1924-1998), físico sul-africano naturalizado americano, receberam o Prêmio Nobel de Medicina de 1979 por essa invenção.

28. A técnica da datação com ^{14}C foi desenvolvida por Willard Frank Libby (1908-1980), um químico americano que recebeu o Prêmio Nobel de Química de 1960 por esse trabalho.

Problemas

NÍVEL I

Seção 11-1 A Composição do Núcleo

11-1. Determine o número de prótons e o número de nêutrons dos seguintes isótopos: ^{18}F, ^{25}Na, ^{51}V, ^{84}Kr, ^{120}Te, ^{148}Dy, ^{175}W e ^{222}Rn.

11-2. A energia dos elétrons emitidos nos decaimentos β é, no máximo, da ordem de 1 MeV. Use este fato e o princípio de indeterminação para mostrar que não podem existir elétrons no interior do núcleo.

11-3. O spin do estado fundamental do ^{6}Li, que constitui 7,5% do lítio natural, é zero. Mostre que este valor não é compatível com um modelo segundo o qual o núcleo é formado por prótons e elétrons.

11-4. O momento magnético do ^{14}N é 0,4035 μ_N. Mostre que este valor não é compatível com um modelo segundo o qual o núcleo é formado por prótons e elétrons.

11-5. Suponha que o dêuteron é formado por dois prótons e um elétron (o que não é verdade!). Com base nesta hipótese, determine o spin e o momento magnético do estado fundamental do dêuteron e compare os resultados com os valores que aparecem na Tabela 11-1.

Seção 11-2 Propriedades dos Núcleos no Estado Fundamental

11-6. Escreva os símbolos de pelo menos dois isótopos e dois isótonos dos seguintes nuclídeos: (*a*) ^{18}F; (*b*) ^{208}Pb; (*c*) ^{120}Sn.

11-7. Escreva os símbolos de pelo menos dois isóbaros e um isótopo dos seguintes nuclídeos: (*a*) ^{14}O; (*b*) ^{63}Ni; (*c*) ^{236}Np.

11-8. Use a Equação 11-3 para calcular a massa específica da matéria nuclear em unidades do SI, escrevendo a massa dos núcleos na forma aproximada $A \times u$, em que A é o número de massa.

11-9. Use as massas que aparecem na tabela do Apêndice A para determinar a energia de ligação total e a energia de ligação por núcleon para os seguintes nuclídeos: (*a*) ^{9}Be; (*b*) ^{13}C; (*c*) ^{57}Fe.

11-10. Use a Equação 11-3 para determinar o raio dos seguintes núcleos: (*a*) ^{16}O; (*b*) ^{56}Fe; (*c*) ^{197}Au; (*d*) ^{238}U.

11-11. Calcule a energia necessária para remover um nêutron (*a*) do ^{4}He; (*b*) do ^{7}Li; (*c*) do ^{14}N.

11-12. Use a equação de Weizsäcker para calcular a massa do ^{23}Na. Determine a diferença percentual entre o resultado e o valor que aparece na tabela do Apêndice A.

11-13. Determine o "raio da distribuição de carga" dado pela Equação 11-5 e o "raio da força nuclear" dado pela Equação 11-7 para os seguintes nuclídeos: (*a*) ^{16}O; (*b*) ^{63}Cu; (*c*) ^{208}Pb.

11-14. O ^{39}Ca e o ^{39}K formam um par de nuclídeos especulares, no qual o ^{39}Ca decai para ^{39}K por emissão β^+. Calcule a diferença de energia entre os dois nuclídeos e use as Equações 11-1 e 11-2 para calcular o raio do ^{40}Ca.

Seção 11-3 Radioatividade

11-15. A taxa de contagem de uma fonte radioativa é 4000 contagens por segundo no instante $t = 0$. Depois de 10 s, a taxa de contagem diminui para 1000 contagens por segundo. (*a*) Qual é a meia-vida da fonte? (*b*) Qual é a taxa de contagem depois de 20 s?

11-16. A taxa de contagem de uma certa fonte é 2000 contagens por segundo no instante $t = 0$. A meia-vida da fonte é 2 min. (*a*) Qual é a taxa de contagem após 4 min? (*b*) Qual é a taxa após 6 min? (*c*) Qual é a taxa após 8 min?

11-17. Uma amostra de um isótopo radioativo tem uma atividade de 115,0 Bq no instante em que é retirada do reator nuclear responsável por sua formação. Depois de 2 h 15 min, a atividade diminui para 85,2 Bq. (*a*) Calcule a constante de decaimento e a meia-vida da amostra. (*b*) Quantos núcleos radioativos havia inicialmente na amostra?

11-18. A meia-vida do rádio é 1620 anos. (*a*) Calcule o número de desintegrações por segundo de 1 g de rádio e mostre que a taxa de desintegração é aproximadamente igual a 1 Ci. (*b*) Calcule o valor aproximado da energia da partícula α no decaimento $^{226}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}\text{Rn} + \alpha$, desprezando a energia associada ao recuo do núcleo de Rn. (Use a tabela de massas do Apêndice A.)

11-19. A taxa de contagem de uma fonte radioativa é 8000 contagens por segundo no instante $t = 0$. Dez minutos depois, a taxa diminui para 1000 contagens por segundo. (*a*) Qual é a meia-vida da fonte? (*b*) Qual é a constante de decaimento? (*c*) Qual é a taxa de contagem depois de 1 minuto?

11-20. A taxa de contagem de uma fonte radioativa é medida a cada minuto. Os resultados são os seguintes, em contagens por segundo: 1000, 820, 673, 552, 453, 371, 305, 250, . . . (*a*) Faça um gráfico da taxa de contagem em função do tempo e (*b*) use o gráfico para estimar a meia-vida da fonte. (*c*) Qual é o resultado aproximado da contagem que se segue a 250 contagens por segundo?

11-21. O nuclídeo ^{62}Cu é produzido a uma taxa constante [a partir, por exemplo, de ^{63}Cu submetido a raios X de alta energia, através da reação (γ, n)] e sofre decaimento β^+ com uma meia-vida de 10 min. Quanto tempo é necessário para produzir 90% do valor de equilíbrio de ^{62}Cu?

11-22. A constante de decaimento do ^{235}U é $9{,}8 \times 10^{-10}$ anos^{-1}. (*a*) Determine a meia-vida do ^{235}U. (*b*) Quantos decaimentos ocorrem por segundo em uma amostra de 1,0 μg de ^{235}U? (*c*) Quantos átomos de ^{235}U permanecem em uma amostra de 1,0 μg após 10^6 anos?

11-23. A constante de decaimento do ^{22}Na é 0,266 anos^{-1}. (*a*) Determine a meia-vida do ^{22}Na. (*b*) Qual é a atividade de uma amostra de 1,0 g de ^{22}Na? (*c*) Qual é a atividade da amostra após 3,5 anos? (*d*) Quantos átomos de ^{22}Na restam na amostra após 3,5 anos?

Seção 11-4 Decaimentos Alfa, Beta e Gama

11-24. O único isótopo estável do sódio é o ^{23}Na. Qual o tipo mais provável de radioatividade (*a*) do ^{22}Na e (*b*) do ^{24}Na?

11-25. Use a Figura 11-16 para determinar os valores de A e B na Equação 11-30.

11-26. Faça um diagrama semelhante ao da Figura 11-18 para a cadeia de decaimentos $4n + 1$ que começa com o ^{237}Np, mas não é observada na natureza. (Use os dados do Apêndice A.)

11-27. Mostre que a partícula α emitida no decaimento do ^{232}Th tem uma energia de 4,01 MeV, que corresponde a 98% por cento da energia total do decaimento.

11-28. O ^{7}Be decai quase exclusivamente por captura eletrônica para ^{7}Li, com uma meia-vida de 53,3 d. Como seria alterado o decaimento (*a*) se uma amostra de ^{7}Be fosse submetida a uma grande pressão e (*b*) se os quatro elétrons fossem removidos de todos os átomos de ^{7}Be da amostra?

11-29. Determine a energia do neutrino emitido no processo de decaimento do ^{67}Ga para o estado fundamental do ^{67}Zn por captura eletrônica.

11-30. Determine a energia máxima da partícula β^- emitida no decaimento do ^{72}Zn.

11-31. No Exemplo 11-13, vimos que o ^{233}Np pode decair emitindo uma partícula α. Mostre que o decaimento por emissão de um único núcleon é proibido para este nuclídeo.

11-32. Com a ajuda das Figuras 11-19 e 11-20, faça uma lista das energias de todos os raios γ que podem ser emitidos pelo ^{223}Ra produzido pelo decaimento α do ^{227}Th.

11-33. O ^{8}Be apresenta um comportamento incomum para nuclídeos de baixo Z, pois decai por emissão de duas partículas α. Por que o ^{8}Be é instável em relação ao decaimento α?

11-34. O ^{80}Br pode sofrer os três tipos de decaimento β. (*a*) Escreva as equações de decaimento para os três casos. (*b*) Calcule as energias de decaimento para os três casos.

Seção 11-5 A Força Nuclear

11-35. Supondo que a distância média entre dois prótons no C é igual ao raio do núcleo, calcule a força de repulsão eletrostática e a força de atração gravitacional entre os prótons. Se o potencial nuclear a que estão submetidos os prótons é de 50 MeV para distâncias de até 3 fm, compare a força nuclear com as outras duas forças.

11-36. Suponha que o alcance da força nuclear é de 5 fm. Calcule a massa (em MeV/c^2) de uma partícula capaz de mediar uma força desse tipo.

11-37. A força repulsiva associada ao "caroço duro" que existe no centro do núcleo pode se dever, como a interação forte, à troca de uma partícula. Calcule a massa desta partícula hipotética, supondo que o alcance da força repulsiva é igual a 0,25 fm, o raio do caroço.

Seção 11-6 O Modelo de Camadas

11-38. Os núcleos da lista abaixo têm um núcleon a mais ou a menos que uma camada completa. (O $^{14}_{29}$Si, por exemplo, tem a camada $1d_{5/2}$ completa tanto para nêutrons como para prótons, mais um nêutron na camada $2s_{1/2}$.) Use o modelo de camadas para prever o momento angular orbital e o momento angular total desses núcleos.

$^{29}_{14}$Si $^{37}_{17}$Cl $^{71}_{31}$Ga $^{59}_{27}$Co $^{73}_{32}$Ge $^{33}_{16}$S $^{87}_{38}$Sr

11-39. Use o modelo de camadas para prever os momentos magnéticos nucleares dos isótopos do Problema 11-38.

11-40. As linhas do espectro atômico do ^{14}N apresentam uma estrutura hiperfina que mostra que o estado fundamental está desdobrado em três níveis muito próximos. Qual deve ser o spin do nuclídeo ^{14}N no estado fundamental?

11-41. Quais, entre os núcleos a seguir, possuem todas as camadas de nêutrons completas: ^{36}S, ^{50}V, ^{50}Ca, ^{53}Mn, ^{61}Ni, ^{82}Ge, ^{88}Sr, ^{93}Ru, ^{94}Ru, ^{131}In, ^{145}Eu?

11-42. Faça diagramas como o da Figura 11-9 para os estados fundamentais do ^{3}H, ^{3}He, ^{14}N, ^{14}C, ^{15}N, ^{15}O e ^{16}O.

11-43. Quais, entre os núcleos a seguir, possuem todas as camadas de prótons completas: ^{3}He, ^{19}F, ^{12}C, ^{40}Ca, ^{50}Ti, ^{56}Fe, ^{60}Ni, ^{60}Cu, ^{90}Zr, ^{124}Sn, ^{166}Yb, ^{204}Pb?

11-44. (*a*) Use a Figura 11-35 para desenhar um diagrama como o da Figura 11-9 para o ^{13}N. (*b*) Qual é o valor esperado de *j* nesse caso? (*c*) Qual é o valor esperado de *j* no primeiro estado excitado? (*d*) Desenhe um diagrama como o da Figura 11-9 para o primeiro estado excitado. Existe apenas um diagrama possível?

11-45. Use a Figura 11-35 para prever os valores de *j* para os estados fundamentais do ^{30}Si, ^{37}Cl, ^{55}Co, ^{90}Zr e ^{107}In.

Seção 11-7 Reações Nucleares

11-46. Usando os dados do Apêndice A, determine o valor de *Q* para as seguintes reações: (*a*) ^{2}H + ^{2}H → ^{3}H + ^{1}H + *Q*; (*b*) ^{3}He(*d*, *p*)^{4}He; (*c*) ^{6}Li + *n* → ^{3}H + ^{4}He + *Q*.

11-47. (*a*) Determine o valor de *Q* para a reação ^{3}H + ^{1}H → ^{3}He + *n* + *Q*. (*b*) Determine o valor mínimo da energia cinética dos núcleos incidentes para que esta reação ocorra em um acelerador de partículas se núcleos estacionários de ^{1}H forem bombardeados com núcleos de ^{3}H. (*c*) Determine o valor mínimo da energia cinética dos núcleos incidentes se núcleos estacionários de ^{3}H forem bombardeados com núcleos de ^{1}H.

11-48. Qual é o núcleo composto produzido pela reação de dêuterons com ^{14}N? Quais são os possíveis núcleos e partículas produzidos por esta reação?

11-49. Usando os dados do Apêndice A, determine o valor de *Q* para as seguintes reações: (*a*) ^{12}C(α,*p*)^{15}N; (*b*) ^{16}O(*d*,*p*)^{17}O.

11-50. A seção de choque da reação ^{75}As(*n*,γ)^{76}As é 4,5 b para nêutrons térmicos. Um cristal natural de As, de dimensões 1 cm × 2 cm × 30 μm, é exposto a um fluxo de nêutrons térmicos de 0,95 × 10^{13} nêutrons/cm^2·s. Calcule a velocidade da reação. (O arsênico natural é constituído por 100% de ^{75}As. A massa específica do arsênio é 5,73 g/cm^3.)

11-51. Escreva três reações diferentes que levem aos seguintes produtos: (*a*) *n* + ^{23}Na; (*b*) *p* + ^{14}C; (*c*) *d* + ^{31}P.

11-52. Escreva o símbolo correto para a partícula ou nuclídeo representado por um *x* nas seguintes reações: (*a*) ^{14}N(*n*, *p*)*x*; (*b*) ^{208}Pb(*n*, *x*)^{208}Pb; (*c*) *x*(α, *p*)^{61}Cu; (*d*) ^{9}Be(*x*, *n*)^{12}C; (*e*) ^{16}O(*d*, α)*x*; (*f*) ^{162}Dy(α, 6*n*)*x*; (*g*) *x*(*d*, *n*)^{4}He; (*h*) ^{90}Zr(*d*, *x*)^{91}Zr.

Seção 11-8 Fissão e Fusão

11-53. A primeira reação de fusão do universo, que aconteceu alguns minutos após o Big Bang, pode ser descrita pela equação *n* + *p* → *d* + γ. Calcule o valor de *Q* para esta reação.

11-54. Calcule o número de fissões por segundo para que um reator produza uma potência de 500 MW, supondo uma energia média de 200 MeV por fissão.

11-55. Se o fator de reprodução de um reator é *k* = 1,1, determine o número de gerações necessário para que a potência (*a*) seja multiplicada por 2; (*b*) seja multiplicada por 10; (*c*) seja multiplicada por 100. Determine o tempo necessário para que isso

aconteça, em cada caso, (*d*) se não houver nêutrons retardados e, portanto, o tempo entre gerações for 1 ms; (*e*) se houver nêutrons retardados e o tempo entre gerações for 100 ms.

11-56. Escreva as várias reações possíveis quando o ^{235}U captura um nêutron térmico e 1*n*, 2*n*, 3*n* ou 4*n* são produzidos.

11-57. Calcule a taxa com a qual núcleos de ^{2}H devem ser fornecidos a um reator de fusão de 500 MW, supondo uma energia média de 17,6 MeV/fusão.

11-58. De acordo com a Figura 11-52, a seção de choque para captura de nêutrons de 1,0 MeV pelo ^{238}U é 0,02 b. Uma amostra de 5 g de ^{238}U é exposta a um fluxo total de $5,0 \times 10^{11}$ nêutrons/m^2 de nêutrons de 1,0 MeV. Calcule o número de átomos de ^{239}U produzidos.

11-59. Calcule a energia total liberada no conjunto de reações de fusão abaixo. Trata-se do ciclo próton-próton, que é a principal fonte de energia do Sol.

$$^{1}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{2}H + e^{+} + \nu_e$$

$$^{2}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{3}He + \gamma$$

$$^{3}He + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He + 2{}^{1}H - \gamma$$

11-60. Um certo reator nuclear gera uma potência de 1000 MWe (megawatts de eletricidade) com uma eficiência global de conversão de energia de fissão em energia elétrica de 30%. Que massa de núcleos de ^{235}U deve ser fissionada para que o reator funcione (*a*) durante um dia; (*b*) durante um ano? (*c*) Se a mesma energia fosse produzida através da queima de carvão, quais seriam as respostas dos itens (*a*) e (*b*)? (A combustão do carvão produz aproximadamente $3,15 \times 10^7$ J/kg.)

11-61. (*a*) Supondo que a abundância natural do deutério, dada no Apêndice A, se reflete na formação de moléculas de água, calcule a energia que seria liberada se todos os dêuterons contidos em 1,0 m^3 de água sofressem fusão através da reação $^{2}H + {}^{1}H \rightarrow {}^{3}He + \gamma$. (*b*) Dado que os $5,9 \times 10^9$ habitantes da Terra consumiram $3,45 \times 10^{20}$ J em 1999, quanto tempo (em anos) a energia calculada no item (*a*) duraria para um habitante "típico"?

11-62. Considere a possível reação de fissão

$$n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{120}_{48}Cd + {}^{112}_{44}Ru + 3n$$

(*a*) Determine a energia liberada pela reação. (*b*) É provável que a reação ocorra? Justifique sua resposta.

Seção 11-9 Aplicações

11-63. Um osso cuja idade presumida é de 10.000 anos contém 15 g de carbono. Qual deve ser a taxa de decaimento do ^{14}C para esse osso?

11-64. Um pedaço de osso encontrado em um sítio arqueológico contém 175 g de carbono; a taxa de decaimento do ^{14}C é 8,1 Bq. Qual é a idade do osso?

11-65. A razão $^{87}Rb/^{87}Sr$ para uma certa rocha é 36,5. Qual é a idade da rocha?

11-66. Em um experimento de PIXE, um elemento com $A = 80$ constitui 0,001% em peso de uma placa fina cuja massa específica é 0,35 mg/cm^3. A placa é bombardeada com um feixe de prótons de 250 nA durante 15 minutos. A seção de choque para excitar a camada *L* é 650 b. Se a probabilidade de que um átomo excitado na camada *L* emita um raio X é 60% e a eficiência do detector de raios X é 0,0035, quantas contagens o detector registrará durante os 15 minutos do bombardeio?

11-67. A série natural de decaimentos $A = 4n$ começa com o ^{232}Th e termina com o ^{208}Pb (veja a Figura 11-18). Uma rocha contém 4,11 g de ^{232}Th e 0,88 g de ^{208}Pb. Calcule a idade da rocha.

11-68. Determine a frequência de ressonância de prótons livres em um campo magnético de (*a*) $0,5 \times 10^{-4}$ T (valor aproximado do campo magnético da Terra); (*b*) 0,25 T; (*c*) 0,5 T.

11-69. Um pequeno pedaço de papiro é datado por ^{14}C usando AMS. Durante os 10 minutos em que o sistema é ajustado para nuclídeos de ^{14}C, 1500 íons são contados. Com o sistema ajustado para íons de $^{12}C^{+3}$, a corrente é 12 μA. (*a*) Calcule a razão $^{14}C/^{12}C$, supondo que os dois isótopos são detectados com a mesma eficiência. (*b*) se a amostra inteira é consumida em 75 minutos, qual era a massa inicial de ^{12}C? (Suponha um consumo constante e uma eficiência de 0,015.) (*c*) Qual é a idade da amostra?

11-70. O ^{14}C presente em uma lança de madeira encontrada nas montanhas do sudeste da Espanha tem uma atividade de 2,05 desintegrações por minuto e por grama. Qual é a idade da lança? (A atividade do ^{14}C na madeira viva é de 15,6 desintegrações por minuto e por grama.)

NÍVEL II

11-71. Usando a Equação 11-14 e as constantes da Tabela 11-3, determine o valor de Z para o qual $dM/dZ = 0$, ou seja, o mínimo de curvas como a da Figura 11-22*a* (*a*) para $A = 27$; (*b*) para $A = 65$; (*c*) para $A = 139$. Esses cálculos permitem prever corretamente que os isóbaros estáveis são o ^{27}Al, o ^{65}Cu e o ^{139}La?

11-72. Uma expressão empírica para a distância que as partículas α percorrem no ar, conhecida como *alcance*, é a seguinte: $R = 0{,}31E^{3/2}$, onde R é o alcance em cm, E é a energia das partículas em MeV e $4 < E < 7$ MeV. (*a*) Qual é o alcance no ar de uma partícula α de 5 MeV? (*b*) Expresse este alcance em g/cm^2, supondo que a massa específica do ar é $\rho = 1{,}29 \times 10^{-3}$ g/cm^3. (*c*) Supondo que o alcance em g/cm^2 é o mesmo no alumínio ($\rho = 2{,}70$ g/cm^3), determine o alcance em cm de uma partícula α de 5 MeV no alumínio.

11-73. Mostre que a energia eletrostática média de um par próton-próton é aproximadamente $6ke^2/5R$, considerando que R é a distância entre os prótons e $k = 1/4\pi\varepsilon_0$.

11-74. Uma amostra de ^{144}Nd tem uma massa de 0,05394 kg e emite, em média, 2,36 partículas α por segundo. Determine a constante de decaimento e a meia-vida do ^{144}Nd.

11-75. Uma amostra de uma substância radioativa tem uma atividade inicial de 115,0 decaimentos por minuto. Depois de 4 d 5 h, a atividade diminui para 73,5 decaimentos por minuto. (*a*) Calcule a meia-vida da substância. (*b*) Quanto tempo (contado a partir do instante inicial) é necessário para que a atividade da amostra caia para 10,0 decaimentos por minuto? (*c*) Quanto tempo (contado a partir do instante determinado do item anterior) é necessário para que a atividade da amostra caia para 2,5 decaimentos por minuto?

11-76. O ^{227}Th tem uma meia-vida de 18,72 dias e decai por emissão α para ^{223}Ra, um emissor α com uma meia-vida de 11,43 dias. Uma amostra contém 10^6 átomos de ^{227}Th e não contém ^{223}Ra no instante $t = 0$. (*a*) Quantos átomos de cada tipo existem na amostra no instante $t = 15$ dias? (*b*) Qual é o tempo necessário (contado a partir do instante $t = 0$) para que a amostra contenha um número igual de átomos dos dois tipos?

11-77. O efeito Mössbauer foi descoberto durante um estudo do decaimento do segundo estado excitado do ^{191}Ir, 0,12939 MeV acima do estado fundamental. O tempo de vida deste estado metaestável é de 0,13 ns. (*a*) Calcule a largura Γ deste estado. (*b*) Calcule a energia de recuo de um átomo livre de ^{191}Ir ao emitir um fóton de 0,12939 MeV. (*c*) O fenômeno de absorção ressonante (sem recuo) ocorre quando o átomo de ^{191}Ir pertence a uma rede cristalina. Se um desvio Doppler igual a Γ destrói a absorção ressonante, mostre que a velocidade v necessária para que a absorção ressonante não seja observada é dada por

$$v \approx \frac{c\Gamma}{e}$$

11-78. O ^{3}He e o ^{3}H formam um par de nuclídeos especulares. Calcule a diferença entre as energias de ligação totais dos dois nuclídeos e compare o resultado com a energia de repulsão eletrostática dos prótons do ^{3}He. Suponha que a distância entre os prótons é igual ao raio do núcleo de hélio.

11-79. Use as massas que aparecem no Apêndice A para calcular a energia necessária para remover um nêutron do ^{47}Ca e do ^{48}Ca. A partir desses resultados, determine o valor de a_5 na equação de Weizsäcker (Equação 11-14) e compare o resultado com o valor que aparece na Tabela 11-3.

11-80. A força centrípeta de um núcleo com $I \neq 0$ o torna mais estável em relação ao decaimento α. Use a Figura 11-1*a* e um argumento clássico para justificar esta afirmação.

11-81. (*a*) Calcule o raio do $^{141}_{56}$Ba e o raio do $^{92}_{36}$Kr usando a Equação 11-3. (*b*) Suponha que, após a fissão do ^{235}U em ^{141}Ba e ^{92}Kr, os dois núcleos fiquem momentaneamente separados por uma distância r igual à soma dos raios calculados em (*a*) e calcule a energia potencial eletrostática para os dois núcleos a esta distância. Compare o resultado com o valor experimental da energia de fissão, 175 MeV.

11-82. Um nêutron de massa m e velocidade v_L sofre uma colisão frontal com um núcleo de massa M em repouso no referencial do laboratório. (*a*) Mostre que a velocidade do centro de massa no referencial do laboratório é $V = mv_L/(m + M)$. (*b*) Qual é a velocidade do núcleo no referencial do centro de massa antes da colisão? (*c*) Qual é a velocidade do núcleo no referencial do centro de massa depois da colisão? (*d*) Mostre que a energia do núcleo depois da colisão é dada por

$$\frac{1}{2}M(2V)^2 = \left[\frac{4mM}{(m+M)^2}\right]\frac{1}{2}mv_L^2$$

e use este resultado para obter a Equação 11-82.

11-83. Suponha que o quadro de Van Dyck que aparece na fotografia da Seção 11-9 seja irradiado com um fluxo de nêutrons térmicos de 10^{12} nêutrons/cm^2·s durante 2 horas. Em termos do número de átomos de manganês e fósforo presentes inicialmente, determine a atividade (*a*) 2 horas; (*b*) 2 dias após terminada a irradiação. A seção de choque (n,γ) para o ^{31}P é 0,180 b e para o ^{55}Mn é 13,3 b. (Os dois isótopos têm uma abundância natural de 100%.)

11-84. A energia total consumida nos Estados Unidos em 1 ano é $7{,}0 \times 10^{19}$ J. Quantos quilogramas de ^{235}U seriam necessários para produzir esta energia, supondo que 200 MeV de energia são liberados em cada fissão, que 3% dos átomos de urânio sofrem fissão e que todos os mecanismos de conversão de energia utilizados têm uma eficiência de 25%?

11-85. O isótopo do rubídio ^{87}Rb, usado para determinar a idade de rochas e fósseis, é um emissor β com uma meia-vida de $4{,}9 \times 10^{10}$ anos que decai para ^{87}Sr. Nas rochas que contêm fósseis de animais primitivos, a razão $^{87}Sr/^{87}Rb$ é 0,010. Supondo que não havia ^{87}Sr presente nas rochas quando se formaram, determine a idade dos fósseis.

11-86. Em 1989, dois cientistas anunciaram que haviam observado a fusão nuclear em uma célula eletroquímica à temperatura ambiente. A fusão de núcleos de deutério no eletrodo do paládio da célula supostamente gerou uma potência de 4 W. (*a*) Se as duas reações mais prováveis são

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3He + n + 3{,}27\ MeV$$

e

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3H + {}^1H + 4{,}03\ MeV$$

e as duas reações ocorrem com a mesma frequência, quantos nêutrons por segundo teriam que ser emitidos para gerar 4 W de potência? (*b*) Se 10% desses nêutrons são absorvidos pelo corpo de um técnico de 80 kg que trabalha nas proximidades do aparelho, e se cada nêutron absorvido possui uma energia média de 0,5 MeV com um RBE de 4, a que dose de radiação, em rems por hora, corresponde esta exposição? (*c*) Quanto tempo o técnico levaria para receber uma dose total de 500 rems? (Esta dose é letal para 50% das vítimas.)

11-87. A análise por ativação de nêutrons é usada para estudar uma pequena amostra de tinta de automóvel encontrada no local de um atropelamento. A amostra foi exposta a um fluxo de nêutrons térmicos de $3{,}5 \times 10^{12}$ nêutrons/cm^2·s durante 2,0 minutos. Colocada imediatamente em um detector de raios gama, apresentou uma atividade de 35 Bq associada ao ^{60}Co e uma atividade de 155 Bq associada ao ^{51}Ti. Calcule a quantidade total de cada metal na amostra. (A seção de choque do ^{59}Co é 19 b, e a do ^{50}Ti é 0,51 b.)

11-88. Em um reator de fusão que utiliza apenas deutério como combustível, as reações mais frequentes são

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3He + n + 3{,}27\ MeV$$

e

$$^2H + {}^2H \rightarrow {}^3H + {}^1H + 4{,}03\ MeV$$

O ^3H produzido na segunda reação reage imediatamente com um núcleo de ^2H:

$$^3H + {}^2H \rightarrow {}^4He + n + 17{,}7\ MeV$$

A razão entre o número de átomos de ^2H e o número de átomos de ^1H no hidrogênio natural é $1{,}5 \times 10^4$. Qual seria a energia produzida por 4 litros de água, se todos os núcleos de ^2H sofressem fusão?

11-89. (*a*) Sabendo que no espalhamento de Compton a variação máxima do comprimento de onda é $\Delta\lambda = 2hc/Mc^2$ e $\Delta E \approx hc\Delta\lambda/\lambda^2$, mostre que, para que um fóton perca uma energia E_p para um próton, a energia do fóton deve ser pelo menos $E = (Mc^2E_p/2)^{1/2}$. (*b*) Calcule a energia necessária para que o fóton produza um próton de 5,7 MeV por espalhamento Compton. (*c*) Calcule a energia fornecida a um núcleo de ^{14}N em uma colisão frontal com um nêutron de 5,7 MeV. (*d*) Calcule a energia necessária para que um fóton forneça essa energia a um núcleo de ^{14}N por espalhamento Compton.

11-90. Um fóton de energia E incide em um dêuteron em repouso. No referencial do centro de massa, o fóton e o dêuteron têm um momento p. Prove que a aproximação $p \approx E/c$ é válida mostrando que um dêuteron com este momento tem uma energia muito menor que E. Se a energia de ligação do dêuteron é 2,22 MeV, qual é a energia mínima do fóton no referencial do laboratório para que o dêuteron se desintegre?

NÍVEL III

11-91. (*a*) Calcule a diferença entre as energias de ligação dos seguintes pares de nuclídeos especulares: ^7Li e ^7Be; ^{11}B e ^{11}C; ^{15}N e ^{15}O. (*b*) A partir dos resultados do item (*a*), determine o valor da constante a_3 da Equação 11-14. Compare os resultados individuais e a média dos três resultados com o valor que aparece na Tabela 11-3.

11-92. (*a*) Calcule a derivada da equação de Weizsäcker em relação a Z, como no Problema 11-71, e mostre que os mínimos das curvas de A constante, isto é, os valores de Z para os isótopos mais estáveis, são dados por

$$Z = \frac{A}{2}\left[\frac{1 + \dfrac{(m_n - m_p)c^2}{4a_4}}{1 + \dfrac{a_3 A^{2/3}}{4a_4}}\right]$$

(*b*) Determine o número atômico dos nuclídeos mais estáveis para $A = 29$, 59, 78, 119 e 140. (*c*) Compare os resultados do item (*b*) com os dados do Apêndice A e discuta as diferenças encontradas.

11-93. (*a*) Use a Figura 11-35 para fazer um diagrama como o da Figura 11-9 para o estado fundamental do ^{11}B. Qual é o valor mais provável de *j* para este estado? (*b*) O primeiro estado excitado do ^{11}B envolve a excitação de um próton. Desenhe um diagrama para este estado e determine o valor de *j*. (*c*) O valor de *j* para o segundo estado excitado é 5/2. Escolha uma distribuição de núcleons em um diagrama como o da Figura 11-9 que seja compatível com este valor. (*d*) Repita os itens (*a*) e (*b*) para o ^{17}O, sabendo que, neste caso, o primeiro estado excitado envolve a excitação de um nêutron. (*e*) O valor de *j* para o segundo estado excitado do ^{17}O é 1/2. Desenhe um diagrama como o da Figura 11-9 que seja compatível com este valor.

11-94. Aproximadamente 2000 nuclídeos ainda não foram observados na região entre as linhas de gotejamento de prótons e nêutrons da Figura 11-15*b*. Considere os que pertencem à parábola de energia (Figura 11-22*a*) com $A = 151$, para a qual o único isótopo estável é o ^{151}Eu. (*a*) Usando os dados do Apêndice A, faça um gráfico detalhado da parábola correspondente a $A = 151$, mostrando tanto os nuclídeos conhecidos como os que ainda não foram observados entre $Z = 50$ e $Z = 71$. (*b*) Determine a localização das linhas de gotejamento para $A = 151$, ou seja, os isótopos de menor massa para os quais a emissão espontânea de um próton ou de um nêutron é possível.

11-95. Existem razões teóricas para esperar que exista uma "ilha" de nuclídeos com tempos de vida relativamente longos no entorno de um nuclídeo duplamente mágico com $Z = 126$ e $N = 184$ (o primeiro número mágico depois de 126 no modelo de camadas). (*a*) Calcule a massa deste núcleo exótico usando a Equação 11-14. (*b*) Depois de calcular as massas dos núcleos próximos, determine os modos de decaimento que estariam disponíveis para o núcleo duplamente mágico.

11-96. Suponha que um nêutron decaia em um próton e um elétron sem emissão de um neutrino. Nesse caso, a energia compartilhada pelo próton e pelo elétron é 0,782 MeV. No referencial de repouso do nêutron, o momento total é nulo e, portanto, o momento do próton deve ser igual e oposto ao do elétron. Isto determina as energias relativas das duas partículas, mas, como o elétron é relativístico, não é fácil calcular essas energias. (*a*) Suponha que a energia cinética do elétron é 0,782 MeV e calcule o momento *p* do elétron em unidades de MeV/*c*. (*Sugestão*: Use a Equação 2-32.) (*b*) A partir do resultado do item (*a*), calcule a energia cinética $p^2/2m_p$ do próton. (*c*) Como a energia total do elétron e do próton é 0,782 MeV, o resultado do item (*b*) constitui uma correção para a hipótese de que a energia do elétron é 0,782 MeV. Qual é o valor percentual da correção?

11-97. Núcleos radioativos com uma constante de decaimento λ são produzidos em laboratório a uma taxa constante R_p; o número de núcleos radioativos *N* obedece, portanto, à equação $dN/dt = R_p - \lambda N$. (*a*) se *N* é zero no instante $t = 0$, faça um gráfico de *N* em função de *t* para esta situação. (*b*) O isótopo ^{62}Cu é produzido à taxa de 100 núcleos por segundo através do bombardeio de cobre comum (^{63}Cu) com fótons de alta energia. A reação é a seguinte:

$$\gamma + {}^{63}\mathrm{Cu} \rightarrow {}^{62}\mathrm{Cu} + n$$

O ^{62}Cu decai por emissão β com uma meia-vida de 10 minutos. Depois de um tempo suficientemente longo para que $dN/dt \approx 0$, quantos núcleos existem de ^{62}Cu?

11-98. A cadeia de decaimentos $4n + 3$ começa com o ^{235}U e termina com o ^{207}Pb. (*a*) Quantos decaimentos α existem na cadeia? (*b*) Quantos decaimentos β existem? (*c*) Determine a energia total liberada quando um átomo de ^{235}U se transforma em ^{207}Pb. (*d*) Desprezando todas as perdas de energia, determine o aumento de temperatura sofrido por 1 kg de ^{235}U após 1 ano.

11-99. O Sol e outras estrelas geram energia por fusão. Um dos ciclos de fusão, o ciclo próton-próton, envolve as seguintes reações:

$$^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^2\mathrm{H} + \beta^+ + \nu_e$$

$$^1\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma$$

seguidas por

$$^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + {}^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H}$$

ou

$$^{1}H + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He + \beta^{+} + \nu_e$$

(*a*) Mostre que estas reações podem ser escritas na forma compacta

$$4\,{}^{1}H \rightarrow {}^{4}He + 2\beta^{+} + 2\nu_e + \gamma$$

(*b*) Mostre que uma energia de 24,7 MeV é liberada neste ciclo, sem contar os 2 × 0,511 MeV que são liberados quando cada pósitron encontra um elétron e é aniquilado na reação $e^{+} + e^{-} \rightarrow 2\gamma$. (*c*) O Sol irradia uma potência de 4×10^{26} W. Supondo que esta potência seja gerada pela conversão de quatro prótons em um núcleo de hélio, raios γ, neutrinos e uma energia de 26,7 MeV, quantos prótons são consumidos anualmente no Sol? Quanto tempo o Sol continuaria a brilhar se a potência das emissões se mantivesse constante no futuro? (Suponha que os prótons constituem metade da massa total do Sol, que é 2×10^{30} kg.)

11-100. A reação de fusão entre o ^{2}H e o ^{3}H é

$$^{3}H + {}^{2}H \rightarrow {}^{4}He + n + 17{,}7\ \text{MeV}$$

Usando a lei de conservação do momento e o valor de *Q* dado, calcule a energia final do núcleo de ^{4}He e do nêutron, supondo que o momento inicial do sistema seja nulo.

11-101. (*a*) Um reator de água leve cujo combustível é o ^{235}U tem um fator de reprodução de 1,005 e o tempo médio de vida dos nêutrons é 0,08 s. Qual é o aumento percentual da taxa de produção de energia do reator em 5 s? (*b*) Qual deve ser a redução relativa do fluxo de nêutrons no reator para que o fator de reprodução diminua para 1,000?

11-102. Determine o fator de reprodução do urânio enriquecido (*a*) a 5%; (*b*) a 95% de ^{235}U. Calcule o tempo de duplicação da velocidade da reação para cada caso. Supondo que não haja perda de nêutrons e que cada fissão resulte na liberação de uma energia de 200 MeV, qual é a taxa de produção de energia em cada caso 1,0 s após ocorrer a primeira fissão?

***Do inglês *c*omputer-*a*ssisted *t*omography. (N.T.)**

****Do inglês *p*ositron *e*mission *t*omography. (N.T.)**

*****Do inglês *n*eutron *a*ctivation *a*nalysis. (N.T.)**

*** *driplines*, em inglês. (N.T.)**

***No Brasil, este valor corresponde à energia consumida por uma residência típica durante 114 meses. (N.T.)**

***Do inglês *s*ingle *p*hoton *e*mission *c*omputed *t*omography. (N.T.)**

***Nos equipamentos mais recentes, o BGO foi substituído por oxiortossilicato de lutécio (LSO) dopado com cério. (N.T.)**

*** Esses dados foram extraídos de P. Nelson, *Biological Physics* (New York, W. H. Freeman and Co., 2003), página 31.**

***Do inglês *a*ccelerator *m*ass *s*pectrometry. (N.T.)**

***Do inglês *p*article *i*nduced *x*-ray *e*mission. (N.T.)**

CAPÍTULO 12

Física de Partículas

12-1 Conceitos Básicos
12-2 Interações Fundamentais e Partículas Mediadoras
12-3 Leis de Conservação e Simetrias
12-4 O Modelo-padrão
12-5 Para Além do Modelo-padrão

Se não levarmos em conta as especulações do filósofo grego Demócrito (cerca de 460 a.C.-370 a.C) e a teoria atômica da matéria de Dalton (1808),[1] a história da física de partículas começou com a descoberta do *elétron* por Thomson, em 1897 (veja a Seção 3-1). Em 1913, Rutherford descobriu o núcleo atômico e batizou o núcleo do elemento mais leve, o hidrogênio, com o nome de *próton* (veja a Seção 4-2). Quando os cientistas começaram a investigar elementos mais pesados, descobriram um fato curioso: a massa atômica aumentava mais depressa que a carga nuclear, embora ambas, aparentemente, fossem proporcionais ao número de prótons no núcleo. O problema foi resolvido em 1932, quando Chadwick descobriu o *nêutron* (veja a Seção 11-1). Alguns anos antes (em 1905), Einstein havia proposto que a quantização da radiação do corpo negro, descoberta por Planck, era uma manifestação de um fenômeno mais geral, a quantização do campo eletromagnético (veja as Seções 3-2 e 3-3). A ideia de Einstein só foi aceita pela maioria da comunidade científica 20 anos depois, quando a investigação de Millikan do efeito fotelétrico e a descoberta e explicação do efeito Compton pelo cientista de mesmo nome provaram, sem sombra de dúvida, que havia uma partícula associada ao campo eletromagnético, que hoje é conhecida como *fóton*. Durante um curto período, acreditou-se que existiam apenas quatro partículas "elementares": o elétron, o próton, o nêutron e o fóton. Entretanto, no final de 1932, Anderson descobriu o pósitron, e, pouco depois, o múon, o píon e muitas outras partículas foram descobertos em buscas que foram intensificadas e continuam até hoje.

A partir da década de 1950, vários países e consórcios internacionais construíram aceleradores de partículas cada vez maiores e mais sofisticados, capazes de produzir colisões de alta energia, com o objetivo de observar as novas partículas previstas por várias teorias. Uma consideração importante nesses experimentos complexos, que envolvem centenas de cientistas de muitas nacionalidades, é a questão de como distinguir se uma partícula é realmente elementar ou é composta por partículas menores. Por exemplo: tanto o próton como o nêutron foram considerados durante algum tempo partículas elementares, mas, ao serem bombardeados com elétrons de alta energia, verificou-se que, como os átomos e núcleos, possuíam uma estrutura interna. Hoje sabemos que tanto o próton como o nêutron são formados por partículas chamadas *quarks*. Centenas de partículas já foram consideradas elementares, mas uma série de brilhantes teorias desenvolvidas nos últimos 50 anos ajudou a colocar um pouco de ordem nesse "zoológico de partículas". Dessas teorias surgiu o *Modelo-padrão*, que conseguiu a façanha de explicar e prever as propriedades e interações de todas as partículas a partir de uma descrição em termos de um pequeno número de partículas realmente (até o momento, pelo menos) elementares. A pesquisa nas universidades e nos gigantescos aceleradores de partículas continua até hoje a acrescentar novos dados ao nosso entendimento da estrutura da matéria. As pesquisas revelaram que, além de propriedades familiares como massa, carga e spin, as partículas elementares possuíam novas propriedades para as quais não existia uma analogia clássica, que receberam nomes exóticos como estranheza, charme e cor. Além dos aceleradores, foram desenvolvidos detectores de partículas mais sensíveis, alguns dos quais foram instalados em minas profundas, no fundo dos oceanos e sob a calota polar.

A construção de grandes aceleradores de partículas em vários países tem sido, através dos anos, um incentivo para a fabricação de eletroímãs supercondutores maiores e mais eficientes. O Large Hadron Collider, que começou a funcionar no CERN em 2009, utiliza 9300 eletroímãs supercondutores, resfriados com hélio líquido, dos quais 1232 são eletroímãs dipolares de grande porte, com 15 m de comprimento. Os eletroímãs supercondutores, capazes de produzir campos magnéticos de alta intensidade, são usados em aplicações que vão da medicina, com a ressonância magnética nuclear, aos meios de transporte, com o trem levitado magneticamente.

Neste capítulo, vamos examinar primeiro alguns conceitos básicos usados para classificar e descrever partículas. Em seguida, discutiremos as interações fundamentais e leis de conservação a que estão sujeitas as partículas. Finalmente, vamos descrever o modelo atual das partículas elementares, conhecido como *Modelo-padrão*, segundo o qual toda a matéria que existe na natureza, desde as partículas exóticas produzidas nos gigantescos aceleradores até os humildes grãos de areia, é feita de apenas três grupos de partículas elementares: léptons, quarks e as partículas responsáveis pelas interações.

12-1 Conceitos Básicos

Antipartículas

O Pósitron Em 1932, o mesmo ano da descoberta do nêutron, o pósitron foi descoberto (e batizado) por Carl Anderson.[2] A partícula tem a mesma massa e o mesmo momento angular intrínseco que o elétron, mas, ao contrário do elétron, possui carga positiva; por isso, o momento magnético intrínseco é paralelo ao spin, e não antiparalelo, como no caso do elétron. O pósitron, que é a antipartícula do elétron, é representado pelo símbolo e^+ ou às vezes, nas equações de decaimento radioativo, pelo símbolo β^+. A existência do pósitron tinha sido prevista por Dirac a partir de uma equação de onda relativística,[3] embora não fosse fácil interpretar essa previsão (veja a Seção 2-4).

A energia de uma partícula relativística é dada pela Equação 2-31:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \qquad \textbf{2-31}$$

que também pode ser escrita na forma

$$E = \pm\left[(pc)^2 + (mc^2)^2\right]^{1/2} \qquad \textbf{12-1}$$

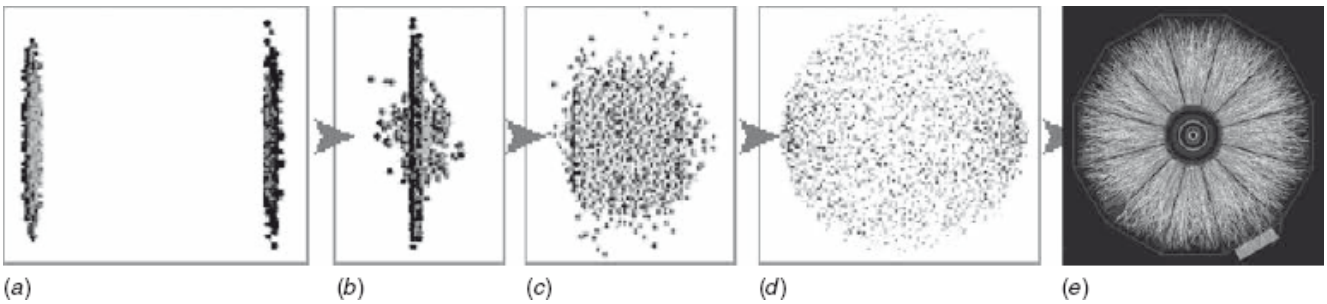
Embora seja natural escolher o sinal positivo e desprezar a solução de energia negativa por ser "fisicamente impossível", a matemática da equação de Dirac exige a existência de funções de onda correspondentes aos estados de energia negativa. Dirac postulou que todos os estados de energia negativa estão ocupados por elétrons e, por isso, não podem ser observados. Dirac usou o princípio de exclusão para propor que apenas os buracos porventura existentes nesse "mar infinito" de estados de energia negativa poderiam ser observados. Esses buracos se comportariam como cargas positivas com energia positiva. A descoberta de uma partícula com a mesma massa que o elétron e carga positiva parecia ser uma indicação de que essa interpretação estava correta, ainda mais que, na formação de pares, o pósitron é gerado juntamente com um elétron (Figura 12-1).

Para Cada Partícula, uma Antipartícula A ideia de que estamos imersos em um mar infinito de elétrons de energia negativa, porém, não é das mais confortáveis e foi tornada desnecessária com o desenvolvimento da eletrodinâmica quântica (QED*) por Feynman[4] e outros no final da década de 1940. As soluções de energia negativa da equação de Dirac passaram a ser encaradas como soluções de energia positiva de uma *nova* partícula, que seria o pósitron. Assim, a necessidade de um "mar" invisível de elétrons desapareceu. Por outro lado, a previsão de Dirac de que existiria um antielétron se revelou excessivamente modesta. De acordo com a QED, cujas previsões foram confirmadas com maior precisão que qualquer outra teoria da física, para *cada* partícula existe uma antipartícula com a mesma massa e uma carga elétrica de sinal contrário. Assim, por exemplo, a teoria prevê que os prótons e nêutrons, partículas de spin 1/2 cujas funções de onda são soluções da equação de Dirac, também possuem antipartículas. A energia mínima necessária para criar um par próton-antipróton é $2m_pc^2 = 1877$ MeV. Energias dessa ordem não estavam disponíveis, a não ser nos raios cósmicos, até a construção de aceleradores de alta energia na década de 1950. O antipróton (representado pelo símbolo $\overline{p}$) foi observado pela primeira vez em 1955, em Berkeley, por Segrè[5] e Chamberlain, que usaram um feixe de prótons com uma energia cinética de 6,2 GeV produzido por um acelerador de partículas conhecido como Bevatron (veja a Figura 12-2). O antinêutron ($\overline{n}$), uma partícula com a mesma massa que o nêutron e momento magnético positivo, foi observado dois anos depois. (A notação genérica para antipartículas consiste em escrever o símbolo da partícula correspondente e acrescentar uma barra superior; entretanto, em muitos casos, costuma-se indicar a carga elétrica, como fizemos no caso do pósitron.)

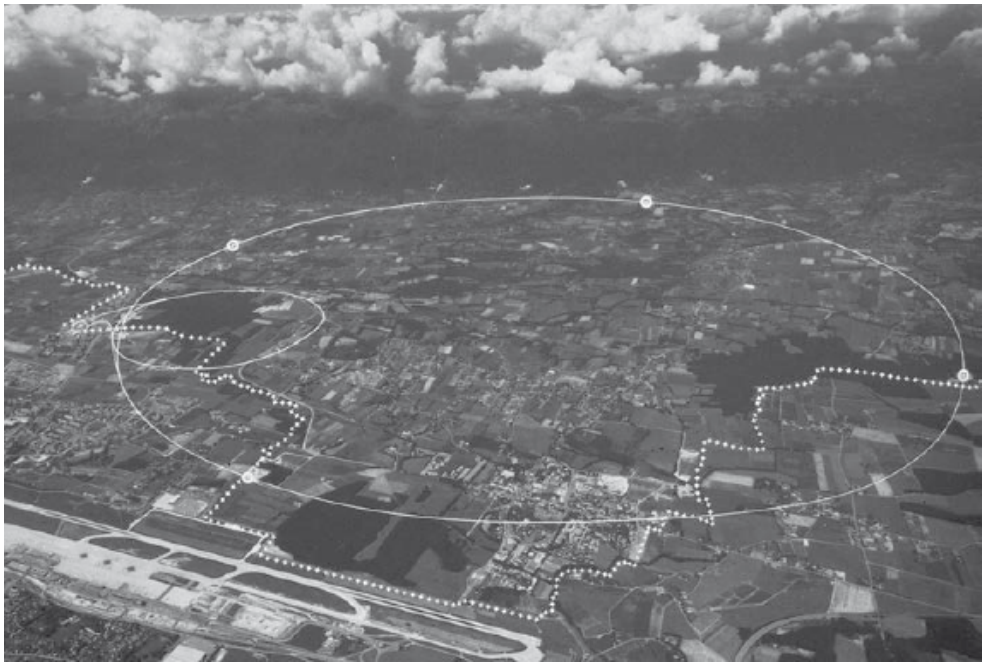
As partículas com spin inteiro, cujas funções de onda não são soluções da equação de Dirac, também possuem antipartículas. Um exemplo são as partículas de spin nulo, cuja função de onda obedece à equação relativística de Klein-Gordon (Equação 11-52), das quais a mais conhecida é o píon, considerado por algum tempo (entre as décadas de 1940 e 1970) como a partícula mediadora da interação forte. Toda antipartícula possui a mesma massa que a partícula correspondente, mas os sinais da carga elétrica, do *número bariônico* e do *número de estranheza* (veja a Seção 12-4) são opostos na partícula e na antipartícula.

Embora seja uma partícula estável, o pósitron possui uma existência efêmera por causa da abundância de elétrons. Quando um pósitron e um elétron se encontram, as duas partículas se aniquilam mutuamente através de uma das seguintes reações:

$$e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma \quad \text{ou} \quad e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma + \gamma \qquad \textbf{12-2}$$



O Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) do Brookhaven National Laboratory começou a produzir colisões entre núcleos de ouro (átomos de ouro totalmente ionizados) no final de 2000. A velocidade dos íons é 99,99% da velocidade da luz. As imagens de (*a*) a (*d*) são simulações dos pacotes de íons em vários estágios da colisão. (*a*) Os pacotes de íons, estreitados pela contração de Lorentz, ainda não se encontraram. (*b*) A colisão "derrete" os prótons e nêutrons e (*c*) por um instante é formada uma "sopa" de quarks e glúons. (*d*) A enorme energia da colisão faz com que sejam criados mais quarks e glúons, que se combinam para formar milhares de partículas. (*e*) Reconstrução em computador das trajetórias dos milhares de partículas criadas em uma só colisão de dois íons de ouro. [*Cortesia do Brookhaven National Laboratory, experimento STAR.*]



Vista aérea do Centro Europeu de Pesquisa Nuclear (CERN) perto de Genebra, na Suíça. O círculo maior mostra a posição do túnel do acelerador de partículas conhecido como Large Hadron Collider (LHC), que tem 27 quilômetros de circunferência. A linha pontilhada mostra a fronteira entre a França e a Suíça (a Suíça está em primeiro plano). O LHC, o maior acelerador de partículas de todos os tempos, entrou em operação em 2010. [*CERN*.]

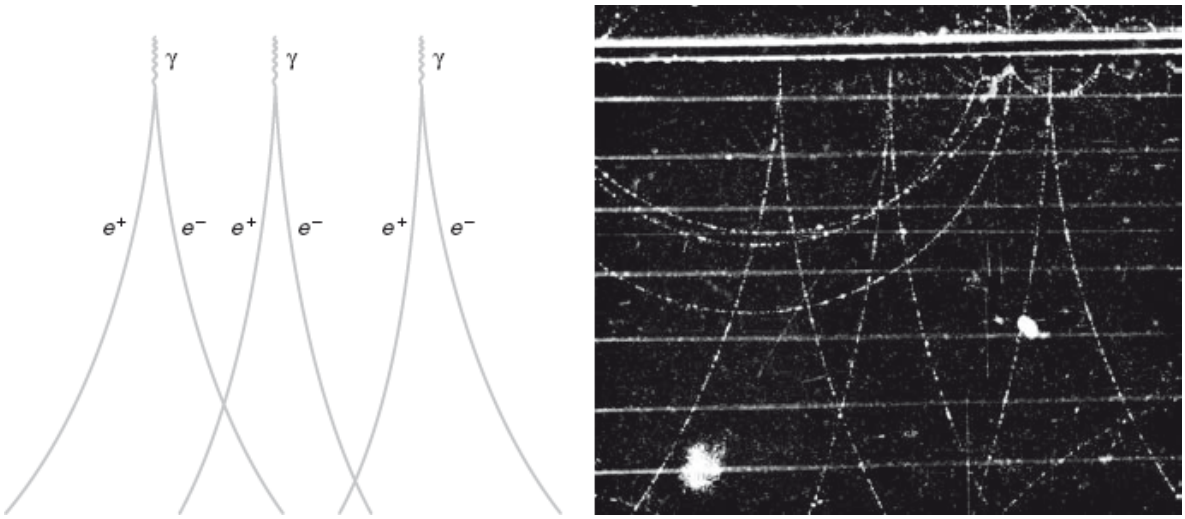


FIGURA 12-1 Rastros de pares elétron-pósitron produzidos por raios X de 300 MeV no síncrotron do Lawrence Livermore Laboratory. O campo magnético existente na câmara aponta para fora do papel. [*A fotografia é cortesia do Lawrence Radiation Laboratory, University of California, Berkeley*.]

Em geral, um elétron e um pósitron se aniquilam mutuamente depois de formarem um estado *S* (de momento angular orbital zero). Se, nesse estado, os spins estão antiparalelos, são criados dois fótons, como na reação da esquerda; se os spins estão paralelos, são criados três fótons, como na reação da direita. O fato de chamarmos os elétrons de *partículas* e os pósitrons de *antipartículas* não significa que os pósitrons sejam menos fundamentais que os elétrons, mas apenas que os elétrons são maioria no universo, ou, pelo menos, na região do universo onde vivemos. Se matéria fosse feita de prótons negativos, elétrons positivos e nêutrons com momentos magnéticos positivos, partículas como prótons positivos, elétrons negativos e nêutrons com momentos magnéticos negativos seriam rapidamente aniquiladas e provavelmente seriam chamadas de antipartículas. Átomos de anti-hidrogênio (formados por um pósitron e um antipróton) primeiro foram produzidos "quentes" no feixe de antiprótons do CERN, em 1995. Em 2010, o projeto ALPHA do CERN produziu uma quantidade considerável de anti-hidrogênio "frio" (lento) usando o momento magnético do anti-hidrogênio para aprisionar os antiátomos em um campo magnético durante mais de 170 ms. Um ano depois, o projeto ALPHA produziu e aprisionou mais de 300 átomos de anti-hidrogênio durante 1000 segundos (pouco mais de 16 minutos). Essas pesquisas em breve permitirão comparar as propriedades físicas do anti-hidrogênio com as propriedades do hidrogênio comum, verificando, por exemplo, se a matéria e a antimatéria são afetadas da mesma forma pela força da gravidade. A assimetria entre matéria e antimatéria no universo, ou seja, a razão pela qual nosso universo possui uma quantidade muito maior de matéria, apesar das previsões da QED e da simetria da equação de onda relativística, será discutida no final deste capítulo e no Capítulo 13. Até hoje, o antinúcleo mais pesado que se conhece é o anti-hélio 4, produzido pelo projeto STAR no Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) do Brookhaven National Laboratory a partir de colisões entre núcleos de ouro movendo-se a uma velocidade de 99,99% da velocidade da luz (veja a foto no início desta seção).

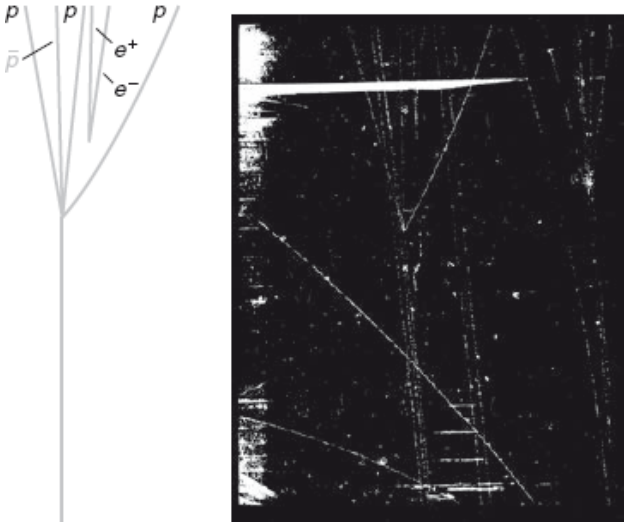


FIGURA 12-2 Rastros em uma câmara de bolhas, mostrando a criação de um par próton-antipróton na colisão de um próton de 25 GeV com um núcleo de hidrogênio líquido (próton estacionário) no Brookhaven Alternating Gradient Synchrotron. A reação é $p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$. A energia necessária para criar o par é $2m_pc^2$ = 1,877 GeV no referencial do centro de massa. No caso de um alvo estacionário, os cálculos mostram que os prótons incidentes devem ter uma energia de pelo menos $6m_pc^2$ = 5,6 GeV para que a reação seja possível. [*A fotografia é cortesia de R. Ehrlich*.]

EXEMPLO 12-1 **Aniquilação Próton-Antipróton** Um próton e um antipróton em repouso se aniquilam mutuamente através da reação (nas reações de física de partículas, o sinal + normalmente é omitido):

$$p\bar{p} \rightarrow \gamma\gamma$$

Determine a energia e o comprimento de onda dos fótons emitidos.

SOLUÇÃO

Como o próton e o antipróton estão em repouso, a conservação do momento exige que os dois fótons criados no processo de aniquilação tenham momentos iguais e opostos e, portanto, a mesma energia. Como a energia total do lado esquerdo da reação é $2m_pc^2$, a energia de cada fóton é

$$E_\gamma = m_pc^2 = 938\ \text{MeV}$$

O comprimento de onda é dado por

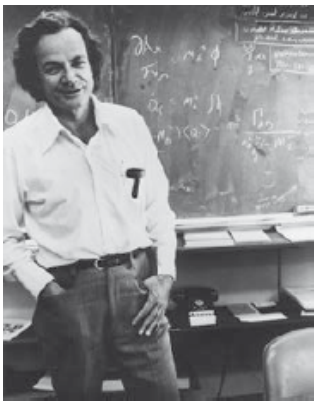
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{hf} = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{1240\ \text{eV} \cdot \text{nm}}{9{,}38 \times 10^8\ \text{eV}} =$$
$$= 1{,}32 \times 10^{-15}\ \text{m} = 1{,}32\ \text{fm}$$

Diagramas de Feynman

Como parte da eletrodinâmica quântica, Feynman criou uma técnica simples e extremamente versátil para descrever os fenômenos eletromagnéticos. Na verdade, a técnica dos *diagramas de Feynman* é tão boa que é usada em outras teorias quânticas (especialmente a cromodinâmica quântica, ou QCD,* que será discutida na Seção 12-4). As regras detalhadas para desenhar diagramas de Feynman estão diretamente relacionadas às equações da QED, e não cabe discuti-las aqui; vamos apresentar apenas algumas regras básicas antes de usar esses diagramas para ilustrar alguns fenômenos de interesse. (Uma discussão mais completa dos diagramas de Feynman pode ser encontrada em Griffiths, D. J., *Introduction to Elementary Particles*, Prentice Hall, New York, 1987, Chapter 2.)



O túnel do acelerador de prótons e antiprótons do CERN, mostrando o tubo onde circulam os feixes de partículas e alguns dos 9300 ímãs supercondutores que foram instalados ao longo dos 27 km do anel. Os mesmos ímãs podem ser usados para dirigir e focalizar as partículas positivas e negativas que se movem em sentidos opostos. Os técnicos se deslocam no longo túnel usando bicicletas e carros elétricos. [*CERN*.]



Richard Feynman, que se considerava "um tipo curioso", recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1965 (com Shin'ichiro Tomonaga e Julian Schwinger) por suas contribuições para a eletrodinâmica quântica. [*American Institute of Physics, Emilio Segrè Visual Archives, Physics Today Collection*.]

Os diagramas de Feynman são diagramas no espaço-tempo, ou seja, gráficos de ct em função de x, semelhantes aos que foram usados nos Capítulos 1 e 2. Na física de partículas, os diagramas de Feynman são usados para descrever interações entre quarks, léptons e as partículas mediadoras das interações e calcular tempos de vida e seções de choque. Como foi observado com relação à Figura 11-28, na qual um diagrama de Feynman foi usado para ilustrar o papel dos píons na força nuclear, os eixos ct e x normalmente não são desenhados. Neste capítulo, como nos Capítulos 1 e 2, o tempo (ct) é representado na vertical, de baixo para cima, e o espaço (x) na horizontal, da esquerda para a direita. (Muitos físicos de partículas usam uma convenção diferente, na qual o tempo é representado na horizontal e o espaço é representado na vertical.) As partículas são representadas por segmentos de reta com uma seta. As partículas cuja seta aponta no sentido negativo do eixo do tempo são interpretadas como a antipartícula correspondente se movendo no sentido normal do tempo. As setas permitem omitir as barras superiores ao representar as antipartículas. Os segmentos de reta são simbólicos e *não representam* as trajetórias das partículas. As regras para analisar os diagramas, cujos detalhes não serão discutidos aqui, partem do princípio de que as leis de conservação da energia e do momento são respeitadas em todos os vértices. A ideia é descrever apenas as *interações*. Partículas que são suas próprias antipartículas, como o fóton, são representadas por linhas onduladas ou tracejadas, sem setas. Todos os fenômenos eletromagnéticos podem ser representados por combinações do processo ilustrado na Figura 12-3, denominado *vértice primitivo*. As interações acontecem nos vértices. O diagrama é interpretado da seguinte forma: uma carga em movimento entra, emite (ou absorve) um fóton e sai. O vértice primitivo não é um diagrama de Feynman completo, mas a unidade básica a partir da qual diagramas completos são construídos.

Vamos analisar os diagramas de Feynman de alguns eventos familiares. Na Figura 12-4*a*, dois elétrons entram, trocam um fóton e saem. O diagrama representa a repulsão eletrostática de cargas de mesmo sinal.[6] A atração eletrostática entre um elétron e um pósitron está representada na Figura 12-4*b*. Estes exemplos servem para ilustrar mais uma regra: linhas que começam e terminam no interior do diagrama são *partículas virtuais.* Como o píon de Yukawa da Seção 11-5, os fótons da Figura 12-4 são *fótons virtuais* e não podem ser observados. Note que uma partícula virtual não precisa ter a mesma massa que a partícula real correspondente; as grandezas da partícula que devem ser conservadas nos vértices são a energia e o momento, não a massa. Apenas as linhas que entram ou saem do diagrama representam partículas observáveis. Os diagramas deixam claro por que afirmamos que as forças eletromagnéticas são *mediadas* por fótons. A Figura 12-5*a* ilustra o efeito Compton. A Figura 12-5*b* é outra forma de descrever a interação entre um elétron e um pósitron, que envolve a aniquilação de um par (parte inferior) e a criação de um par (parte superior). A equivalência entre as partículas observáveis dos diagramas das Figuras 12-4*b* e 12-5*b* é um exemplo do fato de que uma reação pode ser representada por mais de um diagrama.[7] A Figura 12-5*c* ilustra o processo de aniquilação de um par elétron-pósitron. Neste capítulo, vamos usar diagramas de Feynman para visualizar reações que de outra forma seriam difíceis de entender.

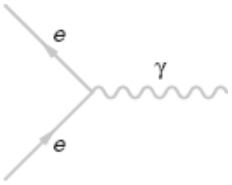


FIGURA 12-3 Vértice primitivo de um diagrama de Feynman. A partícula, que no caso é um elétron, poderia ser um próton ou qualquer outra partícula sujeita à interação eletromagnética. Observe que não existe uma seta na linha que representa o fóton. O vértice primitivo pode ser considerado um "tijolo" para a construção de diagramas de Feynman.

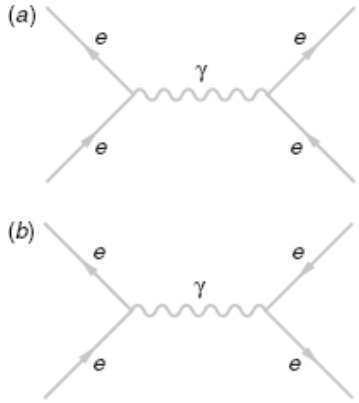


FIGURA 12-4 Diagramas de Feynman usados para descrever (*a*) a repulsão eletrostática de partículas com cargas de mesmo sinal e (*b*) a atração eletrostática de partículas com cargas de sinais opostos.

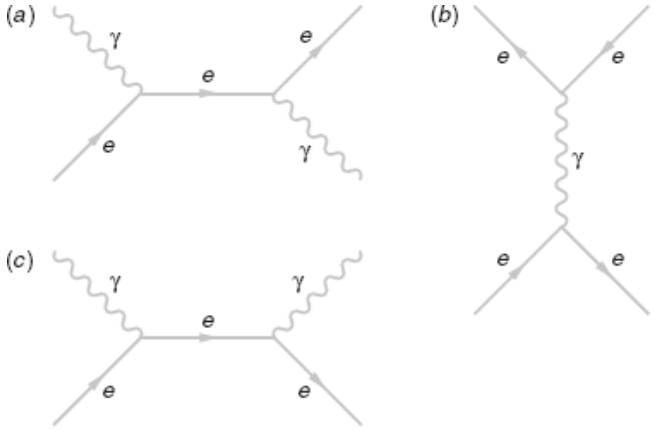
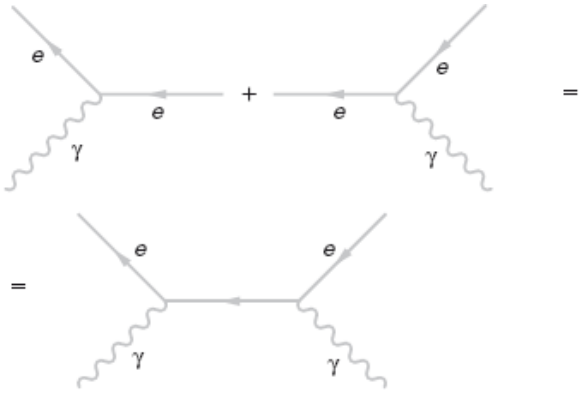


FIGURA 12-5 (*a*) O efeito Compton. Um fóton é absorvido por um elétron, que, em seguida, emite um outro fóton. Note que, neste diagrama, o tempo está representado na horizontal, da esquerda para a direita. (*b*) No vértice inferior, um elétron e um pósitron se aniquilam mutuamente, criando um fóton virtual; no vértice superior, o fóton virtual cria um par elétron-pósitron. O resultado final é semelhante ao da Figura 12-4*b*. (*c*) Um elétron e um próton se aniquilam de forma irreversível, criando dois fótons reais.

EXEMPLO 12-2 **Diagrama de Feynman para a Criação de um Par Partícula-Antipartícula** Na Seção 2-4, descrevemos a criação de um par elétron-pósitron. Desenhe um diagrama de Feynman que ilustre este processo.

SOLUÇÃO

O vértice primitivo da esquerda representa uma interação elétron-fóton, cujos produtos são um elétron real e um pósitron virtual. Lembrando que o pósitron virtual existe por um tempo curto demais para ser medido, desenhamos a linha do mundo dessa partícula como um segmento de reta horizontal [ou seja, com $\Delta(ct) = 0$]. O vértice primitivo no centro do desenho representa uma interação fóton-pósitron, cujos produtos são um pósitron real e um pósitron virtual. Unindo os dois desenhos, obtemos o diagrama da direita, que representa a criação de um par elétron-pósitron.



A criação de um par elétron-pósitron também pode ser representada por diagramas com um número maior de vértices, conhecidos como diagramas de ordem superior. O leitor é capaz de desenhar um desses diagramas?

Exercícios

1. Que problema surge quando tentamos usar o modelo de Dirac de um mar infinito de estados de energia negativa, quase todos ocupados, para explicar a existência de pares partícula-antipartícula de píons, partículas cujo spin é igual a zero?
2. Por que, em geral, um elétron e um pósitron só se aniquilam mutuamente depois de formarem um estado *S*?

Léptons e Quarks

Desde que Thomson descobriu o elétron, as pesquisas teóricas e experimentais de física de partículas revelaram a existência de 61 partículas e antipartículas (12 léptons, 36 quarks e antiquarks, 12 partículas mediadoras e o bóson de Higgs) que são consideradas fundamentais no sentido de que não possuem uma estrutura interna observável com a tecnologia atual. Isso não quer dizer que novas partículas fundamentais não possam vir a ser descobertas. Na verdade, uma das próximas missões do acelerador de partículas LHC (Large Hadron Collider), que foi responsável pela descoberta do bóson de Higgs em 2012, será testar as previsões teóricas da teoria da supersimetria, segundo a qual cada partícula fundamental possui uma "superparceira" (veja a Seção 12-5).

Muitas partículas com carga elétrica foram "observadas" com o auxílio de detectores de partículas. A existência de muitas partículas eletricamente neutras foi deduzida indiretamente a partir da aplicação de leis de conservação a interações que envolviam partículas carregadas. Existe, porém, uma classe de partículas que nunca foram observadas nem direta nem indiretamente: são os *quarks* e suas partículas mediadoras, os *glúons*. Mesmo assim, acreditamos na existência dos quarks e dos glúons, já que todas as suas propriedades e interações são descritas corretamente pelo Modelo-padrão da física de partículas, que, em matéria de precisão, perde apenas para a eletrodinâmica quântica. O restante deste capítulo será destinado à discussão do Modelo-padrão e sua relação com as interações fundamentais e as leis de conservação. Nesta seção, vamos apresentar as classificações de léptons e quarks em *gerações* e *sabores* e mencionar algumas propriedades dessas partículas.

Léptons Existem três gerações de léptons,[8] cada uma formada por uma partícula carregada e um neutrino correspondente (veja a Tabela 12-1). O elétron é o lépton mais conhecido e o único estável entre os que possuem carga elétrica. A cada lépton é atribuído *um isospin fraco* T_z, uma propriedade análoga à componente *z* do spin (veja a Seção 12-3). A cada lépton corresponde uma antipartícula, mas, no caso dos neutrinos, ainda não se sabe se as duas partículas são diferentes, ou seja, é possível que cada neutrino seja sua própria antipartícula, da mesma forma como o fóton é sua própria antipartícula (os físicos chamam as partículas com essa propriedade de *partículas de Majorana*). Ao contrário do que acontece com os quarks, não existem estados ligados lépton-lépton. Os cientistas dizem que existem léptons com três sabores: elétron, múon e táuon. Usaremos esta terminologia na Seção 12-5, quando discutirmos a massa dos neutrinos. Todos os léptons possuem spin 1/2 e, portanto, são férmions.

Tabela 12-1Os léptons

	Lépton (*l*)	Símbolo	Carga (*e*)	Isospin fraco, *Tz*	Massa (MeV/c^2)	Tempo de vida (*s*)	Spin ($\hbar$)
1ª geração	elétron	e	−1	$-\frac{1}{2}$	0,5110	estável	$\frac{1}{2}$
	neutrino do elétron	ν_e	0	$\frac{1}{2}$	≤2,2 eV/c^2	estável	$\frac{1}{2}$
2ª geração	múon	μ	−1	$-\frac{1}{2}$	105,659	$2{,}197 \times 10^{-6}$	$\frac{1}{2}$
	neutrino do múon	ν_μ	0	$\frac{1}{2}$	≤3,5 eV/c^2	estável	$\frac{1}{2}$
3ª geração	áuon	τ	−1	–	1784	$3{,}3 \times 10^{-13}$	

				$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{2}$
	neutrino do táuon	ν_τ	0	$\frac{1}{2}$	$\leq 8{,}4\ \text{eV}/c^2$	estável	$\frac{1}{2}$

Tabela 12-2 Os quarks

	Quark (q)	Símbolo	Carga (e)	Isospin fraco, T_z	Massa (MeV/c^2)	Spin ($\hbar$)	Número bariônico
1ª geração	up	u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	336	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	down	d	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	338	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
2ª geração	charme	c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	1.500	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	estranho	s	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	540	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
3ª geração	top	t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	174.000	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
	bottom	b	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	5.000	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Quarks Existem três gerações de quarks, cada uma com seis partículas carregadas (veja a Tabela 12-2 e a explicação a seguir). Como vamos ver mais adiante, os quarks e suas antipartículas, os antiquarks, podem se unir para formar mais de 200 partículas e são responsáveis pela maior parte da massa visível do universo. Os estados ligados dos quarks e antiquarks recebem o nome de *hádrons* (do grego *hadros*, que significa "robusto"). Existem dois subgrupos de hádrons. As combinações de três quarks são chamadas de *bárions* (do grego *barys*, que significa "pesado"); o próton e o nêutron são os dois exemplos mais conhecidos. As combinações de um quark com um antiquark recebem o nome de *mésons* (do grego *mesos*, que significa "meio"). O nome foi escolhido porque os primeiros mésons a serem descobertos, os píons, tinham massa maior que a do elétron e menor que a do próton; mais tarde, porém, foram descobertos mésons com massa muito maior que a do próton, de modo que o nome não é mais um indicador da massa dos mésons. Por questões que serão discutidas na Seção 12-4, nunca foi observado um quark isolado. A Tabela 12-2 mostra as propriedades básicas dos quarks.

Cada quark da Tabela 12-2 possui uma propriedade adicional, análoga à carga elétrica, denominada *cor*, que pode assumir três valores: *vermelho*, *azul* e *verde*, representados, respectivamente, pelas letras *r*, *b* e *g*.* No caso das antipartículas, a propriedade análoga é chamada de *anticor* e pode assumir três valores: $\overline{r}$, $\overline{b}$ e $\overline{g}$. Assim, por exemplo, existem três quarks u (u_r, u_b e u_g), e três antiquarks $\overline{u}$ ($\overline{u}_{\overline{r}}$, $\overline{u}_{\overline{b}}$ e $\overline{u}_{\overline{g}}$). Naturalmente, os nomes nada têm a ver com o significado usual das palavras *cor*, *vermelho*, *azul* e *verde*; são apenas nomes usados para descrever uma certa propriedade dos quarks, uma escolha que se revelou, talvez por acaso, muito conveniente. Como a carga elétrica, a cor é conservada. Os quarks com uma carga elétrica igual a $2e/3$ (up, charm e top) são chamados de *quarks tipo up* e os quarks com uma carga elétrica igual a $-e/3$ (down, strange e bottom) são chamados de *quarks tipo down*. Como os léptons, os quarks também possuem um isospin fraco T_z. O isospin fraco dos quarks tipo up é 1/2 e dos quarks tipo down é −1/2. Note na Tabela 12-2 que cada geração dos quarks é um dubleto de isospin. Os cientistas dizem que existem quarks com seis sabores: up, down, charme, estranho, top e bottom. Os quarks e antiquarks perfazem ao todo 36 partículas diferentes. Como os léptons, todos os quarks possuem spin 1/2 e, portanto, são férmions.

12-2 Interações Fundamentais e Partículas Mediadoras

Todas as forças observadas na natureza, do simples atrito às forças descomunais associadas às explosões das supernovas, podem ser descritas em termos de quatro interações básicas a que estão sujeitas as partículas elementares. Em ordem decrescente de intensidade, temos:

1. A interação forte
2. A interação eletromagnética
3. A interação fraca
4. A interação gravitacional

As forças moleculares e quase todas as forças que observamos entre objetos macroscópicos (como, por exemplo, o atrito, as forças de contato e as forças exercidas por molas e cordas) são manifestações complexas da interação eletromagnética, que acontece entre partículas que possuem carga elétrica. Embora a gravidade, a interação de partículas que possuem massa, desempenhe um papel importante em nossa vida diária, é tão fraca em comparação com as outras forças que seu papel nas interações de partículas elementares pode ser ignorado. A interação fraca descreve, entre outras, a interação entre elétrons ou pósitrons e núcleons que resulta no decaimento beta, discutido no Capítulo 11. A interação forte descreve, por exemplo, a força entre núcleons responsável pela formação dos núcleos atômicos. Algumas partículas participam das quatro interações, enquanto outras participam apenas de algumas.

Em 1979, S. L. Glashow, A. Salam e S. Weinberg receberam o Prêmio Nobel de Física pela criação da *teoria eletrofraca*, que unificou as teorias da interação eletromagnética e da interação fraca. Este evento, que aconteceu exatamente 100 anos após Maxwell haver unificado as teorias da eletricidade e do magnetismo, representou um passo importante no sentido da unificação das descrições teóricas das quatro interações básicas. Há muito tempo que os físicos tentam desenvolver uma teoria unificada para as interações conhecidas; Einstein foi um dos que procuraram, sem sucesso, formular uma teoria desse tipo. Como vamos ver na Seção 12-4, a unificação eletrofraca ocorre apenas em altas energias. As tentativas recentes de unificar as interações eletrofraca, forte e gravitacional serão discutidas na Seção 12-5.

Quando os físicos mencionam a "força" das interações, estão se referindo aos valores relativos das *constantes de acoplamento* adimensionais[9] que multiplicam a parte variável da função energia potencial cujo gradiente é usado para calcular a força considerada. As intensidades relativas das forças mencionadas a seguir são apenas aproximadas, já que não existe uma forma direta de comparar as forças, especialmente do caso da interação fraca. Assim, por exemplo, a energia potencial elétrica para duas cargas é dada por $U(r) = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$. Para tornar adimensional o fator que multiplica a parte variável $1/r$ da função, dividimos $U(r)$ por $\hbar c$, obtendo a seguinte equação:

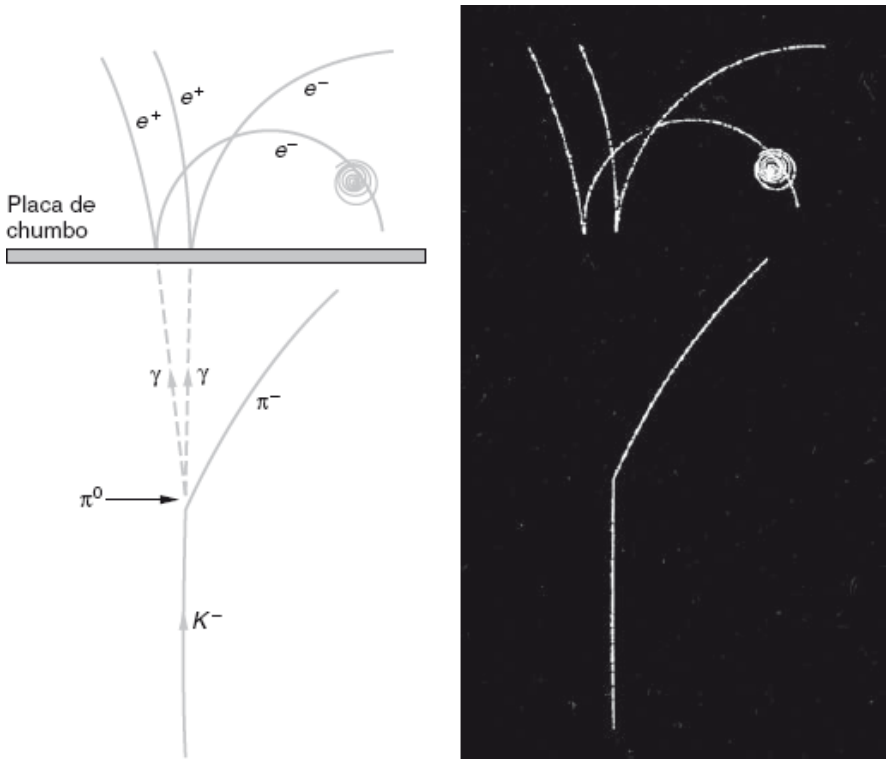
$$V(r) = U(r)/\hbar c = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}\frac{1}{r} \qquad \textbf{12-3}$$

na qual $V(r)$ é a energia potencial expressa em m^{-1}. A grandeza $(e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c)$ é igual à constante de estrutura fina $\alpha \approx 1/137$, que encontramos em nossa discussão do modelo de Bohr do átomo de hidrogênio (veja a Seção 4-3). *A constante de estrutura fina é, portanto, a constante de acoplamento da interação eletromagnética*. Como vimos no Capítulo 4, as energias que resultam dessa interação são proporcionais a α^2 e as dimensões características (como, por exemplo, o raio de Bohr, a_0) são proporcionais a $1/\alpha$ (veja as Equações 4-32 e 4-33). Além disso, as densidades de probabilidade dos fenômenos atômicos discutidos no Capítulo 7 dependem do valor de α, já que são funções do raio de Bohr (veja a Equação 7-32).

Assim como Yukawa propôs que o píon funcionava como mediador da força entre núcleons (veja a Seção 11-5), o Modelo-padrão da teoria de partículas, que será discutido na Seção 12-4, propõe que cada interação fundamental é mediada por um determinado tipo de partícula. Essas partículas, que, de acordo com a teoria, devem ser bósons, são descritas nos parágrafos seguintes, nos quais discutimos separadamente as quatro interações fundamentais.

Interação Forte

Todos os hádrons estão sujeitos à interação forte. Dos dois subgrupos de hádrons, os bárions (formados por combinações de três quarks) têm spin fracionário (1/2, 3/2, 5/2, etc.), enquanto os mésons (formados por combinações de um quark com um antiquark) têm spin zero ou inteiro. O alcance da interação forte é da ordem de 10^{-15} m = 1 fm (veja o Capítulo 11). A constante de acoplamento α_s da interação forte é aproximadamente 1, ou seja, mais de 100 vezes maior que a constante de acoplamento $\alpha \approx 1/137$ da interação eletromagnética. De acordo com o Modelo-padrão, a interação forte está associada à cor, da mesma forma como a interação eletromagnética está associada à carga elétrica. A partícula mediadora da interação forte é o *glúon*. Como os quarks, os glúons possuem cor, com uma diferença: enquanto um quark possui uma unidade de uma das três cores possíveis, os glúons possuem combinações de uma unidade de cor e uma unidade de anticor. Como são possíveis nove combinações diferentes de *r*, *b* e *g* com $\overline{r}$, $\overline{b}$ e $\overline{g}$, seria de se supor que houvesse nove tipos diferentes de glúons; entretanto, é possível demonstrar que, por uma razão técnica, só existem oito tipos. Uma das consequências do fato de os glúons possuírem cor é que a emissão de um glúon por um quark pode mudar a cor do quark; outra é que os glúons interagem entre si (veja a Seção 12-3). Como os léptons não possuem cor, não estão sujeitos à interação forte.



Um káon negativo (K^-) entra em uma câmara de bolhas, vindo de baixo, e decai em um píon negativo (π^-), que se desvia para a direita, e em um píon neutro (π^0), que imediatamente decai em dois fótons, cujas trajetórias estão indicadas por linhas tracejadas no desenho da esquerda. Os dois fótons interagem com átomos da placa de chumbo, produzindo pares elétron-pósitron. A espiral à direita é a trajetória de um elétron que foi arrancado de um átomo presente na câmara. (Outros rastros espúrios foram removidos da fotografia.)

O *tempo de interação* característico da interação forte é extremamente pequeno, da ordem de 10^{-23} s, o que significa que um evento causado pela interação forte "acontece" durante esse período de tempo. Assim, para que a probabilidade de que duas partículas interajam através da interação forte trocando uma partícula virtual seja elevada, é preciso que as duas partículas permaneçam dentro do raio de alcance da interação forte durante pelo menos 10^{-23} s. Da mesma forma, as partículas instáveis que decaem através da interação forte têm um tempo de vida da ordem de 10^{-23} s. Este é aproximadamente o tempo que a luz leva para percorrer uma distância igual ao diâmetro de um núcleo atômico.

A Tabela 12-3 mostra as propriedades de alguns hádrons que não sofrem decaimentos mediados pela interação forte, ou seja, cujos tempos de vida são muito maiores que 10^{-23} s. Esses hádrons, que decaem através da interação eletromagnética e da interação fraca, possuem tempos de vida muito maiores, da ordem de 10^{-18}s a 10^{-10}s, respectivamente. Observe que todos os bárions acabam se transformando em prótons. Note também que os bárions podem ser agrupados em "multipletos de carga" com aproximadamente a mesma massa: os núcleons (*n* e *p*) com uma massa de aproximadamente 939 MeV, as partículas Σ, com uma massa de aproximadamente 1190 MeV, e as partículas Ξ, com uma massa de aproximadamente 1315 MeV. As diferenças de massa dentro de cada multipleto (como a diferença entre a massa do próton e a massa do nêutron) se devem principalmente a diferenças entre as massas dos quarks pertencentes à mesma geração (veja a Seção 12-4). A energia do campo eletromagnético também contribui para as diferenças de massa. Existem seis mésons na Tabela 12-3: três píons, dois káons e uma partícula eta. Os mésons também podem ser agrupados em multipletos de carga. Note, porém, que a massa do píon positivo (π^+) é exatamente igual à do píon negativo (π^-), já que uma das partículas é a antipartícula da outra.

Como são partículas complexas, compostas por partículas mais fundamentais (quarks), os hádrons possuem um estado fundamental e um conjunto de estados excitados, exatamente como acontece com os átomos e núcleos, que, é claro, também são partículas complexas, compostas por partículas mais fundamentais. Esses estados hadrônicos excitados quase sempre decaem através da interação forte e, portanto, apresentam uma largura considerável, como exige o princípio de indeterminação ($\Delta E \approx \hbar/\Delta t$), ao contrário do que acontece com os estados excitados dos elétrons atômicos e dos núcleos, cujo tempo de vida é muito maior. Os estados hadrônicos excitados são normalmente observados como ressonâncias na seção de choque para espalhamento de um hádron por outro e, por essa razão, também são chamados de *ressonâncias*. As ressonâncias são discutidas com mais detalhes na Leitura Suplementar *Ressonâncias e Estados Excitados*.

Tabela 12-3Alguns hádrons que não sofrem decaimentos mediados pela interação forte

Nome	Símbolo	Massa (MeV/c^2)	Spin ($\hbar$)	Carga (*e*)	Antipartícula	Tempo médio de vida (s)	Produtos típicos do decaimento*
Bárions							
Núcleon	p (próton) ou N^+	938,3	1/2	+1	$\overline{p}$	$>10^{32}$ anos	
	n (nêutron) ou N^0	939,6	1/2	0	$\overline{n}$	930	$p + e^- + \overline{\nu}_e$
Lambda	Λ^0	1116	1/2	0	$\overline{\Lambda}^0$	$2{,}5 \times 10^{-10}$	$p + \pi^-$
Sigma	Σ^+	1189	1/2	+1	$\overline{\Sigma}^-$	$0{,}8 \times 10^{-10}$	$n + \pi^+$
	Σ^0	1192	1/2	0	$\overline{\Sigma}^0$	10^{-20}	$\Lambda^0 + \gamma$
	Σ^-	1197	1/2	−1	$\overline{\Sigma}^+$	$1{,}7 \times 10^{-10}$	$n + \pi^-$
Xi†	Ξ^0	1315	1/2	0	$\overline{\Xi}^0$	$3{,}0 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 + \pi^0$
	Ξ^-	1321	1/2	−1	$\overline{\Xi}^+$	$1{,}7 \times 10^{-10}$	$\Lambda^0 - \pi^-$
Ômega	Ω^-	1672	3/2	−1	Ω^+	$1{,}3 \times 10^{-10}$	$\Xi^0 + \pi^-$
Lambda com charme	Λ_c^+	2285	1/2	+1	$\overline{\Lambda}_c^-$	$1{,}8 \times 10^{-13}$	$p + K^- + \Lambda^+$
Mésons							
Píon	π^+	139,6	0	+1	π^-	$2{,}6 \times 10^{-8}$	$\mu^+ + \nu_\mu$
	π^0	135	0	0	A própria	$0{,}8 \times 10^{-16}$	$\gamma + \gamma$

	π^-	139,6	0	−1	π^+	$2,6 \times 10^{-8}$	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu$
Káon	K^+	493,7	0	+1	K^-	$1,24 \times 10^{-8}$	$\pi^+ + \pi^0$
	K^0	497,7	0	0	$\bar{K}^0$	$0,88 \times 10^{-10}$ e $5,2 \times 10^{-8}$ ‡	$\pi^+ + \pi^-$ $\pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$
Eta	η^0	549	0	0	A própria	2×10^{-19}	$\gamma + \gamma$

*Na maioria dos casos, existe mais de um modo de decaimento.

†A partícula Ξ também é conhecida como cascata.

‡O méson K^0 tem dois tempos de vida, conhecido como K^0_{curto} e K^0_{longo}. Todas as outras partículas têm um único tempo de vida.



FIGURA 12-6 Um nêutron emite um píon virtual (π^-). Durante o intervalo de tempo Δt durante o qual o próton e o píon existem, podem interagir com outras partículas carregadas. Depois do intervalo de tempo Δt, o píon é reabsorvido pelo próton.

Interação Eletromagnética

Esta é a interação dominante em escalas maiores que a subatômica, reino da interação forte, e menores que a astronômica, na qual a interação gravitacional domina. Todas as partículas que possuem carga elétrica ou momento magnético participam da interação eletromagnética. Além disso, partículas eletricamente neutras podem interagir eletricamente com partículas carregadas se a emissão de uma partícula virtual resultar em partículas carregadas. Um nêutron que emite e reabsorve uma partícula π^- virtual (Figura 12-6) é um exemplo de partícula neutra que pode interagir eletricamente com uma partícula carregada. O alcance da força eletromagnética é infinito e a força é, como vimos, aproximadamente 137 vezes menor que a da interação forte. O tempo característico de interação é da ordem de 10^{-18}s. De acordo com a QED, a partícula mediadora da interação eletromagnética é o fóton. Ao contrário dos glúons que possuem cor, os fótons não possuem carga elétrica. Em geral, os decaimentos através da interação eletromagnética resultam na emissão de um ou mais fótons, mas existem exceções, como, por exemplo, a reação $\pi^0 \rightarrow e^+e^-$. Observe na Tabela 12-3 que as partículas Σ^0, π^0 e η^0 são as únicas que sofrem decaimentos mediados pela interação eletromagnética; o decaimento de todas as outras partículas é mediado pela interação fraca.

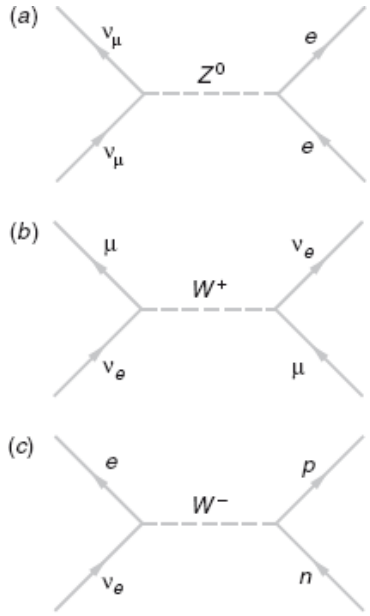


FIGURA 12-7 (*a*) O espalhamento de um neutrino do múon por um elétron envolve a troca de um bóson Z^0. Uma troca desse tipo é chamada de *corrente neutra*. A interação não converte o elétron em um múon do neutrino. (*b*) O espalhamento de um neutrino do elétron por um múon pode ser mediado por uma corrente neutra, como em (*a*), mas outro possível mecanismo é uma *corrente carregada*, na qual um bóson W^+ é trocado entre as duas partículas. Nesse caso, a interação converte o neutrino do elétron em múon e o múon em neutrino do elétron. Como todos os mecanismos permitidos contribuem para a seção de choque, a medida da seção de choque é uma forma de testar a validade do Modelo-padrão. (*c*) O decaimento beta inverso também envolve uma *corrente carregada*.

Interação Fraca

A necessidade de distribuir rapidamente para milhares de cientistas grandes volumes de dados colhidos por detectores nos laboratórios de física de partículas levou o CERN a criar uma rede que mais tarde se transformou na Internet.

Todos os quarks e léptons estão sujeitos à interação fraca, cujo alcance é da ordem de 10^{-18}m (10^{-3}fm), bem menor que o da interação forte. O Exemplo 12-3 mostra de que forma é determinado o alcance da interação fraca. O tempo de interação característico varia de 10^{-16}s a 10^{-10}s. Não existe um nome especial para a propriedade associada à interação fraca, embora às vezes seja chamada de *carga fraca* ou *carga de sabor*, em analogia com a carga elétrica. A interação fraca, cuja intensidade é aproximadamente 10^5 vezes menor que a da interação forte, é mediada por três partículas: W^+, W^- e Z^0 (o W vem de "weak", que significa "fraco", e o Z vem de "zero"). As três partículas têm spin 1 e são, portanto, bósons, como todas as partículas mediadoras. Um aspecto muito importante da interação fraca é que as interações mediadas pelas partículas W^+ e W^- mudam o sabor (tipo) dos quarks, mas não mudam o sabor dos léptons. A Figura 12-7 mostra três reações mediadas pela interação fraca: o espalhamento de um neutrino do múon por um elétron, o espalhamento do neutrino do elétron por um múon e o decaimento beta inverso de um próton.

As partículas mediadoras da interação fraca foram descobertas em 1983, depois de uma longa busca, por C. Rubbia[10] e uma grande equipe internacional de colaboradores, usando o colisor Sp$\bar{p}$S de prótons e antiprótons do CERN, projetado especialmente para a tarefa (veja as Figuras 12-8 e 12-9). Depois do quark top, que, de acordo com a Tabela 12-2, possui uma massa de 174 GeV/c^2, e do bóson de Higgs, com uma massa estimada de 125 GeV/c^2, Z^0 é a partícula de maior massa conhecida: 91 GeV/c^2, quase 100 vezes maior que a massa do próton. Logo em seguida vêm as partículas W^+ e W^-, com uma massa de 80 GeV/c^2.

EXEMPLO 12-3 **Alcance da Interação Fraca** A massa da partícula Z^0 foi medida com grande precisão; o valor aceito atualmente é 91,16 GeV/c^2. O que isso significa em termos do alcance das interações fracas mediadas pela partícula Z^0?

SOLUÇÃO

1. O alcance, que corresponde à distância R percorrida no intervalo de tempo $t = \hbar/\Delta E$ por uma partícula que esteja se movendo com uma velocidade próxima da velocidade da luz, é dado pela Equação 11-50:

$$R = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2}$$

2. Substituindo a massa da partícula Z^0 por seu valor na equação de R, obtemos:

$$R = \frac{(1{,}055 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s})\,(3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m/s})}{(91{,}16\,\mathrm{GeV}/c^2)\,(1{,}60 \times 10^{-10}\,\mathrm{J/GeV})}$$
$$= 2{,}17 \times 10^{-18}\,\mathrm{m} = 2{,}17 \times 10^{-3}\,\mathrm{fm}$$

3. Outra forma de calcular R:

$$R = \frac{(197{,}3\ \text{eV}\cdot\text{nm})}{(91{,}16\ \text{GeV})\,(10^7\ \text{eV/GeV})\,(10^9\ \text{nm/m})}$$
$$= 2{,}17 \times 10^{-3}\ \text{fm}$$

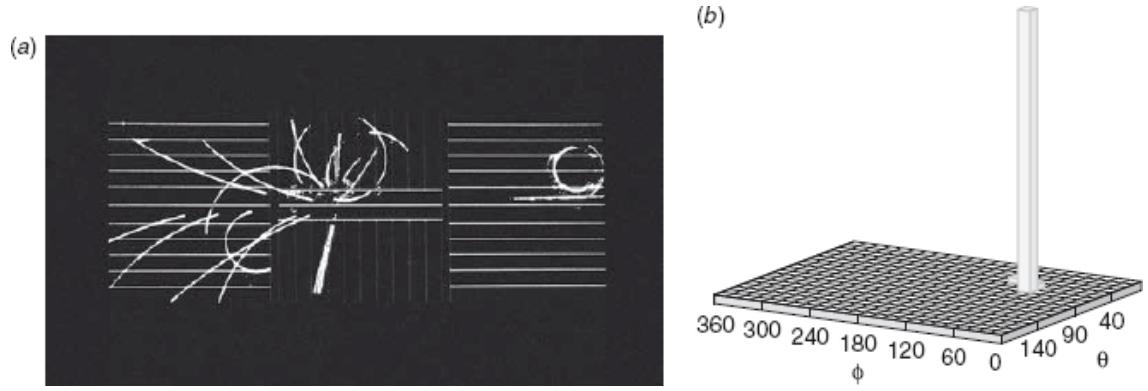


FIGURA 12-8 (*a*) A produção e subsequente decaimento de um dos primeiros bósons *W* a serem observados foram registrados pelo detector UA1 do colisor Sp $\overline{\text{p}}$S de prótons e antiprótons do CERN. Uma colisão $p\overline{p}$ acontece no centro. Um bóson W^+ é produzido e decai através da reação $W^+ \rightarrow \tau^+ + \nu_\tau$. O decaimento de um táuon em partículas carregadas é visto claramente como um jato grosso para baixo, quase vertical, no centro da fotografia. Aplicando as leis de conservação da energia e do momento, verifica-se que o decaimento do bóson W^+ também produz um neutrino do táuon [*CERN*]. (*b*) Os detectores montados em volta do acelerador registraram o táuon positivo e permitiram determinar as coordenadas angulares da trajetória. O eixo vertical representa energia.

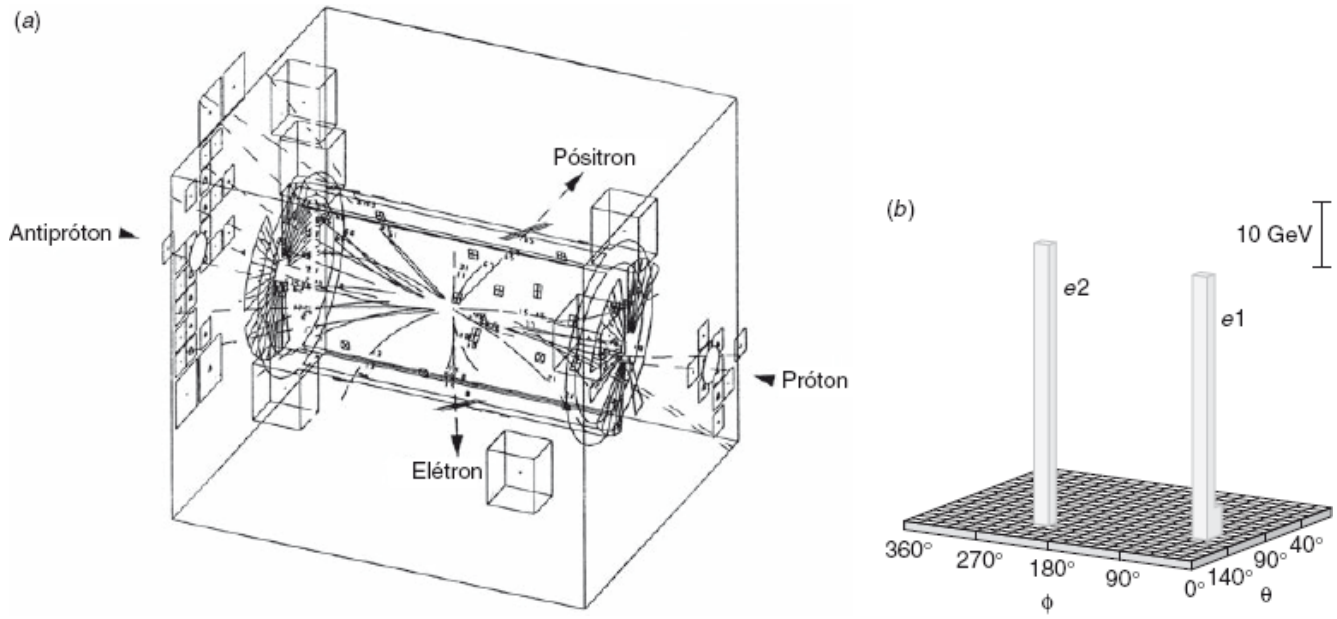


FIGURA 12-9 (*a*) Esta reconstrução em computador de um evento registrado pelo detector UA1 do CERN mostra os produtos do decaimento do primeiro bóson Z^0, detectados pelo grupo de Rubbia em 1983. Milhões de eventos semelhantes foram observados desde então. [CERN Courier, **33**, 4 (1993).] (*b*) Gráfico de energia do par elétron-pósitron criado a partir da reação de decaimento do bóson Z^0, $Z^0 \rightarrow e^+ + e^-$. A energia, representada no eixo vertical, é medida por detectores que cercam a região central do UA1. As coordenadas angulares das trajetórias do elétron e do pósitron são medidas em relação à posição do bóson Z^0. Gráficos como este são apelidados de "gráficos Lego".

Interação Gravitacional

Todas as partículas estão sujeitas à interação gravitacional, mas essa interação é tão fraca que não precisa ser levada em conta no estudo das partículas elementares. Como vimos anteriormente, a interação gravitacional é 10^{-38} mais fraca que a interação forte. Como a interação eletrostática, a interação gravitacional tem alcance infinito e a intensidade é inversamente proporcional ao quadrado da distância. A interação gravitacional é mediada por uma partícula conhecida como *gráviton*, uma partícula que, de acordo com a teoria, deve ter carga nula, massa nula e spin 2. A partícula ainda não foi observada experimentalmente, apesar de algumas tentativas neste sentido (veja a Seção 2-5). A interação gravitacional é produzida pela massa, que é a "carga gravitacional" correspondente à cor, à carga elétrica e à carga fraca associadas, respectivamente, à interação forte, à interação eletromagnética e à interação fraca. A Tabela 12-4 mostra as características mais importantes das quatro interações fundamentais.

Tabela 12-4 Características das interações fundamentais

	Massa	Tempo de	Constante

Interação	Bóson mediador	(GeV/c^2)	Spin ($\hbar$)	Carga	Partículas carregadas	Alcance (m)	interação (s)	de acoplamento
Forte	glúon (g)	0	1	carga de cor	q, g	10^{-15}	10^{-23}	$\alpha_s \approx 1$
Eletromagnética	fóton (γ)	0	1	carga elétrica	q, e, μ τ, $W^{\pm}$	∞	10^{-18}	$\alpha = 1/137$
Fraca	$W^{\pm}$, Z^0	80, 91	1, 1	carga fraca	q, e, μ, τ, $W^{\pm}$, Z^0	10^{-18}	10^{-16} a 10^{-10}	$\alpha_w \approx 10^{-5}$
Gravitacional	gráviton (G)	0	2	massa	q, e, μ, τ, ν, $W^{\pm}$, Z^0	∞	?	$\alpha_g \approx 10^{-38}$



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Comentários Adicionais a Respeito da Intensidade das Interações

No início desta seção, definimos a intensidade das interações em termos de constantes de acoplamento, relacionando os valores aproximados ao da mais conhecida, que é a constante de estrutura fina $\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$. Na QED, a carga elétrica

$$e = \sqrt{4\pi\varepsilon_0\hbar c\alpha} \propto \sqrt{\alpha}$$

é a amplitude do acoplamento entre o fóton (a partícula mediadora) e o elétron (a partícula). Assim, a probabilidade de eventos que envolvem esse acoplamento, como o efeito fotelétrico, ilustrado na Figura 9-31, é proporcional a $e^2 \propto \alpha$.

A solução independente do tempo da equação de Klein-Gordon (Equação 11-52) também pode ser interpretada como o potencial estático $U(r)$ do campo de uma carga pontual representada pelas partículas mediadoras. Temos, portanto,

$$U(r) = \frac{Ae^{-r/R}}{r} \qquad \textbf{12-4}$$

em que A é uma constante de integração e $R = \hbar/mc$ é ao mesmo tempo o alcance da força e o comprimento de onda de Compton $\lambda_c/2\pi$ da partícula mediadora.

No caso da interação eletromagnética, o alcance R é infinito e $U(r)$ se torna

$$U(r) = \frac{A}{r} \qquad \textbf{12-5}$$

Como no eletromagnetismo clássico o potencial eletrostático de uma carga pontual q é dado por $U(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r$, vemos que a constante A da Equação 12-5 desempenha o mesmo papel que a carga. Procedendo da mesma forma, é possível obter uma constante de acoplamento proporcional a A^2 para as outras interações, embora nem sempre isso seja fácil. No caso da interação forte e da interação fraca, os cálculos são tão complexos que não é possível reproduzi-los aqui. Como vemos ver na Seção 12-4, o uso da QED como modelo facilitou bastante o estudo das interações forte e fraca. As constantes de acoplamento e outras características das quatro interações aparecem na Tabela 12-4.

Um último comentário antes de mudarmos de assunto: As constantes de acoplamento não são, na verdade, constantes. Também neste caso, vamos usar como exemplo a interação eletromagnética. Considere uma carga pontual positiva q no interior de um dielétrico, como na Figura 12-10*a*. A carga q polariza as moléculas vizinhas do dielétrico. Em consequência, a carga q é parcialmente compensada pelas extremidades negativas das moléculas polarizadas e o campo elétrico q a uma distância r é menor do que se o dielétrico não estivesse presente. O valor medido de q é a carga efetiva q_{ef}, que depende da distância entre q e o local onde é realizada a medida. A carga efetiva é dada por

$$q_{ef} = \frac{q}{\varepsilon} \qquad \textbf{12-6}$$

em que ε é a permissividade elétrica relativa (ou constante dielétrica) do material, que, como vimos anteriormente, é uma medida da facilidade com a qual o material se polariza. Apenas realizando a medida muito perto de q, a uma distância r menor que a distância de equilíbrio r_0 das moléculas do dielétrico (ou seja, mais perto que as moléculas mais próximas), é que o valor real de q pode ser medido. Este fato está ilustrado na Figura 12-10*b*. Note também que (1) as medidas realizadas a grandes distâncias fornecem um valor para a carga igual a q/ε, e não q; (2) o valor de q_{ef} é *maior* para pequenos valores da distância r.

De acordo com a QED, a existência de partículas virtuais faz com que o vácuo se comporte como um dielétrico. A carga positiva q (ou qualquer outra carga) está constantemente emitindo e absorvendo fótons virtuais. Alguns desses fótons criam pares elétron-pósitron de existência efêmera, como mostra o diagrama de Feynman da Figura 12-10*c*. O elétron é atraído pela carga q, enquanto o pósitron é repelido; a *polarização do vácuo* resultante compensa parcialmente a carga q, como se a carga estivesse no interior de um dielétrico. Como no caso do dielétrico, o valor real da carga q só é medido a uma distância menor que a dos dipolos elétricos mais próximos. Na polarização do vácuo, o papel da distância de equilíbrio r_0 é desempenhado pelo comprimento de onda de Compton do elétron, $\lambda_c = h/mc = 2{,}43$ û 10^{-12}m. Assim, mesmo no vácuo, o "verdadeiro" valor de q só pode ser medido a distâncias menores que $2{,}43 \times 10^{-12}$m. O valor que medimos experimentalmente e chamamos de "carga do elétron" é, na verdade, o limite da carga efetiva quando a distância tende a infinito. Assim, a constante de estrutura fina α, que é proporcional ao quadrado da carga elétrica, *aumenta* quando nos aproximamos muito de uma carga q.

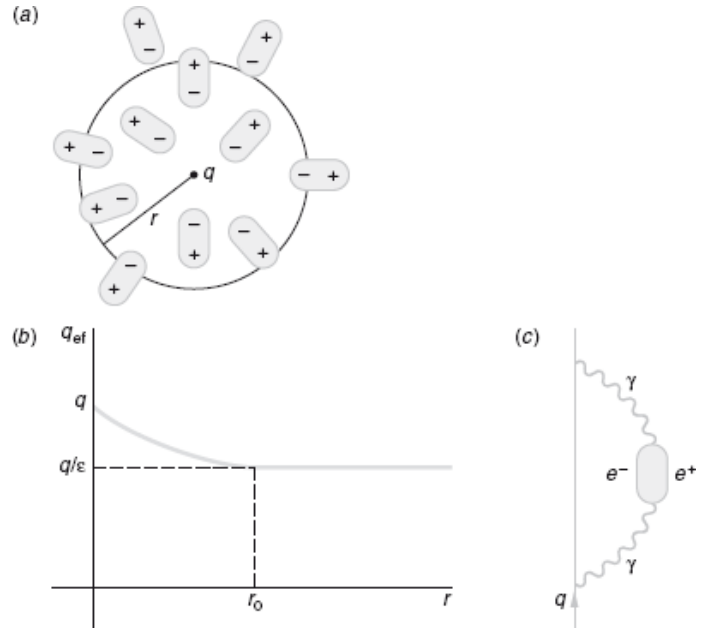


FIGURA 12-10 (*a*) Uma carga positiva q colocada no interior de um dielétrico polariza o material, orientando as moléculas mais próximas de tal forma que as extremidades negativas ficam mais próximas da carga q que as extremidades positivas. Para um observador situado a uma distância r de q, a blindagem de cargas negativas faz com que o campo elétrico seja menor do que se o dielétrico não estivesse presente. (*b*) O valor da carga efetiva q_{ef} depende da distância. A pequenas distâncias, menores que a distância de equilíbrio r_0 das moléculas do dielétrico, o valor de q_{ef} se aproxima do valor de q. (*c*) O vácuo se polariza como um dielétrico por causa da produção de pares virtuais elétron-pósitron por fótons virtuais. O resultado é um aumento do valor da constante de estrutura fina para distâncias muito pequenas.

O mesmo argumento pode ser usado no caso das interações forte e fraca, com uma diferença importante. O fóton, a partícula mediadora da interação eletromagnética, não possui carga elétrica. Por outro lado, as partículas W^- e Z^0, que são as partículas mediadoras da interação fraca, possuem carga fraca, e os glúons, que são as partículas mediadoras da interação forte, possuem cor. Esta última diferença resulta em uma importante característica da interação forte, conhecida como *confinamento*, que será discutida na Seção 12-4.

Exercícios

3. Quais são as semelhanças entre os bárions e os mésons? Quais são as diferenças?
4. Quais são as propriedades comuns a todos os léptons?
5. A massa do múon é quase igual à do píon. Qual é a principal diferença entre as duas partículas?
6. Todos os bárions são hádrons. Por que nem todos os hádrons são bárions?
7. A ligação entre os elétrons e os núcleos para formar átomos é um exemplo de interação eletromagnética. Use as propriedades dessa interação para explicar por que as dimensões dos átomos são da ordem de 10^{-10}m.
8. Cite uma das mudanças que ocorreriam em nosso universo se os elétrons estivessem sujeitos à interação forte.
9. Qual é a "razão técnica" pela qual existem oito glúons em vez de nove?

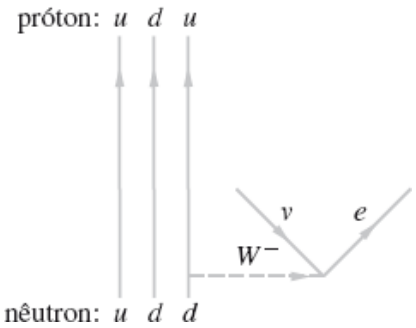
EXEMPLO 12-4 **Decaimento dos Nêutrons** Os nêutrons livres decaem através da interação fraca, com uma meia-vida de 10,4 minutos. A reação é a seguinte:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Use um diagrama de Feynman para ilustrar este decaimento.

SOLUÇÃO

Como o decaimento envolve uma variação da carga do hádron, o bóson mediador é a partícula W^-, que, em seguida, decai em duas partículas estáveis. O diagrama de Feynman da figura abaixo foi traçado supondo que a partícula mediadora é a partícula W^-; o leitor deve se lembrar de que as partículas que se movem para trás no tempo são interpretadas como a antipartícula correspondente se movendo no sentido normal do tempo. Note que, como já foi dito, a interação fraca com uma partícula W muda o sabor do quark.



O diagrama pode ser descrito da seguinte forma: Um nêutron emite uma partícula W^-, transformando-se em um próton; pouco depois, a partícula W^- se transforma em um elétron e um antineutrino.

Observação: *A partícula mediadora também pode ser a partícula W^+. Qual é o diagrama de Feynman nesse caso?*

EXEMPLO 12-5 **Estimativa da Seção de Choque para a Interação Forte** Obtenha uma estimativa da seção de choque de uma interação forte típica, como o espalhamento de dois hádrons (espalhamento de píons por prótons, espalhamento de prótons por prótons, etc.).

SOLUÇÃO

1. A seção de choque σ para uma interação ou reação é dada aproximadamente pela área de um círculo cujo raio é igual ao alcance da interação (veja a Seção 11-7). No caso da interação forte, podemos escrever:

$$\sigma_S = \pi R_S^2$$

2. De acordo com o resultado do Exemplo 11-15, o alcance da interação forte é da ordem de 10^{-15} m; assim, a seção de choque σ_s é dada por:

$$\begin{aligned}\sigma_S &= \pi(10^{-15}\,\mathrm{m})^2 \\ &= 3{,}1 \times 10^{-30}\,\mathrm{m}^2 = 31\ \mathrm{mb}\end{aligned}$$

Observação: *Na verdade, como vimos na Seção 11-7, a seção de choque depende da energia da colisão, mas os valores típicos para a interação forte são da ordem de dezenas de milibarns, o que está de acordo com nossa estimativa.*

12-3 Leis de Conservação e Simetrias

Uma das máximas da natureza, às vezes chamada de *princípio da totalidade*, é a de que "tudo que pode acontecer, acontece". Se um possível decaimento ou reação *não* acontece, existe uma razão para isso, que normalmente é expressa em termos de uma lei de conservação. O leitor já foi apresentado a muitas dessas leis. A *lei de conservação da energia*, por exemplo, proíbe qualquer decaimento no qual a massa total dos produtos é maior do que a massa da partícula original. De acordo com a *lei de conservação do momento linear*, quando um elétron e um pósitron em repouso se aniquilam mutuamente, devem ser emitidos pelo menos dois fótons. As reações de decaimento também obedecem à *lei de conservação do momento angular*. Uma quarta lei de conservação que restringe o número de decaimentos e reações é a *lei de conservação da carga elétrica*: a carga elétrica total Q deve ser a mesma antes e depois de qualquer decaimento ou reação.

Toda lei de conservação expressa uma simetria nas leis da física que governam o universo. Esta afirmativa é uma generalização de um teorema demonstrado em 1918 por Emmy Noether[11] para variáveis conjugadas da mecânica clássica. Por exemplo: as leis da física são simétricas (ou seja, invariantes) em relação a translações no tempo. Isso significa que são as mesmas que no passado. O teorema de Noether relaciona esta invariância, em particular, à lei de conservação da energia. O fato de que as leis da física são simétricas em relação a translações no espaço leva à lei de conservação do momento linear. Se um sistema é simétrico em relação a rotações em torno de um ponto, o momento angular é conservado. A conservação da carga elétrica é consequência da invariância das leis da eletrodinâmica em relação a uma transformação de calibre (ou seja, de escala).

Existe um princípio análogo ao teorema de Noether na mecânica quântica; todavia, tanto na física clássica como na física quântica, muitas leis de conservação foram descobertas empiricamente antes que a simetria correspondente fosse conhecida. Assim, por exemplo, Herman von Helmholz formulou a lei de conservação da energia com base, principalmente, nos experimentos de James Joules, muito antes que Emmy Noether demonstrasse seu teorema. Na física de partículas está ocorrendo algo parecido. Muitas leis de conservação discutidas nesta seção foram descobertas empiricamente, e ainda não foi encontrada uma simetria que justifique sua existência. Vamos chamar a atenção para alguns desses casos no momento oportuno.

Número Bariônico

Na Seção 11-4, mencionamos duas outras leis de conservação, a do número de núcleons e a do número de léptons. Vamos agora definir de forma mais rigorosa essas duas leis. A primeira é um caso especial da seguinte lei:

O número bariônico é conservado.

O número bariônico B é igual a +1 para os bárions, −1 para os antibárions e 0 para as outras partículas. De acordo com a lei de conservação do número bariônico, o valor total de B deve ser o mesmo antes e depois de qualquer decaimento ou reação. Considere, por exemplo, a reação de produção do antipróton (Figura 12-2). A reação é a seguinte:

$$p p \rightarrow p p p \bar{p} \qquad \textbf{12-7}$$

O número bariônico total antes da reação é $B = +1 + 1 = +2$; o número depois da reação é o mesmo: $B = +1 + 1 + 1 - 1 = +2$. Note que, além do antipróton, foi produzido um próton para que a lei de conservação do número bariônico fosse respeitada. Essa é uma regra geral: a produção de um antibárion é sempre acompanhada pela produção de um bárion. Tomada juntamente com a lei de conservação da energia, a lei de conservação do número bariônico exige que o bárion de menor massa, o próton, seja estável. Atualmente, os físicos estão discutindo se isso é realmente verdade. De fato, não se conhece nenhuma simetria que justifique a lei de conservação do número bariônico. Existem vários modos possíveis de decaimento do próton, todos envolvendo a transformação do próton em um lépton e um méson, partículas com $B = 0$. Até o momento, a violação da lei de conservação do número bariônico jamais foi observada; de acordo com os resultados experimentais mais recentes, o limite mínimo para o tempo de vida do próton é 10^{32} anos. Daqui a pouco voltaremos ao assunto.

Número Leptônico

Na versão original do Modelo-padrão, os neutrinos não possuem massa de repouso. Além disso, de acordo com certos experimentos, os neutrinos são levogiros (o spin está orientado antiparalelamente ao momento), enquanto os antineutrinos são dextrogiros (o spin está orientado paralelamente ao momento), como mostra a Figura 12-11*a*. No Modelo-padrão, a massa de repouso de uma partícula é resultado da interação da partícula com o bóson de Higgs. Como essa interação transforma partículas levogiras em dextrogiras, e vice-versa, o fato de que todos os neutrinos aparentemente são levogiros foi interpretado como uma indicação de que, como o fóton, os neutrinos não interagem com o bóson de Higgs e, portanto, não possuem massa de repouso. Isso, por sua vez, significaria que o número leptônico é conservado em interações fracas e que a lei de conservação dos léptons pode ser aplicada separadamente aos três sabores.

De acordo com o Modelo-padrão, o número leptônico é conservado separadamente para cada sabor.

O número leptônico do elétron e do neutrino do elétron é $L_e = +1$ e o do pósitron e do antineutrino do elétron é $L_e = -1$. Para todas as outras partículas, incluindo os léptons de outros sabores, $L_e = 0$. Analogamente, o número leptônico do múon e do neutrino do múon é $L_\mu = +1$ e o número leptônico do táuon e do neutrino do táuon é $L_\tau = +1$. Para compreender melhor como é aplicada a lei de conservação do número leptônico, considere os seguintes decaimentos:

$$p \rightarrow \pi^0 e^+ \qquad \textbf{12-8}$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \overline{\nu}_\mu \qquad \textbf{12-9}a$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma \qquad \textbf{12-9}b$$

$$n \rightarrow p e^- \overline{\nu}_e \qquad \textbf{12-10}$$

O decaimento mostrado na Equação 12-8 (um dos possíveis modos de decaimento do próton) conserva a energia, a carga, o momento angular e o momento linear, mas jamais foi observado. Nesse decaimento, o número bariônico B e o número leptônico L_e não são conservados. O decaimento do μ^+ dado pela Equação 12-9*a*, que é observado na prática, resulta na produção de um elétron, um neutrino do elétron e um antineutrino do múon. O μ^+ tem $L_\mu = -1$ e $L_e = 0$. O valor total desses números leptônicos para os produtos do decaimento também é $L_\mu = -1$ (por causa do $\overline{\nu}_\mu$) e $L_e = 0$ (por causa do e^+ e do ν_e, cujos números quânticos são, respectivamente, −1 e 1). O decaimento do múon μ^+ dado pela Equação 12-9*b* foi buscado por muitos grupos, sem sucesso, por muitos anos. Nesse caso, o número leptônico total é conservado, já que $L_\mu = -1$ e $L_e = 0$ do lado esquerdo e $L_e = -1$ e $L_\mu = 0$ do lado direito. A ausência desse tipo de decaimento foi considerada uma indicação de que L_e e L_μ são conservados de forma independente. Na reação da Equação 12-10, que é observada na prática (é a equação do decaimento do nêutron), tanto B como L_e são conservados. De acordo com a lei de conservação do número leptônico, o neutrino emitido no decaimento beta de um nêutron livre é o antineutrino do elétron.

Recentemente, experimentos realizados no Sudbury Neutrino Observatory, no Canadá, e no Super-Kamiokande, no Japão, mostraram que os neutrinos possuem uma massa de repouso e que o sabor dos neutrinos pode mudar com o tempo. A descoberta parece indicar que o Modelo-padrão é apenas uma aproximação de uma teoria mais completa, ainda desconhecida. Vamos especular brevemente na Seção 12-5 a respeito de como seria essa teoria, mas, no momento, discutiremos apenas as implicações dessa descoberta para as leis de conservação que estamos discutindo. Se a massa de repouso dos neutrinos é diferente de zero, os neutrinos se movem com uma velocidade menor que a velocidade da luz. Isso significa que um neutrino que é visto como levogiro para um observador pode ser visto como dextrogiro por outro observador, e vice-versa. Como, aparentemente, a única coisa que distingue um neutrino de um antineutrino é o fato de que os neutrinos são levogiros e os antineutrinos são dextrogiros, o neutrino e o antineutrino seriam, na realidade, a mesma partícula, como foi antecipado na Seção 12-1. Além disso, o fato de que o sabor dos neutrinos pode mudar com o tempo significa que o número leptônico, na verdade, não é conservado independentemente para cada sabor. Seja como for, no restante desta seção vamos considerar válidas as leis de conservação do número bariônico e do número leptônico da forma como foram enunciadas e deixar a discussão de uma possível violação dessas leis para a Seção 12-5.

EXEMPLO 12-6 **Leis de Conservação** Que leis de conservação são violadas nas reações abaixo?

$$(a)\ n \rightarrow p\pi^- \qquad (b)\ \Lambda^0 \rightarrow \overline{p}\pi^+ \qquad (c)\ \pi^- \rightarrow \mu^- \overline{\nu}_\mu$$

SOLUÇÃO

(*a*) Como não existem léptons neste decaimento, o número leptônico é conservado. A carga total é zero antes e depois do decaimento e, portanto, a carga é conservada. O número bariônico também é o mesmo (+1) antes e depois do decaimento. Entretanto, a soma da energia de repouso do próton (938,3 MeV) com a energia de repouso do píon (139,6 MeV) é maior que a energia de repouso do nêutron (939,6 MeV); assim, este decaimento viola a lei de conservação da energia.

(*b*) Neste caso também não existem léptons, e a carga total é zero antes e depois do decaimento. Além disso, como a energia de repouso da partícula Λ^0 (1116 MeV) é maior que a soma das energias de repouso do antipróton (938,3 MeV) e do píon (139,6 MeV), a lei de conservação da energia não é violada. Entretanto, este decaimento não conserva o número bariônico, que é +1 para a partícula Λ^0, −1 para o antipróton e 0 para o píon.

(*c*) Como neste decaimento não existem bárions, a lei de conservação do número bariônico é automaticamente respeitada. A lei de conservação da carga também é respeitada, já que a carga total é −1 antes e depois do decaimento. A energia do píon (139,6 MeV) é maior que a soma das energias de repouso do múon (105,7 MeV) e do antineutrino (≤ 0,3 MeV) e, portanto, a lei de conservação da energia não é violada. Finalmente, o número leptônico também é conservado, já que $L_\mu = 0$ para o píon, +1 para o múon e −1 para o antineutrino. Na verdade, este é o principal modo de decaimento do π^-.

Leitura Suplementar

Toda lei de conservação expressa uma simetria nas leis da física. Qual é, porém, a grandeza física cuja conservação está associada a uma dada simetria? A questão é discutida na Leitura Suplementar *Em Que Circunstâncias uma Grandeza Física é Conservada?*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Equações 12-11 a 12-22 e o Exemplo 12-7.

Outras Leis de Conservação

As leis de conservação para hádrons podem ser expressas em termos dos chamados *números quânticos internos* dos quarks, que aparecem na Tabela 12-5: a carga elétrica Q, o número bariônico B, o up U, o down D, o charme C, a estranheza S, o bottom B' e o top T.

Estranheza Algumas leis de conservação não são universais, mas se aplicam apenas a certos tipos de interação. Em particular, existem grandezas físicas que são conservadas em reações e decaimentos mediados pela interação forte, mas não são conservadas em reações e decaimentos mediados pela interação fraca. Existe uma certa semelhança entre esta situação e o que acontece com as regras de seleção para as transições eletrônicas. Assim, por exemplo, a regra de seleção $\Delta\ell = \pm 1$ se aplica apenas a transições do tipo dipolo elétrico: um átomo em um estado com $\ell = 2$ não pode decair para um nível de energia com $\ell = 0$ emitindo uma radiação do tipo dipolo elétrico por causa desta regra de seleção, mas pode decair através de uma transição do tipo quadrupolo elétrico, que, em geral, é muito menos provável que as transições do tipo dipolo elétrico. Uma das grandezas conservadas nas interações fortes é a *estranheza*.* Esta grandeza foi introduzida por M. Gell-Mann[13] em 1953 e por K. Nishijima em 1955 para explicar o comportamento aparentemente estranho de alguns bárions e mésons pesados. Considere a seguinte reação, que pode acontecer quando uma partícula π^- de alta energia interage com um próton (Figura 12-11*b*):

Tabela 12-5 Números quânticos internos dos quarks

Quark	Q	B	U	D	C	S	T	B'
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	0	0	0	0
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	−1	0	0	0	0
c	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	1	0	0	0
s	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	−1	0	0
t	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	1	0
b	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0	−1

$$p\pi^- \rightarrow \Lambda^0 K^0 \qquad \textbf{12-23}$$

A seção de choque para a reação é relativamente grande, o que era de se esperar, pois é mediada pela interação forte (veja o Exemplo 12-5). Entretanto, o tempo de vida das partículas Λ^0 e K^0 é da ordem de 10^{-10}s, muito maior que o tempo de vida normal das partículas cujo decaimento é mediado pela interação forte, que é da ordem de 10^{-23} s (veja a Tabela 12-4). Por apresentarem esse comportamento inesperado, as partículas Λ^0, K^0 e outras partículas semelhantes passaram a ser chamadas de *partículas estranhas*.

Para explicar o comportamento das partículas estranhas, Gell-Mann e Nishijima propuseram a existência de um novo número quântico, que chamaram de *estranho* (*strange*, em inglês), cujo valor seria diferente para as partículas estranhas e para os hádrons comuns (prótons, nêutrons e píons). Se esse número fosse conservado nas reações e decaimentos mediados pela interação forte e pela interação eletromagnética, as partículas estranhas só poderiam sofrer decaimentos mediados pela interação fraca, o que explicaria o longo tempo de vida. A estranheza dos hádrons comuns foi definida arbitrariamente como 0. A estranheza da partícula K^0 foi definida arbitrariamente como sendo +1 e a estranheza da partícula Λ^0 como −1, para que a estranheza fosse conservada na reação da Equação 12-23. A estranheza de outras partículas foi estabelecida estudando as várias reações e decaimentos e verificando se ocorriam com o tempo característico das interações fortes ou das interações fracas e eletromagnéticas. Um dos primeiros sucessos da teoria dos quarks foi associar a estranheza a um novo tipo de quark, que, por motivos óbvios, recebeu o nome de quark estranho.

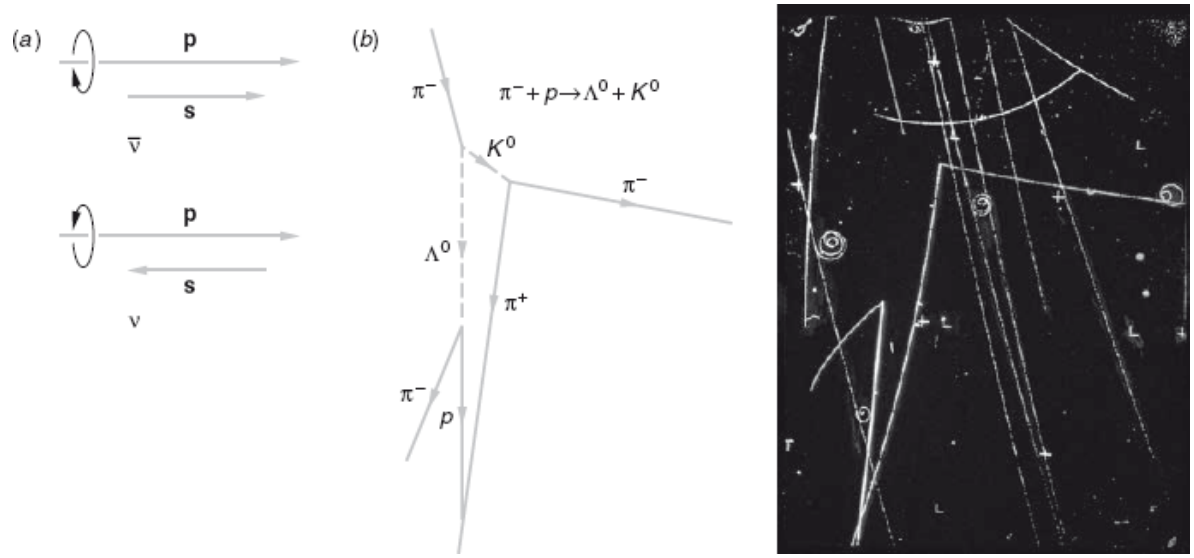


FIGURA 12-11 (*a*) O spin dos antineutrinos é paralelo ao momento; o spin dos neutrinos é antiparalelo ao momento. (*b*) Rastros em uma câmara de bolhas do Lawrence Berkeley Laboratory mostrando a produção, através da reação da Equação 12-23, e subsequente decaimento de duas partículas estranhas, K^0 e Λ^0. Essas partículas neutras são identificadas pelos rastros deixados pelos produtos de decaimento. A partícula lambda recebeu esse nome por causa da semelhança dos rastros das partículas do decaimento com a letra grega Λ. O méson π^- incidente tinha uma energia de 1 GeV. [(*b*) *Lawrence Berkeley Laboratory/Photo Researchers*.]

Isospin Como foi dito na Seção 12-2, os hádrons podem ser agrupados em *multipletos de carga*, famílias de partículas de cargas diferentes e massas muito próximas, como o próton e o nêutron. Além disso, vimos na Seção 11-5 que a interação forte não depende da carga elétrica. Assim, é razoável imaginar que os membros de um multipleto são diferentes estados de carga da mesma partícula. O "desdobramento" das massas produzido pela interação eletromagnética é análogo ao desdobramento dos estados atômicos produzido pela interação spin-órbita (veja a Seção 7-5). Por causa da analogia com os isótopos (átomos com o mesmo número atômico e massas ligeiramente diferentes) e com o desdobramento sofrido pelos diferentes estados de spin, o termo *isospin* é usado para descrever esta multiplicidade. O isospin **I** é tratado como um vetor em um "espaço de carga" tridimensional, em analogia com os vetores **S** (spin) e **L** (momento angular orbital) no espaço real. A componente de **I** na "direção *z*" é chamada de I_3 e é quantizada, da mesma forma como as componentes *z* do spin e do momento angular orbital dos elétrons atômicos são quantizadas. A relação entre a carga *q* de uma partícula e o valor de I_3 é dada por

$$q = eQ = e\left(I_3 + \frac{B + C + S + B' + T}{2}\right) \qquad \textbf{12-24}$$

na qual *Q*, *B*, *C*, *S*, *B′* e *T* são os números quânticos da Tabela 12-5. O valor de *I* para os núcleons é 1/2, com dois valores possíveis para I_3: 1/2 (próton) e −1/2 (nêutron). No caso de partículas com maior massa, $I = 1/2$ para o dubleto Ξ, 0 para os singletos Λ e Ω e 1 para o tripleto Σ (com $I_3 = +1$ para a partícula Σ^+, 0 para a partícula Σ^0 e −1 para a partícula Σ^-). No caso dos mésons, $I = 1$ para o tripleto π, 1/2 para o dubleto *K* e 0 para o singleto η. As regras para somar isospins são as mesmas que para somar momentos angulares. Quando apenas a interação forte está presente, I_{op} e H_{op} comutam e **I** é conservado. As reações e decaimentos nos quais o isospin total do sistema não é conservado não são mediados pela interação forte.

Hipercarga Outro parâmetro que foi muito usado na análise de reações e decaimentos de partículas é a *hipercarga*, definida a partir da relação entre a carga, o isospin e outros números quânticos da Tabela 12-5. A hipercarga *Y* é definida através da equação

$$Y = B + C + S + B' + T \qquad \textbf{12-25}$$

De acordo com a Equação 12-24, podemos escrever:

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + C + S + B' + T) \qquad \textbf{12-26}$$

Combinando as Equações (12-25) e (12-26), obtemos uma relação simples entre *Y*, a carga e o isospin:

$$Y = 2(Q - I_3) \qquad \textbf{12-27}$$

Outra forma de definir a hipercarga é dizer que é igual a duas vezes a carga média do multipleto considerado. Assim, por exemplo, a carga média do multipleto dos núcleons é $(1e + 0e)/2 = e/2$. Portanto, para os núcleons, $Y = 1$, o que está de acordo com os resultados obtidos para o próton e para o nêutron usando a Equação 12-27. Como o número bariônico é conservado em todos os casos e os outros números quânticos envolvidos na definição de *Y* são conservados apenas nas interações fortes e eletromagnéticas, a hipercarga também é conservada apenas nas interações fortes e eletromagnéticas. Nas interações fracas, $\Delta Y = \pm 1$ ou 0. A Tabela 12-6 mostra os valores de *I*, I_3, *B*, *S* e *Y* para alguns hádrons que são estáveis em relação a decaimentos mediados pela interação forte. Observe que, se não fosse pela conservação da hipercarga na interação forte, todos os bárions, exceto os núcleons, decairiam através da interação forte e, portanto, teriam tempos de vida da ordem de 10^{-23} s.

Tabela 12-6Alguns números quânticos de hádrons estáveis em relação a decaimentos mediados pela interação forte

Partícula	Spin (ħ)	*I*	I_3	*B*	*S*	*Y*

p	1/2	1/2	+1/2	1	0	1
n	1/2	1/2	−1/2	1	0	1
Λ^0	1/2	0	0	1	−1	0
Σ^+	1/2	1	+1	1	−1	0
Σ^0	1/2	1	0	1	−1	0
Σ^-	1/2	1	−1	1	−1	0
Ξ^0	1/2	1/2	+1/2	1	−2	−1
Ξ^-	1/2	1/2	−1/2	1	−2	−1
Ω^-	3/2	0	0	1	−3	−2
π^+	0	1	+1	0	0	0
π^0	0	1	0	0	0	0
π^-	0	1	−1	0	0	0
K^+	0	1/2	+1/2	0	+1	+1
K^0	0	1/2	−1/2	0	+1	+1
η^0	0	0	0	0	0	0

Os multipletos de carga são claramente visíveis em gráficos de Y em função de I_3. Foi o estudo das regularidades existentes em gráficos desse tipo (veja a Figura 12-12) que levou à formulação do modelo dos quarks, que será discutido na Seção 12-4. Essas regularidades são análogas às observadas nos multipletos dos estados de energia dos elétrons, graças às quais foi possível compreender a estrutura interna dos átomos.

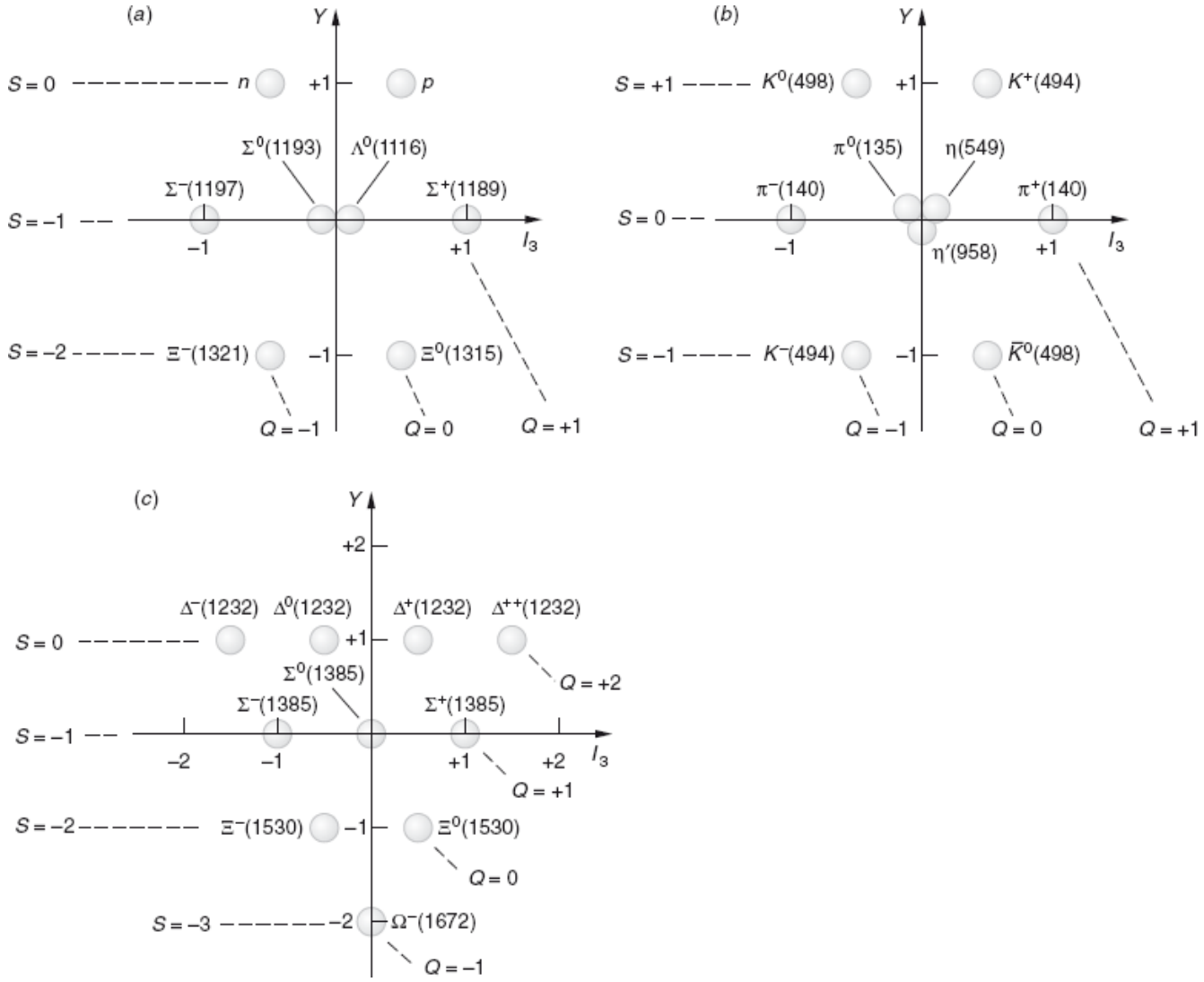


FIGURA 12-12 Gráficos da hipercarga Y em função da componente I_3 do isospin. (*a*) Bárions com spin 1/2. (*b*) Mésons com spin 0. (*c*) Bárions com spin 3/2. Com exceção da partícula Ω^-, todas essas partículas são ressonâncias (veja a Seção 12-3 e a Leitura Suplementar *Ressonâncias e Estados Excitados*). As massas (indicadas entre parênteses) estão em MeV/c^2. Observe que, nos três diagramas, as partículas de mesma carga estão em retas inclinadas para baixo e as partículas de mesma hipercarga (e estranheza) estão em retas horizontais.

As leis de conservação e as propriedades dos números quânticos permitem tirar algumas conclusões a respeito da relação entre partículas e antipartículas. Como os números quânticos de uma partícula e da antipartícula correspondente têm sinais opostos, se pelo menos um dos números quânticos é diferente de zero, a partícula e a antipartícula são partículas distintas. No caso do fóton, do gráviton e da partícula π^0, todos os números quânticos são nulos e, portanto, a partícula e a antipartícula se confundem. As partículas π^+ e π^- constituem um caso especial, já que apenas a carga é diferente de zero. Isso faz com que uma seja a antipartícula da outra, mas, como todos os outros números quânticos são nulos, não é possível dizer qual é a partícula e qual é a antipartícula.

EXEMPLO 12-8 **Aplicação das Leis de Conservação** Determine se cada um dos decaimentos a seguir é mediado pela interação forte, pela interação eletromagnética, pela interação fraca ou simplesmente não acontece.

$(a)\ \Sigma^+ \rightarrow p\pi^0 \qquad (b)\ \Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0\gamma \qquad (c)\ \Xi^0 \rightarrow n\pi^0$

SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, observamos que, nos três casos, a massa da partícula original é maior que a massa dos produtos do decaimento, de modo que a lei de conservação da energia é respeitada. Além disso, não há léptons envolvidos e a carga e o número bariônico são conservados nos três decaimentos.

(*a*) De acordo com a Figura 12-12, a hipercarga da partícula Σ^+ é 0, a do próton é +1 e do píon é 0. A variação de hipercarga é, portanto, igual a 1. Este decaimento pode ser mediado pela interação fraca, mas não pela interação forte. Trata-se, na verdade, de um dos modos de decaimento da partícula Σ^+, com um tempo de vida da ordem de 10^{-10}s.

(*b*) Como a hipercarga das partículas Σ^0 e Λ^0 e do fóton é 0, a variação de hipercarga é 0 e este decaimento pode ser mediado pela interação eletromagnética. Trata-se, na verdade, do principal modo de decaimento da partícula Σ^0, com um tempo de vida da ordem de 10^{-20}s.

(*c*) A hipercarga da partícula Ξ^0 é −1, a do nêutron é +1 e a do píon é 0. A variação de hipercarga é, portanto, igual a 2. Como a variação da hipercarga em uma reação ou decaimento não pode ser maior que 1, este decaimento não acontece.

Exercícios

10. Como é possível saber se um decaimento é mediado pela interação forte, pela interação eletromagnética ou pela interação fraca?

11. A estranheza ou a hipercarga de uma nova partícula pode ser determinada, mesmo que o número de partículas do multipleto seja desconhecido? Justifique sua resposta.

Paridade A *paridade* de um núcleo ou partícula é definida da mesma forma que a paridade de um átomo (veja a Seção 6-5). Se a função de onda muda de sinal quando é mudado o sinal das coordenadas espaciais, dizemos que a paridade é ímpar, ou −1; se a função de onda não muda de sinal, dizemos que a paridade é par, ou +1. Ao contrário dos outros números quânticos discutidos até agora, o número quântico de paridade, P, pode ter apenas dois valores: +1 e −1. Se a paridade de um sistema muda, o valor da paridade é multiplicado por −1. A paridade é, portanto, uma propriedade multiplicativa e não aditiva como o número bariônico, a estranheza e a hipercarga. A paridade de uma função de onda atômica depende do número quântico de momento angular orbital: $P = (-1)^{\ell}$. Em outras palavras, a paridade é ímpar para ℓ ímpar e par para ℓ par. Quando discutimos as transições atômicas, vimos que o momento angular e, portanto, a paridade de um átomo podem mudar quando o átomo emite um fóton. No caso das transições do tipo dipolo elétrico, $\Delta\ell = \pm 1$. Isso significa que o momento angular e a paridade do átomo sempre mudam em transições desse tipo. Entretanto, quando consideramos o sistema completo, ou seja, o átomo mais o fóton, verificamos que o momento angular total e a paridade total permanecem inalterados. Em outras palavras, a paridade é conservada nas interações eletromagnéticas. A paridade também é conservada na interação forte.

Até 1956, os físicos supunham que a paridade era conservada em todas as reações e decaimentos. Nesse ano, porém, T. D. Lee e C. N. Yang levantaram a hipótese de que a paridade não era conservada nas interações fracas. Essa seria uma forma de explicar o comportamento peculiar de partículas que na época eram conhecidas como mésons τ e θ. As duas partículas eram iguais, exceto pelo fato de que o méson τ decaía em dois píons, um sistema de paridade positiva, enquanto o méson τ decaía em três píons, um sistema de paridade negativa. (Todas as partículas elementares possuem uma paridade intrínseca; a dos píons é negativa.) A dúvida com relação às partículas τ e θ era a seguinte: Existiam na natureza duas partículas iguais em tudo, exceto na paridade, ou a paridade não era conservada em algumas reações? Lee e Yang chamaram atenção para o fato de que todas as provas experimentais da conservação da paridade tinham sido colhidas no estudo de reações mediadas pela interação forte ou pela interação eletromagnética; estava, portanto, em aberto a possibilidade de que a paridade não fosse conservada nas interações fracas. Os dois físicos sugeriram que a conservação da paridade nas interações fracas fosse investigada experimentalmente medindo a distribuição angular dos elétrons emitidos no decaimento β de núcleos com spins alinhados. Quando um experimento desse tipo foi executado, em dezembro de 1956, por um grupo liderado por C. S. Wu e E. Ambler, os resultados confirmaram as previsões de Lee e Yang, que receberam o Prêmio Nobel de Física de 1957. Hoje se sabe que os mésons τ e θ são na verdade uma única partícula, conhecida como méson K^0, com dois modos diferentes de decaimento. O decaimento do méson K^0 será discutido com mais detalhes quando tratarmos da invariância TCP.

A conservação da paridade significa que um processo descrito pelas coordenadas x, y e z não muda quando é descrito pelas coordenadas $x' = -x$, $y' = -y$ e $z' = -z$. O sistema x, y, z é chamado de *sistema de coordenadas dextrogiro* porque o produto vetorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é um vetor que aponta no sentido positivo do eixo $\mathbf{z}$. O sistema x', y', z' é chamado de *sistema de coordenadas levogiro* porque o produto vetorial $\mathbf{x}' \times \mathbf{y}'$é um vetor que aponta no sentido negativo do eixo $\mathbf{z}'$. Não existe nenhuma rotação capaz de transformar um sistema de coordenadas dextrogiro em um sistema levogiro, mas isso pode ser conseguido por reflexão, como mostra a Figura 12-13*a*. Por essa razão, podemos enunciar a lei de conservação da paridade da seguinte forma: Nos processos em que a paridade é conservada, a imagem especular do processo é igual ao processo. A Figura 12-13*b* mostra um núcleo com spin diferente de zero emitindo um elétron na direção do spin. Na imagem especular, o núcleo emite o elétron na direção oposta à direção do spin. Para que a paridade seja conservada nos decaimentos β, é preciso que a probabilidade de emissão na direção do spin seja igual à probabilidade de emissão na direção oposta, ou seja, não pode haver um sentido preferencial para a emissão. Normalmente, não é possível verificar se existe um sentido preferencial para a emissão porque os spins nucleares estão orientados aleatoriamente. O que Wu e Ambler fizeram foi orientar núcleos de ^{60}Co, submetendo a amostra a um campo magnético em uma temperatura extremamente baixa, da ordem de 0,01 K, e observar em que direção os elétrons eram emitidos na reação de decaimento $^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + \beta^- + \nu\text{–}e$. O experimento revelou que o número de elétrons emitidos na direção oposta à do spin é maior, o que equivale a dizer que a paridade não é conservada nas interações fracas.

A Tabela 12-7 mostra um resumo das leis de conservação discutidas nesta seção.

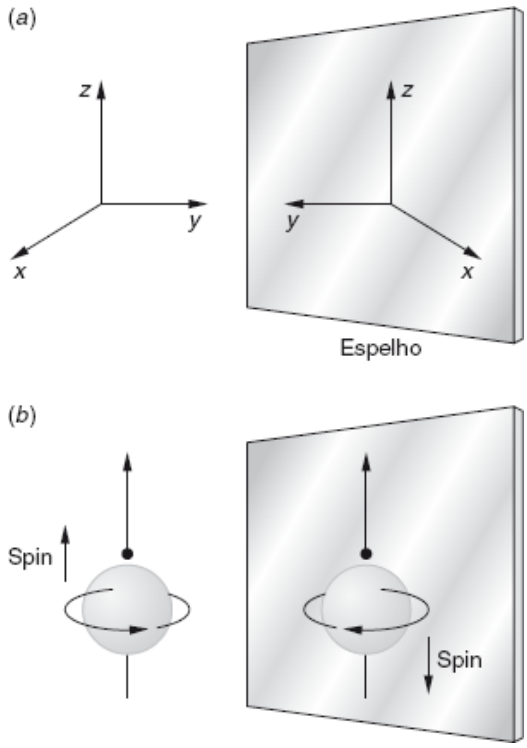


FIGURA 12-13 (*a*) A imagem no espelho de um sistema de coordenadas dextrogiro (**x** × **y** aponta no sentido positivo do eixo **z**) é um sistema de coordenadas levogiro (**x** × **y** aponta no sentido negativo do eixo **z**). Nenhuma combinação de translações e rotações pode transformar um sistema de coordenadas dextrogiro em um sistema levogiro. (*b*) Um núcleo emite um elétron na direção do spin. Como o espelho inverte o sentido de rotação do núcleo e, portanto, a direção do spin, mas não muda a direção em que o elétron é emitido, na imagem do núcleo no espelho o elétron é emitido na direção oposta à direção do spin.

Tabela 12-7 Grandezas conservadas nas interações de partículas fundamentais

	Interação		
Grandeza conservada	**Forte**	**Eletromagnética**	**Fraca**
Energia Momento Carga (Q) Número bariônico (B) Número leptônico (L)	Sim	Sim	Sim
Isospin (I)	Sim	Não	Não
Hipercarga (Y)	Sim	Sim	Não
Estranheza (S)	Sim	Sim	Não
Paridade (P)	Sim	Sim	Não

Invariância TCP É possível demonstrar que, em qualquer teoria quântica relativística na qual a velocidade dos sinais não pode exceder a velocidade da luz no vácuo, as operações combinadas de inversão do *T*empo ($t \rightarrow -t$), conjugação de *C*arga (partícula → antipartícula) e *P*aridade ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) deixam as funções de onda inalteradas:

$$TCP\Psi(\mathbf{r},t) = +1\Psi(\mathbf{r},t) \quad \text{ou} \quad TCP = +1 \qquad \textbf{12-28}$$

A ordem na qual as operações são executadas é irrelevante.

Durante muito tempo se pensou que a invariância se aplicava separadamente às três operações, ou seja, que $T = +1$, $C = +1$ e $P = +1$. Entretanto, como vimos, a paridade não é conservada nas interações fracas. Isso significa que, para que $TCP = +1$ nas interações fracas, uma das outras operações também não deve ser conservada. Inicialmente, pensou-se que, embora a paridade pudesse ser violada, a operação combinada *CP* era invariante, ou seja, $CP = +1$, mesmo para a interação fraca. A ideia era compatível com a existência de dois mésons K^0 (káons) com massas parecidas e tempos de vida e modos de decaimento muito diferentes, o K_S^0 ou káon curto (o *S* é a inicial de "short", curto, em inglês), que decai em dois píons com um tempo de vida de $0{,}88 \times 10^{-10}$s, e o K_L^0 ou káon longo (o *L* é a inicial de "long", longo, em inglês), que decai em três píons com um tempo de vida de

$5{,}2 \times 10^{-8}$s (veja a Tabela 12-3). Nesse caso, teríamos $C = +1$ e $P = +1$ para o K_S^0 e $C = -1$ e $P = -1$ para o K_L^0 e, portanto, $CP = +1$ nos dois casos.

Em 1964, porém, J. H. Christenson e colaboradores observaram que, em cerca de 1 em cada 1000 decaimentos, o $K^0{}_L$ decaía em apenas dois píons. O resultado mostrava que, em alguns decaimentos, $CP = -1$ para o decaimento do K_L^0 e, portanto, para que a invariância *TCP* fosse preservada, seria preciso que a invariância *T* fosse violada.

As consequências deste resultado revolucionário mal começaram a ser exploradas; entre as mais importantes estão as assimetrias entre matéria e antimatéria e entre passado e futuro.

Exercícios

12. Suponha que um novo méson eletricamente neutro seja descoberto. Qual é a condição necessária para que seja diferente de sua antipartícula?

13. Como seria modificada a Tabela 12-7 se a estranheza não fosse conservada nas interações hadrônicas?



Leitura Suplementar

As partículas que decaem através da interação forte têm um tempo de vida da ordem de apenas 10^{-23} s, insuficiente para que a trajetória seja registrada por um detector. Essas partículas foram descobertas através do estudo de anomalias em gráficos da seção de choque em função da energia, de maneira análoga à forma como J. Franck e G. Hertz descobriram o primeiro estado excitado do átomo de mercúrio analisando a curva de espalhamento de elétrons por átomos de Hg em função da energia. Este é o tema da Leitura Suplementar *Ressonâncias e Estados Excitados*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet, onde também se encontram as Figuras 12-14 a 12-16, a Tabela 12-8, as Equações 12-29 a 12-31 e os Exemplos 12-9 e 12-10.

12-4 O Modelo-padrão

O Modelo padrão é atualmente (desde 1978) a teoria oficial da física das partículas elementares. Trata-se na verdade de uma combinação de três teorias: a *teoria dos quarks*, que se propõe a explicar a estrutura das partículas; a *teoria eletrofraca*, que é a teoria unificada de duas interações, a interação eletromagnética e a interação fraca; e a *cromodinâmica quântica*, que é a teoria da interação forte. Embora deixe sem resposta algumas questões importantes, o Modelo padrão é capaz de explicar muitas das propriedades das partículas fundamentais e de suas interações. Nas seções anteriores deste capítulo, tivemos oportunidade de aludir a vários aspectos particulares do Modelo-padrão. Nesta seção, vamos estudar com mais detalhes as três teorias que o compõem. Como a descrição matemática do modelo é extremamente complexa, limitar-nos-emos a uma discussão qualitativa e conceitual.

A busca de resultados experimentais que comprovassem a validade do Modelo-padrão levou os cientistas a criar vários tipos novos de detectores de partículas. Alguns desses detectores estão sendo usados em outras aplicações. Um exemplo é o detector de germanato de bismuto (BGO), atualmente usado nos equipamentos de tomografia por emissão de pósitrons (veja a Figura 11-65).

O Modelo dos Quarks

O Caminho Óctuplo Com a entrada em operação dos aceleradores de partículas de alta energia, na década de 1950, muitos novos hádrons foram descobertos.[14] Entre as várias tentativas de compreender e classificar essas partículas, a mais bem-sucedida foi o *caminho óctuplo*,[15] proposto independentemente por M.

Gell-Mann e Y. Ne'eman em 1961 e justificado posteriormente pelo Modelo-padrão. Nesse esquema, os hádrons que compõem os multipletos de carga são dispostos em grupos, conhecidos como *supermultipletos*, nos quais todos os membros têm o mesmo spin e o mesmo valor de J^P, em que J é o spin e P é a paridade. A Figura 12-12 mostra três dos supermultipletos de Gell-Mann: (*a*) o grupo dos oito bárions mais leves, conhecido como *octeto dos bárions*; (*b*) o grupo dos mésons mais leves, conhecido como *octeto dos mésons* (que, na verdade, é um *noneto*); (*c*) o grupo dos dez bárions mais leves que não pertencem ao octeto dos bárions, conhecido como *decupleto dos bárions*. A Figura 12-17 mostra a energia das partículas pertencentes ao octeto dos bárions em um diagrama análogo ao usado para representar o desdobramento fino dos estados atômicos. Os desdobramentos dos multipletos de isospin são bem maiores que os desdobramentos dentro de cada multipleto. Até o momento, os únicos supermultipletos de bárions cujas partículas foram todas observadas experimentalmente são o octeto e o decupleto, mas existem vários supermultipletos parcialmente levantados. Os mésons conhecidos compreendem seis nonetos. Convém notar que também existem supermultipletos de *antibárions* (um octeto, um decupleto etc.), enquanto, no caso dos mésons, as antipartículas pertencem ao mesmo noneto. A classificação proposta por Gell-Mann pode ser considerada o equivalente, para as partículas fundamentais, da tabela periódica dos elementos químicos, que foi proposta por Medeleev em 1869, quase cem anos antes, e teve que esperar muito tempo por uma explicação em termos da teoria atômica.

O caminho óctuplo se baseia em uma teoria matemática conhecida como *teoria dos grupos contínuos*,[16] formulada, entre outros, pelo matemático norueguês S. Lie. A maioria dos grupos que interessam aos físicos pode ser expressa na forma de matrizes. Assim, por exemplo, os quadrivetores que foram discutidos no Capítulo 2 podem ser escritos na forma de um grupo de matrizes 4 × 4 conhecido como grupo de Lorentz. O grupo de Lie mais simples, conhecido como SU(2), é o grupo especial unitário de matrizes 2 × 2. Uma condição especial imposta às matrizes 2 × 2 reduz o número de componentes de 4 para 3. As três componentes independentes dessas matrizes correspondem às três componentes do momento angular (ou do isospin). Como vimos anteriormente, aos diferentes valores possíveis de momento angular J correspondem estados com multiplicidades 1, 2, 3, 4, ..., $(2J + 1)$, cujo momento angular é 0, 1/2, 1, 3/2, ... J unidades de $\hbar$. O grupo de Lie seguinte é SU(3), o grupo especial unitário de matrizes 3 × 3. Mais uma vez, uma condição especial reduz o número de componentes de 9 para 8 (daí o nome caminho óctuplo). As oito grandezas envolvidas na aplicação do grupo SU(3) à classificação dos hádrons são as três componentes do isospin, a hipercarga e quatro outras a serem definidas. Sem entrar em detalhes da teoria de grupos, vamos apenas observar que o grupo SU(3) leva a multipletos constituídos por 1, 3, 8, 10, . . . elementos. Em vez de atribuir um número a cada um desses multipletos, como é feito com o número quântico de momento angular no caso do grupo SU(2), é mais interessante construir diagramas bidimensionais conhecidos como *diagramas de peso*, como os que aparecem na Figura 12-18, nos quais os elementos de cada multipleto são representados por pontos. Quando o grupo SU(3) é aplicado à classificação das partículas fundamentais, os eixos do diagrama de peso são Y e I_3, como na Figura 12-12.

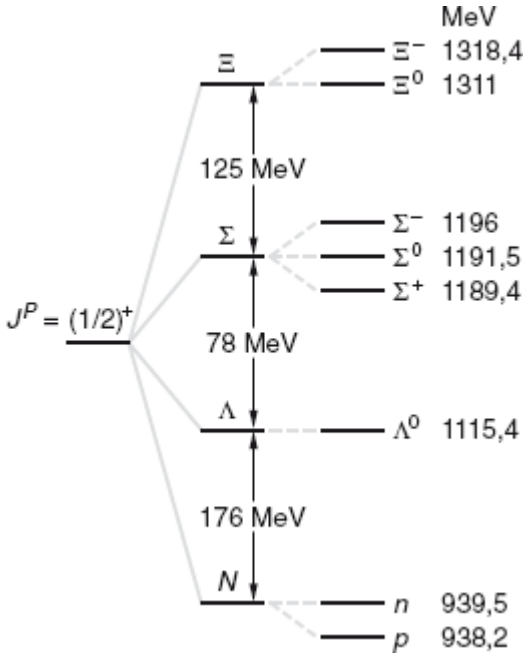


FIGURA 12-17 Diagrama de níveis de energia do octeto de bárions, o supermultipleto dos bárions hadronicamente estáveis com $J^P = (1/2)^+$. Na ausência de interações, todas as partículas teriam a mesma massa. O número diferente de quarks *s* desdobra os estados de energia em quatro estados, que correspondem ao núcleon (*N*), à partícula lambda (Λ), à partícula sigma (Σ) e à partícula xi (Ξ). As massas diferentes dos quarks *u* e *d* e a interação eletromagnética desdobram novamente três desses estados, produzindo o dubleto *N*, o tripleto Σ e o dubleto Ξ.

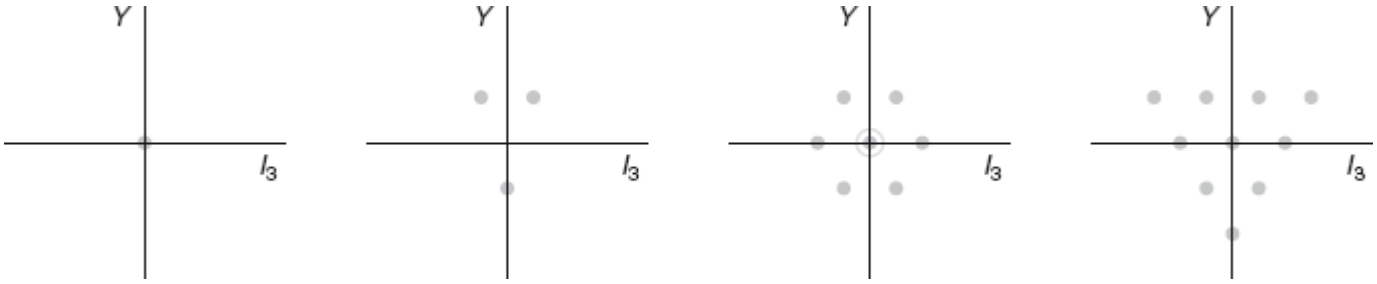


FIGURA 12-18 Diagramas de peso do grupo SU(3). O círculo que envolve o ponto na origem do hexágono da terceira figura indica que existem duas partículas na origem, o que faz da figura um octeto.

No gráfico de Y em função de I_3 para os bárions com $J^P = (3/2)^+$ (o decupleto da Figura 12-12*c*), nem as partículas Ξ nem a partícula Ω^- tinham sido observadas quando o caminho óctuplo foi proposto em 1961. Observe que a diferença entre as energias de repouso das partículas do decupleto que ocupam linhas horizontais vizinhas é aproximadamente 140 MeV. A teoria baseada no grupo SU(3) prevê uma diferença constante entre os vários multipletos. A previsão da partícula Ω^- por Gell-Mann em 1961 e sua descoberta em 1964, com a massa e o spin previstos por Gell-Mann, foi um dos sucessos mais espetaculares do caminho óctuplo. Note que Ω^- é a única partícula do decupleto que não decai através da interação forte. Isso acontece porque a massa da partícula Ω^- não é suficiente para que decaia através de uma reação que conserve a estranheza, como $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + K^-$.

Outros supermultipletos podem ser formados por bárions e mésons de maior energia, mas não existem grupos de três partículas que correspondam ao tripleto do grupo SU(3) que aparece no segundo diagrama a partir da esquerda na Figura 12-18. Este fato e a ausência de um *motivo* para a existência dos multipletos do caminho óctuplo levaram Gell-Mann e G. Zweig em 1964 a propor independentemente que todos os hádrons são compostos de partículas ainda mais fundamentais, que receberam o nome de *quarks*.[17] Esta proposta constituiu o ponto de partida para o modelo dos quarks, hoje aceito universalmente como o modelo que melhor explica as propriedades das partículas elementares.

No modelo original, os quarks existiam em três tipos, conhecidos como *sabores*: *u*, *d* e *s* (as iniciais de *up*, *down* e *strange*). Mais tarde, como vimos, foram descobertos outros três quarks, que foram chamados de *c*, *b* e *t* (as iniciais de *charm*, *bottom* e *top*). Ao contrário das partículas conhecidas até então, esses quarks tinham valores fracionários de carga elétrica: a carga do quark *u* é $2e/3$ e a dos quarks *d* e *s* é $-e/3$. Os três quarks têm número bariônico $B = 1/3$ e spin $S = 1/2$. A estranheza dos quarks *u* e *d* é 0 e a do quark *s* é −1. Para cada quark existe um antiquark com valores simétricos de carga elétrica, número bariônico e estranheza. Os três tipos de quark formam o triângulo representado em um dos diagramas de peso da Figura 12-18 e que aparece, de forma mais detalhada, na Figura 12-19. A Tabela 12-2 mostra as propriedades dos quarks.* De acordo com o modelo dos quarks, todos os bárions são formados por três quarks (ou três antiquarks, no caso das antipartículas) e todos os mésons são formados por um quark e um antiquark. O próton é formado pela combinação *uud* e o nêutron pela combinação *udd*.

Os bárions de estranheza $S = -1$ contêm um quark *s*. Todas as partículas da Tabela 12-3 podem ser construídas a partir dos quarks *u*, *d* e *s* e respectivos antiquarks.[18]

Um importante argumento a favor do modelo dos quarks é o fato de que todas as combinações permitidas de três quarks e de pares quark-antiquark resultam em hádrons conhecidos. Fortes indícios da existência de quarks no interior dos núcleons foram obtidos em experimentos de *espalhamento inelástico profundo*, nos quais um núcleon é bombardeado por elétrons ou múons com energia entre 15 e 200 GeV. A análise das partículas que sofreram grandes ângulos de espalhamento sugere a presença, no interior do núcleon, de partículas de spin 1/2 e dimensões muito menores que as do núcleon. Esses experimentos são análogos àqueles em que Rutherford bombardeou átomos com partículas α e concluiu que os átomos possuíam um pequeno núcleo.



Murray Gell-Mann, que propôs o conceito de estranheza, desenvolveu um sistema de classificação para os hádrons baseado no grupo SU(3) e postulou a existência de partículas de carga fracionária, que chamou de quarks. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1969 pelo conjunto do seu trabalho. [*American Institute of Physics, Niels Bohr Library*.]

Como as leis de conservação que envolvem os vários números quânticos da Tabela 12-5 são aditivas, é fácil determinar as propriedades de um hádron a partir dos quarks que o compõem. Assim, por exemplo, uma partícula formada pela combinação *uds* tem carga 0 (2/3 −1/3 −1/3), número bariônico 1 (1/3 + 1/3 + 1/3) e pode ter spin 1/2 (se o spin de um dos quarks estiver antiparalelo aos dos outros dois) ou 3/2 (se os três spins estiverem paralelos). A Tabela 12-9 mostra as combinações possíveis de três quarks (bárions) e a Tabela 12-10 as combinações possíveis de um quark com um antiquark (mésons).

Os oito bárions de spin 1/2 formam o octeto que aparece na Figura 12-12*a*; a Figura 12-20*a* mostra as combinações de quarks correspondentes.* Observe que, de acordo com a Tabela 12-10, existem *nove* combinações quark-antiquark e não oito, como estabelecia o caminho óctuplo. O nono méson, η', considerado no modelo dos quarks como parte deste grupo, já havia sido observado experimentalmente, mas era considerado um singleto no modelo do caminho óctuplo. A Figura 12-20*b* mostra as combinações quark-antiquark para os componentes do primeiro dos vários nonetos de mésons, o que aparece na Figura 12-12*b*.

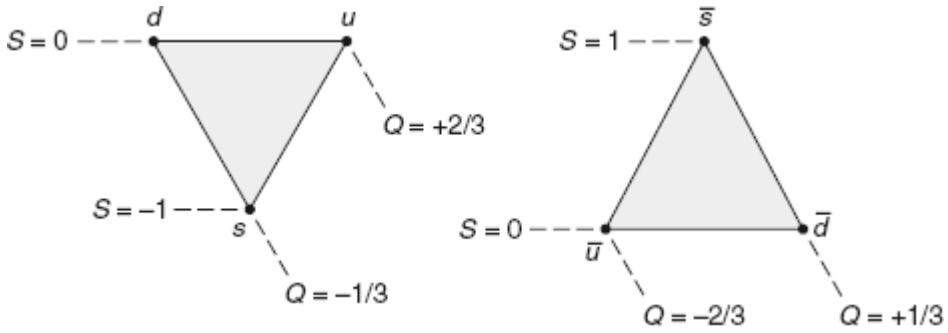


FIGURA 12-19 Diagramas de peso do grupo SU(3) (Y em função de I_3) para os três quarks mais leves e respectivos antiquarks. Como

nos diagramas de supermultipletos do caminho óctuplo, as retas inclinadas para baixo são lugares geométricos de carga constante e as retas horizontais são lugares geométricos de estranheza constante.

Tabela 12-9 Propriedades das combinações dos quarks *u*, *d* e *s*

Combinação	Spin (ħ)	Carga (e)	Número bariônico	Estranheza	Hipercarga	I_3
uuu	3/2	+2	1	0	+1	+3/2
uud	1/2, 3/2	+1	1	0	+1	+1/2
udd	1/2, 3/2	0	1	0	+1	−1/2
uus	1/2, 3/2	+1	1	−1	0	+1
uss	1/2, 3/2	0	1	−2	−1	+1/2
uds	1/2, 3/2	0	1	−1	0	0
ddd	3/2	−1	1	0	+1	−3/2
dds	1/2, 3/2	−1	1	−1	0	−1
dss	1/2, 3/2	−1	1	−2	−1	−1/2
sss	3/2	−1	1	−3	−2	0

Tabela 12-10Propriedades das combinações quark-antiquark dos quarks *u*, *d* e *s*

Combinação	Spin (ħ)	Carga (e)	Número bariônico	Estranheza	Hipercarga	I_3
$u\bar{u}$	0, 1	0	0	0	0	0
$u\bar{d}$	0, 1	+1	0	0	0	+1
$u\bar{s}$	0, 1	+1	0	+1	+1	+1/2
$d\bar{u}$	0, 1	−1	0	0	0	−1
$d\bar{d}$	0, 1	0	0	0	0	0
$d\bar{s}$	0, 1	0	0	+1	+1	−1/2
$s\bar{u}$	0, 1	−1	0	−1	−1	−1/2
$s\bar{d}$	0, 1	0	0	−1	−1	+1/2

$s\bar{s}$	0, 1	0	0	0	0	0

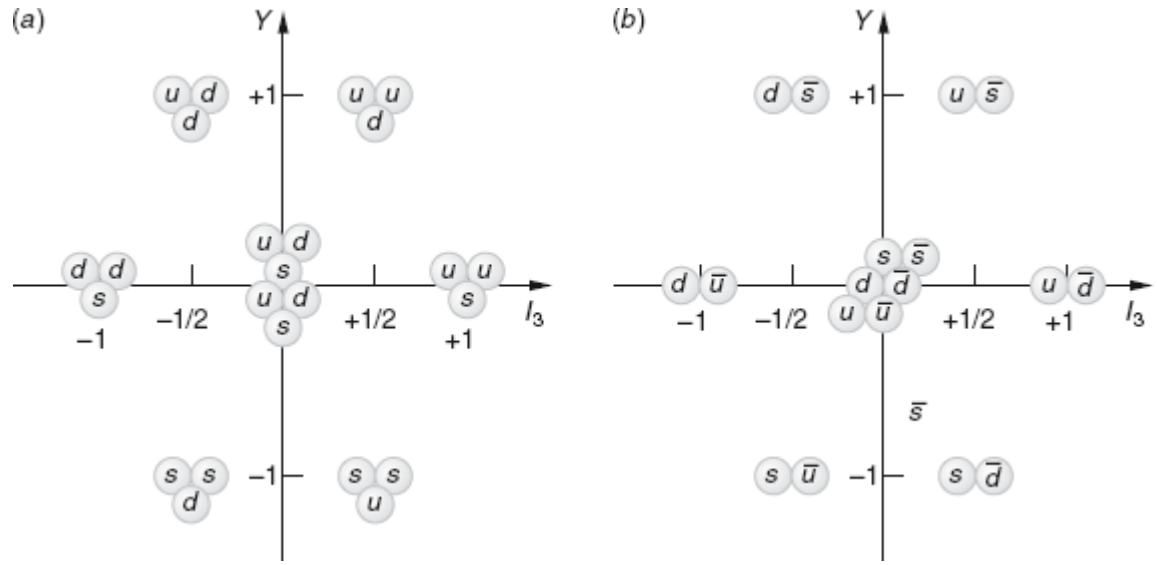


FIGURA 12-20 (*a*) Gráfico de Y em função de I_3 para as combinações de três quarks de spin 1/2 que constituem o octeto dos bárions. (*b*) Gráfico de Y em função de I_3 para as combinações quark-antiquark que constituem o noneto dos mésons de menor massa.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
De Onde Vem o Spin do Próton?

No modelo dos quarks, o próton é formado por dois quarks up e um quark down (*uud*). A carga elétrica e outros números quânticos do próton, como os do nêutron e de outras partículas compostas, são dados corretamente pela soma dos números quânticos dos quarks que formam a partícula. Assim, por exemplo, a carga do próton é $2e/3 + 2e/3 - e/3 = e$ e o spin é $1/2 + 1/2 - 1/2 = 1/2$ (no caso do spin, é preciso supor que o spin de um dos quarks está orientado antiparalelamente aos outros dois). Entretanto, uma série de experimentos de espalhamento elástico profundo de elétrons e múons por prótons forneceu resultados surpreendentes. Esses experimentos, que começaram no CERN em 1987 e continuam até hoje no CERN, no Brookhaven National Laboratory, no Jefferson Laboratory, no Stanford Linear Accelerator Center (SLAC) e no Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY), consistem em usar múons, elétrons e prótons de energia extremamente elevada (ou seja, de comprimento de onda muito pequeno), cujos spins estão polarizados, para bombardear prótons e núcleos de ^{3}He cujos spins também estão polarizados. A medida do ângulo de espalhamento e energia das partículas espalhadas fornece importantes informações a respeito da distribuição de spins no interior do próton. Surpreendentemente, os resultados experimentais indicaram que os spins dos três quarks são responsáveis por apenas 20 a 30% do spin do próton! Os experimentos mostram que o spin de um dos quarks *u* é paralelo ao spin do próton e o spin do outro quark *u* é antiparalelo ao spin do próton, como se esperava. Entretanto, o spin do quark *d* não é antiparalelo ao spin do próton, como deveria ser, se não houvesse outras contribuições para o spin, para que o spin do próton fosse 1/2. Isso parece indicar que o momento angular orbital dos quarks e o spin dos glúons e do "mar" de pares virtuais quark-antiquark contribuem significativamente para o spin do próton. Apelidados de "crise do spin do próton", esses resultados mostraram que nossos conhecimentos a respeito da estrutura dos núcleons e das interações entre os quarks ainda são imperfeitos.

EXEMPLO 12-11 **Propriedades das Partículas** Determine as propriedades das partículas constituídas pelos seguintes quarks: (*a*) $u\bar{d}$; (*b*) $\bar{u}d$; (*c*) *dds*; (*d*) *uss*.

SOLUÇÃO

(*a*) Como $u\bar{d}$ é uma combinação quark-antiquark, o número bariônico é 0 e, portanto, trata-se de um méson. A partícula não contém nenhum quark *s*; logo, a estranheza é zero. A carga do quark *u* é $+2e/3$ e do antiquark *d* é $+e/3$; assim, a carga do méson é $+e$. Essas são as propriedades do méson π^+.

(*b*) A partícula $\bar{u}_d$ também é um méson de estranheza zero. A carga elétrica é $-2e/3 + (-e/3) = -e$. Essas são as propriedades do méson π^-.

(*c*) A partícula *dds* é um bárion de estranheza −1, já que contém um quark *s*. A carga elétrica é $-e/3\ -e/3\ -e/3 = -1e$. Essas são as propriedades da partícula Σ^-.

(*d*) A partícula *uss* é um bárion de estranheza −2. A carga elétrica é $+2e/3 - e/3 - e/3 = 0$. Essas são as propriedades da partícula Ξ .

Cor Nas Seções 12-1 e 12-2, apresentamos rapidamente o conceito de cor dos quarks e glúons. Nesta seção, vamos aprofundar um pouco mais o conceito e discutir a relação entre a cor e outras propriedades dos quarks e dos hádrons. O modelo descrito até agora, quase todo desenvolvido na década que se seguiu à introdução da hipótese dos quarks por Gell-Mann, apresentava dois problemas importantes: em primeiro lugar, a despeito de muitas investigações experimentais, nenhum quark livre tinha sido observado; em segundo lugar, a estrutura proposta para os bárions era incompatível com o princípio de exclusão de Pauli. A partícula $\Delta^{++}(1232)$, por exemplo, tem spin 3/2, que significa que contém três quarks *u* (férmions) com os mesmos números quânticos.

A solução para o problema do princípio de exclusão proposta por O. W. Greenberg foi imaginar que todo quark possui uma propriedade adicional, a *cor*. Os três valores possíveis da *cor* de um quark são vermelho (*r*), azul (*b*) e verde (*g*). Assim, um quark azul tem os números quânticos de cor $r = 0$, $b = +1$ e $g = 0$; o antiquark correspondente tem os números quânticos $r = 0$, $b = -1$ e $g = 0$. O nome *cor*, é claro, foi escolhido arbitrariamente para designar a nova propriedade e não tem nenhuma relação com o significado habitual da palavra "cor"; mesmo assim, o uso dos nomes das três cores primárias leva a uma regra muito simples para assegurar que o princípio de exclusão está sendo respeitado:

Todas as partículas que existem na natureza são incolores.

O termo *incolor* pode significar duas coisas:

1. A quantidade total de cor é nula (ou seja, a soma dos números quânticos de cor é zero)
   ou
2. As três cores estão presentes em proporções iguais (em analogia com a combinação das três cores primárias para produzir o branco).

Assim, por exemplo, os três quarks *u* que formam a partícula $\Delta^{++}(1232)$ são o u_r, o u_b e o u_g.

O Enigma da Partícula *J*/ψ Muitos físicos consideraram a hipótese da cor um tanto artificial e também encararam com reservas a explicação apresentada para a inexistência de quarks livres, que será discutida daqui a pouco. Em 1974, porém, o modelo dos quarks foi apoiado por uma descoberta inesperada: um novo méson, observado independentemente por dois grupos de cientistas. O primeiro, constituído por S. Ting e colaboradores de Brookhaven, chamou de *J* a partícula, enquanto o segundo, formado por B. Richter e colaboradores do SLAC,[19] chamou de ψ a partícula. Hoje conhecido como *J*/ψ, o novo méson tem uma massa três vezes maior que a massa do próton e um tempo de vida de 10^{-20}s, extremamente longo para uma partícula cujo decaimento é mediado pela interação forte. A existência de um tempo de decaimento tão longo era indicação de que novos fenômenos físicos estavam sendo observados.[20] Alguns meses depois da descoberta, os físicos chegaram à conclusão de que a partícula *J*/ψ era composta por um quarto quark e seu antiquark. O quarto quark, que tinha sido proposto por S. Glashow e outros, alguns anos antes, para tornar o número de quark igual ao número de léptons (isso aconteceu antes que os léptons τ e ν_μ fossem descobertos), recebeu o nome de *charme* e é representado pela letra *c*. Assim, a composição da partícula *J*/ψ é $c\bar{c}$–21 A descoberta do primeiro bárion contendo um quark *c*, o Λ^+_c, está ilustrada na Figura 12-21. A Figura 12-22 mostra alguns supermultipletos formados por quatro quarks. Com a descoberta, passaram a ser conhecidos dois conjuntos simétricos de quatro léptons (e, μ_e, μ, ν_μ) e quatro quarks (u, d, s, c), além, naturalmente, das respectivas antipartículas, uma situação que os físicos teóricos consideravam particularmente satisfatória. Em 1975, porém, um novo lépton foi observado, o que quebrou novamente a simetria numérica das gerações de partículas. Ao novo lépton, o táuon (τ), estaria presumivelmente associado um neutrino específico, ν_τ. Menos de dois anos mais tarde, um novo méson pesado, o méson hipsilo (ϒ), foi descoberto e logo reconhecido como composto por um par quark-antiquark de um novo tipo de quark. Este quinto quark é chamado de *bottom* e representado pela letra *b*. Assim, $\Upsilon = (b\bar{b})$. Para manter a simetria entre as gerações de quarks e as gerações de léptons, deveria haver um sexto tipo de quark. Este quark, o quark *top* (*t*), foi descoberto em 1995 por dois grupos do Fermilab, o que restaurou a simetria proposta por Glashow e completou a nova tabela periódica dos componentes das partículas fundamentais (veja a Figura 12-23). Com uma massa de 176 MeV/c^2, o quark *t* é a partícula de maior massa descoberta até hoje. Existem fortes razões teóricas e experimentais para acreditar que não restam quarks e léptons para serem descobertos (veja a Figura 12-24). A Tabela 12-5 mostra os números quânticos up, down, charme, estranho, top e bottom para os seis sabores de quarks e antiquarks.

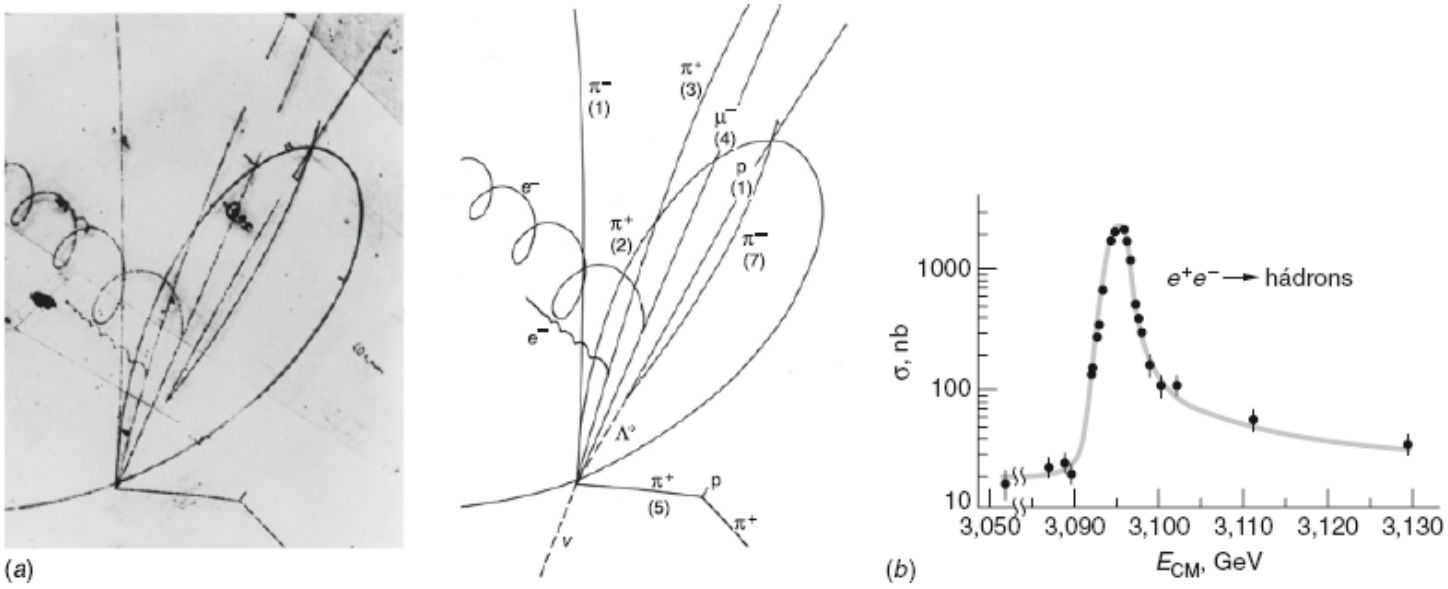


FIGURA 12-21 (*a*) Descoberta do primeiro bárion com charme, o Λ^+_c. A reação é $\nu_\mu + p \rightarrow \Lambda^+_c + \pi^- + \pi^+ + \pi^-$. O bárion com charme decai, através da reação $\Lambda^+_c \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$, depressa demais para deixar um rastro, mas o decaimento subsequente da partícula Λ^0 é facilmente observado. [*Brookhaven National Laboratory*.] (*b*) Parte dos dados experimentais obtidos por B. Richter e colaboradores do SLAC, mostrando a ressonância J/ψ.

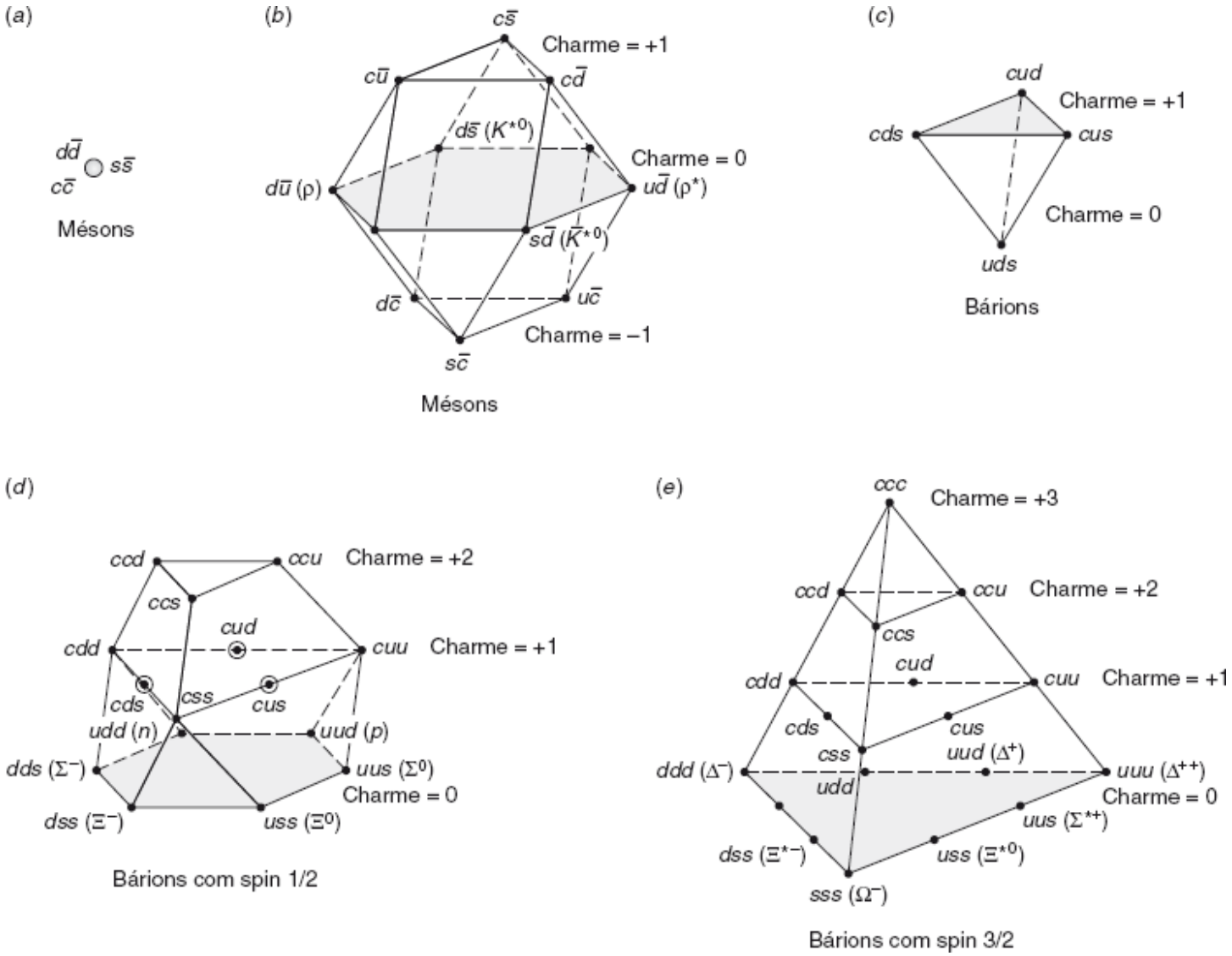


FIGURA 12-22 Supermultipletos formados pelos quarks *u*, *d*, *s* e *c*. Os círculos mostram que existem duas partículas com a mesma composição de quarks e energias diferentes.

Carga	Primeira geração	Segunda geração	Terceira geração
	Quarks		
+2/3	u_r u_b u_g	c_r c_b c_g	t_r t_b t_g
−1/3	d_r d_b d_g	s_r s_b s_g	b_r b_b b_g
	Léptons		
−1	e	μ	τ
0	ν_e	ν_μ	ν_τ

FIGURA 12-23 Tabela periódica das partículas elementares.

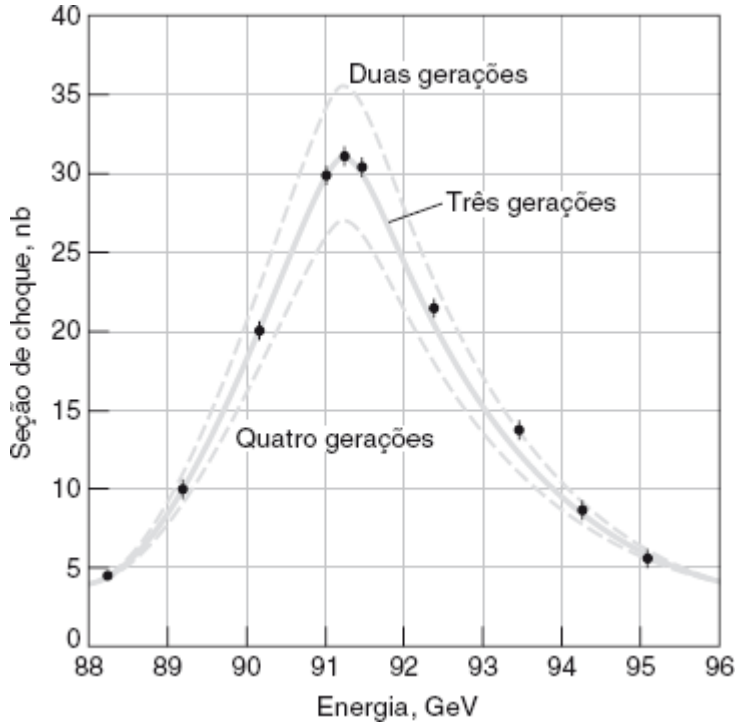


FIGURA 12-24 Tanto a forma como a altura da ressonância associada ao bóson Z^0 estão relacionadas teoricamente ao número de gerações de léptons e quarks. À medida que o número de gerações aumenta, a máxima seção de choque diminui e a largura da ressonância (na metade da altura máxima) aumenta. As medidas mais recentes, indicadas por pontos, são compatíveis com a existência de três gerações, mas não com a existência de duas ou quatro.

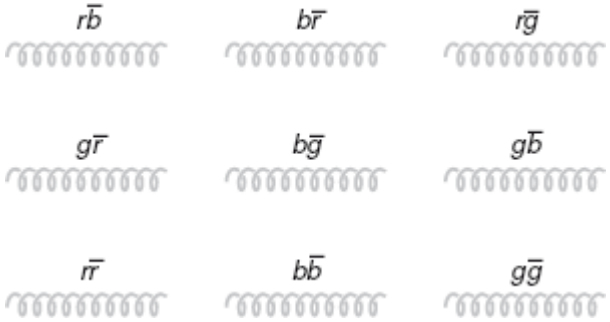


FIGURA 12-25 As nove combinações possíveis de cor e anticor dos glúons. De acordo com as propriedades de simetria do grupo SU(3), podem ser formadas oito combinações lineares independentes com os nove elementos das primeiras duas linhas, que constituem o octeto dos glúons. Uma combinação linear dos componentes da terceira linha constitui um singleto.

Cromodinâmica Quântica

A cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria moderna que descreve a interação forte. É análoga à eletrodinâmica quântica (QED), que descreve com tanto sucesso a interação eletromagnética. Na verdade, a QCD foi formulada usando como modelo a QED. Como dissemos anteriormente, a interação forte é uma interação entre quarks mediada por uma partícula chamada glúon. Os glúons desempenham na QCD o mesmo papel que os fótons desempenham na QED. Como os fótons, os glúons têm massa de repouso zero e spin 1. Existe, porém, uma diferença importante entre as duas partículas: ao contrário dos fótons, que são eletricamente neutros, a cor dos glúons não é zero. Na verdade, os glúons são bicolores, já que possuem uma unidade de uma cor e uma unidade de uma anticor. Assim, no processo $q \rightarrow q + g$, o quark pode mudar de cor (mas não de sabor), como mostra a Figura 12-26*a*. Como possuem cor, os glúons podem interagir uns com os outros através da interação forte; as interações de dois glúons formam um octeto semelhante ao dos mésons na representação SU(3) da teoria dos grupos[22] (veja a Figura 12-25). As Figuras 12-26*a* e 12-26*b* são os diagramas de Feynman de vértices análogos ao vértice primitivo de Feynman da QED, mostrado na Figura 12-3. O fato de existir uma interação glúon-glúon significa que além de efeitos análogos à polarização do vácuo na QED, discutida na Seção 12-2 e representada na Figura 12-10, existem também malhas formadas por glúons, como a que aparece na Figura 12-27. O efeito das malhas de glúons é diminuir o valor da constante de acoplamento da interação forte para distâncias extremamente pequenas (menores que 10^{-18}m). Assim, quando dois quarks se aproximam muito, a atração *diminui*, um fenômeno conhecido como *liberdade assintótica*. O resultado é que, no interior de um núcleon, os quarks se movem quase como se fossem partículas livres, um fenômeno que foi confirmado em experimentos de espalhamento profundo de elétrons. Na verdade, a propriedade da liberdade assintótica foi confirmada em centenas de experimentos.

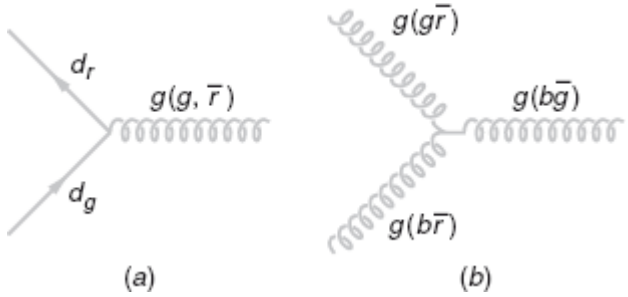


FIGURA 12-26 Exemplos de vértices fundamentais da QCD. (*a*) Emissão de um glúon verde-antivermelho, que faz um quark down mudar de verde para vermelho. (*b*) Emissão de um glúon azul-antiverde por um glúon azul-antivermelho, que faz o glúon azul-antivermelho mudar para verde-antivermelho.

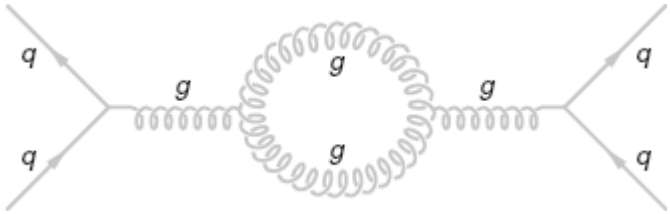


FIGURA 12-27 Diagrama de Feynman de um quark emitindo um glúon, que em seguida cria dois glúons. Os dois glúons se recombinam para formar um único glúon, que é absorvido por outro quark.

Uma das funções propostas para o potencial da interação forte tem a seguinte forma aproximada:

$$V_{\text{QCD}}(r) = -\frac{4\alpha_S}{3r} + kr \qquad \textbf{12-32}$$

em que k é uma constante ajustável. A Equação 12-32 já foi testada experimentalmente, com sucesso, para pequenas distâncias. Observe que V_{QCD} aumenta indefinidamente com r (veja a Figura 12-28). Isso significa que, ao contrário do que acontece com a força elétrica e a força gravitacional, a força associada à interação forte, $F_{\text{QCD}} = -\ V_{\text{QCD}}$, tende para um valor constante diferente de zero para grandes valores de r. Em consequência, os quarks não podem se afastar muito uns dos outros, um fenômeno que recebeu o nome de *confinamento dos quarks*. Esta é a explicação que a QCD oferece para o fato de que quarks livres nunca foram observados. Quando uma grande quantidade de energia é fornecida a um sistema de quarks (um núcleon, por exemplo), um par quark-antiquark é criado e os quarks originais permanecem confinados ao sistema inicial. Esta é a origem dos píons virtuais que aparecem no modelo de Yukawa como mediadores da força nuclear (veja a Figura 12-29).

Nas reações e decaimentos mediados pela interação fraca, os quarks podem mudar de sabor. Por exemplo: como foi mostrado no Exemplo 12-4, o decaimento β^- do nêutron, dado pela Equação 11-38, corresponde à transformação de um quark *d* em um quark *u*. O produto final do decaimento de qualquer bárion é o membro mais leve (de menor energia) da família, o próton. O decaimento do próton é impedido pelas leis de conservação da energia e do número bariônico, mas, mesmo assim, o possível decaimento do próton é investigado até hoje pelos físicos. O decaimento de outro bárion, a partícula Λ^0, é discutido no

Exemplo 12-12.

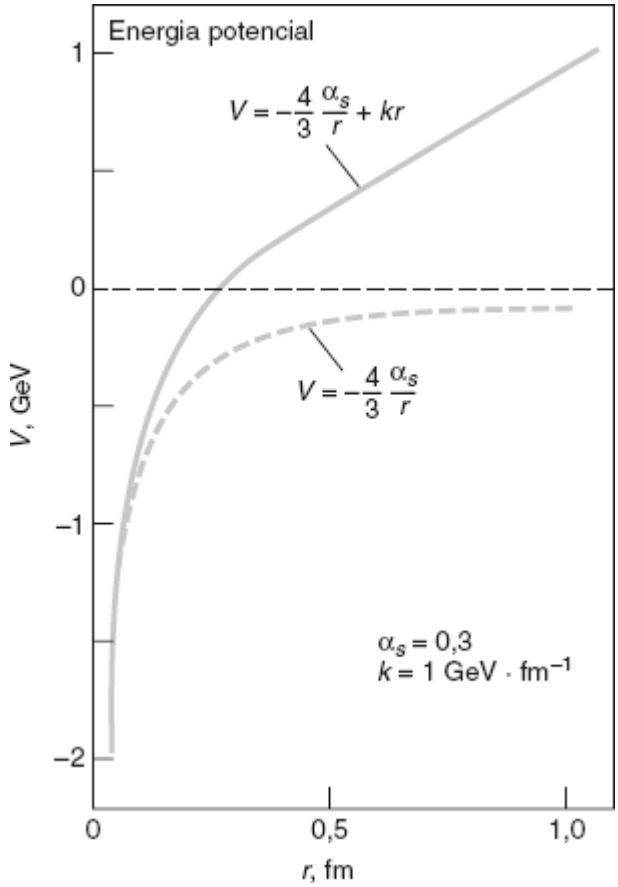


FIGURA 12-28 Potencial a que estão submetidos os quarks, de acordo com a QCD. Neste diagrama, α_s, a constante de acoplamento da interação forte, é igual a 0,3 e k = 1 GeV/fm na Equação 12-32.

Exercícios

14. Como podemos verificar se uma partícula é um méson ou um bárion a partir dos quarks que contém?
15. Existe alguma combinação quark-antiquark que resulte em uma carga elétrica fracionária?
16. Quais são as provas experimentais de que todas as partículas que existem na natureza são incolores?

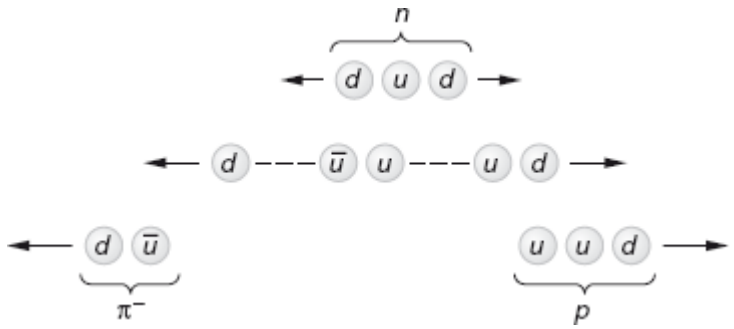


FIGURA 12-29 Exemplo do confinamento dos quarks. Quando tentamos remover um quark *d* de um nêutron fornecendo energia à partícula, um par ($\bar{u}$, *u*) é criado. O $\bar{u}$ e um dos quarks *d* se combinam para formar um méson $^{-}$, enquanto o *u*, do par, se combina com o outro quark *d* e o quark *u* original para formar um próton; nenhum quark livre é criado.

Tabela 12-11 Composição de quarks de alguns bárions e mésons

Bárions	Quarks	Mésons	Quarks
p	*uud*	π^+	$u\bar{d}$

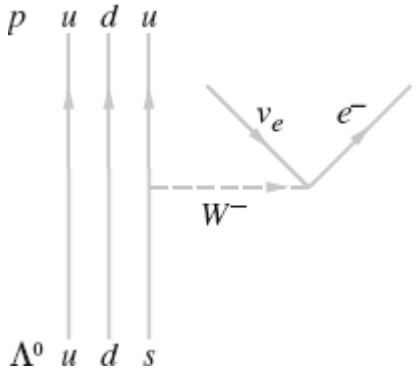
n	uud	π^-	$\bar{u}d$
Λ^0	uds	K^+	$u\bar{s}$
Δ^{++}	uuu	K^0	$d\bar{s}$
Σ^+	uus	$\overline{K}^0$	$s\bar{d}$
Σ^0	uds	$\overline{K}^-$	$s\bar{u}$
Σ^-	dds	J/Ψ	$c\bar{c}$
Ξ^0	uss	D^+	$c\bar{d}$
Ξ^-	dss	D^0	$c\bar{u}$
Ω^-	sss	D^+_s	$c\bar{s}$
Λ_c^+	udc	B^+	$u\bar{b}$
Σ_c^{++}	uuc	$\overline{b}^\circ$	$\bar{d}b$
Σ_c^+	udc	B^0	$d\bar{b}$
Ξ_c^+	usc	B^-	$\bar{u}b$

EXEMPLO 12-12 **Decaimento da Partícula Λ^0** Desenhe um diagrama de Feynman que mostre os quarks envolvidos no decaimento da partícula Λ^0, que acontece através da reação

$$\Lambda^0 \rightarrow p\, e^-\, \overline{\nu}_e$$

SOLUÇÃO

De acordo com a Tabela 12-11, a partícula Λ^0 é formada por um quark up (u), um quark down (d) e um quark estranho (s). O próton é formado por dois quarks u e um quark d. O decaimento é mediado pela interação fraca, com o quark s decaindo em um quark u e um bóson W^-. Note que a estranheza não é conservada na interação fraca que transforma o quark s em um quark u.



A Teoria Eletrofraca

Na *teoria eletrofraca*, a interação eletromagnética e a interação fraca são consideradas manifestações diferentes da mesma interação, conhecida como interação *eletrofraca*. Em energias elevadas (>> 100 GeV), a interação eletrofraca é mediada por quatro bósons. Considerações de simetria exigem que esses bósons sejam um tripleto formado por partículas W^+, W^0 e W^-, todas com a mesma massa, e um singleto formado pela partícula B^0, com uma massa diferente. As partículas W^0 e B^0 não podem ser observadas diretamente, mas uma combinação linear de W^0 e B^0 constitui a partícula Z^0 e outra constitui o fóton. Para energias normais, a simetria é quebrada espontaneamente.

A expressão "simetria quebrada espontaneamente" significa que o hamiltoniano H_{op} conserva a simetria original, mas o estado fundamental calculado a partir de H_{op} apresenta uma simetria menor. Para dar um exemplo, o magnetismo nos sólidos resulta de interações entre os spins dos átomos que formam a rede cristalina. No caso das substâncias ferromagnéticas, como o ferro, o H_{op} que descreve a interação é invariante em relação a rotações, mas, no estado fundamental, domínios magnéticos se formam espontaneamente na amostra. A direção de alinhamento dos spins varia de domínio para domínio; dentro de um domínio, porém, todos os spins estão alinhados na mesma direção. Um domínio certamente não é invariante em relação à rotação dos spins. Assim, a simetria é quebrada espontaneamente no estado fundamental. (Para visualizar melhor o que significa uma "quebra espontânea de simetria", imagine o que acontece quando alguém aperta uma pequena régua de plástico entre o polegar e o indicador; a régua se encurva para a direita ou para a esquerda, quebrando a simetria original entre direita e esquerda. Veja a Figura 12-30.)

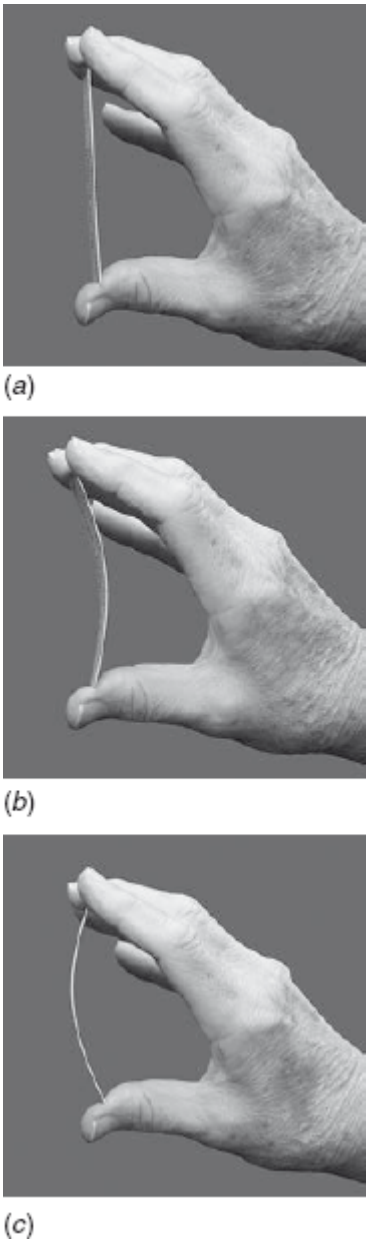


FIGURA 12-30 A régua de plástico mostrada em (*a*) apresenta simetria entre esquerda e direita. Forças verticais aplicadas às extremidades da régua quebram a simetria, forçando a régua a assumir a forma mostrada em (*b*) ou a forma mostrada em (*c*), que não apresentam simetria entre esquerda e direita. [*Eric Llewellyn Photography*.]

A quebra da simetria da interação eletrofraca leva a uma separação entre a interação eletromagnética, mediada pelo fóton, e

a interação fraca, mediada pelas partículas W^+, W^- e Z^0. O fato de que a massa de repouso do fóton é zero e a massa de repouso das partículas W e Z é da ordem de 100 GeV/c^2 mostra que a simetria associada à interação eletrofraca não existe em baixas energias. O agente responsável pela quebra da simetria recebeu o nome de *campo de Higgs* e está associado a um bóson, o *bóson de Higgs*, que foi observado pela primeira vez em 2012 e cuja energia de repouso é 125 GeV. De acordo com o Modelo-padrão, é através da interação com o campo de Higgs que as partículas adquirem massa.

O Modelo-padrão – Um Resumo

A combinação do modelo dos quarks, da teoria eletrofraca e da cromodinâmica quântica é conhecida como *Modelo-padrão*. Nesse modelo, as partículas fundamentais são os léptons e os quarks, cada um dos quais existe em seis sabores diferentes divididos em três gerações, como mostram as Tabelas 12-1 e 12-2 e a Figura 12-23. Os mediadores das forças são o fóton, as partículas W^+, W^- e Z^0 e oito tipos de glúons. Os léptons e quarks são férmions de spin 1/2, que obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Os mediadores das forças são bósons de spin 1, que não obedecem ao princípio de exclusão de Pauli. Todas as forças que existem na natureza se devem a uma das quatro interações básicas: forte, eletromagnética, fraca e gravitacional. Uma partícula experimenta uma das interações básicas se possuir uma carga associada a essa interação. A carga elétrica é a carga associada à interação eletromagnética; todos os quarks e alguns léptons possuem esse tipo de carga. Todos os léptons e quarks possuem a carga associada à interação fraca, conhecida como carga fraca ou carga de sabor. A carga associada à interação forte é a cor; todos os quarks e glúons, mas não os léptons, possuem este tipo de carga. A carga associada à interação gravitacional é a massa. É importante notar que o fóton, que é o mediador da interação eletromagnética, não possui carga elétrica, enquanto as partículas W^+, W^- e Z^0, que são as mediadoras da interação fraca, possuem carga fraca, e os glúons, que são os mediadores da interação forte, possuem cor. Este último fato ajuda a explicar a liberdade assintótica dos quarks.

Toda a matéria é feita de léptons e quarks. Nunca foi observada uma partícula formada por mais de um lépton; os léptons existem apenas como partículas isoladas. Os hádrons (bárions e mésons) são partículas formadas por quarks. De acordo com a cromodinâmica quântica (QCD), as únicas combinações permitidas de quarks são as que tornam incolor a partícula resultante. Três quarks de cores diferentes podem se combinar para formar bárions "brancos", como o nêutron e o próton. Como os mésons contêm um quark e um antiquark da mesma cor, também são incolores. Estados excitados dos hádrons são considerados partículas diferentes. Assim, por exemplo, a partícula Δ^+ é um estado excitado do próton. As duas partículas são feitas de quarks *uud*, mas o próton se encontra no estado fundamental, com spin 1/2 e uma energia de repouso de 938 MeV, enquanto a partícula Δ^+ está no primeiro estado excitado, com spin 3/2 e uma energia de repouso de 1232 MeV. Os dois quarks *u* podem estar no mesmo estado de spin na partícula Δ^+ sem violar o princípio de exclusão porque são de cores diferentes.

A interação forte pode se manifestar de duas formas: através da interação forte fundamental, que é a interação de cor, e através da interação forte residual ou *interação nuclear*. A interação forte fundamental é responsável pela força entre os quarks e é mediada por glúons; a interação forte residual é responsável pela força entre os núcleons, como a que existe entre nêutrons e prótons. Essa força se deve à interação entre os quarks dos dois núcleons e pode ser imaginada como sendo mediada por mésons; é análoga à interação eletromagnética residual entre átomos neutros, que é responsável, por exemplo, pela liquefação e solidificação dos gases nobres em baixas temperaturas.

Para cada partícula existe uma antipartícula. Uma partícula e a antipartícula correspondente possuem a mesma massa, o mesmo spin e cargas elétricas opostas. No caso dos léptons, os números leptônicos L_e, L_μ e L_μ das antipartículas são o negativo dos números quânticos das partículas correspondentes. Assim, por exemplo, o número leptônico do elétron é $L_e = +1$ e o número leptônico do pósitron é $L_e = -1$. No caso dos hádrons, os números quânticos são a soma dos números quânticos dos quarks que formam o hádron, e os números quânticos das antipartículas são o negativo dos números quânticos das partículas correspondentes. Assim, por exemplo, a partícula Λ^0, que é formada pelos quarks *uds*, tem $B = 1$ e $S = -1$, enquanto a antipartícula $\overline{\Lambda}^0$, que é formada pelos quarks $\overline{uds}$, tem $B = -1$ e $S = +1$. Uma partícula como o fóton ou o Z^0, para a qual todos os números quânticos são nulos, é igual a sua antipartícula. No caso do méson K^0 ($d\bar{s}$), todos os números quânticos são nulos, exceto a estranheza, que é +1. A antipartícula correspondente, o méson $\overline{K}^0$($\overline{d}\,s$), tem estranheza −1, o que a torna diferente do méson K^0. Os mésons π^+ ($u\overline{d}$) e π^- ($\bar{u}d$) possuem carga elétrica diferente de zero e formam um par partículaanti-partícula, mas, como todos os outros números quânticos são nulos, é impossível dizer qual é a partícula e qual é a antipartícula. As partículas W^+ e W^- formam um par partícula-antipartícula do mesmo tipo. A Tabela 12-11 mostra a composição de quarks de alguns bárions e mésons.

EXEMPLO 12-13 **Decaimento da Partícula Ω^-** A partícula Ω^- decai através da reação

$$\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + K^-$$

e as partículas Λ^0 e K^-, resultantes, em geral decaem através das reações

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \quad \text{e} \quad K^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu$$

Escreva as três reações em termos de quarks.

SOLUÇÃO

De acordo com a Tabela 12-11, o decaimento da partícula Ω^- é dado pela reação

$$sss \rightarrow uds + s\bar{u}$$

na qual um quark *s* se transforma em um quark *d* e um par $u\bar{u}$ é criado. O decaimento da partícula Ω^0 é dado pela reação

$$uds \rightarrow uud + \bar{u}d$$

na qual, novamente, um quark *s* se transforma em um *d* e um par $u\bar{u}$ é criado.

Finalmente, o decaimento do méson K^- é dado pela reação

$$s\bar{u} \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\nu$$

na qual um quark *s* se transforma em um quark *u* e o quark *u* e o quark $\bar{u}$ se aniquilam mutuamente, produzindo um bóson W^-, que decai em dois léptons.

12-5 Para Além do Modelo-padrão

A Teoria da Grande Unificação

No início da Seção 12-4, comentamos que, embora explicasse muitas observações, o Modelo-padrão da física de partículas deixava sem resposta algumas questões importantes. Por que existem quatro interações na natureza em vez de apenas uma? Por que essas interações são tão diferentes? A unificação das interações eletromagnética e fraca na teoria eletrofraca, discutida na Seção 12-4, deixou muitos físicos esperançosos de que fosse possível incluir a interação forte e, a prazo mais longo, a interação gravitacional em uma única teoria, a chamada *teoria da grande unificação*[23] ou GUT.* Como no caso da teoria eletrofraca, a diferença entre as forças das interações para energias muito menores que as energias de repouso dos bósons mediadores seria causada por uma quebra espontânea de simetria. A GUT também explicaria por que as cargas elétricas do elétron e do próton são iguais.

Um aspecto importante da GUT é que as constantes de acoplamento das quatro interações devem tender para o mesmo valor, aproximadamente igual ao da constante de estrutura fina α, para valores muito grandes de energia. As observações experimentais parecem realmente indicar que os valores das constantes de acoplamento tendem para o mesmo valor. Infelizmente, o ponto de convergência (10^{16} GeV, aproximadamente) ainda está muito distante dos valores máximos de energia (da ordem de 10^4 GeV) que podem ser conseguidos no maior acelerador da atualidade, o Large Hadron Collider (veja a Figura 12-31). Supor que a natureza não nos reserva surpresas e que nenhum novo fenômeno físico será observado nessa imensa faixa de energias seria ignorar as lições da história.

Supersimetria

Várias teorias da grande unificação incluem, além das simetrias já discutidas, uma nova simetria, a *supersimetria* (também conhecida pelo acrônimo SUSY**), que atribui a cada partícula elementar um *superparceiro*. As partículas e superparceiros correspondentes são iguais em tudo, exceto no spin. Os léptons e quarks, cujo spin é 1/2, têm superparceiros de spin 0; os bósons, cujo spin é 1, têm superparceiros de spin 1/2. Os superparceiros dos férmions têm o mesmo nome com o prefixo *s*. Assim, por exemplo, o superparceiro do elétron é o selétron. Os superparceiros dos bósons têm o mesmo nome com o sufixo *ino*. O superparceiro do glúon, por exemplo, é o gluíno. A Tabela 12-12 mostra uma lista das partículas elementares e superparceiros correspondentes.

Se a supersimetria fosse exata, cada superparceiro teria a mesma massa que a partícula correspondente. Se isso fosse verdade, porém, os superparceiros já teriam sido observados há muito tempo. Para levar em conta o fato de que os superparceiros nunca foram detectados, os proponentes da SUSY postularam que as massas dos superparceiros são muito elevadas, maiores que as das partículas *W* e *Z*. Com essa hipótese adicional, a teoria da supersimetria leva a uma energia de unificação compatível com o valor obtido por extrapolação (Figura 12-31), a um tempo de vida do próton compatível com os limites obtidos experimentalmente e a um valor unificado da constante de acoplamento compatível com as extrapolações atuais. Como já foi dito, uma das missões do Large Hadron Collider será testar as previsões da supersimetria.

A SUSY também faz parte de uma teoria, da qual existem algumas variantes, conhecida como *teoria das cordas*. Na teoria

das cordas, as partículas elementares são consideradas pequenas cordas que vibram em 10 ou mais dimensões. As dimensões adicionais são necessárias para eliminar os problemas teóricos envolvidos na quantização da interação gravitacional. No momento, os físicos de partículas estão divididos quanto à importância da teoria das cordas; enquanto alguns as consideram o ponto de partida para uma "teoria de tudo", outros afirmam que "nem mesmo está errada". Até o momento, não existe nenhuma comprovação experimental de que a teoria das cordas esteja correta.

Decaimento do Próton

Na GUT, os quarks e léptons são diferentes estados de uma única partícula, o *leptoquark*, e ocorrem simetricamente no mesmo multipleto. Isso explicaria por que o número de gerações de quarks é igual ao número de gerações de léptons; também levaria à previsão de que os quarks podem se transformar em léptons, e vice-versa, da mesma forma como nêutrons e prótons podem trocar de identidade. Sendo esse o caso, o número bariônico deixaria de ser uma grandeza conservada e o próton não seria estável. As versões atuais da GUT atribuem ao próton um tempo de vida de 10^{30} a 10^{33} anos; este longo tempo de vida é compatível com o fato de que a unificação das interações ocorre apenas para energias extremamente elevadas.

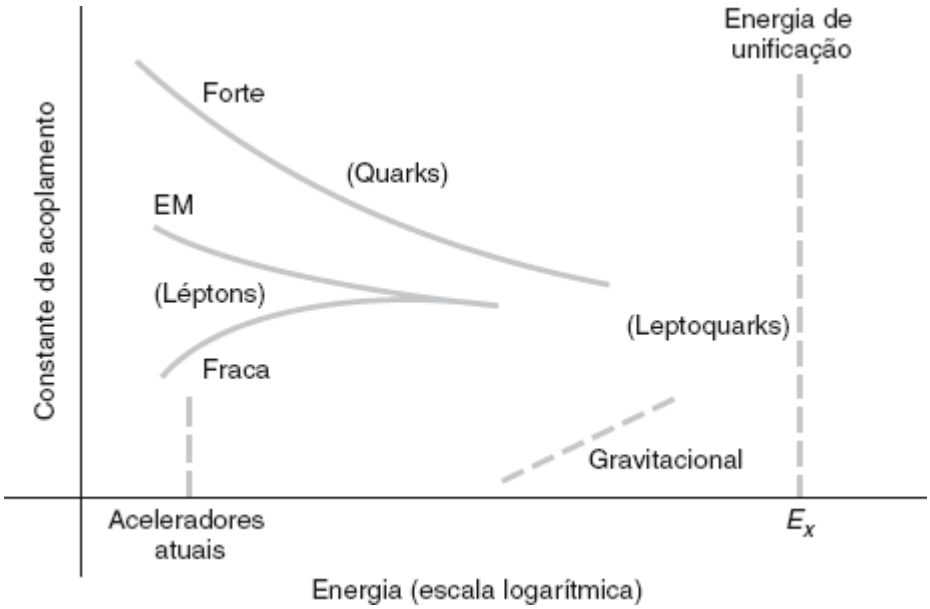
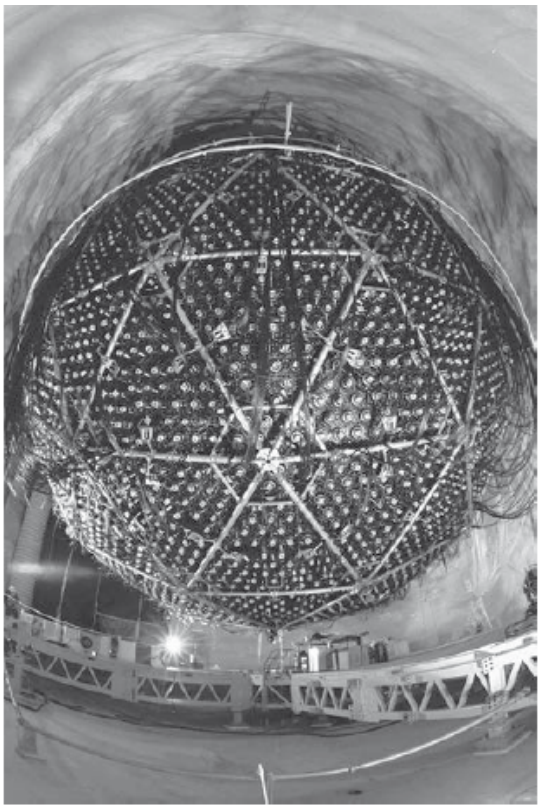
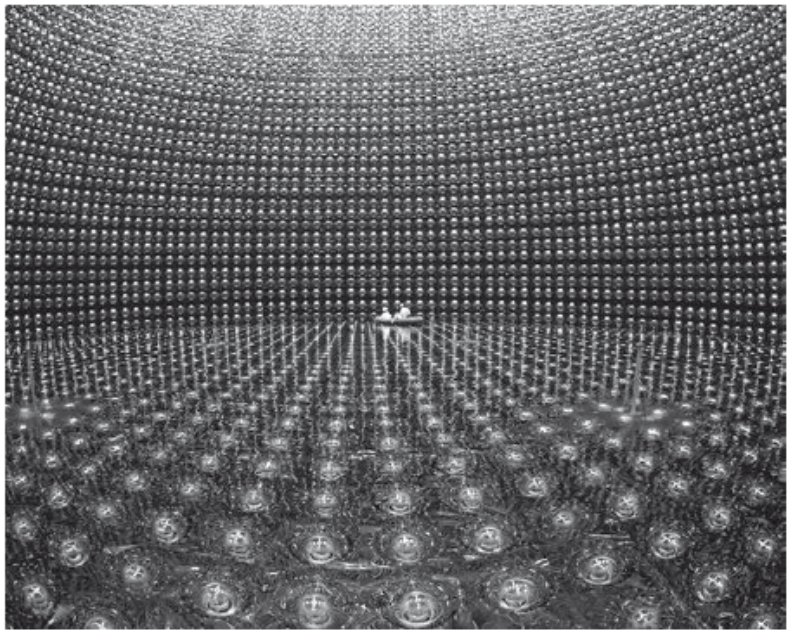


FIGURA 12-31 As constantes de acoplamento das quatro interações parecem estar tendendo para um valor único para valores de energia da ordem de 10^{15} a 10^{17} GeV. Como a energia máxima produzida no maior acelerador da atualidade, o Large Hadron Collider, é apenas 14 TeV, a extrapolação para a energia de unificação E_x está sujeita a grandes incertezas.

Tabela 12-12 Partículas elementares e superparceiros correspondentes

Partícula	Símbolo	Spin	Superparceiro	Símbolo	Spin
Quark	q	$\frac{1}{2}$	Squark	q	0
Elétron	e	$\frac{1}{2}$	Selétron	e	0
Múon	μ	$\frac{1}{2}$	Smúon	μ	0
Táuon	τ	$\frac{1}{2}$	Stáuon	τ	0
W	W	1	Wino	W	$\frac{1}{2}$
Z	Z	1	Zino	Z	$\frac{1}{2}$
Fóton	γ	1	Fotino	γ	$\frac{1}{2}$

Glúon	*g*	1	Gluíno	*g*	$\frac{1}{2}$
Higgs	H	0	Higgsino	H	$\frac{1}{2}$

(*a*)   (*b*)

O Sudbury Neutrino Observatory (SNO), no Canadá, e o Super-Kamiokande (Super-K), no Japão, colheram dados que confirmaram as oscilações dos neutrinos. (*a*) O detector de neutrinos do SNO é um recipiente de acrílico de forma esférica com 12 m de diâmetro, que contém 1000 toneladas de água pesada (D_2O) de alta pureza e está situado 2000 m abaixo da superfície. A luz Cherenkov produzida pelas reações dos neutrinos na água é detectada por 9456 fotomultiplicadoras com 20 cm de diâmetro. (b) O detector de neutrinos Super-K é um recipiente de aço inoxidável com 41,4 m de altura e 39,3 m de diâmetro, que contém 50.000 toneladas de água pura (H_2O) e está situado 1000 m abaixo da superfície. A luz Chereankov é monitorada por 11.283 fotomultiplicadoras. [(*a*) *Cortesia do Sudbury Neutrino Observatory*; (*b*) *cortesia do Kamioka Observatory*, *University of Tokyo*.]

Experimentos recentes estabeleceram um limite inferior para o tempo de vida do próton de aproximadamente 10^{32} anos; o decaimento do próton nunca foi observado. As investigações do possível decaimento do próton, conduzidas em instalações como o Super-Kamiokande, envolvem em geral a observação de grandes volumes de água pura, à espera de uma das possíveis "assinaturas" do decaimento do próton, como, por exemplo, a reação $p \rightarrow \pi^0 e^+$ ou a reação $p \rightarrow \pi^+ \overline{\nu}_e$. A violação da lei de conservação do número bariônico logo após do big bang, quando as energias eram extremamente elevadas, ajudaria a resolver um importante problema da cosmologia, o fato de que atualmente existem muito mais bárions que antibárions no universo.

Na energia de unificação, o número leptônico também não seria conservado e reações atualmente proibidas, como $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ e $\mu^+ \rightarrow e^+ + e^+ + e^-$, poderiam ocorrer. Embora várias investigações experimentais tenham sido realizadas, até o momento não foi observada nenhuma reação que violasse a lei de conservação do número de léptons.

Neutrinos com Massa

Quando Pauli, em 1930, propôs a existência dos neutrinos, imaginou uma partícula com massa de repouso zero. No final da década de 1960, Ray Davis e John N. Bahcall[24] mediram o fluxo de neutrinos provenientes do Sol e encontraram um valor que correspondia a apenas 30% do valor esperado, resultado que passou a ser conhecido como o *problema dos neutrinos solares* (veja a Seção 11-8). A recente solução do problema, com a detecção de oscilações entre os tipos de neutrinos no Sudbury Neutrino Observatory e no Super-Kamiokande, envolve o fato de que os neutrinos possuem uma pequena massa de repouso (veja, na Seção Exploratória, *Oscilações e a Massa dos Neutrinos*), como é previsto na maioria das teorias da grande unificação. Nessas teorias, a massa dos neutrinos é dada, aproximadamente, por

$$m_\nu \approx \frac{M_{eW}^2}{M_x} \qquad \textbf{12-33}$$

em que M_{eW} é uma massa característica da interação eletrofraca, da ordem de 10^2 GeV/c^2, e M_x é a massa da unificação $E_x/c^2 \approx 10^{16}$ GeV/c^2 (veja a Figura 12-31). Isso significa que a massa prevista para os neutrinos é muito menor que 1 eV. Além de resolver a questão dos neutrinos solares, o fato de que os neutrinos possuem uma massa diferente de zero pode ajudar a esclarecer o problema da "massa que falta" no universo, que será discutido no Capítulo 13.

Monopolos Magnéticos

A maioria das GUTs também prevê a existência de monopolos magnéticos, propostos pela primeira vez por Dirac em 1929. Dirac mostrou que a mecânica quântica relativística leva à quantização tanto da carga elétrica e quanto da carga magnética q_m. A carga magnética de um monopolo seria dada por

$$q_m = n\frac{\hbar c}{2e} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \textbf{12-34}$$

É importante observar que $q^2_m/\hbar c \approx \hbar c/e^2 \propto 1/\alpha$. Nas teorias unificadas, a quantização da carga elétrica ocorre naturalmente em unidades de e e são previstos monopolos magnéticos de carga q_m e massa M_m. O valor teórico de M_m é muito grande, da ordem de 10^{16} GeV/c^2; não existe (e nem existirá, no futuro previsível) nenhum acelerador capaz de produzir energias tão elevadas. Observações de raios cósmicos estabelecem um limite superior para o fluxo de monopolos magnéticos de 10^{-15}cm$^{-2}\cdot$s^{-1} por unidade de ângulo sólido. Este valor corresponde também ao máximo fluxo que poderia existir na Via Láctea sem destruir o campo magnético galáctico observado experimentalmente. Até o momento, o único monopolo magnético de que se tem notícia foi supostamente observado por B. Cabrera em 1982. Essa observação é incompatível com os limites atuais.

Uma Oportunidade PARA VOCÊ Todo mundo sabe que não é possível obter polos magnéticos isolados (monopolos magnéticos) cortando ao meio um ímã em forma de barra, o que nos dá simplesmente dois ímãs menores, cada um com dois polos. Em 1929, Dirac mostrou que, de acordo com a mecânica relativística, deveriam existir monopolos magnéticos; entretanto, apesar de muitas buscas, os cientistas até hoje não conseguiram encontrar esses dipolos (a não ser por uma única observação, que não foi confirmada; veja o parágrafo anterior). Em 2009, dois grupos de pesquisa conseguiram criar "quase partículas" (entidades, como os fônons mencionados na Seção 10-9, que se comportam como partículas, mas só existem como excitações em substâncias sólidas e outros sistemas complexos) que apresentam propriedades semelhantes às dos monopolos magnéticos. Os cristais em que essas quase partículas foram observadas, denominados *gelos de spin* porque apresentam uma estrutura magnética semelhante à estrutura cristalina do gelo comum, oferecem uma excelente oportunidade para que cientistas teóricos e experimentais tenham uma ideia do modo como monopolos magnéticos de verdade se comportariam, e talvez inspirem novos métodos para detectar a existência de monopolos magnéticos na natureza.

Gravidade Quântica

A incorporação da gravidade quântica às teorias da grande unificação constitui um imenso desafio. A mais promissora das versões atuais, conhecida como *teoria das superfibras*, por considerar as partículas fundamentais como fibras, e não como pontos, se baseia em um universo de dez dimensões (nove espaciais e uma temporal) no qual seis das dimensões espaciais têm uma curvatura tão grande que não podem ser observadas. O "comprimento" das fibras é da ordem de 10^{-35}m, o que as coloca fora dos limites de medição. Além de incluir a gravidade quântica, a teoria das superfibras também leva a *teorias de calibre*[25] com os bósons mediadores corretos; entretanto, embora venha sendo estudada com interesse pelos físicos teóricos, ainda não foi comprovada por resultados experimentais e ainda não se sabe se constitui uma boa representação da realidade.

Muitas perguntas ainda não foram respondidas. Por exemplo: Os quarks possuem uma estrutura interna? Qual é a origem do isospin? Existem algumas indicações de que os hádrons estão cercados por um "mar" de pares quark-antiquark. Quais são as consequências desse fato? Qual é a relação entre a carga fracionária e a cor dos quarks? Para investigar experimentalmente esses problemas, será preciso construir aceleradores de maior energia e detectores mais avançados. Uma coisa é certa: ainda há muito a fazer.

SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Oscilações e a Massa dos Neutrinos



De acordo com a mecânica quântica, para que os neutrinos possam mudar de um tipo, ou sabor, para outro, é preciso que possuam uma massa de repouso diferente de zero, quer sejam produzidos no Sol, na atmosfera, em um reator nuclear, em um acelerador de partículas ou em outro lugar qualquer do universo. Embora a explicação detalhada desta afirmação esteja fora do escopo deste livro, vamos apresentar uma breve discussão da correspondência entre oscilações de sabor e a existência de uma massa de repouso. A relação entre as funções de onda de sabor dos neutrinos e as autofunções de massa é dada pelas equações

$$\psi_\alpha = \sum_i U^*_{\alpha i}\psi_i$$
$$\psi_i = \sum_\alpha U_{\alpha i}\psi_\alpha \qquad \textbf{12-35}$$

em que ψ_α são as funções de onda de sabor dos neutrinos ($\alpha = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\mu$), ψ_i são as autofunções de massa ($i = \nu_1, \nu_2, \nu_3$) e $U_{\alpha i}$ é uma constante que descreve o grau de mistura do sabor α com a massa i. Na ausência de oscilações, $U_{\alpha i} = 1$ para todos os valores de α e de i e, portanto, $U_{\alpha i}$ é igual à autofunção de massa de ν_α para todos os valores de α; entretanto, os experimentos já mencionados revelam que as oscilações existem e, portanto, $U_{\alpha i} \neq 1$. Como veremos daqui a pouco, os estados com diferentes autofunções de massa se propagam com velocidades de grupo diferentes; quanto maior a massa, menor a velocidade de grupo. Como as funções de onda são combinações de autofunções de massa, a diferença de velocidade faz com que haja interferência entre as funções de onda. Nas posições em que existe interferência destrutiva para a função de onda de um certo sabor de neutrino, a probabilidade de que esse sabor seja observado é menor que na posição inicial; nas posições em que existe interferência construtiva, a probabilidade é maior. Isso significa que os neutrinos mudam periodicamente de sabor enquanto se propagam no espaço.

As autofunções de massa são ondas planas, da forma

$$\psi_i(x,t) = e^{i(px-Et)/\hbar} \qquad \textbf{12-36}$$

que satisfazem a equação de Schrödinger dependente do tempo (Equação 6-6).

A variação da energia com a massa é dada pela Equação 2-31, que pode ser escrita na forma

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \qquad \textbf{2-31}$$

ou

$$E = (pc)\left[1 + \frac{(mc^2)^2}{(pc)^2}\right]^{1/2}$$

Como, para os neutrinos que estamos discutindo, a energia total E é muito maior que a massa de repouso mc^2, podemos substituir essa equação pelos dois primeiros termos da expansão binomial:

$$E \approx pc + \frac{(mc^2)^2}{2pc} + \cdots \qquad \textbf{12-37}$$

Nesse caso, a velocidade de grupo das autofunções de massa é

$$v_g = \frac{dE}{dp} \approx c - \frac{(mc^2)^2}{2p^2c}$$

Assim, quanto maior a massa, menor a velocidade de grupo da autofunção de massa, como havíamos antecipado.

Depois de passar um tempo t se propagando com uma velocidade $v \approx c$, as autofunções de massa percorrem uma distância $x \approx ct = L$ e

$$\psi_i(L) = e^{-\frac{iL}{\hbar c}\frac{(mc^2)^2}{2E}}\psi_i(0) \qquad \textbf{12-38}$$

Nesse instante, a probabilidade de que um neutrino que tinha o sabor α no instante $t = 0$ seja observado com um sabor β é dada por

$$P_{\alpha\to\beta} = |\psi_\beta\psi_\alpha|^2 = \left|\sum_i U^*_{\alpha i}U_{\beta i}e^{-\frac{iL}{\hbar c}\frac{(mc^2)^2}{2E}}\right|^2 \qquad \textbf{12-39}$$

Supondo que existam apenas dois tipos de neutrinos (o caso de três tipos é mais difícil de analisar), a Equação 12-39 se torna, depois de algumas manipulações matemáticas,

$$P_{\alpha\to\beta,\alpha\neq\beta} = \text{sen}^2 2\theta \,\text{sen}^2\left(1{,}267\,\frac{\Delta m^2 L}{E}\,\frac{\text{GeV}}{\text{eV}^2\text{km}}\right) \quad \textbf{12-40}$$

em que θ é a constante equivalente às constantes $U_{\alpha i}$ da Equação 12-35, conhecida como ângulo de mistura dos neutrinos, e Δm é a diferença das massas dos dois tipos de neutrinos. Embora a Equação 12-40 tenha sido calculada supondo que existem apenas dois tipos de neutrinos, é uma aproximação razoável para oscilações $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ na atmosfera terrestre, que seriam responsáveis pela detecção de uma concentração dos ν_μ produzidos por raios cósmicos menor que a esperada, já que, nesse caso, a contribuição dos ν_e é considerada irrelevante. Também é razoável para oscilações $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ e $\leftrightarrow_e \leftrightarrow \nu_\tau$ dos neutrinos do elétron produzidos no Sol (veja a Figura 12-32).

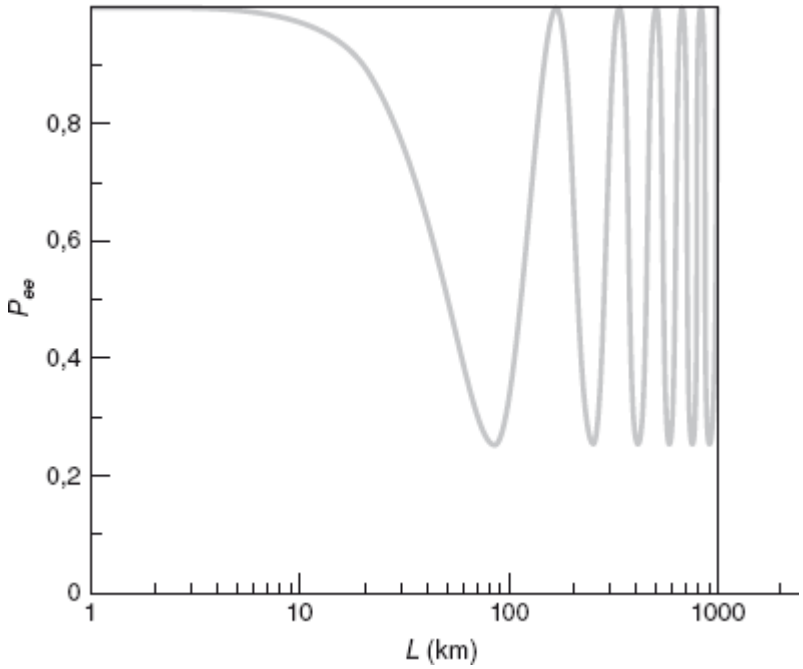


FIGURA 12-32 Este gráfico de $P_{ee} = 1 - P_{e\mu}$ (dada pela Equação 12-40) mostra a probabilidade de que um neutrino do elétron ν_e produzido no Sol seja detectado como ν_e depois de percorrer uma distância L. Para distâncias maiores que 1000 km, a distância entre picos sucessivos se torna tão pequena que não pode ser mostrada neste gráfico semilog. A grandes distâncias do Sol, na Terra, por exemplo, o valor medido é o valor médio de P_{ee}, aproximadamente 0,6. [*Adaptado de* Chris Waltham, "Teaching Neutrino Oscillations", *American Journal of Physics* **729**, 6 (June 2004).]

Como os experimentos mostram que, no caso dos neutrinos solares, $\theta(\nu_e, \nu_\mu) \approx \theta(\nu_e, \nu_\mu) = 33{,}9$ e, no caso dos neutrinos atmosféricos, $\theta(\nu_\mu, \nu_\mu) = 45{,}0°$, os valores atualmente aceitos para Δm^2 são:

$$\Delta m^2_{\text{solar}} \approx 6{,}0 \times 10^{-5}\,\text{eV}^2$$

$$\Delta m^2_{\text{atmo}} \approx 2{,}4 \times 10^{-3}\,\text{eV}^2$$



Leitura Suplementar

Como foi dito na subseção a respeito de supersimetria, na teoria das cordas, as partículas elementares são consideradas pequenas cordas que vibram em 10 ou mais dimensões. Outros aspectos dessa teoria são discutidos na Leitura Suplementar *Teoria das Cordas*, disponível no site da LTC Editora para este livro na Internet.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS

1. Conceitos básicos	
Antipartículas	Toda partícula fundamental possui uma antipartícula. Alguns pares partículaanti-partícula são diferentes, como o elétron e o pósitron; outros, como o fóton, são a mesma partícula.
Diagramas de Feynman	São diagramas no espaço-tempo que permitem visualizar as interações entre partículas. Um exemplo é o diagrama que representa a repulsão eletrostática entre cargas de mesmo sinal.
Léptons e quarks	A matéria é feita de dois tipos de partículas elementares, léptons e quarks, ambos com três gerações.
2. Interações fundamentais	
Partículas mediadoras	1. Interação forte, glúons 2. Interação eletromagnética, fótons 3. Interação fraca, $W^{\pm}$, Z^0 4. Interação gravitacional, grávitons
"Força" das interações	Este termo se refere ao módulo das constantes de acoplamento adimensionais que multiplicam a parte dependente do tempo das funções que expressam a energia potencial associada às diferentes interações.
3. Leis de conservação e simetrias	A toda simetria do hamiltoniano de uma partícula está associada uma lei de conservação, e vice-versa (teorema de Noether). A energia, o momento, a carga elétrica e o momento angular são conservados em todas as interações. Outras grandezas são conservadas apenas em algumas interações. O isospin, por exemplo, é conservado na interação forte, mas não é conservado na interação eletromagnética e na interação fraca.
4. O Modelo-padrão	O Modelo-padrão procura explicar toda a matéria em termos de interações entre três tipos de partículas elementares: quarks, léptons e partículas mediadoras.
Cor	Existem três valores possíveis para a cor de um quark: vermelho, azul e verde. De acordo com o Modelo-padrão, todas as partículas compostas de quarks são incolores.
Cromodinâmica quântica	Uma função proposta para a energia potencial da interação forte é a seguinte: $V_{QCD}(r) = -\frac{4\alpha_S}{3r} + kr$ **12-32**
5. Para além do Modelo-padrão	As teorias da grande unificação (GUTs) procuram unificar matematicamente as quatro interações básicas. De acordo com algumas dessas teorias, os prótons não são estáveis, existem

monopolos magnéticos e a massa de repouso dos neutrinos não é zero. Até o momento, apenas a terceira dessas possibilidades foi comprovada experimentalmente.

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Das, A. e T. Ferbel, *Introduction to Nuclear and Particle Physics*, Wiley, New York, 1994.
Eisberg, R. e R. Resnick, *Quantum Physics*, 2d ed., Wiley, New York, 1985.
Frauenfelder, H. e E. M. Henley, *Subatomic Physics*, 2d ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
Griffiths, D. J., *Introduction to Elementary Particles*, 2d revised ed., Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2008.
Martin, B. R. e G. Shaw, *Particle Physics*, 2d ed., Wiley, New York, 1997.
Rubbia, C. e M. Jacob, "The Z^0", *American Scientist*, **78**, 502 (1990).
Veltman, M., *Facts and Mysteries in Elementary Particle Physics*, World Scientific, London, 2003.
William, W. S. C., *Nuclear and Particle Physics*, Oxford, New York, 1997.

Notas

1. A palavra *átomo* vem do grego *atomos*, que significa "indivisível", e foi usada pela primeira vez pelo filósofo Demócrito, um contemporâneo de Sócrates, há cerca de 2400 anos, para designar as menores partículas de matéria. Além de acreditar que a matéria era feita de partículas indivisíveis, Demócrito também sustentava que a Via Láctea era um aglomerado de estrelas e que a Lua possuía montanhas e vales como a Terra.

2. Carl David Anderson (1905-1991), físico americano. Três anos depois de descobrir o pósitron nos rastros deixados por raios cósmicos em uma câmara de nuvens, Anderson descobriu os múons em um estudo semelhante. As descobertas lhe valeram o Prêmio Nobel de Física de 1936, que compartilhou com Victor Franz Hess, o descobridor dos raios cósmicos.

3. A equação de Dirac para partículas com spin fracionário, como o elétron, é a versão relativística da equação de Schrödinger; entretanto, não pode ser obtida simplesmente escrevendo uma versão relativística da Equação 2-31, já que a função de onda resultante não inclui os efeitos do spin.

4. Richard Phillips Feynman (1918-1988), físico americano que descrevia a si próprio como "um tipo curioso". Figura quase lendária na física americana, foi um dos muitos cientistas que trabalharam durante a Segunda Guerra Mundial no Projeto Manhattan, em Los Alamos, onde também se tornou um exímio arrombador de cofres. Excelente tocador de bongô e artista plástico razoável, compartilhou o Prêmio Nobel de Física com Julian Schwinger e Sin-Itiro Tomonaga pelo desenvolvimento da eletrodinâmica quântica. Seus livros autobiográficos, *Surely You're Joking*, *Mr. Feynman!* e *What Do You Care What People Think?* estão repletos de passagens pitorescas.

5. Emilio Gino Segrè (1905-1989), físico italiano naturalizado americano. Amigo e colega de Fermi, Segrè compartilhou o Prêmio Nobel de Física de 1959 com Owen Chamberlain, um dos membros do seu grupo de pesquisa em Berkeley, pela descoberta do antipróton. Talvez de maior interesse prático tenha sido a descoberta do tecnécio ($Z = 43$), o primeiro elemento a ser criado artificialmente. Um isótopo do tecnécio, o ^{99}Tc, é, de longe, o radioisótopo mais usado na medicina.

6. Este processo é conhecido na QED como espalhamento de Møller.

7. Na verdade, por um número infinito de diagramas. Entretanto, como a contribuição relativa de cada diagrama para o processo total diminui rapidamente com o número de vértices, os diagramas mais complexos normalmente podem ser ignorados.

8. O nome *lépton*, que significa "partícula leve", foi escolhido inicialmente porque essas partículas tinham uma massa muito menor que a dos hádrons; entretanto, o táuon (descoberto por M. Perl em 1975) possui uma massa quase duas vezes maior que a do próton, de modo que o nome já não reflete corretamente a massa das partículas desse tipo.

9. A razão pela qual queremos tornar adimensional a constante de acoplamento é que, assim, os resultados obtidos por qualquer observador podem ser comparados entre si, independentemente das unidades utilizadas.

10. Carlo Rubbia (1934-), físico italiano. Foi diretor-geral do CERN. Dividiu o Prêmio Nobel de Física de 1984 com Simon van der Meer, também do CERN, pela descoberta das partículas W^+, W^- e Z^0.

11. Amalie "Emmy" Noether (1882-1935), matemática alemã. Suas contribuições ajudaram Einstein a formular as leis de conservação de energia e momento na teoria da relatividade geral. É considerada pelos matemáticos como a "mãe da álgebra moderna". Emigrou para os Estados Unidos em 1933, depois de ser destituída de sua posição na Universidade de Göttingen pelo regime nazista. Seu obituário no *New York Times* foi escrito por Einstein.

12. Os operadores, como H_{op}, que possuem autovalores reais (observáveis) são conhecidos como *operadores hermitianos*. Todo operador hermitiano satisfaz a relação

$$\int a(x) F_{op} b(x)\, dx = \int b(x) F_{op}^{*} a(x)\, dx$$

13. Murray Gell-Mann (1929-), físico americano. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1969 por este e outros estudos das partículas fundamentais e suas interações.

14. Um físico chegou a prever, ironicamente: "... por volta de 1990, todos os físicos serão famosos, já que haverá partículas suficientes para homenagear cada físico (≈ 30.000) com o nome de uma partícula". Mais tarde, verificou-se que muitas dessas "descobertas" eram falsas.

15. A origem do nome está em um pensamento atribuído a Buda: "Esta, ó monges, é a nobre verdade do caminho que leva à cessação da dor. Este é o nobre *Caminho Óctuplo*: visão correta, intenção correta, discurso correto, ação correta, vida correta, esforço correto, atenção correta e concentração correta."

16. Existem muitos tipos de grupos. Alguns exemplos são os *grupos finitos*, como o grupo do triângulo, que possui seis membros, os *grupos infinitos*, como o grupo dos números inteiros positivos, e os *grupos contínuos*, cujos membros dependem de um ou mais parâmetros contínuos. (Outros tipos de grupos são discutidos em Griffiths, D. J., *Introduction to Elementary Particles*, 2r revised ed., Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2008.)

17. Gell-Mann propôs o nome "quark" inspirado em uma frase do livro *Finnegans Wake*, de James Joyce: "Three quarks for Muster Mark" ("Três quarks para Mestre Mark"). Joyce não explica no livro o que é um quark.

18. A combinação correta de quark nem sempre é a mais óbvia porque a função de onda total da partícula deve apresentar a simetria correta. Assim, por exemplo, o méson π^0 é uma combinação linear de $u\bar{u}$ e $d\overline{d}$.

19. Samuel Chao Chung Ting (1936-), físico americano, e Burton Richter (1931-), físico americano, receberam o Prêmio Nobel de Física de 1976 por essa importante descoberta.

20. Um físico comparou a atitude dos cientistas diante da partícula J/ψ com a de um biólogo que chegasse a uma aldeia remota nas montanhas e descobrisse que os habitantes viviam, em média, 70.000 anos. Essa seria certamente uma indicação de que novos fenômenos biológicos estavam sendo observados.

21. Os físicos de partículas chamaram a descoberta da partícula J/ψ de "revolução de novembro", querendo com isso dizer que a divulgação do trabalho, em novembro de 1974, reforçou consideravelmente a posição dos que defendiam a teoria dos quarks.

22. Como os mésons, os glúons formam nove combinações diferentes; entretanto, no caso dos glúons, uma das combinações, a que corresponde a um singleto incolor, é descartada por questões técnicas.

23. Como ainda não existe uma teoria quântica da gravitação comparável à QED e à QCD, as tentativas atuais de desenvolver uma GUT incluem apenas a interação forte e a interação eletrofraca.

24. Raymond Davis, Jr. (1914-2006), físico americano, e John Bahcall (1934-2005), físico americano. Davis recebeu o Prêmio Nobel de Física por suas observações, juntamente com o físico japonês Masatoshi Koshiba.

25. Teorias nas quais a interação é determinada pela invariância das equações matemáticas da teoria em relação a certas transformações. A eletrodinâmica clássica, a QED e a QCD são *teorias de calibre*. Curiosamente, a mecânica ondulatória de Schrödinger não é uma teoria de calibre.

Problemas

NÍVEL I
Seção 12-1 Conceitos Básicos

12-1. Dois píons em repouso se aniquilam mutuamente através da reação $\pi^+ + \pi^- \rightarrow \gamma + \gamma$. (*a*) Por que as energias dos dois raios gama devem ser iguais? (*b*) Calcule a energia dos raios gama. (*c*) Calcule o comprimento de onda dos raios gama.

12-2. Determine a energia mínima do fóton para que as seguintes reações ocorram: (*a*) $\gamma - \Lambda^+ + \pi^-$, (*b*) $\gamma \rightarrow p + \overline{p}$, e (*c*) $\gamma \rightarrow \mu^- + \mu^+$.

12-3. Desenhe dois diagramas de Feynman diferentes para os seguintes eventos: (*a*) $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$; (*b*) $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$.

12-4. Desenhe diagramas de Feynmam para os seguintes eventos de espalhamento: (*a*) elétron-elétron; (*b*) elétron-pósitron; (*c*) efeito Compton.

12-5. Determine (*a*) a energia do elétron; (*b*) a energia do núcleo de ^{32}S; (*c*) o momento do elétron e do núcleo de ^{32}S na reação

32 32 − − 32

de decaimento $P \rightarrow S + e$, supondo que não existem neutrinos no estado final ($n \rightarrow p + e$). (A massa de repouso do P é 31,973762 u.)

12-6. Os antiprótons quase sempre são aniquilados na reação $p + \overline{p} \rightarrow \gamma + \gamma$. Suponha que um próton e um antipróton se aniquilem em repouso. (*a*) Por que devem ser produzidos dois fótons em vez de um? (*b*) Qual é a energia dos fótons? (*c*) Qual é o comprimento de onda dos fótons? (*d*) Qual é a frequência dos fótons?

12-7. A Figura 12-2 mostra a produção do primeiro antipróton, que ocorreu através da reação $p + p \rightarrow p + p + p + \overline{p}$. Para que a reação seja possível, é necessária uma energia cinética mínima de 5,6 GeV. (Os prótons usados no experimento tinham uma energia de 25 GeV.) As reações a seguir exigiriam menos energia. Explique por que não ocorrem na prática. (*a*) $p + p \rightarrow p + e^- + e^+ + \overline{p}$; (*b*) $p + p \rightarrow p + \overline{p}$.

12-8. O positrônio é um estado ligado de um elétron e um pósitron (veja a Seção 2-4). O tempo de vida do positrônio, expresso nas unidades naturais usadas pelos físicos de partículas ($\hbar = c = 1$), é $\tau = 2/m\alpha^5$, em que m é a massa do elétron e α é a constante de estrutura fina. (*a*) Use o método da análise dimensional para incluir $\hbar$ e c na expressão de τ. (*b*) Calcule o valor de τ em picossegundos.

Seção 12-2 Interações Fundamentais e Partículas Mediadoras

12-9. Determine a interação responsável pelos seguintes decaimentos:

(*a*) $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$ *ou*
(*b*) $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$
(*c*) $\Delta^+ \rightarrow \pi^0 + p$
(*d*) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

12-10. Qual dos seguintes decaimentos leva mais tempo para ocorrer: $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ ou $\mu^- \rightarrow \pi^- + \overline{\nu}_\mu$? Justifique sua resposta.

12-11. Quais das reações abaixo podem ser mediadas pela interação fraca? Justifique sua resposta.

(*a*) $K^+ \rightarrow \pi^0 + \mu^+ + \nu_\mu$
(*b*) $p + e^- + \nu_e \rightarrow e^- + \pi^+ + p$
(*c*) $\Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + e^- + \overline{\nu}_e$
(*d*) $p + \nu_\mu \rightarrow \mu^+ + n$

12-12. Qual das quatro interações fundamentais é provavelmente responsável pelas reações abaixo?

(*a*) ^{16}O (estado excitado) $\rightarrow$ ^{16}O (estado fundamental) + γ
(*b*) $\nu_e + e \rightarrow \nu_e + e$
(*c*) $p + \overline{p} \rightarrow \gamma + \gamma$
(*d*) $p + \overline{\nu}_e \rightarrow n + e^+$
(*e*) $\pi^0 + p \rightarrow \pi^0 + p$
(*f*) $^3H \rightarrow {}^3He + e^- + \overline{\nu}_e$

12-13. Use as informações relativas aos neutrinos produzidos pela supernova 1987A, incluindo as que aparecem na Figura 12-33, para determinar um limite superior para a massa do neutrino do elétron.

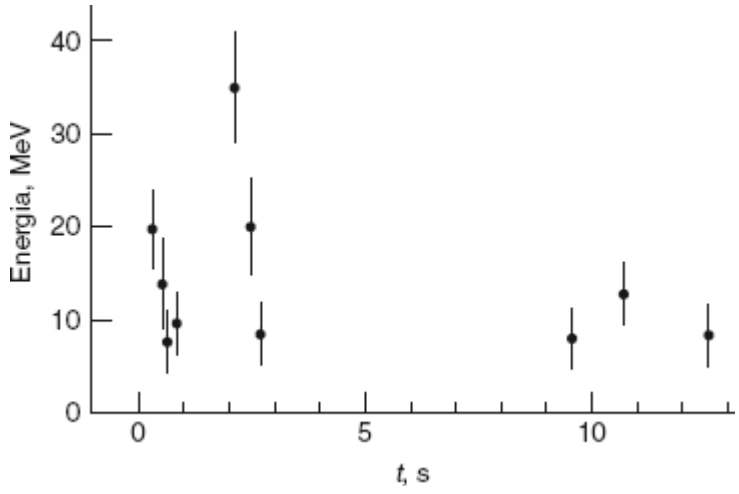


FIGURA 12-33 Problema 12-13. Energia de antineutrinos do elétron em função do tempo de chegada no detector Kamiokande, no Japão, para os antineutrinos emitidos pela supernova 1987A. A dispersão nos tempos de chegada (da ordem de 13 s) pode ser usada para determinar um limite superior para a massa do $\overline{\nu}_e$.

12-14. As energias de repouso das partículas Σ^+ e Σ^- são ligeiramente diferentes, enquanto as energias de repouso das partículas π^+ e π^- são exatamente iguais. Explique a razão da diferença.

12-15. Desenhe os diagramas de Feynman dos seguintes decaimentos:

(*a*) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$
(*b*) $\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$
(*c*) $\tau^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu + \nu_\tau$

Seção 12-3 Leis de Conservação e Simetrias

12-16. Calcule a indeterminação da energia de repouso das seguintes partículas: (*a*) $\Lambda(1670)$; (*b*) $\Sigma(2030)$; (*c*) $\Delta(1232)$.

12-17. Determine quais das reações abaixo violam uma ou mais das leis de conservação e indique quais são as leis violadas em cada caso.

(*a*) $p \rightarrow n + e^+ + \overline{\nu}_e$
(*b*) $n \rightarrow p + \pi^-$
(*c*) $e^+ + e^- \rightarrow \gamma$
(*d*) $p + \overline{p} \rightarrow \gamma + \gamma$
(*e*) $\nu_e + p \rightarrow n + e^+$
(*f*) $p \rightarrow \pi^+ + e^+ + e^-$

12-18. O píon neutro decai 99% das vezes através da reação $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ e o píon negativo decai através da reação $\pi^- \rightarrow \pi^- + \overline{\nu}_\mu$. (*a*) Qual das duas reações é mediada pela interação eletromagnética? (*b*) Por que o decaimento do píon neutro com a produção de um único fóton nunca é observado? (*c*) A composição de quarks do píon negativo é $\bar{u}d$. Desenhe um diagrama de Feyn-man que mostre os quarks envolvidos no decaimento do píon negativo.

12-19. Determine a variação de estranheza nas reações a seguir e indique se a reação é mediada pela interação forte, pela interação eletromagnética, pela interação fraca, ou não pode acontecer.

(*a*) $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \rightarrow^-$; (*b*) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^- + \pi^0$; (*c*) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$.

12-20. Determine a variação de estranheza nas reações a seguir e indique se a reação é mediada pela interação forte, pela interação eletromagnética, pela interação fraca, ou não pode acontecer.

(*a*) $\Omega^- \rightarrow \Lambda^0 + \overline{\nu}_e + e^-$; (*b*) $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$; (*c*) $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$.

12-21. As regras para determinar o isospin total de duas ou mais partículas são as mesmas usadas para combinar momentos angulares. Por exemplo: como $I = 1/2$ para os núcleons, o valor total do isospin para um sistema de dois núcleons pode ser $I = 1$ ou $I = 0$. Como $I_3 = +1/2$ para o próton, o sistema $p + p$ tem $I_3 = +1$ e, portanto, deve ter $I = 1$. Determine o valor de I_3 e os valores possíveis de I para as seguintes combinações:

(*a*) $n + n$
(*b*) $n + p$
(*c*) $\pi^+ + p$
(*d*) $\pi^- + n$
(*e*) $\pi^+ + n$

12-22. Quais dos decaimentos a seguir são permitidos e quais são proibidos? Se o decaimento for permitido, indique a interação responsável. Se for proibido, indique a lei de conservação que seria violada.

(*a*) $\pi^- \rightarrow e^- + \gamma$
(*b*) $\pi^0 \rightarrow e^- + e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_e$
(*c*) $\pi^+ \rightarrow e^- + e^+ + \mu^+ + \nu_\mu$
(*d*) $\Lambda^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$
(*e*) $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$

12-23. Indique, para as partículas a seguir, dois possíveis decaimentos que respeitem todas as leis de conservação: (*a*) Ω^-; (*b*) Σ^+; (*c*) Λ^0; (*d*) π^0; (*e*) K^+.

12-24. Considere as seguintes reações:

$$K^- + p \rightarrow K^0 + K^+ + \Omega^-$$

seguida por

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$$

Dado que $B = 1$ para o próton e $B = 0$ para os mésons e que o número bariônico é conservado, determine o número bariônico das partículas Ω^- e Ξ^0.

12-25. Em quais dos seguintes decaimentos e reações a estranheza é conservada?

(*a*) $\bar{p} + p \rightarrow \gamma + \gamma$
(*b*) $\Xi^- \rightarrow \pi^- + \Lambda^0$
(*c*) $\Sigma^+ \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$
(*d*) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$
(*e*) $\Omega^- \rightarrow \Xi^- + \pi^0$

Seção 12-4 O Modelo-padrão

12-26. Determine o número bariônico, a carga, o isospin e a estranheza das combinações de quarks a seguir e identifique o hádron correspondente: (*a*) *uud*; (*b*) *udd*; (*c*) *uuu*; (*d*) *uss*; (*e*) *dss*; (*f*) *suu*; (*g*) *sdd*.

12-27. Determine o número bariônico, a carga, o isospin e a estranheza das combinações de quarks a seguir e identifique o hádron correspondente (como acontece com qualquer par partícula-antipartícula, a carga e a estranheza de um antiquark são os negativos da carga e da estranheza do quark correspondente): (*a*) $u\bar{d}$; (*b*) $\bar{u}d$; (*c*) $u\bar{s}$; (*d*) $s\bar{s}$; (*e*) $\bar{d}s$.

12-28. Desenhe dois diagramas de Feynman para o decaimento do quark antibottom.

12-29. Algumas combinações de quarks podem existir em dois ou mais estados de isospin, com cada estado correspondendo a um hádron diferente. Uma dessas combinações é *uds*. (*a*) Qual é o valor de I_3 para essa combinação? (*b*) Quais são os valores possíveis do isospin total *I* para essa combinação? (*c*) Determine o número bariônico, a carga e a estranheza dessa combinação e identifique os hádrons correspondentes aos diferentes estados de isospin.

12-30. A partícula Δ^{++} é um bárion que decai através da interação forte. Os números quânticos estranho, charme, top e bottom da partícula são nulos. Que combinação de quarks resulta em uma partícula com essas propriedades?

12-31. Calcule o alcance aproximado de uma interação fraca medida pela partícula W^+.

12-32. Um dos modos de decaimento do méson $\overline{K}^0$ é o seguinte:

$$\overline{K}^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

Desenhe o diagrama de Feynman deste decaimento, conhecido como decaimento semileptônico, mostrando a composição das partículas em termos de quarks.

12-33. Um dos modos de decaimento da partícula Λ^0 é o decaimento, mediado pela interação fraca, dado pela seguinte reação: $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$. Desenhe o diagrama de Feynman deste decaimento, conhecido como decaimento não leptônico, mostrando a composição das partículas em termos de quarks.

12-34. Mostre que o nêutron não pode sofrer um decaimento semelhante ao decaimento não leptônico da partícula Λ^0 (Problema 12-33).

12-35. Desenhe o diagrama de Feynman da reação de decaimento $\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$.

12-36. A partícula $X^0(1193)$ pode ser produzida através da reação $K^- + p \rightarrow \pi^0 + X^0$. (*a*) Determine os números quânticos de carga, estranheza, charme, bottom e top da partícula $X^0(1193)$. (*b*) Com base na resposta do item (*a*), qual é a composição de quarks da partícula $X^0(1193)$?

12-37. Encontre uma possível combinação de quarks que forneça os valores corretos de carga elétrica, número bariônico e estranheza (*a*) do méson K^+; (*b*) do méson K^0.

12-38. O méson D^+ tem números quânticos estranho = 0 e charme = +1. (*a*) Encontre uma possível combinação de quarks que forneça as propriedades corretas para esta partícula. (*b*) Repita o item (*a*) para o méson D^-, que é a antipartícula do méson D^+.

12-39. O tempo de vida da partícula Σ^0 é 6×10^{-20}s, o da partícula Σ^+ é $0{,}8 \times 10^{-10}$s e o da partícula Σ^- é $1{,}48 \times 10^{-10}$s, quase duas vezes maior que o da partícula Σ^+. Por que os tempos de vida dos três membros de um mesmo multipleto de isospin são tão diferentes?

Seção 12-5 Para Além do Modelo-padrão

12-40. De acordo com as teorias da grande unificação, o próton é instável. Explique por que, caso isso seja verdade, a lei de conservação do número bariônico não pode ser válida em todos os casos. Se os léptons se transformam em quarks e vice-versa quando a energia é da ordem da energia de unificação, isso quer dizer que as leis de conservação do número bariônico e do número leptônico devem ser substituídas por uma lei de conservação do número de "leptoquarks"?

12-41. De acordo com as teorias da grande unificação, o próton tem um tempo de vida da ordem de 10^{32} anos. Se isso é verdade, quantos prótons decaem por ano nos oceanos? (Suponha que a profundidade média dos oceanos é de 1 km e que os oceanos

cobrem 75% da superfície terrestre.)

12-42. Os prótons poderiam decair de várias formas. Quais são as leis de conservação violadas nas possibilidades abaixo?

(*a*) $p \rightarrow e^+ + \Lambda^0 + \nu_e$
(*b*) $p \rightarrow \pi^+ + \gamma$
(*c*) $p \rightarrow \pi^+ + K^0$

NÍVEL II

12-43. Encontre uma possível combinação de quarks para as seguintes partículas: (*a*) $\overline{n}$; (*b*) Ξ^0; (*c*) Σ^+; (*d*) Ω^-; (*e*) Ξ^-.

12-44. Determine as propriedades das partículas que apresentam as seguintes combinações de quarks: (*a*) *ddd*; (*b*) $u\overline{c}$; (*c*) $u\overline{b}$; (*d*) $\overline{sss}$.

12-45. Mostre que o bóson Z^0 não pode decair em duas partículas iguais de spin zero.

12-46. Considere a seguinte cadeia de decaimentos:

$$\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$$
$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$$
$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$$
$$\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$$

(*a*) Todos os produtos finais são estáveis? Se a resposta for negativa, complete a cadeia de decaimentos. (*b*) Escreva a reação global de decaimento da partícula Ξ^0. (*c*) Verifique se a reação global de decaimento respeita as leis de conservação de carga elétrica, número bariônico, número leptônico e estranheza. (*d*) O primeiro decaimento da cadeia poderia produzir uma partícula Σ^0 em vez de uma partícula Λ^0?

12-47. Determine a composição de quarks dos hádrons com os seguintes números quânticos (Q,B,S,C,B′): (2,1,0,1,0); (0,1,−2,1,0); (0,0,1,0,−1); (0,−1,1,0,0); (0,1,−1,1,0); (−1,1,−3,0,0).

12-48. Dois neutrinos com diferentes energias, E_1 e E_2, emitidos pela supernova SN1987A, chegam à Terra em instantes diferentes. Suponha que E_1 = 20 MeV, E_2 = 5 MeV e a massa do neutrino é 2,2 eV/c^2. Como a energia total dos neutrinos é muito maior que a energia de repouso, os neutrinos estão se movendo a uma velocidade muito próxima da velocidade da luz e, portanto, podemos usar a aproximação $E \approx pc$. (*a*) Mostre que a diferença entre os tempos de chegada na Terra dos dois neutrinos é dada por

$$\Delta t = t_2 - t_1 = x\frac{u_1 - u_2}{u_1 u_2} \approx \frac{x\Delta u}{c^2}$$

em que u_1 e u_2 são as velocidades dos neutrinos e x é a distância percorrida.
(*b*) Mostre que, para $E >> mc^2$, a velocidade u é dada por

$$\frac{u}{c} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2$$

(*c*) Use o resultado do item (*b*) para calcular $u_1 - u_2$ para as energias e a massa dadas no enunciado e calcule o valor de Δt para $x = 1{,}7 \times 10^5$ anos-luz.
(*d*) Repita o cálculo do item (*c*) supondo que a massa do neutrino é 40 eV/c^2.

12-49. Mostre que todos os números leptônicos são conservados nos seguintes decaimentos:

(*a*) $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$
(*b*) $\tau^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \nu_\tau$
(*c*) $n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$
(*d*) $\tau^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$

12-50. Um méson π^0 com uma energia de 850 MeV decai através da reação $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$. Determine os ângulos entre os momentos dos fótons e a direção original do méson π^0.

12-51. Verifique se os decaimentos a seguir respeitam as leis de conservação da energia, da carga elétrica, do número bariônico e do número leptônico:

(*a*) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$
(*b*) $\Sigma^- \rightarrow n + p^-$
(*c*) $\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu$

Suponha que as leis de conservação do momento linear e do momento angular são respeitadas. Indique, se for o caso, qual é a lei de conservação que é violada.

12-52. Considere a seguinte cadeia de decaimentos:

$$\Omega^- \rightarrow \Xi^0 + \pi^-$$
$$\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \overline{\nu}_e$$
$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$$
$$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$$
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$
$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \overline{\nu}_\mu$$
$$\mu^- \rightarrow e^- + \overline{\nu_e} + \nu_\mu$$

(*a*) Todos os produtos finais são estáveis? Se a resposta for negativa, complete a cadeia de decaimentos. (*b*) Escreva a reação global de decaimento da partícula Ω^-. (*c*) Verifique se a reação global de decaimento respeita as leis de conservação de carga elétrica, número bariônico, número leptônico e estranheza.

NÍVEL III

12-53. A massa do átomo de hidrogênio é menor que a soma das massas do próton e do elétron; a diferença é a energia de ligação. Por outro lado, a massa do píon π^+ (formado pelos quarks u e $\overline{d}$) é 139,6 MeV/c^2 e a soma das massas dos quarks u e $\overline{d}$ é menor que 20 MeV/c^2. Como se explica a diferença?

12-54. (*a*) Calcule a energia cinética total dos produtos da reação de decaimento $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$, supondo que a partícula Λ^0 se encontra inicialmente em repouso. (*b*) Calcule a razão entre a energia cinética do píon e a energia cinética do próton. (*c*) Calcule a energia cinética do próton e do píon.

12-55. Uma partícula Σ^0 em repouso decai em uma partícula Λ^0 e um fóton. (*a*) Qual é a energia total dos produtos do decaimento? (*b*) Supondo que a energia cinética da partícula Λ^0 pode ser desprezada em comparação com a energia do fóton, calcule o valor aproximado do momento do fóton. (*c*) Use o resultado do item (*b*) para calcular a energia cinética da partícula Λ^0. (*d*) Use o resultado do item (*c*) para obter uma melhor estimativa do momento e da energia do fóton.

12-56. Existem três modos possíveis de decaimento da partícula τ^-. (*a*) Desenhe os diagramas de Feynman dos três modos de decaimento. (*b*) Qual dos três modos de decaimento é o mais provável? Justifique sua resposta.

12-57. Em um acelerador de partículas de grande porte, como o LHC, o momento de um próton que se move em uma trajetória circular de raio R é dado por $\mathbf{p} = 0{,}3\ R\mathbf{B}$ GeV/c, considerando que $\mathbf{B}$ é o campo magnético. Mostre que esta expressão está correta.

*Do inglês *q*uantum *e*lectro*d*ynamics. (N.T.)

*Do inglês *q*uantum *c*hromo*d*ynamics. (N.T.)

*Do inglês *r*ed, *b*lue e *g*reen, respectivamente. (N.T.)

*Na verdade, todas as grandezas associadas aos números internos dos quarks mostrados na Tabela 12-5 são conservadas nas interações fortes. (N.T.)

*Os quarks *c*, *b* e *t* serço discutidos mais adiante. (N.T.)

*As partículas Λ^0 e Σ^0 possuem o mesmo conjunto de quarks (*uds*); o Σ^0 pode ser considerado um estado excitado do Λ^0. (N.T.)

*Do inglês *g*rand *u*nification *t*heory. (N.T.)

**Do inglês *su*per*sy*mmetry. (N.T.)

CAPÍTULO 13

Astrofísica e Cosmologia

13-1 O Sol
13-2 As Estrelas
13-3 A Evolução das Estrelas
13-4 Eventos Cataclísmicos
13-5 Os Estados Finais das Estrelas
13-6 Galáxias
13-7 Cosmologia e Gravitação
13-8 Cosmologia e a Evolução do Universo

A física é uma ciência experimental. Nossas teorias a respeito da natureza, desde as leis de Newton até a relatividade e a mecânica quântica, passando pelas equações de Maxwell, se baseiam em um número imenso de observações experimentais. Neste capítulo, vamos esquecer a Terra e aplicar os princípios da física ao estudo dos astros, um ramo da física conhecido como *astrofísica*, e à investigação da estrutura do universo, um ramo que é chamado de *cosmologia*. No processo, temos que expandir a escala de nossa discussão das dimensões em femtômetros e nanômetros dos núcleos, átomos e moléculas para as dimensões em anos-luz das galáxias e do espaço sideral, uma variação de mais de 40 ordens de grandeza.

Para estudar as estrelas e galáxias, os astrofísicos e cosmólogos têm que se contentar com a radiação eletromagnética e eventuais partículas emitidas no passado que estejam chegando à Terra no momento da observação. As informações assim obtidas, juntamente com a hipótese básica de que as leis da física descobertas aqui na Terra são as mesmas no resto do universo, constituem a base do trabalho desses cientistas. Durante a maior parte da história, o instrumento usado para estudar o cosmo foi o olho humano. Embora bem adaptado para a vida na Terra, o olho é um instrumento relativamente pobre para o estudo científico do céu, já que armazena as informações durante apenas uma fração de segundo antes de transmiti-las ao cérebro para serem analisadas, é sensível apenas a uma pequena parte do espectro eletromagnético, e possui uma resolução e uma sensibilidade relativamente pobres. Hoje em dia, a maior parte das informações a respeito do universo distante é obtida com o auxílio de telescópios.

13-1 O Sol

O astro que mais chama a atenção no céu, naturalmente, é o Sol. O Sol é importante para nós por várias razões. Em primeiro lugar, só existe vida na Terra graças à radiação solar. É ela que mantém a superfície terrestre em uma temperatura confortável, além de fornecer grande parte da energia que consumimos. Como o Sol contém quase toda a massa do sistema solar, é também responsável pela força gravitacional que mantém nosso planeta em órbita. Mais importante, porém, para nossos propósitos nesta seção, é o fato de que o Sol é a única estrela, entre 100 bilhões que existem na Via Láctea, suficientemente próxima da Terra para que possamos examinar sua superfície. Todas as outras estão tão distantes, que aparecem apenas como pontos luminosos, mesmo quando observadas nos telescópios mais potentes. (Recentemente, surgiram três exceções: Betelgeuse, cuja superfície

foi fotografada pelo Telescópio Espacial Hubble, e Achernar e Altair, cuja forma foi estudada por interferometria.) O que aprendemos ao estudar a superfície do Sol não só ajuda a compreender os processos físicos que ocorrem no interior do astro, mas pode ser aplicado a outras estrelas.

A Superfície e a Atmosfera do Sol

Podemos ver apenas a fina camada exterior do Sol, a *fotosfera*, responsável pela luz que torna o Sol visível. A fotosfera é considerada a superfície do Sol. A energia solar que chega à parte superior da atmosfera terrestre por segundo e por metro quadrado é chamada de *irradiância solar* ou *constante solar* e representada pela letra *f*. O valor experimental da constante solar é

$$f = 1{,}365 \times 10^3 \text{ W/m}^2 \qquad \textbf{13-1}$$

A grandeza correspondente para outras estrelas é chamada de *fluxo radiante* (veja a Seção 13-2). A potência total irradiada pelo Sol (ou qualquer outra estrela) é conhecida como *luminosidade* e representada pela letra *L*. A partir da constante solar, da distância entre a Terra e o Sol, que é igual a $1{,}496 \times 10^8$ km [1 unidade astronômica (UA)], e da lei de conservação da energia, podemos calcular a luminosidade do Sol. A área *A* de uma esfera com 1 UA de raio é dada por

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(1{,}496 \times 10^{11})^2 \text{ m}^2$$

A essa distância, cada metro quadrado recebe energia do Sol a uma taxa dada pela constante solar. Assim, a luminosidade $L_\odot$ do Sol é dada por

$$L_\odot = Af = 4\pi(1{,}496 \times 10^{11} \text{ m})^2(1{,}365 \times 10^3 \text{ W/m}^2)$$

$$L_\odot = 3{,}84 \times 10^{26} \text{ W} \qquad \textbf{13-2}$$



Trata-se de uma potência gigantesca. Se pudéssemos instalar uma usina de energia elétrica de 1000 megawatts em cada metro quadrado da superfície da Terra, todas as usinas combinadas produziriam apenas 0,1% da potência produzida pelo Sol. Existem planos para usar a pressão produzida pela radiação solar como forma de propulsão de naves interplanetárias.

Supondo que o Sol se comporta como um corpo negro, podemos usar a luminosidade e o raio solar ($6{,}96 \times 10^8$ m) para calcular a temperatura efetiva da superfície do Sol a partir da lei de Stefan-Boltzmann. De acordo com essa lei (veja a Seção 3-2), a irradiância *R* (potência por unidade de área) de um corpo negro em equilíbrio térmico é proporcional à quarta potência da temperatura da superfície:

$$R = \sigma T^4 \qquad \textbf{3-4}$$

em que $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4 e *T* é a temperatura absoluta. Se o raio do Sol é $R_\odot$, a irradiância da superfície visível do Sol, a *fotosfera*, é

$$R = \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2} \qquad \textbf{13-3}$$

É preciso tomar cuidado para não confundir a irradiância *R* com o raio solar $R_\odot$. A temperatura efetiva T_{ef} da superfície do Sol é definida como a temperatura para a qual a irradiância satisfaz a lei de Stefan-Boltzmann para um corpo negro:

$$R = \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2} = \sigma T_{ef}^4$$

Explicitando T_{ef}, obtemos:

$$T_{ef} = \left(\frac{R}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{L_\odot}{4\pi\sigma R_\odot^2}\right)^{1/4} \qquad \textbf{13-4}$$

EXEMPLO 13-1 **A Temperatura da Fotosfera** Use a lei de Stefan-Boltzmann para calcular a temperatura efetiva da fotosfera.

SOLUÇÃO

Fazendo $L_\odot = 3{,}85 \times 10^{26}$ W (Equação 13-2) na Equação 13-4, obtemos:

$$\begin{aligned} T_{\text{ef}} &= \left(\frac{L_\odot}{4\pi\sigma R_\odot^2}\right)^{1/4} \\ &= \left[\frac{3{,}84 \times 10^{26}\,\text{W}}{4\pi\,(5{,}67 \times 10^{-8}\,\text{W/m}^2\cdot\text{K}^4)\,(6{,}96 \times 10^{8}\,\text{m})^2}\right]^{1/4} \\ &= 5780\,\text{K} \end{aligned}$$

A intensidade da radiação solar foi medida em comprimentos de onda que vão desde 10^{-13} m, na faixa dos raios gama, até quase 10 m, na faixa das ondas de rádio, um intervalo que cobre mais de 99% da energia emitida pelo Sol. Como mostra a Figura 13-1, na maior parte desse intervalo, o espectro solar é descrito com boa precisão pela lei de radiação do corpo negro de Planck (veja o Capítulo 3), com $T = 5800$ K. O máximo da distribuição está no centro do espectro visível, em um comprimento de onda que corresponde à cor amarela. Esta concordância entre os espectros teórico e experimental é uma das características do *Sol quiescente*.

Quando examinamos a borda do disco solar, conhecida como *limbo*, verificamos que é bem definida e mais escura que o resto do Sol. A nitidez do limbo permite concluir que a fotosfera é muito delgada através do seguinte raciocínio: a turbulência atmosférica durante o dia limita a resolução angular dos telescópios óticos a cerca de 1 segundo de arco (1/3600 de grau), o que, à distância do Sol, corresponde a 700 km, aproximadamente. Quando observamos o Sol, o ângulo ao longo do qual o gás da fotosfera muda de rarefeito e transparente para denso e opaco é menor que a resolução de nossos instrumentos; assim, a fotosfera deve ter uma espessura menor que 700 km, o que corresponde a apenas 0,1% do raio solar.

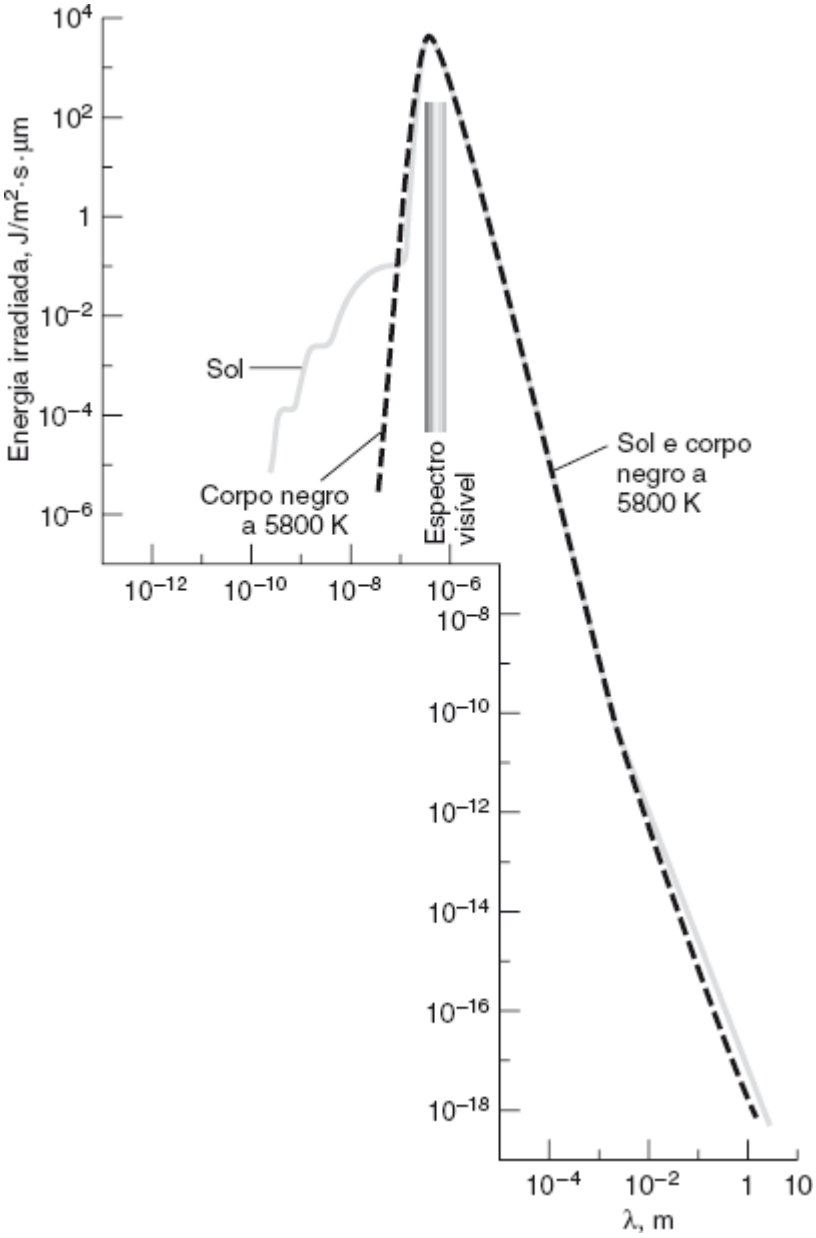


FIGURA 13-1 A distribuição espectral da energia emitida pelo Sol se aproxima muito da distribuição espectral de um corpo negro a 5800 K. A discrepância entre as distribuições experimental e teórica para grandes comprimentos de onda se deve principalmente ao fato de que a fotosfera não se encontra em equilíbrio térmico. O desvio acentuado para pequenos comprimentos de onda é causado por raios X emitidos pela coroa, cuja temperatura é muito maior que a da fotosfera.

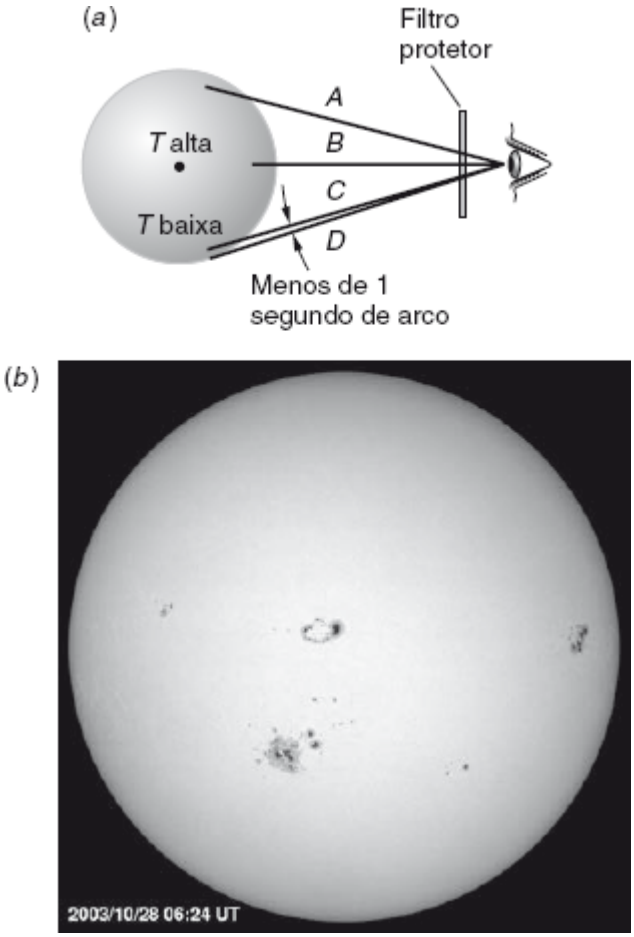


FIGURA 13-2 (*a*) Duas linhas de visadas de mesmo comprimento ótico, *A* e *B*. Na direção *B*, o observador vê camadas mais internas (mais quentes, mais luminosas) do Sol que na direção *A*. É por isso que a borda do Sol parece menos luminosa que a parte central. O ângulo ao longo do qual o gás da fotosfera muda de rarefeito e transparente para denso e opaco (ângulo entre as linhas de visada C e D) é menor que a resolução de nossos instrumentos; é por isso que o limbo é bem definido. (*b*) Imagem do disco solar no espectro visível tomada no National Solar Observatory/Sacramento Peak, Novo México, em 28 de outubro de 2003. A imagem mostra algumas manchas solares; note também que o limbo é mais escuro que a parte central. [*SOHO* (*ESA* & *NASA*).]

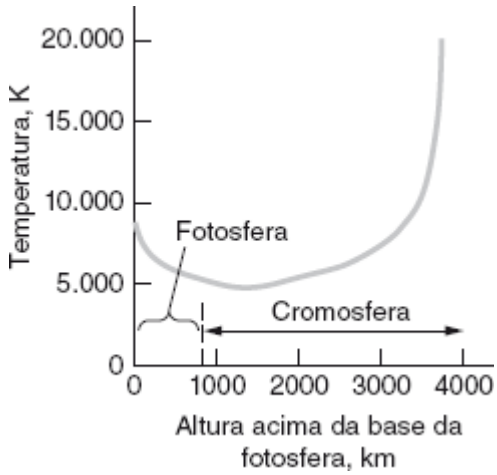


FIGURA 13-3 A temperatura do Sol diminui desde a base da fotosfera até uma altitude de aproximadamente 1200 km e depois aumenta rapidamente, até atingir 20.000 K no alto da cromosfera.

O aspecto relativamente escuro do limbo nos diz alguma coisa a respeito da variação da temperatura perto da superfície do Sol. A Figura 13-2 mostra duas linhas de visada, *A* e *B*, para observar o Sol. A luz que viaja ao longo da trajetória *A* é inteiramente gerada na fotosfera; a luz que viaja ao longo da trajetória *B* é parcialmente gerada em camadas mais internas do Sol. Como o interior do Sol é mais quente que as camadas externas, a luz que viaja ao longo da trajetória *B* é produzida por um gás mais quente (mais luminoso) que a luz que viaja ao longo da trajetória *A*, o que a torna mais intensa que a luz proveniente do limbo. Medindo a variação de brilho com ângulo de visada, é possível determinar a variação de temperatura da fotosfera. O resultado aparece na Figura 13-3. Note que no lado esquerdo da curva, que corresponde à fotosfera, a temperatura diminui com a altura em relação à base da fotosfera, mas do lado direito, que corresponde à atmosfera solar, conhecida como cromosfera, a

temperatura volta a aumentar.

Acima da fotosfera existem duas camadas da atmosfera do Sol que não são normalmente visíveis por causa do brilho da fotosfera. A mais interna das duas camadas, a *cromosfera*, é visível alguns segundos antes da totalidade de um eclipse solar. Observada com alta resolução, a cromosfera se parece com um campo gramado em chamas, no qual cada "folha" tem cerca de 700 km de espessura, 7000 a 10.000 km de altura e dura apenas de 5 a 15 minutos. O espectro luminoso mostra que a temperatura da cromosfera aumenta com a altitude; a temperatura média é da ordem de 20.000 K (veja as Figuras 13-3 e 13-4).

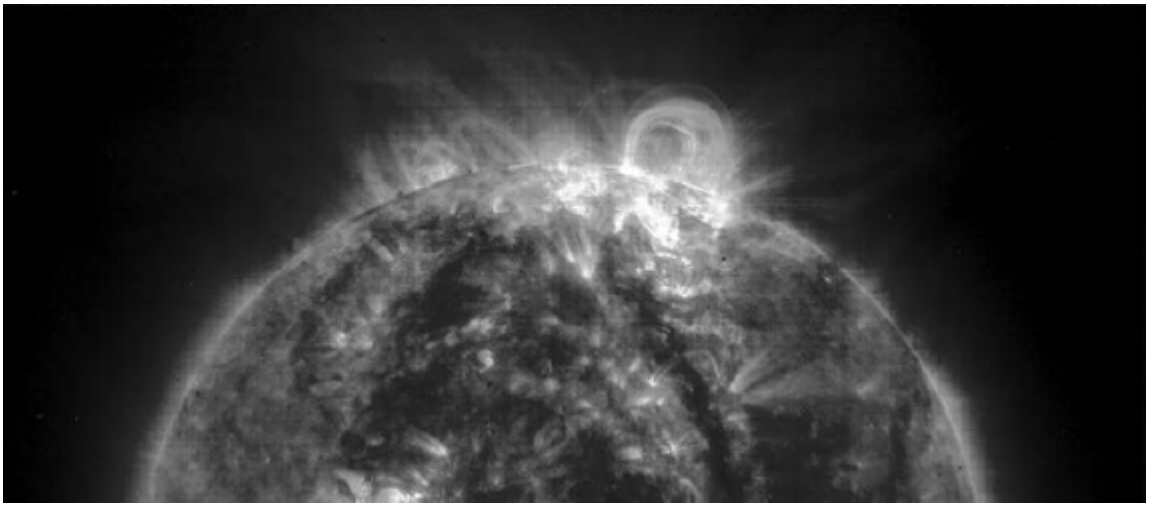


FIGURA 13-4 Esta imagem do Sol no ultravioleta mostra um anel luminoso na cromosfera, formado por gases quentes aprisionados em um campo magnético. [*SOHO* (*ESA* & *NASA*).]

Quando a totalidade do eclipse oculta a cromosfera, a camada mais externa da atmosfera solar, a *coroa*, se torna visível. Esta camada tem uma espessura extremamente variável; em algumas regiões, se estende a uma distância de 2 a 3 diâmetros solares. A temperatura da coroa é da ordem de 2.000.000 K. O brilho da coroa seria muito maior que o da fotosfera, cuja temperatura média é de 5800 K, se não fosse pelo fato de que o gás da coroa é tão rarefeito que a energia total emitida é muito menor que a da fotosfera. Mesmo assim, a coroa é responsável pela intensidade relativamente alta de raios X emitidos pelo Sol, que aparecem na Figura 13-1 como um desvio em relação à distribuição espectral de um corpo negro na região de pequenos comprimentos de onda. Acredita-se que as elevadas temperaturas da coroa sejam produzidas pela colisão de jatos de partículas de alta energia emitidos pela superfície solar com partículas da coroa. Essas ondas de choque aquecem os gases da atmosfera solar e transferem às partículas uma energia tão grande que nem mesmo a enorme gravidade do Sol é suficiente para mantê-las confinadas. Partículas de alta energia, na maioria prótons e elétrons, são emitidas continuamente pela coroa e formam o *vento solar* que está presente em todo o sistema solar.

O Interior do Sol

Como não podemos ver o que se passa abaixo da fotosfera, nosso conhecimento do interior do Sol é quase totalmente teórico. Com a única exceção dos neutrinos, nenhuma partícula ou radiação produzida nas camadas internas consegue atravessar a fotosfera. Para podermos compreender os aspectos principais da teoria atual, precisamos conhecer a massa do Sol, que pode ser calculada com relativa facilidade a partir da lei da gravitação universal e da segunda lei de Newton. A massa estimada do Sol é $M_{\odot} = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

Para simplificar os cálculos, a maioria dos modelos supõe que o Sol é uma estrela sem movimento de rotação e em equilíbrio hidrostático. Isso significa que a pressão para fora em qualquer ponto, que presumivelmente se deve aos processos de conversão de energia que ocorrem no Sol, é equilibrada exatamente pela pressão para dentro exercida pela gravidade. Embora a massa específica média do Sol (1,4 g/cm^3) não seja muito diferente da massa específica da Terra (5,5 g/cm^3), as enormes pressões que existem no interior do Sol são muito maiores que as associadas às forças eletrodinâmicas que mantêm os elétrons ligados aos núcleos atômicos. Assim, a matéria do interior do Sol (e, com mais razão ainda, a matéria do *núcleo*, a região central onde as temperaturas são suficientemente elevadas para promover a fusão do hidrogênio) está ionizada, ou seja, constitui um plasma, como se pode ver no exemplo a seguir.

EXEMPLO 13-2 **O Hidrogênio no Núcleo do Sol** Mostre que é pouco provável que exista hidrogênio neutro no interior do Sol.

SOLUÇÃO

A pressão no centro do Sol, $P_\odot$, é da ordem de μg, em que

$$\mu = \text{massa/unidade de área na superfície} \approx \left(\frac{M_\odot}{R_\odot^2}\right)$$

e

$$g = \frac{1}{2}G\left(\frac{M_\odot}{R_\odot^2}\right)$$

é a aceleração média da gravidade no Sol. A pressão calculada é da ordem de 10^{15} N/m^2. Esta é a pressão que age sobre a superfície de um átomo de hidrogênio na região central do Sol. A resistência à pressão gravitacional vem da pressão que tenta manter o átomo coeso, que, por sua vez, é igual à força de atração eletrostática entre o próton e o elétron por unidade de superfície do átomo. Como o raio do átomo de hidrogênio é igual ao raio de Bohr a_0, temos:

$$\begin{aligned}\frac{F}{A} &= \frac{ke^2/a_0^2}{4\pi a_0^2} = \frac{ke^2}{4\pi a_0^4} \\ &= \frac{(9 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\,(1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C})^2}{4\pi\,(0{,}5 \times 10^{-10}\,\text{m})^4} \\ &= 2{,}9 \times 10^{12}\,\text{N/m}^2\end{aligned}$$

Assim, a pressão gravitacional no interior do Sol, pelo menos nas proximidades do centro, é cerca de 1000 vezes maior que a pressão que tende a manter o átomo coeso, o que torna extremamente improvável que existam átomos neutros de hidrogênio.

Observação: *Como a densidade do Sol é relativamente pequena, o plasma se comporta praticamente como um gás ideal. Aplicando ao Sol a lei dos gases ideais, os cientistas calcularam que a temperatura no centro do Sol é da ordem de 1,5 × 10^7 K.*

A Fonte de Energia do Sol

Usando o valor da luminosidade do Sol da mesma ordem que o da Equação 13-2, Lorde Kelvin foi o primeiro a observar que, de acordo com a termodinâmica, toda a energia térmica e gravitacional do Sol se dissiparia em cerca de 3×10^7 anos. Acontece que a vida surgiu na Terra há pelo menos 3×10^9 anos, um período de tempo 100 vezes maior. Isso significa que o Sol deve dispor de uma fonte de energia muito maior que a representada pela energia gravitacional e a energia térmica. Essa fonte de energia é a fusão nuclear. Segundo o modelo atual, quando o Sol em formação se contraiu, a temperatura aumentou. Para compreender por que o Sol se contraiu e por que isso fez a temperatura aumentar, começamos com a lei da gravitação universal de Newton

$$F_{\text{grav}} = G\frac{Mm}{R^2}$$

em que F_{grav} é a força de atração gravitacional entre duas massas M e m separadas por uma distância R, e G é a constante gravitacional. Note que F_{grav} é inversamente proporcional ao quadrado da distância, ou seja, quanto menor a distância, maior a força de atração. Isso significa que as massas M e m tendem a se aproximar com aceleração crescente. De acordo com a lei de conservação da energia, o aumento da energia cinética, associado a essa aceleração, tem que vir de algum lugar. Esse "algum lugar" é a energia potencial gravitacional U_{grav} das massas nas posições originais: U_{grav} deve diminuir para compensar o aumento da energia cinética. De que forma este fato pode explicar a energia que é emitida pelo Sol e outras estrelas? Uma estrela é uma grande bola de gás. Os átomos de gás que estão perto da superfície são atraídos para o centro pelos átomos que estão mais abaixo. Os átomos que estão no centro da estrela também são atraídos pelos átomos da superfície, mas essa atração está distribuída uniformemente em todas as direções e, por isso, os átomos do centro da estrela permanecem imóveis (veja a Figura 13-5). Como os átomos da superfície da estrela são acelerados em direção ao centro e os átomos do centro não se movem, a estrela sofre uma contração gravitacional. Parte da energia cinética dos átomos acelerados é convertida em ondas eletromagnéticas e irradiada para o espaço, mas parte é convertida em calor, aumentando a temperatura da estrela até chegar a $1{,}5 \times 10^7$ K, uma temperatura tão elevada que muitos núcleos de hidrogênio (prótons) presentes no plasma possuem energia suficiente (cerca de 1 keV) para se fundir e formar núcleos de hélio. Esta reação, na verdade uma cadeia de reações, foi proposta por H. A. Bethe[1] e recebeu o nome de *ciclo próton-próton*. A primeira reação da cadeia é a seguinte:

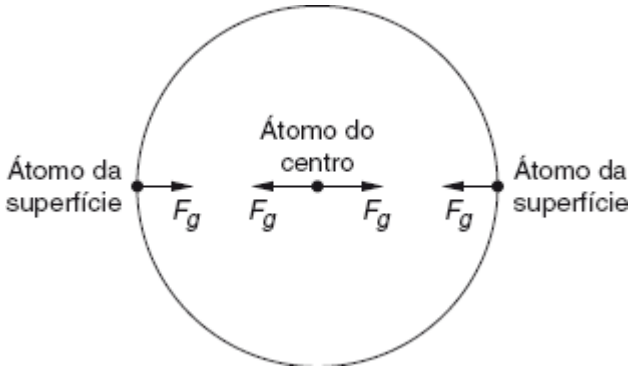


FIGURA 13-5 Os átomos próximos da superfície de uma estrela estão sujeitos a uma força gravitacional em direção ao centro. A força gravitacional a que os átomos próximos do centro estão sujeitos é praticamente nula. Isso faz com que a estrela se contraia até atingir uma temperatura elevada.

$$^1\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu_e + 0{,}42\ \text{MeV} \qquad \textbf{13-5}$$

Por causa da barreira eletrostática, a probabilidade de que esta reação ocorra é muito pequena, exceto para os prótons que se encontram na extremidade de altas energias da distribuição de Maxwell-Boltzmann. Na verdade, a fusão só é possível por causa do tunelamento quântico. Isso estabelece um limite para a rapidez com a qual o Sol pode gerar energia, assegurando assim uma longa vida para o Sol e estrelas semelhantes. Este limite é conhecido como o "gargalo" do ciclo de fusão solar. Uma vez que o ^{2}H (deutério) seja formado através da Equação 13-5, a seguinte reação se torna altamente provável:

$$^2\text{H} + {}^1\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma + 5{,}49\ \text{MeV} \qquad \textbf{13-6}$$

Outra reação muito provável é a seguinte:

$$^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2\,{}^1\text{H} + \gamma + 12{,}86\ \text{MeV} \qquad \textbf{13-7}$$

O processo pelo qual os núcleos de hidrogênio são "queimados" e se transformam em núcleos de hélio está representado esquematicamente na Figura 13-6*a*. Existem outras reações possíveis para transformar ^{1}H em ^{4}He, todas as quais possuem o mesmo valor de Q. As velocidades dessas reações, porém, são diferentes e dependem da composição e temperatura do meio. A mais importante é o ciclo CNO (carbono-nitrogênio-oxigênio), que é responsável por cerca de 1,5% da luminosidade do Sol. O ciclo CNO, cuja velocidade varia muito com a temperatura, é o principal ciclo de fusão do hidrogênio em estrelas de massa um pouco maior que a do Sol.

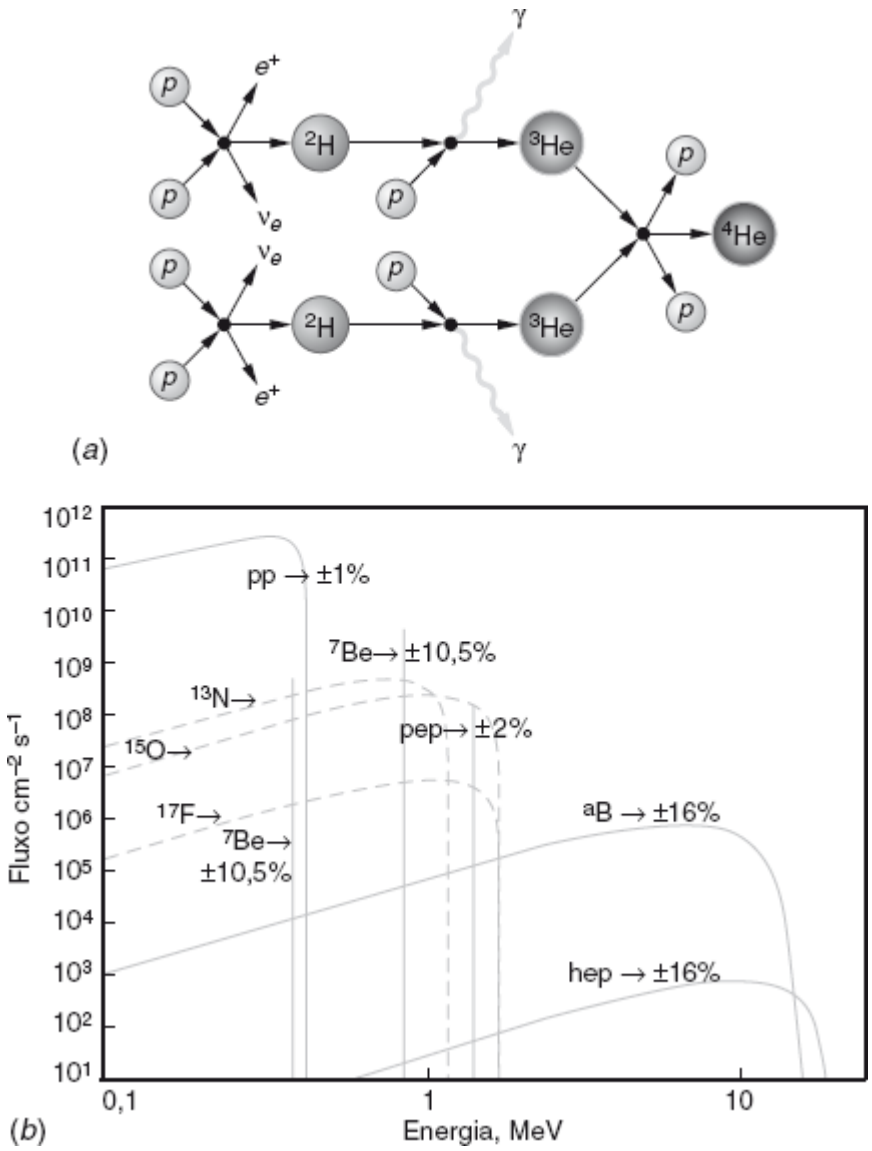


FIGURA 13-6 (*a*) O ciclo próton-próton é a principal fonte de energia do Sol. O neutrino criado na reação inicial escapa para o espaço. A energia produzida, levando em conta a energia liberada pela captura de elétrons e por aniquilações $e^- e^+$, é aproximadamente 26,7 MeV por núcleo de ^{4}He gerado. (*b*) Fluxo de neutrinos na Terra, de acordo com as previsões do modelo-padrão da atividade solar. As curvas contínuas se referem aos neutrinos produzidos no ciclo *p-p*; as curvas tracejadas se referem aos neutrinos produzidos no ciclo CNO. [*Fonte*: J. Bahcall e A. Serenilli, *ApJ*, **621**, L85 (2005).]

Os neutrinos produzidos no ciclo próton-próton escapam do núcleo solar e constituem a única forma de que dispomos para observar o interior do Sol. A velocidade com a qual o Sol está "queimando" combustível pode ser calculada a partir do valor experimental da luminosidade e do valor de Q da reação próton-próton. Além disso, as várias reações de formação do ^{3}He produzem neutrinos com diferentes espectros de energia; assim, estudando a distribuição de energia dos neutrinos solares, é possível estimar a contribuição relativa de cada reação e obter informações a respeito da composição e temperatura do núcleo. O fluxo de neutrinos esperado na Terra em consequência de todas as reações do ciclo de fusão próton-próton, calculado por John Bahcall[2] com base no modelo-padrão para o Sol, é mostrado na Figura 13-6*b*. Para os neutrinos produzidos na reação $^8\text{B} + p \rightarrow {}^8\text{Be}^* + e^+ + \nu_e$ (Tabela 13-1), a intensidade prevista é 8,1 ± 1,3 SNU (1 SNU = 1 evento por 10^{36} átomos do alvo por segundo).* Entretanto, experimentos realizados por Ray Davis e colaboradores durante mais de 30 anos em uma mina de ouro no estado americano de South Dakota, usando um detector baseado no cloro,[3] que era sensível a neutrinos produzidos no decaimento do ^{8}B, mostraram que a intensidade com que esses neutrinos chegam à Terra é de 2,56 ± 0,16 SNU, apenas 32% do valor esperado. Experimentos sensíveis a outras reações do ciclo *p-p*, realizados em seis outros laboratórios situados em diferentes países do mundo, confirmaram a discrepância, que se tornou conhecida como *problema dos neutrinos solares*. Davis recebeu o Prêmio Nobel de Física de 2002 pela descoberta.

Tabela 13-1 O ciclo de fusão nuclear próton-próton

Reação	% de eventos	Energia (MeV)

1. $p + p \rightarrow {}^2\mathrm{H} + e^+ + \nu_e$	99,96	≤0,423
ou		
$p + e^- + p \rightarrow {}^2\mathrm{H} + \nu_e$	0,04	1,445
2. ${}^2\mathrm{H} + p \rightarrow {}^3\mathrm{He} + \gamma$	100	
3. ${}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\,p$	85	
ou		
${}^3\mathrm{He} + {}^4\mathrm{He} \rightarrow {}^7\mathrm{Be} + \gamma$	15	
4. ${}^7\mathrm{Be} + e^- \rightarrow {}^7\mathrm{Li} + \nu_e$	15	0,863 (90%)
		0,385 (10%)
5. ${}^7\mathrm{Li} + p \rightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}$		
ou		
${}^7\mathrm{Be} + p \rightarrow {}^8\mathrm{B} + \gamma$	0,02	
6. ${}^8\mathrm{B} \rightarrow {}^8\mathrm{Be}^* + e^+ + \nu_e$		<15
7. ${}^8\mathrm{Be}^* \rightarrow 2\,{}^4\mathrm{He}$		
ou		
${}^3\mathrm{He} + p \rightarrow {}^4\mathrm{He} + e^+ + \nu_e$	0,00003	<18,8

Fonte: J. Bahcall, *Phys. Rev. C*, 56, 3391 (1997).

A discrepância entre as previsões teóricas do modelo padrão da atividade solar e os resultados experimentais representava um sério problema tanto para os astrofísicos como para os físicos de partículas. Nas palavras de John Bahcall, cujos cálculos levaram às previsões do modelo-padrão:

> O problema dos neutrinos solares se deve a propriedades desconhecidas dos neutrinos ou uma falta de entendimento do que se passa no interior do Sol? Em outras palavras, o erro está na física ou na astrofísica?

Na verdade, o erro estava na física. Como vimos na Seção 12-5, a recente descoberta das oscilações dos neutrinos, nas quais um tipo de neutrino muda para outro tipo, significa que os neutrinos do elétron emitidos pelo Sol no ciclo de fusão *p-p* podem se transformar em neutrinos do múon e em neutrinos do táuon no percurso até a Terra. O telescópio de neutrinos de Davis era capaz de detectar apenas neutrinos do elétron. As oscilações dos neutrinos explicam a discrepância e, segundo o Modelo-padrão da física de partículas, significam que o neutrino possui uma massa de repouso diferente de zero.

O Sol Ativo

Além dos fenômenos relativamente constantes que acabamos de discutir, o Sol também apresenta vários fenômenos transitórios,

muitos dos quais associados ao magnetismo. Já comentamos que o interior do Sol deve ser um plasma composto de prótons e elétrons. O Sol gira com diferentes velocidades em diferentes latitudes. Além disso, para uma dada latitude, a velocidade provavelmente varia com a distância ao eixo de rotação. Os complexos movimentos que resultam dessas diferenças de rotação e das correntes ascendentes e descendentes de partículas carregadas na zona de convecção situada entre o núcleo e a fotosfera são provavelmente os responsáveis pela distribuição irregular dos campos magnéticos solares (veja a Figura 13-7). Nesta distribuição, que é extremamente variável, os campos magnéticos podem exceder 1 T em alguns locais.



FIGURA 13-7 As linhas de campo que descrevem a estrutura do campo magnético solar em um dado instante podem ser determinadas a partir de medidas executadas na Terra, baseadas, por exemplo, no efeito Zeeman e na emissão de partículas carregadas. A estrutura caótica, de alta intensidade, está superposta a um campo magnético global, da ordem de 10^{-4} T, que se mantém praticamente constante.

Esta estrutura transitória está superposta a um campo magnético médio da ordem de 10^{-4} T, duas vezes maior que o campo magnético terrestre. A origem deste campo global não é conhecida; tudo que sabemos é que não se trata de um resíduo da formação do Sol, já que um campo tão antigo provavelmente já teria se dissipado há muito tempo. A presença de um campo global apresenta problemas consideráveis para qualquer modelo teórico do Sol. Não só o modelo deve ser capaz de explicar a origem do campo, mas o fato de que a polaridade se inverte a cada 11 anos, em sincronismo como o *ciclo de manchas solares*.

As *manchas solares*, regiões escuras no disco solar, são conhecidas desde a antiguidade, mas foram observadas ao telescópio pela primeira vez por Galileu em 1610. De acordo com um dos modelos atuais, sua origem é a seguinte: Como mostra a Figura 13-8, as linhas de campo magnético do Sol são distorcidas por diferenças na rotação do Sol e tendem a formar feixes ou tubos. Ocasionalmente, movimentos verticais na zona de convecção fazem com que um desses feixes atravesse a superfície. As regiões em que o feixe de linhas magnéticas deixa a superfície solar e retorna à superfície são vistas como manchas solares. As manchas solares são mais escuras que a fotosfera vizinha porque são mais frias, com uma temperatura da ordem de 3800 K (a temperatura da fotosfera é da ordem de 5800 K; veja o Exemplo 13-1). Em um par de manchas solares, há um polo norte magnético em uma das manchas e um polo sul magnético na outra. Quando o feixe de linhas de campo não atravessa totalmente a fotosfera, apenas uma mancha é observada.

Como mostra a Figura 13-9, o número de manchas solares por ano varia regularmente, de aproximadamente 50 a aproximadamente 150, em um ciclo de 11 anos. No início de cada ciclo, as manchas solares se formam em uma latitude de cerca de 30º, mas, no decorrer do ciclo, tendem a se formar cada vez mais perto do equador. Existe uma variação cíclica adicional do número anual de manchas solares, com um período de aproximadamente 100 anos, que também é visível na Figura 13-9. No momento, não existe uma explicação teórica satisfatória para essas regularidades.

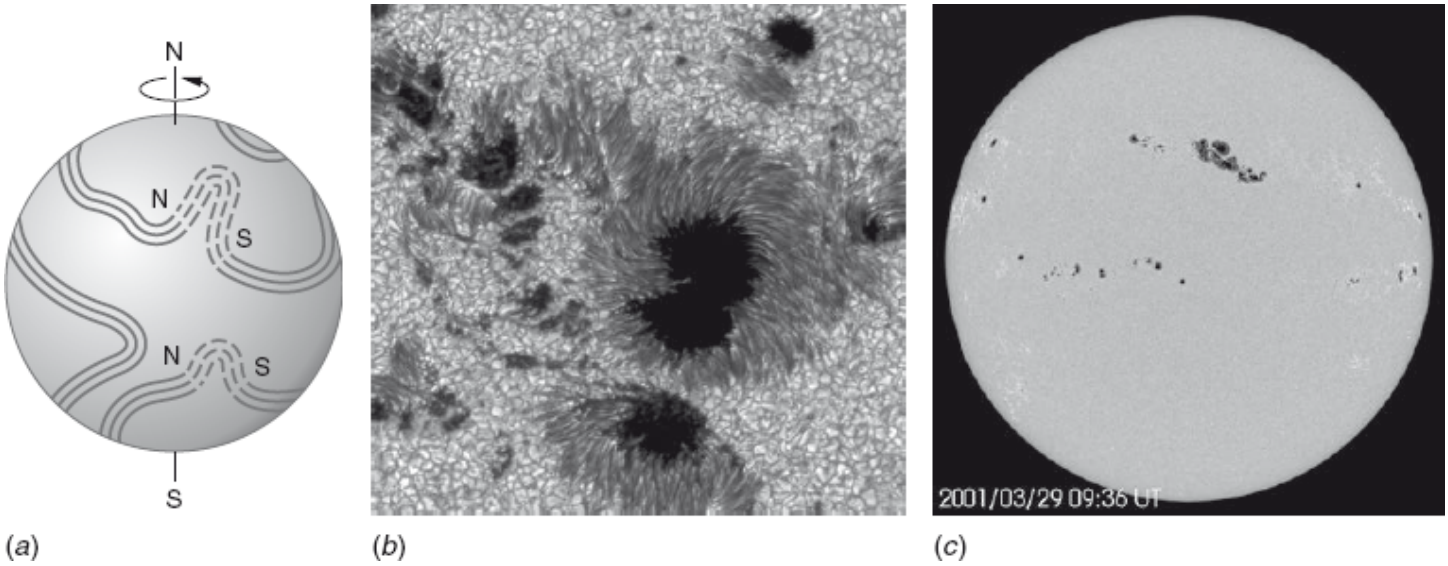


FIGURA 13-8 (*a*) As linhas de campo magnético são distorcidas por diferenças na rotação do Sol e projetadas para fora da superfície por correntes de convecção. (*b*) Uma mancha solar aparece no local onde um feixe de linhas de campo entra ou sai da superfície. A maior dessas manchas solares tem aproximadamente 20 segundos de arco de diâmetro. A grande mancha solar mostrada na fotografia tem aproximadamente 20 segundos de arco de diâmetro. O aspecto granular da superfície do Sol é bem visível na fotografia. (*c*) Manchas solares em 29 de março de 2001. [(*b*) *Institute of Solar Physics of the Royal Swedish Academy of Sciences*. (*c*) *SOHO* (*ESA* & *NASA*).]

As *erupções solares* são violentas tempestades que parecem estar associadas aos intensos campos magnéticos que existem nas vizinhanças das manchas solares. Ainda não existe, porém, um modelo teórico capaz de explicá-las. Durante uma erupção solar, são ejetadas partículas e emitidas radiações cujos comprimentos de onda cobrem todo o espectro eletromagnético, das ondas de rádio aos raios X, que podem durar de alguns minutos a algumas horas, e a temperatura local pode atingir valores da ordem de 5×10^6 K. As partículas ejetadas pelas erupções solares chegam à Terra no dia seguinte e muitas vezes produzem auroras ao interagirem com o campo magnético terrestre. As erupções solares podem afetar alguns tipos de transmissões de rádio e, em raras ocasiões, são capazes de gerar surtos de corrente em linhas de transmissão de alta tensão. Uma erupção particularmente severa ocorrida em 1996 causou, entre outras coisas, a perda de um satélite de comunicações.

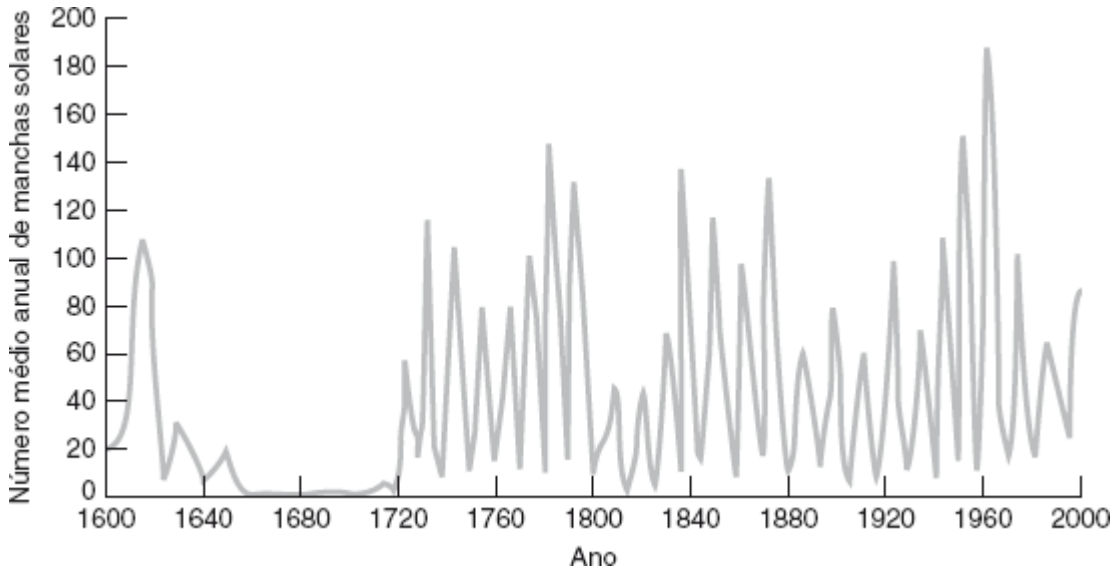
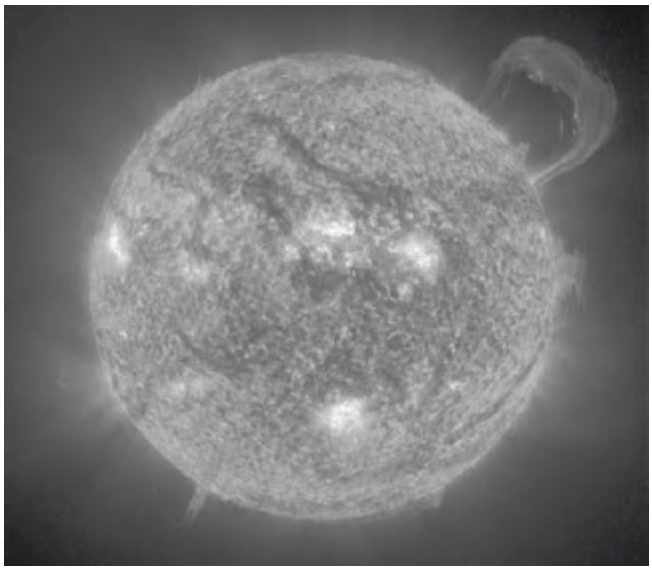


FIGURA 13-9 O número de manchas solares que ocorrem em um ano tem variado regularmente em um ciclo de 11 anos por quase 300 anos. A ausência ainda não explicada de manchas entre 1650 e 1700, conhecida como *mínimo de Maunder*, coincide aproximadamente com um período de temperaturas anormalmente baixas na Europa, que recebeu o nome de "Pequena Era Glacial". Os cientistas ainda não sabem se existiu uma ligação de causa e efeito entre os dois fenômenos. O 23º ciclo de manchas solares começou em 1996 e terminou em 2007. O 24º ciclo começou em 2008 e, de acordo com a National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA), deveria passar por um máximo em 2013, mas até o momento em que esta edição foi escrita, esse máximo ainda não foi observado. (A contagem dos ciclos começou em 1775.)

Dois outros fenômenos transitórios relacionados às manchas solares são as plagas e os filamentos. *Plagas* são regiões luminosas (quentes) encontradas nas proximidades das manchas solares. A evolução das plagas sugere que se trata de regiões de alta densidade, talvez produzidas pelo movimento dos mesmos feixes de linhas de campo magnético que geram as manchas

solares. *Filamentos* são linhas finas e escuras, às vezes com milhares de quilômetros de comprimento, que cruzam o disco solar. Não estão na superfície, mas se projetam no espaço, às vezes atingindo altitudes de mais de 100.000 quilômetros e formando belos anéis e tranças. Os filamentos que são vistos de perfil, projetando-se para fora do disco solar, são chamados de *proeminências*. Podem aparecer e desaparecer rapidamente ou persistir por várias semanas. Embora pareça haver uma correlação entre as proeminências e a configuração do campo magnético, ainda não existe um modelo capaz de explicá-las satisfatoriamente.



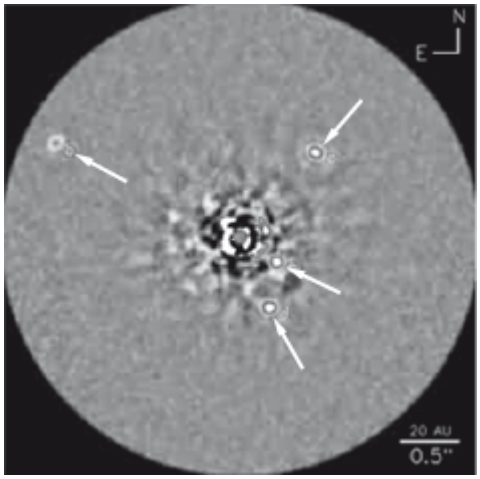
A gigantesca erupção solar que aparece no canto superior direito foi fotografada em 304 Å (30,4 nm) no dia 14 de setembro de 1999 e é constituída por partículas carregadas confinadas pelo campo magnético solar. [*SOHO* (*ESA & NASA*).]

SEÇÃO EXPLORATÓRIA
Existe Vida Fora da Terra?

Certamente não somos os primeiros a fazer esta pergunta. Os filósofos gregos, começando por Tales e continuando com Platão e seu discípulo Aristóteles, fizeram muitas especulações a respeito da natureza do céu e dos mistérios que o céu poderia conter. Muitos cientistas do século XIX imaginaram a possibilidade de que outros planetas do sistema solar, particularmente Marte e Vênus, fossem habitados. No século XX, o termo *marciano* se tornou sinônimo de "alienígena". Um novo gênero de literatura, cinema e televisão, a ficção científica, se especializou em histórias de viagens no tempo, espaçonaves, seres de outros planetas e inventos futurísticos.

A verdadeira questão é a seguinte: É possível que exista vida em outros planetas? A resposta não pode deixar de ser um resoluto "sim". Pense: Com a invenção dos telescópios, descobrimos que os movimentos das estrelas e galáxias obedecem às mesmas leis da física que conhecemos na Terra. Nossa localização nada tem de especial. Os mesmos processos físicos que acontecem na Terra acontecem no resto do universo. Todos os elementos químicos descobertos em nossos estudos do universo próximo e distante também existem na Terra. A física relativística e a física quântica são válidas em todas as regiões do cosmo. Isso significa que nossa biologia (uma aplicação da física e da química) também deve ser válida no resto do universo. Em nosso planeta, descobrimos que algumas formas de vida são capazes de sobreviver e se multiplicar em ambientes aparentemente hostis. Animais marinhos sobrevivem às águas escaldantes e às imensas pressões das fontes hidrotermais submarinas. Outros organismos vivem nas rochas de minas profundas e no gelo permanente da Antártica. Existem criaturas que usam enxofre em seu metabolismo, no lugar do oxigênio. Além disso, as moléculas orgânicas complexas nas quais a vida se baseia foram encontradas em meteoritos e observadas em nuvens interestelares. Assim, tudo leva a crer que o surgimento da vida em outras partes da Galáxia e do universo não é um acontecimento incomum.

Se existe vida inteligente em outros planetas, onde está e como podemos encontrá-la? Desde 1995, novas técnicas levaram à descoberta indireta (através, por exemplo, da perturbação no movimento de estrelas) de 861 planetas extrassolares (conhecidos como *exoplanetas*) em 667 sistemas planetários.* Apenas alguns desses planetas eram suficientemente grandes e estavam suficientemente próximos da Terra para serem fotografados (veja a foto acima); todos os outros foram descobertos por técnicas indiretas. Se existe vida inteligente em um desses planetas (ou em milhões de outros planetas que podem existir no universo) e os habitantes desses planetas estão, como nós, emitindo sinais eletromagnéticos para o espaço, a detecção desses sinais pode vir a ser a primeira indicação de que não somos a única espécie inteligente do universo. A busca desses sinais é o objetivo do projeto SETI.**



A fotografia mostra quatro planetas em órbita de uma estrela relativamente jovem, HR8799A, situada a 129 anos-luz da Terra. Os planetas são todos gigantes gasosos, com massas 5 a 7 vezes maiores que a massa de Júpiter. [*NRC-HIA, Christian Maroir e o W. M. Keck Observatory*.]

13-2 As Estrelas

Nas noites claras, sem lua, é possível distinguir a olho nu cerca de 6000 estrelas. A visão é incrivelmente bela e certamente deslumbrou nossos ancestrais. Uma observação superficial do céu noturno revela os seguintes fatos: existem mais estrelas em certas regiões do céu do que em outras; nem todas as estrelas têm o mesmo brilho; o céu é dividido em duas partes por uma faixa luminosa irregular. Nesta seção, vamos discutir esses três aspectos da esfera celeste.

A faixa luminosa que atravessa o céu é a Via Láctea. Com a ajuda de um pequeno telescópio ou mesmo de um binóculo, pode-se constatar que a Via Láctea é formada por um grande número de estrelas. Na verdade, as estrelas fazem parte de uma galáxia[4] que contém aproximadamente 10^{11} estrelas, mantidas juntas pela força gravitacional em nossa região do espaço. Todas as estrelas visíveis a olho nu pertencem à Via Láctea, pois só assim estão suficientemente próximas da Terra para serem vistas como estrelas isoladas.

Constelações

Grupos de estrelas, em geral formados por estrelas muito brilhantes, são chamados de *constelações*. Os povos da antiguidade associavam as constelações a pessoas, deuses e objetos de suas histórias, religiões e mitos, provavelmente como um artifício mnemônico. As constelações e algumas estrelas isoladas são usadas para fins práticos desde o passado remoto. Durante muitos séculos, por exemplo, os navegantes usaram a Estrela Polar (no hemisfério norte) e o Cruzeiro do Sul (no hemisfério sul) para se orientar. No Egito antigo, os conselheiros do faraó sabiam que a inundação anual do Nilo, tão importante para a agricultura local, ocorria alguns dias após o primeiro aparecimento da estrela Sírio[5] acima do horizonte, no início da primavera. Hoje em dia, 88 constelações (algumas das quais aparecem na Figura 13-10) são usadas pelos astrônomos para identificar partes do céu. Assim, por exemplo, eles afirmam que o centro da Via Láctea fica "em Sagitário", querendo com isso dizer que o centro da Via Láctea fica na direção da constelação Sagitário. (Na verdade, o centro da Via Láctea está 10 vezes mais distante do Sol do que as estrelas que formam a constelação.)

Populações Estelares

Uma característica da nossa galáxia é o fato de que certas regiões possuem um número muito maior de estrelas que outras. Essas regiões são chamadas *aglomerados estelares*. Existem dois tipos de aglomerados estelares. Os *aglomerados galácticos*, também conhecidos como *aglomerados abertos*, podem conter de 20 a centenas de estrelas. De acordo com os espectros óticos observados, todos os aglomerados galácticos parecem ter composições muito semelhantes. Cerca de 70% da massa é hidrogênio, 28% é hélio e os outros 2% são elementos mais pesados que o hélio. As estrelas com esta composição característica, como o Sol, são chamadas *estrelas da população I*. Os *aglomerados globulares* são formados por 10^3 a 10^6 estrelas e têm forma aproximadamente esférica. Nesses aglomerados, a concentração de elementos mais pesados que o hélio é da ordem de 0,1% a 0,01%, muito menor, portanto, que nas estrelas da população I. As estrelas dos aglomerados globulares são chamadas *estrelas da população II*. A fotografia abaixo mostra um desses aglomerados, fotografado pelo telescópio espacial Hubble.

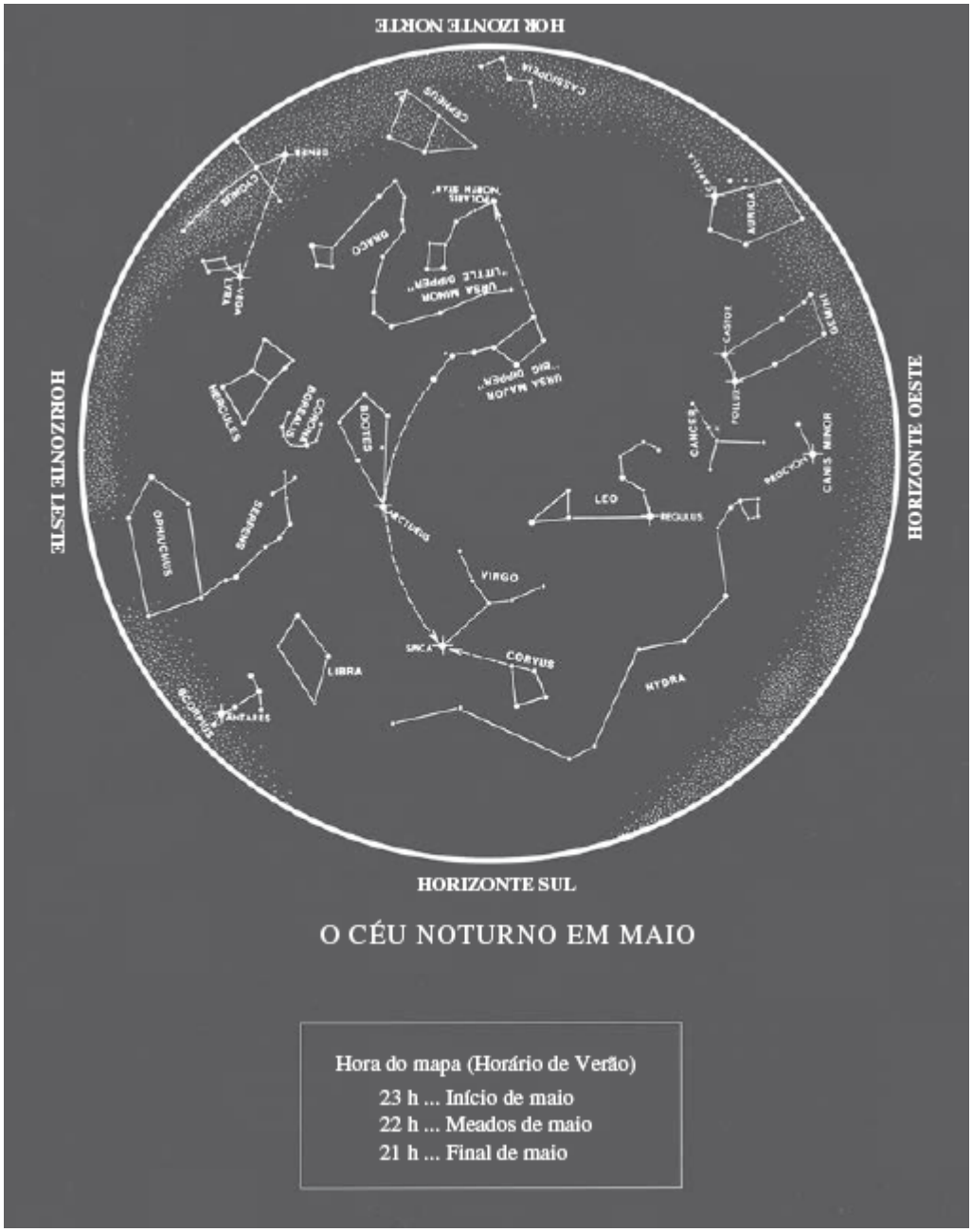
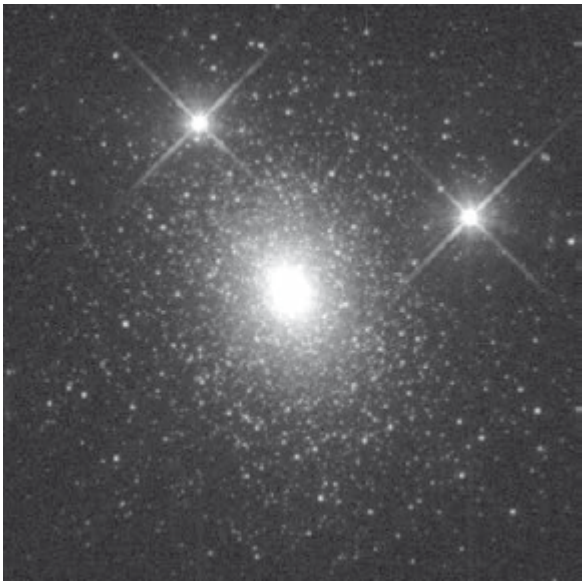


FIGURA 13-10 Mapa celeste em uma noite de primavera na latitude 40º norte, mostrando algumas constelações visíveis a olho nu. Durante a noite, todo o mapa gira de aproximadamente 120º em torno da Estrela Polar. Para usá-lo, o leitor deve se voltar para o sul, manter o mapa à sua frente, com o sul para baixo, e comparar a parte inferior do mapa com as estrelas que aparecem no céu. Em seguida, deve se voltar para oeste, manter o mapa à sua frente, com o oeste para baixo, e comparar a parte inferior do mapa com as estrelas que aparecem no céu. O processo pode ser repetido para os outros dois pontos cardeais. [R.A. Freedman e W.J. Kaufmann III, *Universe*, 8e (New York: W.H. Freeman and Co., 2008), p. S-6.]*

Os cientistas acreditam que as estrelas da população I são estrelas da geração atual, que se formaram depois que o gás e a poeira que existem no espaço sideral foram enriquecidos pelos produtos de antigas reações de fusão nos primórdios do universo. A menor concentração de elementos pesados nas estrelas da população II é uma indicação de que elas pertencem a uma geração anterior, sendo, portanto, mais antigas que as da população I. Esta hipótese é apoiada pelo fato de que são encontradas em regiões do espaço onde quase não há poeira e gás.



O Telescópio Espacial Hubble obteve esta imagem de um aglomerado globular conhecido como G1 (o grande círculo claro que aparece no centro da foto), que contém mais de 300.000 estrelas antigas. G1, também conhecido como Mayall II, um satélite da galáxia de Andrômeda (M31), a galáxia espiral de grande porte mais próxima da Via Láctea. [*Michael Rich, Kenneth Mighell e James D. Neill* (*Columbia University*)*, Wendy Freedman (Carnegie Observatories) e NASA*.]

Classificação das Estrelas As estrelas são divididas em classes, com base, principalmente, nas linhas espectrais que emitem e absorvem. O fato de que existem diferenças nos espectros das estrelas foi descoberto há quase 200 anos por Joseph Fraunhofer, que também mediu muitas linhas de absorção do espectro solar. Mais tarde, avanços nos campos da espectroscopia, da instrumentação e da teoria atômica permitiram que os astrofísicos Edward Pickering e Annie Jump Cannon[6] reformulassem o antigo sistema de classificação e adotassem um novo sistema baseado na temperatura. As estrelas são agrupadas em faixas de temperatura (ou tipos espectrais) que vão desde as estrelas quentes e azuis, conhecidas como estrelas O, até estrelas vermelhas e frias, as chamadas estrelas M. As sete categorias são as seguintes: O B A F G K M. Gerações de estudantes memorizaram a classificação usando a frase "Oh Be A Fine Girl/Guy, Kiss Me". A Tabela 13-2 mostra algumas características importantes de cada categoria. Cannon propôs que cada grupo fosse dividido em dez subgrupos (de 0 a 9) para uma classificação mais detalhada. Assim, por exemplo, as estrelas B0 (do chamado *tipo primitivo*) são mais quentes que as estrelas B9 (do chamado *tipo tardio*). A divisão em grupos e subgrupos se baseia em detalhes dos espectros e no grau de excitação e ionização dos elementos presentes nas estrelas. O aperfeiçoamento das técnicas de observação e análise levou a novas classificações, entre as quais algumas para estrelas azuis, mais quentes, e outras, as classes L, T e Y, para estrelas vermelhas e marrons, mais frias.

Magnitude das Estrelas O astrônomo grego Hiparco[7] foi o primeiro a classificar as estrelas de acordo com o brilho que apresentavam. A esse brilho, hoje conhecido como *magnitude aparente* e representado pela letra *m*, Hiparco atribuiu números que iam de $m = 1$, para as estrelas mais brilhantes, até $m = 6$ para as estrelas menos brilhantes que podiam ser observadas a olho nu. (O telescópio ainda não tinha sido inventado.) Com o passar do tempo e com os avanços da tecnologia, os astrônomos estenderam e refinaram a escala de magnitude aparente. De acordo com a definição moderna de magnitude aparente, uma diferença de 5 no valor de *m* corresponde a um fator de 100 no brilho; isso quer dizer que a uma diferença de 1 no valor de *m* de duas estrelas corresponde uma *razão* entre os brilhos das estrelas de $100^{1/5} = 2{,}51$. Assim, uma estrela A com $m = 2$ é 2,51 vezes mais brilhante que uma estrela B com $m = 3$, $100^{2/5} = 6{,}31$ vezes mais brilhante que uma estrela C com $m = 4$, e assim por diante. (Quanto menor o valor de *m*, mais brilhante é a estrela.) A tecnologia moderna permitiu que os cientistas medissem a magnitude aparente com uma precisão de ±0,01 e aumentou consideravelmente a faixa de valores de *m*. A magnitude aparente do Sol, a estrela mais brilhante do céu, é $m = -26{,}81$; a magnitude da estrela menos brilhante que pode ser observada é $m = 29$.

Tabela 13-2 Classificação das estrelas

Tipo espectral	Características importantes
O	Estrelas branco-azuladas; muito quentes; linhas de absorção do hélio
B	Estrelas branco-azuladas; moderadamente quentes; linhas de absorção do hélio e do hidrogênio

A	Estrelas brancas; linhas de absorção do hidrogênio e do cálcio
F	Estrelas branco-amareladas; linhas de absorção do cálcio e de alguns metais
G	Estrelas amarelas; espectro do tipo solar, com linhas de absorção do cálcio e do ferro (O Sol é uma estrela G2)
K	Estrelas alaranjadas; moderadamente frias; linhas de absorção de metais
M	Estrelas vermelhas; muito frias; linhas de absorção de metais

Naturalmente, a magnitude aparente não é tudo. Duas estrelas de mesma luminosidade situadas a distâncias diferentes da Terra possuem valores diferentes de *m*, já que a mais distante apresenta um brilho menor e, portanto, um valor maior de *m*. Assim, os astrônomos definiram outra grandeza, a *magnitude absoluta M*, em termos do *fluxo radiante F*, uma grandeza que leva em conta a luminosidade *L* da estrela, definida na Seção 13-1, e a distância a que se encontra da Terra. O fluxo radiante é definido através da equação

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} \qquad \textbf{13-8}$$

A unidade de fluxo radiante no SI é o J/s · m^2. Usando a Equação 13-8, a magnitude absoluta *M* de uma estrela é definida como igual à magnitude aparente que uma estrela teria se *estivesse* a uma distância de 10 pc (parsecs; veja a Seção 13-3) da Terra. Usando a expressão do fluxo radiante e as definições de magnitude aparente e absoluta, obtemos a seguinte relação entre *F*, *m*, *M* e *R*:

$$100^{(m-M)/5} = \frac{F_{10\,\mathrm{pc}}}{F} = \left(\frac{R}{10\,\mathrm{pc}}\right)^2 \qquad \textbf{11-9}$$

em que *R* é a distância em parsecs entre a estrela e a Terra.

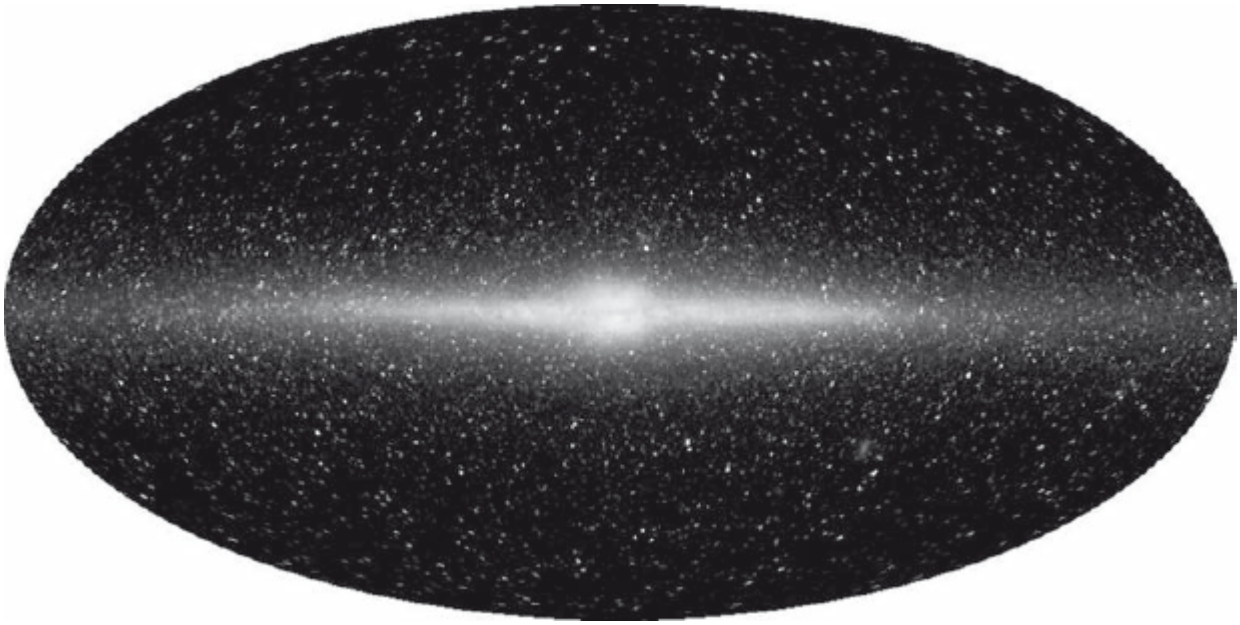


FIGURA 13-11 Fotografia da Via Láctea no infravermelho, obtida pelo satélite COBE, mostrando o disco e a protuberância central. [*The COBE Project*, *DIRBE*/*NASA*.]

A Estrutura da Via Láctea

A Figura 13-11 é uma fotografia da Via Láctea do ponto de vista do sistema solar. A imagem não permite tirar muitas conclusões a respeito do tamanho e forma da Galáxia,[8] já que se trata de uma visão interna. Entretanto, contando pacientemente

o número de estrelas por unidade de volume em diferentes direções, os astrônomos descobriram que a Via Láctea tem a forma de um disco gigantesco. Até o início do século XX, os astrônomos pensavam que o Sol estava localizado no centro do disco. O verdadeiro tamanho e forma da Galáxia (veja a Figura 13-12) foram determinados por H. Shapley[9] a partir de uma brilhante análise dos aglomerados globulares que existem nas vizinhanças da Via Láctea. Shapley descobriu que cerca de 200 aglomerados globulares estão distribuídos no espaço de forma aproximadamente esférica e propôs que o centro dessa distribuição coincide com o centro da Galáxia. Com base nesta hipótese, ele concluiu que o Sol se encontra a uma distância considerável do centro. Atualmente, os astrônomos estimam que o Sol está a 28.000 anos-luz do centro e que essa distância corresponde a aproximadamente um terço do raio da Galáxia. Pode-se dizer que Shapley destronou o Sol do centro da Galáxia, da mesma forma como Copérnico destronou a Terra do centro do Universo.

Continuando o trabalho de Shapley, os astrônomos passaram a estudar outras galáxias próximas com o auxílio de novos telescópios de alta resolução. Uma das primeiras descobertas foi a de que a posição que as estrelas ocupam nesses sistemas, muitos dos quais têm forma espiral, como o da Figura 13-25*b*, depende em parte da idade e composição das estrelas; os aglomerados abertos, por exemplo, são encontrados principalmente nos braços das espirais. Partindo da hipótese razoável de que o mesmo tipo de situação acontece na Via Láctea e usando os resultados de medidas meticulosas da distância de cerca de 200 aglomerados galácticos, os astrônomos foram capazes de localizar três braços de espiral e uma barra associada à protuberância central. Se pudéssemos observar a Via Láctea à distância, de um ponto sobre uma reta perpendicular à Galáxia passando pelo centro, ela teria o aspecto da Figura 13-13*a*. Naturalmente, como a Terra está no plano da Via Láctea, só podemos vê-la de perfil, como na Figura 13-11.

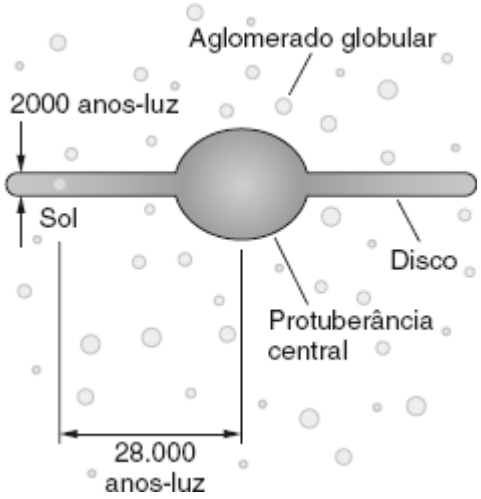


FIGURA 13-12 Forma geométrica da Via Láctea, de acordo com as observações da Harlow Shapley. A Via Láctea é mais visível no verão que no inverno no hemisfério norte porque, nas noites de verão, o observador está voltado para o centro da Galáxia, enquanto, nas noites de inverno, está voltado para a periferia da Galáxia.*



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
A Esfera Celeste

Embora o modelo geocêntrico de Aristóteles e Ptolomeu tenha sido suplantado pelo modelo heliocêntrico de Copérnico, ainda conservamos uma convenção do antigo sistema. A não ser no caso do movimento dos planetas e de algumas poucas sondas espaciais interplanetárias, até hoje as especificações da posição das estrelas se baseiam em um sistema de coordenadas com o centro na Terra e não no Sol. As distâncias entre a Terra e as estrelas (com exceção do Sol, naturalmente) são tão grandes que as estrelas parecem ocupar posições fixas na superfície de uma gigantesca esfera, a *esfera celeste*, cujo centro é a Terra.

A esfera celeste gira continuamente de leste para oeste e seu eixo de rotação coincide com o eixo de rotação da Terra. As posições das estrelas na esfera celeste, como as posições das cidades na superfície da Terra, são especificadas através de duas coordenadas. No caso da Terra, as coordenadas são a *latitude* e a *longitude*. A latitude de um ponto é definida como o ângulo entre um raio que passa pelo ponto e o plano do equador; a longitude é definida como o arco do equador entre o meridiano (círculo máximo que passa pelos polos) que passa pelo ponto e o meridiano que passa pela cidade de Greenwich, na Inglaterra (veja a Figura 13-14*a*).

Como a circunferência tem 360° e a Terra gira uma vez em torno do próprio eixo a cada 24 horas (1440 minutos), a longitude muitas vezes é expressa em unidades de tempo (horas ou minutos) e não em unidades angulares (graus ou radianos). O fator de conversão f de graus para minutos é dado por

$$f = \frac{1440 \text{ minutos}}{360 \text{ graus}} = 4{,}0 \frac{\text{minutos}}{\text{graus}}$$

Assim, por exemplo, as coordenadas da cidade de Orlando, na Flórida, são 28,4° N, 81,3° W. Em unidades de tempo, uma longitude de 81,3° W equivale a

$$81{,}3° \times 4 \text{ min/°} = 325{,}2 \text{ min} = 5{,}42 \text{ h} = 5 \text{ h } 25 \text{ min}$$

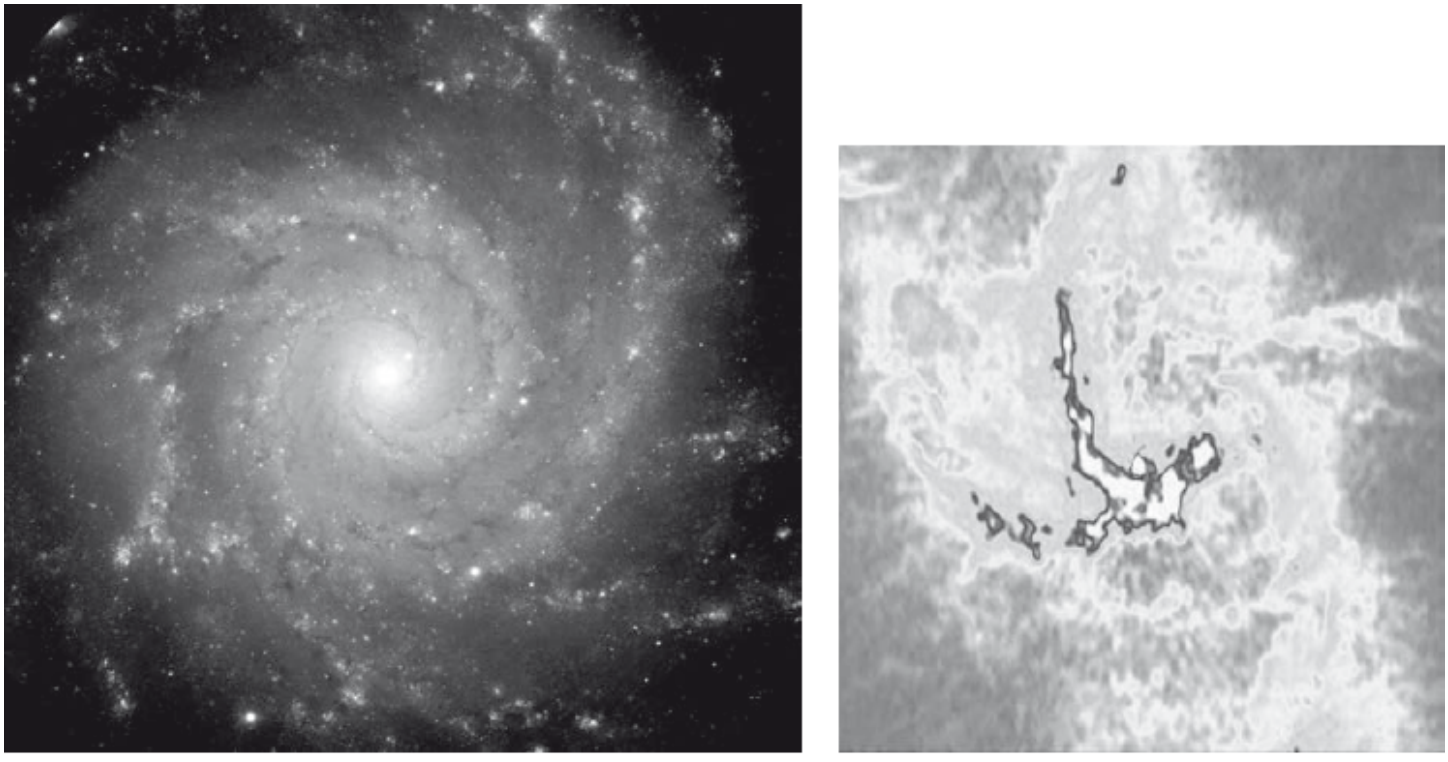
Assim, Orlando está 5 h 25 min antes (a oeste) de Greenwich.

A posição das estrelas na esfera celeste é indicada exatamente da mesma forma. A coordenada correspondente à longitude é chamada de *ascensão reta*[10] e representada pela letra grega α. A ascensão reta é medida em horas, de 0 a 24 h. A coordenada correspondente à latitude é chamada de *declinação* e representada pela letra grega θ. A declinação é medida em graus ao norte (+) ou ao sul (−) do equador celeste (veja a Figura 13-14*b*).

O fato de ser usado o mesmo sistema de coordenadas da Terra para a esfera celeste merece uma explicação. Como a Terra gira em torno do próprio eixo de oeste para leste, as estrelas fixas da esfera celeste se movem no céu de leste para oeste. Além disso, a Terra gira em torno do Sol, completando uma revolução a cada 365,26 dias. Isso significa que, a cada rotação completa em torno do próprio eixo, a Terra descreve um arco de pouco menos de 1° na órbita em torno do Sol. Para que a ascensão reta do Sol volte a ser exatamente a mesma que o dia anterior, a Terra precisa girar aproximadamente 361°; no caso de uma estrela fixa, porém, a rotação necessária é praticamente igual a 360°, já que a distância entre a Terra e as estrelas fixas é tão grande que a distância percorrida pela Terra em um dia pode ser desprezada. Como vimos, 1° de rotação da Terra corresponde a 4 minutos; portanto, uma estrela fixa nasce a cada noite 4 minutos mais cedo que na noite anterior por causa do movimento da Terra em torno do Sol.

Além do avanço progressivo da hora em que as estrelas nascem, existe uma mudança gradual de orientação da esfera celeste com as estações do ano. Essa mudança se deve ao fato de que o eixo da Terra tem uma inclinação de aproximadamente 23,5° em relação ao plano da órbita em torno do Sol. Isso significa que ao longo de um ano, do ponto de vista de um observador terrestre, o Sol descreve uma curva na esfera celeste, conhecida como *eclíptica*, que vai de 23,5° ao norte do equador celeste até 23,5° ao sul do equador celeste. A eclíptica intercepta o equador celeste (lugar geométrico dos pontos de declinação zero) duas vezes por ano, uma por volta de 20 de março, no *equinócio de primavera* ou *equinócio vernal*, e outra por volta de 23 de setembro, no *equinócio de outono*. O Sol atinge o ponto de máxima declinação norte, de 23,5° N, por volta de 21 de junho, no *solstício de verão*, e o ponto de máxima declinação sul, cerca de 23,5° S, por volta de 21 de dezembro, no *solstício de inverno*[11] (veja a Figura 13-15).*

Por convenção, o ponto no qual a eclíptica intercepta a esfera celeste na primavera do hemisfério norte, conhecido como ponto de Áries ou ponto vernal, é tomado como origem das coordenadas de ascensão reta. Na esfera celeste, este ponto é assinalado pela letra Y (veja a Figura 13-14*b*). Existem vários outros pequenos movimentos da Terra que afetam a posição da eclíptica na esfera celeste a longo prazo, como, por exemplo, a precessão dos equinócios, mas a discussão desses movimentos está fora do escopo deste livro.



(*a*) (*b*)

FIGURA 13-13 (*a*) Uma combinação de observações realizadas com telescópios óticos e radiotelescópios revela a estrutura espiral da Via Láctea. Para um observador situado a 3 milhões de anos-luz de distância, a Via Láctea teria este aspecto. O Sol está a 28.000 anos-luz de distância do centro, em um dos braços da espiral. (*b*) O centro da Galáxia é escondido por nuvens de poeira e gás que impedem que a luz visível chegue até nós; entretanto, foram observadas várias fontes de ondas de rádio. A mais intensa é Sagitário A*, uma fonte compacta que parece dominar os movimentos em grande escala da parte central da Galáxia. Esta imagem de rádio (obtida para um

comprimento de onda de 6 cm) mostra uma região de 8 anos-luz de diâmetro no centro da Vila Láctea. A mancha escura no centro é Sagitário A*, que provavelmente é um gigantesco buraco negro (veja a Seção 13-5). A imagem foi obtida com o Very Large Array (VLA), um interferômetro formado por 27 antenas sincronizadas, com um diâmetro efetivo de 40 km, situado no estado do Novo México, Estados Unidos. O VLA tem uma resolução cinco vezes maior que os melhores telescópios óticos terrestres. [*Fontes*: (*a*) *Gemini Observatory-GMOS Team*; (*b*) *HST Astronomy Imaging Workbench*/*Farhad Yusef-Zadeh*/*Northwestern University*.]

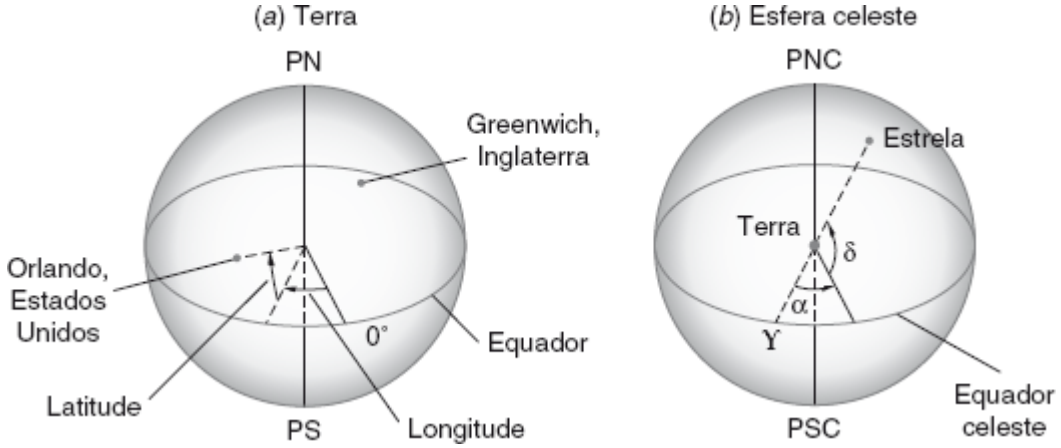


FIGURA 13-14 (*a*) Diagrama mostrando as definições de longitude e latitude na Terra. O ponto 0º assinala a origem das coordenadas de longitude, o meridiano que passa pela cidade de Greenwich, na Inglaterra. (*b*) Diagrama mostrando as definições de ascensão reta α e declinação δ na esfera celeste. O ponto ϒ assinala a origem das coordenadas de ascensão reta, o meridiano que passa pelo ponto de Áries ou ponto vernal.

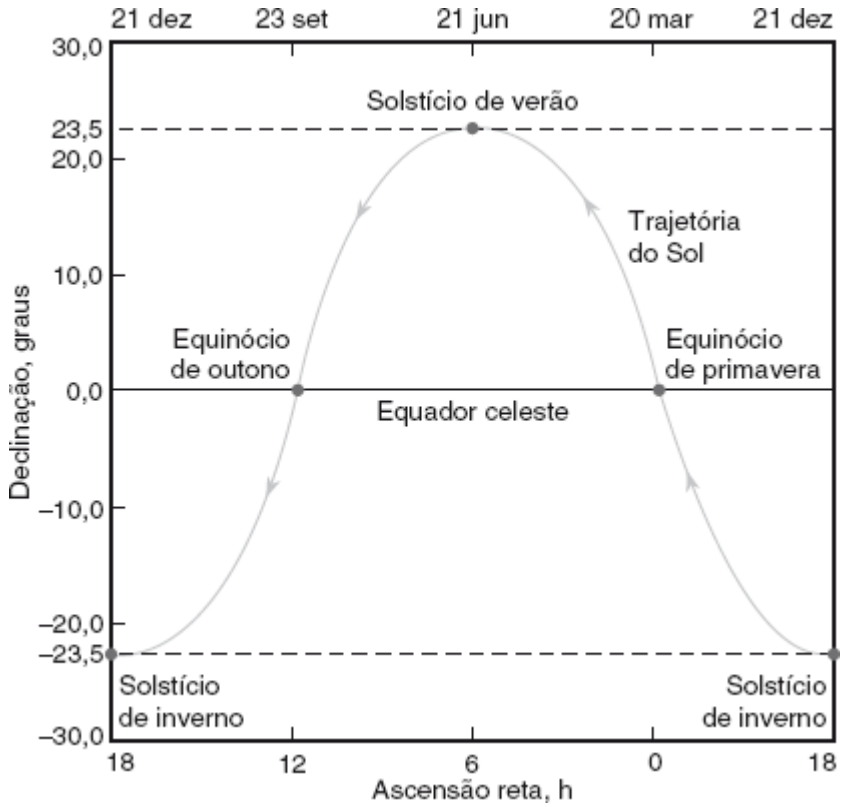


FIGURA 13-15 Trajetória do Sol na esfera celeste.

A Massa (e a Massa Faltante) da Via Láctea

J. Oort e B. Lindblad demonstraram em 1926, usando o efeito Doppler, que a Galáxia possui um movimento de rotação. O Sol está se movendo aparentemente em uma órbita circular com uma velocidade de $2{,}5 \times 10^5$ m/s em direção à constelação do Cisne. Supondo constante a velocidade do Sol, podemos calcular a duração do ano galáctico (tempo que a Galáxia leva para completar uma revolução) e a massa da Galáxia. Como o Sol está a 28.000 anos-luz do centro da Galáxia, o ano galáctico corresponde a $2{,}1 \times 10^8$ anos terrestres (veja o Problema 13-4).

EXEMPLO 13-3 **A Massa da Galáxia** Calcule o valor aproximado da massa da Galáxia, levando em conta apenas a massa situada no interior da órbita do Sol.

SOLUÇÃO

1. Como se trata de uma solução aproximada, vamos usar a lei da gravitação de Newton, segundo a qual a força gravitacional exercida pela massa da Galáxia M_G sobre a massa solar $M_\odot$ é dada por

$$F = G\frac{M_\odot M_G}{R^2}$$

2. Esta força gravitacional é a força centrípeta que mantém o Sol em uma órbita galáctica de raio R. Assim,

$$\frac{GM_\odot M_G}{R^2} = \frac{M_\odot v^2}{R}$$

3. Explicitando M_G, temos:

$$M_G = \frac{Rv^2}{G}$$

4. Substituindo na equação acima os valores do raio da órbita do Sol, R, da velocidade do Sol, v, e da constante gravitacional, G, obtemos:

$$M_G = \frac{(28.000 \text{ anos-luz})\,(9{,}46 \times 10^{15} \text{ m/anos-luz}) \times \times\,(2{,}5 \times 10^5 \text{ m/s})^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2} = 2{,}48 \times 10^{41} \text{ kg}$$

***Observação**: Se a massa do Sol é representativa da massa das estrelas da Via Láctea, o número aproximado de estrelas da Galáxia é $(2{,}48 \times 10^{41}\text{ kg})/(1{,}99 \times 10^{30}\text{ kg}) = 1{,}25 \times 10^{11}$ estrelas.*

Acontece que, somando as massas de todas as estrelas visíveis da Galáxia, incluindo as que estão além da órbita do Sol, e as massas de todas as nuvens de gás e poeira, obtemos apenas 10% da massa necessária para evitar que as estrelas da Galáxia se dispersem. Esta discrepância é conhecida como *problema da massa faltante* ou *problema da matéria escura*. Este problema, que está presente em todas as galáxias e no Universo como um todo, foi reconhecido pela primeira vez em 1933, quando, ao estudar as galáxias do Aglomerado Coma (veja a Seção 13-6), F. Zwicky notou que a massa do aglomerado, estimada a partir do brilho e do número das galáxias, era 400 vezes menor que a necessária para explicar os movimentos observados. O astrônomo concluiu que havia algum tipo de matéria no aglomerado que não emitia luz, ou seja, matéria escura. Várias soluções para o problema têm sido propostas, como buracos negros, neutrinos com massa e partículas exóticas conhecidas como WIMPs,* entre as quais (entre as muitas sugeridas) estão os *áxions* e os *neutralinos*. Embora tenha sido provado que os neutrinos possuem uma massa de repouso diferente de zero, é pouco provável que contribuam significativamente para a solução do problema da matéria escura porque, como se movem com velocidade próxima da velocidade da luz, não tendem a se aglomerar em nuvens como os átomos de hidrogênio do espaço interestelar.

Os áxions foram postulados há mais de 30 anos como parte de uma elegante solução matemática para um problema da cromodinâmica quântica, o fato de que, de acordo com a teoria, o nêutron deveria possuir um dipolo elétrico (o que não é verdade). O áxion, que surgiu em consequência de uma quebra de simetria (veja a Seção 12-4) na teoria que explicava a ausência de um momento dipolar elétrico associado ao nêutron, seria uma partícula eletricamente neutra, que interagiria apenas fracamente com a matéria comum. Sua contribuição para a solução do problema da matéria escura não parece ser significativa, já que experimentos recentes estabelecem um limite superior de apenas 10^{-6} eV/c^2 para a massa da partícula.

O neutralino é considerado por muitos astrofísicos e cosmólogos o melhor candidato para resolver o problema da matéria escura. Os neutralinos (que podem ser quatro partículas diferentes) são os autoestados de massa que resultam da mistura quântica dos parceiros supersimétricos dos bósons W, Z e de Higgs, conhecidos como wino, zino e higgsino (veja a Tabela 12-12). Um dos neutralinos pode ser a partícula supersimétrica de menor massa, que, por isso mesmo, seria estável. De acordo com alguns modelos cosmológicos, os neutralinos foram produzidos em grande quantidade logo após o big bang e, por serem partículas estáveis, continuam abundantes até hoje, sendo responsáveis pelos efeitos atribuídos à matéria escura. A massa do neutralino mais leve estaria entre 10 e 10^4 GeV/c^2. (A massa do próton é 0,938 GeV/c^2.) O comportamento do neutralino seria semelhante ao do neutrino, ou seja, a partícula não poderia ser observada nos detectores dos aceleradores de partículas atuais.

Um dos principais objetivos do LHC é procurar provas da existência de partículas supersimétricas, como as discrepâncias de energia e momento entre os estados observáveis iniciais e finais que revelariam a presença dos neutralinos.

13-3 A Evolução das Estrelas

Embora não exista uma teoria universalmente aceita, a maioria dos cientistas acredita que as estrelas se formam a partir de grandes nuvens de poeira e gás. Flutuações estatísticas fazem com que a densidade aumente em uma certa região da nuvem. A densidade nessa região aumenta ainda mais por causa da gravidade, que atrai mais matéria; finalmente (se a nuvem é suficientemente grande) a contração gravitacional faz com que a temperatura atinja o valor necessário para que o processo de fusão se inicie, gerando uma estrela.

Luminosidade das Estrelas

Nesta seção, vamos discutir a evolução das estrelas. Duas características das estrelas são importantes para este tipo de estudo: a temperatura efetiva T_e e a luminosidade L. A temperatura efetiva de uma estrela é um parâmetro difícil de medir. Em geral, é estimada através de uma comparação entre a distribuição espectral da radiação emitida pela estrela e a distribuição espectral de um corpo negro ou através da medida de linhas de absorção do hidrogênio e do hélio na atmosfera da estrela.

Luminosidade é a potência total irradiada pela estrela, que depende do fluxo radiante F da estrela observado na Terra (que, no caso do Sol, é chamado de constante solar) e da distância r entre a estrela e a Terra (veja a Equação 13-2):

$$L = 4\pi r^2 F \qquad \textbf{13-10}$$

Em geral, é muito difícil determinar a distância de uma estrela. No caso de estrelas relativamente próximas, a distância pode ser calculada a partir do movimento aparente da estrela que resulta do movimento da Terra em torno do Sol. Durante uma revolução completa da Terra, uma estrela parece descrever uma elipse cujo raio angular na direção do eixo maior é θ (veja a Figura 13-16). O ângulo θ, conhecido como *ângulo de paralaxe*, é dado por

$$\theta = \frac{1\ \text{AU}}{r} \qquad \textbf{13-11}$$

As distâncias astronômicas são medidas em parsecs ou em anosluz. Um parsec (pc) é a distância para a qual 1 UA subtende um ângulo de 1 segundo de arco (1″), que equivale a 1/3600 de grau. Fazendo θ = 1″ na Equação 13-11, obtemos:

$$1\ \text{parsec} = \frac{1\ \text{AU}}{1''} \times \frac{3600''}{1^\circ} \times \frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = 2{,}60 \times 10^5 \text{AU} \qquad \textbf{13-12}$$

Usando as relações 1 UA = 1,496 × 10^{11} m e 1 ano-luz = 9,461 × 10^{15} m, podemos calcular o valor de 1 parsec em metros e em anos-luz:

$$1\ \text{pc} = 3{,}086 \times 10^{16}\ \text{m} = 3{,}26\ \text{anos-luz} \qquad \textbf{13-13}$$

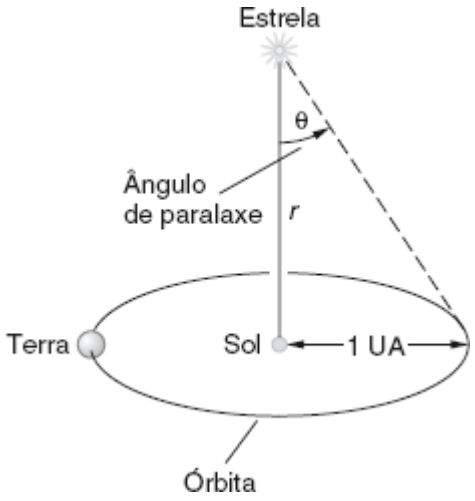


FIGURA 13-16 Método da paralaxe para determinar a distância de estrelas próximas da Terra. Um parsec é a distância r para a qual o ângulo de paralaxe θ subtendido por 1 UA é 1 segundo de segundo.

EXEMPLO 13-4 **Distância da Próxima do Centauro** Próxima do Centauro é a estrela mais próxima do Sol. Medindo a variação aparente da posição da Próxima do Centauro, em duas observações realizadas com seis meses de diferença, verifica-se que o ângulo de paralaxe é 0,77233″. A que distância da Terra está Próxima do Centauro? (Coordenadas da Próxima do Centauro: α = 14 h 29 min 43 s; δ = 16° 41′ 58″.)

SOLUÇÃO

Como 1 UA /1″ = 1 parsec, temos, para θ = 0,77233″,

$$r = \frac{1\text{ AU}}{\theta} = \frac{1\text{ AU}}{0{,}77233''} = \frac{1\text{ AU}}{1''}\frac{1''}{0{,}77233''}$$
$$= 1\text{ pc} \times \frac{1''}{0{,}77233''} = 1{,}2948\text{ pc}$$
$$= 4{,}22\text{ anos-luz}$$

O menor ângulo de paralaxe que pode ser medido é da ordem de 0,001″. Isso significa que o método do Exemplo 13-4 só pode ser usado para medir distâncias até cerca de 1 kpc, ou seja, só pode ser aplicado às dez mil e poucas estrelas que se encontram relativamente próximas do Sol. Como a distância até o centro da Galáxia é da ordem de 8 kpc, todas essas estrelas pertencem à Via Láctea. Para todas as outras estrelas, o ângulo de paralaxe é tão pequeno que não pode ser medido e a distância só pode ser determinada por outros métodos. Um desses métodos envolve a análise das variações com o tempo do brilho de um tipo especial de estrelas (as variáveis cefeidas) que são encontradas principalmente em aglomerados estelares. Distâncias de até 29 Mpc foram medidas usando esse método. As supernovas (Seção 13-4) oferecem vários meios de medir a distância da galáxia em que se encontram. O mais importante faz uso da relação entre a luminosidade absoluta e a curva da luminosidade em função do tempo, que é aproximadamente constante para um tipo particular de supernova conhecido como Tipo Ia. A observação de supernovas Tipo Ia situadas em galáxias muito distantes revelou, recentemente, que a velocidade de expansão do universo está aumentando.

O Diagrama de Hertzprung-Russell

Os vários estados que as estrelas assumem durante sua evolução podem ser representados em um gráfico da luminosidade L em função da temperatura efetiva T_e conhecido como *diagrama de Hertzprung-Russell* ou *diagrama H-R*. A Figura 13-17*a* mostra um diagrama H-R no qual estão representadas estrelas típicas. A grande maioria das estrelas em um diagrama H-R ocupa a faixa diagonal central, conhecida como *sequência principal*. As estrelas que pertencem à sequência principal são consideradas "normais" no sentido de que são misturas homogêneas, a não ser no núcleo, possuem praticamente a mesma composição química e estão transformando hidrogênio em hélio através das reações de fusão discutidas anteriormente. As estrelas deixam a sequência principal quase sempre por expansão; por esse motivo, as estrelas da sequência principal também são chamadas de *anãs da sequência principal*. Os cientistas acreditam que 80 e 90% das estrelas estão na sequência principal.

A posição de uma estrela dentro da sequência principal do diagrama H-R é função da luminosidade e da temperatura efetiva, que dependem principalmente da massa da estrela. A massa das estrelas varia de 0,08 $M_\odot$ a mais de 100 $M_\odot$, onde $M_\odot$ é a massa do Sol. Em nuvens de gás com menos de 0,08 $M_\odot$, o aumento de temperatura produzido pela contração gravitacional não é suficiente para iniciar o processo de fusão. Em nuvens de gás com muito mais de 100 $M_\odot$, a temperatura atinge valores tão elevados que a pressão de radiação se torna maior que a pressão da gravidade. Um sistema desse tipo, mesmo que chegue a se formar, é extremamente instável.

No caso das estrelas da sequência principal, o estudo da massa dos sistemas binários revelou que a luminosidade de uma estrela é aproximadamente proporcional à massa elevada a 3,5:

$$L \propto M^{3,5} \qquad \textbf{13-14}$$

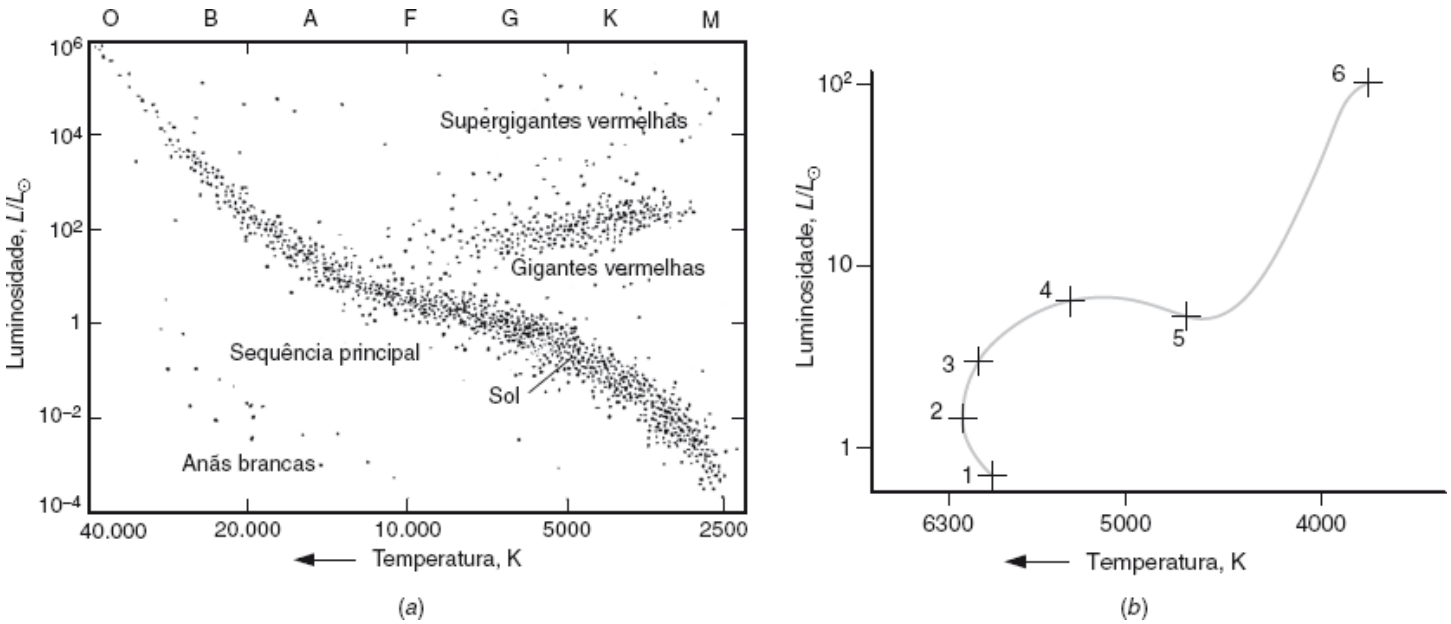


FIGURA 13-17 (*a*) Diagrama de Hertzprung-Russell (H-R) para estrelas nas vizinhanças do Sol. A grande maioria das estrelas (80 a 90%) está na sequência principal. As estrelas na extremidade inferior direita são frias e de baixa luminosidade; as da extremidade superior esquerda são quentes e de alta luminosidade. (*b*) A evolução do Sol desde que entrou na sequência principal, no ponto 1. O Sol está atualmente entre os pontos 1 e 2 e deverá deixar a sequência principal no ponto 4. O intervalo de tempo entre pontos vizinhos é da ordem de 10^9 anos.

O tempo de vida de uma estrela, t_V, é proporcional à energia total disponível, que, por sua vez, é proporcional à massa da estrela ($E = Mc^2$) e inversamente proporcional à taxa de emissão de energia, que é a luminosidade:

$$t_V = \frac{E}{L} \propto \frac{Mc^2}{M^{3,5}} \propto M^{-2,5} \qquad \textbf{13-15}$$

De acordo com a Equação 13-15, as estrelas de maior massa consomem hidrogênio mais depressa que as estrelas de menor massa. Uma estrela com uma massa duas vezes maior que a do Sol, por exemplo, tem um tempo de vida 8 vezes menor. (A Equação 13-15 não se aplica às estrelas muito grandes ou muito pequenas porque a relação entre luminosidade e massa expressa pela Equação 13-14 é apenas um resultado médio. O expoente da Equação 13-15 é maior em valor absoluto, para estrelas muito pequenas, e menor para estrelas muito grandes.)

Aplicando a lei de conservação da energia às estrelas da sequência principal (Tabela 13-3), é possível mostrar (Problema 13-6) que o raio é aproximadamente proporcional à massa:

$$R \propto M \qquad \textbf{13-16}$$

Combinando a Equação 13-16 com a Equação 13-4, que relaciona a temperatura efetiva à luminosidade por unidade de área, podemos obter uma relação entre a temperatura efetiva e a massa da estrela:

$$T_e = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} \propto \left(\frac{M^{3,5}}{M^2}\right)^{1/4} \propto M^{3/8} \qquad \textbf{13-17}$$

Assim, as estrelas de grande massa possuem temperatura efetiva maior e maior luminosidade que as estrelas de pequena massa. Foi com base nas Equações 13-16 e 13-17 que as estrelas foram plotadas no diagrama H-R da Figura 13-17*a*. A Tabela 13-3 mostra algumas características das estrelas de diferentes tipos espectrais. Os valores de luminosidade, raio e massa são expressos em relação aos valores desses parâmetros para o Sol, que são os seguintes: $L_\odot = 3{,}83 \times 10^{26}$ J/s; $R_\odot = 6{,}96 \times 10^8$ m; $M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.

À medida que uma estrela envelhece, ela vai consumindo seu combustível principal, o hidrogênio. O que acontece quando o suprimento de hidrogênio da região central da estrela se esgota depende da massa inicial da estrela. A evolução das estrelas de pequena massa e de massa elevada é de forma um pouco diferente, mas, nos dois casos, reações nucleares sucessivas são alimentadas pelo produto do ciclo anterior. Depois que o hidrogênio se transforma em hélio, a estrela começa a fundir núcleos de hélio em um novo ciclo que tem como produto final átomos de carbono. Para que isso aconteça, é preciso que a região central da estrela atinja uma temperatura de 10^8 K. A cadeia de eventos envolvidos neste processo é complexa e não será discutida aqui. No caso de estrelas de pequena massa, uma das consequências da transformação do hidrogênio em hélio é que o raio (e, portanto, a área da superfície) da estrela aumenta enquanto a luminosidade permanece praticamente constante. Assim, a

intensidade (luminosidade por unidade de área) e a temperatura efetiva diminuem e a radiação emitida se desloca para comprimentos de onda maiores. A estrela se expande e se transforma em uma *subgigante vermelha*. Com a diminuição de T_e, a fotosfera se torna mais transparente, o que aumenta a luminosidade e estabiliza a temperatura. A estrela se torna então uma *gigante vermelha*. A evolução de uma estrela de pequena massa como o Sol é mostrada no diagrama H-R da Figura 13-17*b*.

A fusão do hélio aumenta novamente a temperatura efetiva da estrela, que entra no *ramo horizontal*. Quando o hélio da região central se esgota, a estrela começa a fundir átomos de carbono, e a luminosidade e a temperatura passam a aumentar simultaneamente, transformando a estrela em uma *supergigante vermelha*. Betelgeuse, a segunda estrela mais brilhante da constelação de Órion, é uma supergigante vermelha com massa específica de $1{,}5 \times 10^{-5}$ kg/m^3, cem mil vezes menor que a do ar que respiramos! Ainda não se sabe ao certo o que acontece depois. Através de uma combinação de eventos que inclui a perda de uma parcela considerável de massa, incluindo talvez a ejeção de uma nuvem de gás (conhecida como *nebulosa planetária*), como as que aparecem na Figura 13-18, a estrela se torna uma anã branca, esfriando lentamente até entrar em equilíbrio térmico com o universo. As anãs brancas serão discutidas na Seção 13-5.

De acordo com a Equação 13-15, as estrelas de grande massa (maior que $6M_\odot$) evoluem muito mais depressa do que as estrelas de pequena massa. Além disso, a massa inicial é suficiente para que o núcleo da estrela atinja temperaturas extremamente elevadas, o que possibilita a fusão de outros núcleos, como os de oxigênio, neônio e silício, tendo como resultado final a produção de núcleos de ferro, que são os mais estáveis de todos. Essas reações ocorrem com extrema rapidez e podem conduzir a eventos catastróficos como os que serão descritos na próxima seção. Uma estrela de grande massa, como Betelgeuse, pode se tornar uma supernova (veja a Seção 13-4).

Tabela 13-3Algumas características das estrelas

Tipo espectral	Temperatura da superfície (K)	$L/L_\odot$	$R/R_\odot$	$M/M_\odot$
O5	44.500	790.000	15	60
B0	30.000	52.000	8	18
A0	9.520	54	3	3
F0	7.200	6	2	2
G0	6.030	1,5	1,1	1,1
Sol (G2)	5.800	1,0	1,0	1,0
K0	5.300	0,4	0,8	0,8
M0	3.900	0,08	0,6	0,5
M8	2.600	0,001	0,17	0,06

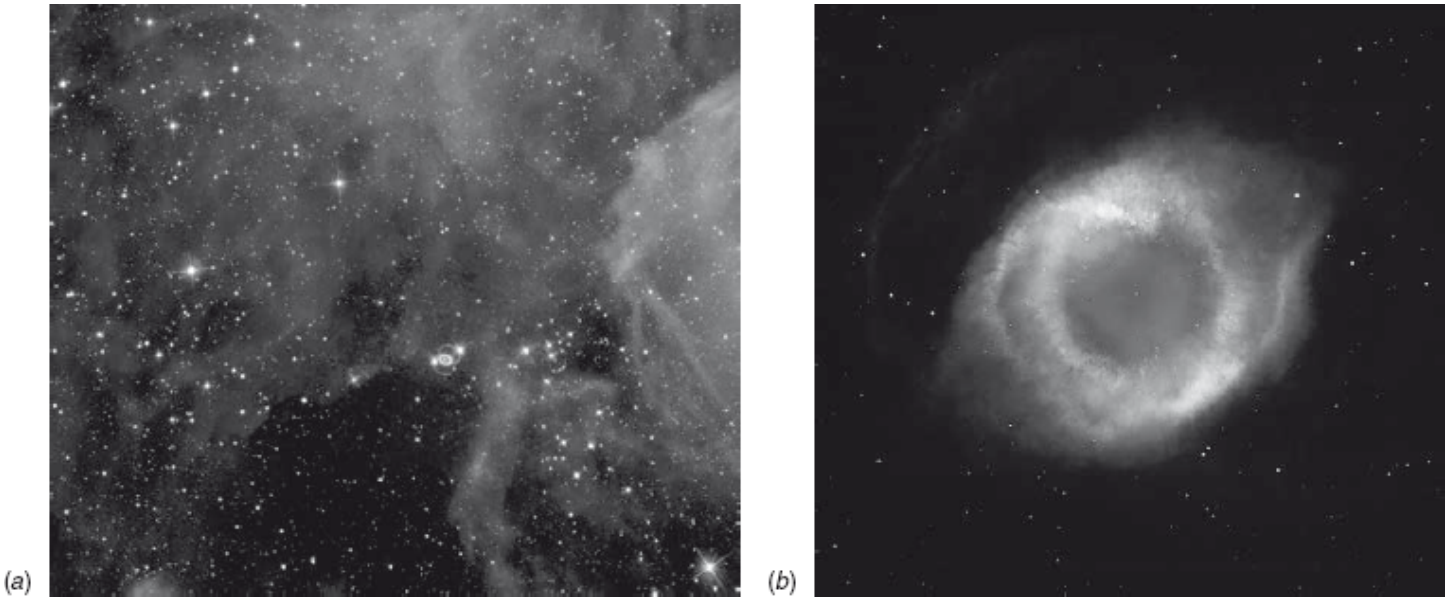


FIGURA 13-18 Acredita-se que a nebulosa 30 Doradus (*a*), também conhecida como Nebulosa da Tarântula, seja mais antiga que a nebulosa NGC 7293 (*b*), também conhecida como Nebulosa da Hélice, e por isso é mais difusa. Situada na Grande Nuvem de Magalhães, a Nebulosa da Tarântula contém uma das maiores estrelas que se conhece, além da supernova SN1987A, o ponto claro ligeiramente abaixo do centro da fotografia da esquerda. A radiação ultravioleta das estrelas aquece o gás das nebulosas, tornando-o luminoso. [(*a*) *The Hubble Heritage Team* (*AURA*/*STScI*/*NASA*). (*b*) *NASA*, *NOAO*, *ESA*, *The Hubble Helix Nebula Team*, *M. Meisner* (*STScI*) *e T. A. Rector* (*NRAO*).]

13-4 Eventos Cataclísmicos

Gigantescas explosões e outros eventos cataclísmicos fazem parte do ciclo vital das estrelas. Depois de se formarem a partir de nuvens de gás, as estrelas se deslocam ao longo do diagrama H-R, passando por esses eventos e formando no processo os elementos necessários para gerar novas estrelas. Vamos examinar agora por que os eventos cataclísmicos acontecem.

Mais de metade das estrelas conhecidas fazem parte de grupos de duas ou mais estrelas. Essas estrelas se movem em órbita em torno do centro de massa comum, enquanto o grupo como um todo acompanha a rotação da galáxia. O período das *estrelas binárias* (associações de duas estrelas) pode variar de algumas horas, no caso de estrelas muito próximas, até milhões de anos, no caso de estrelas separadas por uma distância de milhares de unidades astronômicas. Vamos nos limitar a discutir o caso das binárias próximas.



21

Não é possível fazer aqui uma análise completa das interações das duas estrelas que formam uma binária próxima, mas uma explicação qualitativa será suficiente. Considere uma binária cujas estrelas, de massas M_1 e M_2, giram em torno do centro de massa comum em órbitas circulares. Um observador em repouso no sistema em rotação experimenta uma força resultante que é a soma das forças gravitacionais das duas estrelas e das pseudoforças associadas à rotação. A Figura 13-19 mostra duas superfícies equipotenciais de uma estrela binária. É fácil ver que existe um ponto sobre a linha que liga os centros das duas estrelas no qual o potencial é mínimo. Nesse ponto, denominado *ponto de Lagrange*, a força resultante dos efeitos combinados da rotação e da atração gravitacional das massas M_1 e M_2 é nula. A superfície equipotencial tridimensional que inclui o ponto de Lagrange L forma uma envoltória em torno de cada estrela conhecida como *lobo de Roche*.[12]

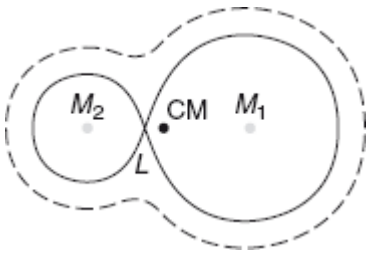


FIGURA 13-19 Seções retas de duas superfícies equipotenciais de um sistema constituído por duas estrelas, M_1 e M_2. O ponto L é um dos cinco pontos de Lagrange nos quais o potencial gravitacional passa por um extremo (um ponto de sela, neste caso) e a força resultante é nula.

Considere agora o que acontece quando, devido à evolução natural, uma das estrelas, M_1, digamos, começa a se expandir e

preenche seu lobo de Roche. Normalmente, a fotosfera de uma estrela tem um limite bem definido, o lugar geométrico dos pontos onde a pressão de radiação é equilibrada pela gravidade. No ponto de Lagrange, porém, a força da gravidade é nula; assim, os gases da estrela M_1 atravessam o ponto de Lagrange e penetram no lobo de Roche da estrela M_2. Uma vez no interior desse lobo, passam a sofrer a atração de M_2. Como o sistema está girando, os gases não se movem diretamente para M_2; por causa do efeito Coriolis, formam um *disco de acreção* (Figura 13-20).

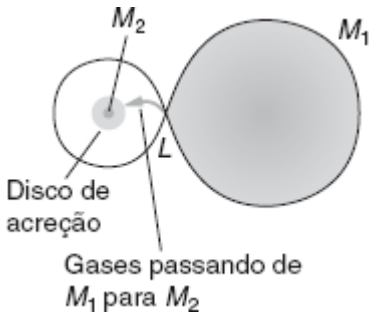


FIGURA 13-20 Gases da estrela M_1 atravessam o ponto de Lagrange e penetram no lobo de Roche da estrela M_2, formando um disco de acreção no plano equatorial de M_2. Os gases que chegam mais tarde se chocam com o disco já formado, gerando uma área de impacto de alta temperatura, que faz com que o brilho de M_2 varie de forma irregular.

Novas

Se M_2 é uma estrela normal, nada de extraordinário acontece; mas, se M_2 é uma anã branca, eventos cataclísmicos conhecidos como *novas* podem ocorrer. Vamos mencionar duas possibilidades. Os gases podem se acumular no disco de acreção até que ocorra uma instabilidade, e uma grande quantidade de gases seja depositada na superfície da anã branca. O impacto aquece a superfície, fazendo com que a luminosidade da estrela aumente de 10 a 100 vezes. Eventos semelhantes ocorrem a intervalos de algumas semanas nas *novas anãs* e a intervalos de centenas ou milhares de anos nas *novas recorrentes*. O fluxo de gases para o disco faz com que o brilho desse tipo de estrela varie ligeiramente, mesmo nos períodos de baixa atividade (veja a Figura 13-20).

Nas *novas clássicas*, que ejetam uma quantidade considerável de gases para o espaço e cujo brilho pode variar de um milhão de vezes em poucos dias, os astrofísicos acreditam que a quantidade de hidrogênio depositada na superfície da anã branca no momento em que ocorre a instabilidade seja suficiente para produzir uma explosão termonuclear. Depois da explosão, o sistema se estabiliza e o hidrogênio volta a se acumular no disco de acreção. Os problemas teóricos envolvidos na descrição de um evento desse tipo, todavia, são consideráveis, e os cientistas ainda não chegaram a um consenso quanto aos detalhes do processo.

Supernovas

Curiosamente, as *supernovas*, explosões catastróficas de estrelas inteiras, são mais bem compreendidas que as novas. As supernovas são classificadas como Tipo I ou Tipo II com base no espectro que apresentam (Figura 13-21). O espectro das supernovas *Tipo I* não inclui as linhas do hidrogênio, o que indica que a quantidade do gás nesse tipo de estrela é muito pequena. No espectro das supernovas *Tipo II*, por outro lado, as linhas do hidrogênio são muito intensas. As supernovas Tipo I são subdivididas em *Tipo Ia*, que apresentam uma linha intensa de Si monoionizado em 615 nm, *Tipo Ib*, que apresentam linhas de He, e *Tipo Ic*, que não apresentam linhas de He. Lembrando que o hidrogênio e o hélio são, nessa ordem, os elementos mais abundantes do universo, essas diferenças espectrais mostram que existem diferenças significativas na origem das supernovas Tipo I e Tipo II. As supernovas Tipo II são subdivididas em dois grupos com base na forma da curva da intensidade luminosa em função do tempo depois de atingido o ponto de máxima luminosidade. A intensidade da luz das supernovas *Tipo II-L* diminui *l*inearmente com o tempo. A intensidade da luz das supernovas *Tipo II-P* apresenta um *p*latô intermediário que dura 30 dias ou mais; em seguida, a intensidade volta a diminuir.

As supernovas não são, simplesmente, novas de grande porte, mas têm uma origem totalmente diversa. Na Seção 13-3, vimos o que acontece quando uma estrela consome todo o hidrogênio do núcleo e começa a sair da sequência principal do diagrama H-R. A estrela começa a fundir hélio e depois passa a fundir carbono. No caso de uma estrela de pequena massa, a energia gravitacional é insuficiente para promover a fusão de núcleos mais pesados. Nas estrelas grandes, a situação é outra. As supernovas Tipo Ia se formam em sistemas binários nos quais uma das estrelas é uma anã branca, rica em carbono e oxigênio (veja a Seção 13-5). Uma companheira em expansão cuja superfície ultrapassa o lobo de Roche pode despejar uma grande quantidade de gás diretamente na superfície da anã branca, aumentando a pressão gravitacional no núcleo. Se o aumento da temperatura do núcleo causado por esse aumento de pressão é suficiente para promover a fusão do carbono, o resultado é uma

reação de fusão quase instantânea que produz uma gigantesca explosão termonuclear, ou seja, uma verdadeira "bomba de carbono". As supernovas do Tipo Ib se formam quando uma estrela sofre um colapso gravitacional após perder as camadas externas de hidrogênio, seja por causa de fortes ventos estelares, seja por causa da atração gravitacional de uma estrela próxima. As supernovas do Tipo Ic se formam por um mecanismo semelhante, mas, além de perderem hidrogênio, também perdem a maior parte do hélio. As supernovas tipo I se formam em estrelas da população II. (O leitor não deve se confundir com a incoerência da nomenclatura.) A curva da variação da luminosidade com o tempo das supernovas Tipo Ia depende de forma previsível da luminosidade máxima, o que permite que sejam usadas como *velas-padrão* pelos astrônomos. Além disso, por serem muito brilhantes, podem ser observadas a grandes distâncias. Graças a esse tipo de estrela, foi possível determinar a distância de galáxias muito afastadas.

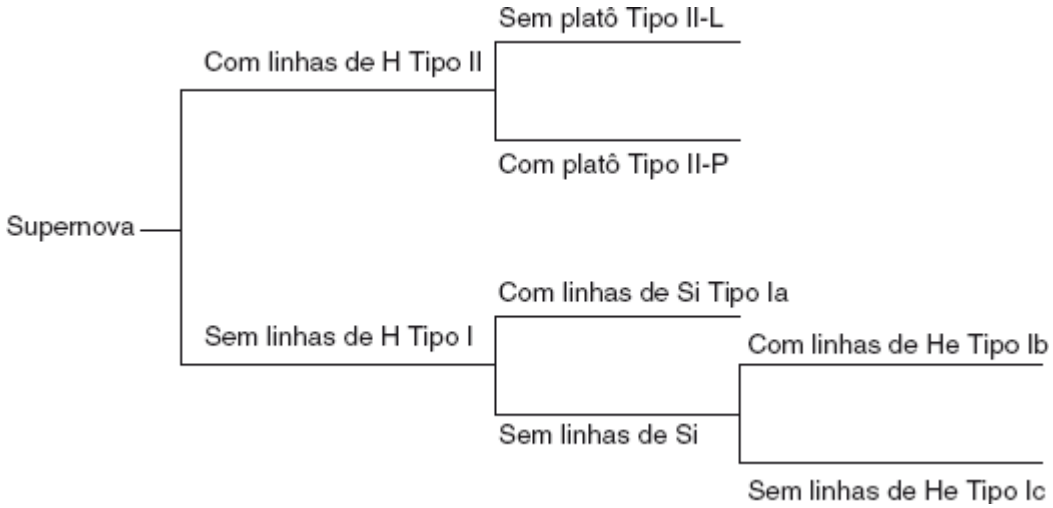


FIGURA 13-21 Classificação das supernovas. As supernovas Tipo I são divididas em subgrupos com base nas linhas do espectro; as do Tipo II, com base na forma da curva da intensidade luminosa em função do tempo.

Se a massa de uma estrela é maior que $8M_{\odot}$, gravidade é suficiente para atrair hidrogênio das camadas intermediárias para a parte central da estrela quando o hidrogênio da parte central começa a se esgotar e a estrela acaba se tornando uma supernova Tipo II, pelo mecanismo que será descrito a seguir. Quando a temperatura do núcleo ultrapassa 10^8 K, começa a ocorrer a fusão de átomos de neônio e silício, que tem como resultado final a produção de núcleos de ferro. Como vimos no Capítulo 11, a energia de ligação por núcleon do átomo de ferro é a maior de toda a tabela periódica. Isso significa que a fusão de átomos de elementos mais pesados que o ferro não produz energia e sim consome energia. Assim, quando o núcleo da estrela se transforma em ferro, as reações termonucleares deixam de ocorrer. Na ausência da pressão para fora causada pelas reações termonucleares, a contração gravitacional se acelera e, em consequência, o núcleo se aquece até a temperatura ultrapassar 10^9 K. Neste ponto, a radiação no interior da estrela é suficientemente intensa para desintegrar os átomos de ferro, produzindo átomos de hélio e nêutrons, o que remove energia do núcleo e acelera ainda mais o colapso gravitacional. A reação é a seguinte:

$$^{56}_{26}\mathrm{Fe} \rightarrow 13\,^{4}_{2}\mathrm{He} + 4n \qquad \textbf{13-18}$$

Os núcleos de hélio também se desintegram por efeito da radiação, consumindo enormes quantidades de energia, já que a energia de ligação do hélio é muito grande. A reação é a seguinte:

$$^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow 2p + 2n \qquad \textbf{13-19}$$

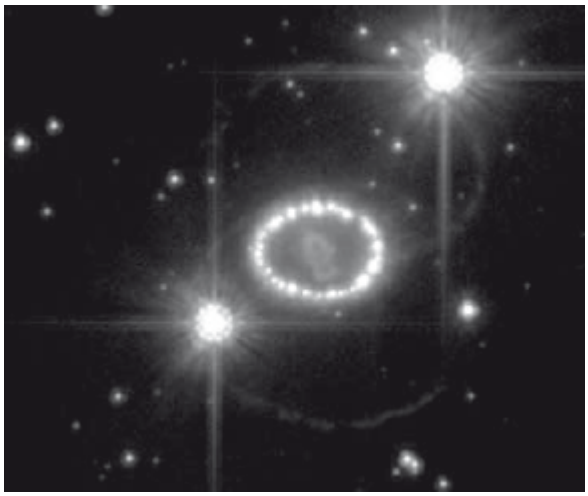
Os prótons produzidos na reação da Equação 13-19 estão praticamente em queda livre e a forte compressão faz com que se combinem com elétrons para formar nêutrons, em uma reação que corresponde ao inverso do decaimento beta:

$$p + e^{-} \rightarrow n + \nu_{e} \qquad \textbf{13-20}$$

O que acontece a seguir com o núcleo ainda é objeto de várias especulações, que serão discutidas na Seção 13-5.

O que acontece com a envoltória (os gases que não estão na parte central da estrela), embora também não esteja claro do ponto de vista teórico, pelo menos pode ser observado: a envoltória é ejetada em uma gigantesca explosão. É este evento que chamamos de supernova Tipo II. As supernovas são extremamente raras, mas os cientistas tiveram a sorte de observar uma supernova Tipo II em 1987 a apenas 170.000 anos-luz de distância, na Grande Nuvem de Magalhães, uma pequena galáxia irregular que faz parte do grupo local de galáxias. Denominada SN1987A (veja a Figura 13-18), foi a primeira supernova visível a olho nu desde 1604, quando outra supernova foi observada por Kepler e Galileu. Duas outras tinham sido vistas anteriormente, em 1006 e 1054, a segunda documentada por astrônomos chineses e visível até hoje, na forma da Nebulosa do Caranguejo. Várias outras foram observadas com o auxílio de telescópios. Em consequência do grande número de reações e

decaimentos nucleares associados a uma supernova, a radiação emitida pela explosão é acompanhada por um intenso fluxo de neutrinos. Os neutrinos provenientes da supernova SN1987A foram detectados pelo observatório de neutrinos Kamiokande e usados pelos cientistas para obter novas informações a respeito do colapso de uma supernova Tipo II e um limite superior para a massa do antineutrino do elétron (veja o Problema 12-13).



A supernova 1987A produziu uma série de anéis algumas semanas depois de ser observada pela primeira vez. Os anéis provavelmente foram causados pela interação de um feixe de radiação ou de partículas de alta energia com uma nuvem de gás. O feixe pode ter sido produzido por uma companheira invisível da estrela que explodiu. Esta fotografia foi tirada pelo Telescópio Espacial Hubble usando a linha alfa da série de Balmer do hidrogênio. [*NASA, ESA, P. Challis e R. Kirshner* (*Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics*).]

Ao atingir a luminosidade máxima, uma supernova normalmente é mais brilhante que todo o resto da galáxia em que se encontra. Os espectros das supernovas revelam a presença de elementos de toda a tabela periódica. Isso indica que parte da energia do núcleo é usada para produzir átomos de elementos pesados a partir dos átomos de ferro. A supernova ejeta muitos desses átomos para o espaço, onde mais tarde contribuem para a formação de novas estrelas e planetas. Eventos desse tipo certamente precederam o nascimento do Sol e a formação da Terra. Como disse alguém, “somos feitos do material das estrelas”.

13-5 Os Estados Finais das Estrelas

Os eventos cataclísmicos que acontecem no final da vida de uma estrela podem levar à formação de uma anã branca, uma estrela de nêutrons, ou um buraco negro. O fator principal que determina o destino de uma estrela parece ser a massa, especialmente a massa da parte central da estrela.

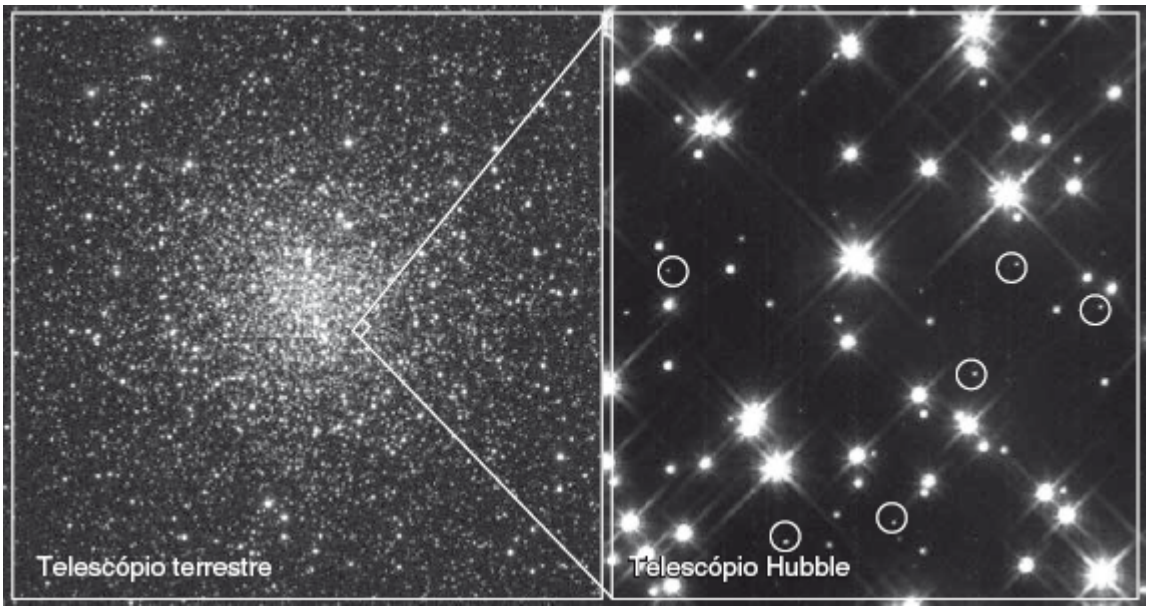
Anãs Brancas

As estrelas com massa menor que 6 $M_\odot$ seguem um curso evolutivo no diagrama H-R que as faz passar por um ou mais períodos de considerável perda de massa. A forma como isso acontece ainda não está clara, mas os gases ejetados, que são aquecidos pela região central da estrela até se tornarem luminosos, formando uma nebulosa planetária, deixam como resíduo uma *anã branca*, termo usado porque muitas, mas não todas as estrelas desse tipo, são brancas. Uma anã branca típica tem uma massa de 1 $M_\odot$ e um raio de 10^7 m, ou seja, da mesma ordem que o raio da Terra. Assim, a massa específica de uma anã branca pode chegar a 5×10^5 g/cm^3, enquanto a massa específica da Terra é apenas 5,5 g/cm^3. Um objeto do tamanho de uma moeda de 10 centavos feito do material de uma anã branca teria uma massa de mais de 200 kg; se fosse do tamanho de uma moeda de um real, teria uma massa de mais de 400 kg.

Como não existem reações termonucleares no interior de uma anã branca, cuja região central é formada principalmente por carbono e oxigênio, a pressão para fora causada por essas reações está ausente e a estrela se contrai por ação da gravidade até que o princípio de exclusão impede os elétrons atômicos de se aproximarem ainda mais uns dos outros. Este efeito é semelhante à repulsão entre os átomos de uma molécula devido ao princípio de exclusão, discutida no Capítulo 9. É essa *pressão de degeneração dos elétrons* que evita o colapso total de uma anã branca. Quando a pressão de degeneração dos elétrons iguala a pressão causada pela gravidade, a estrela deixa de se contrair.

O cálculo da pressão de degeneração dos elétrons leva a uma relação não relativística entre o raio R e a massa M de uma anã branca:

$$R = (3{,}1 \times 10^{17}\ \mathrm{m \cdot kg^{1/3}})\left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} M^{-1/3} \qquad \textbf{13-21}$$



Anãs brancas localizadas pelo Telescópio Espacial Hubble em M4, o aglomerado globular mais próximo da Terra, situado a 7000 anos-luz de distância. M4 contém mais de 100.000 estrelas. [(*esquerda*) *Telescópio de 0,9 m do Kitt Peak National Observatory*, *National Optical Astronomy Observatories*; *cortesia de M. Bolte* (*University of California*, *Santa Cruz*). (*direita*) *Harvey Richer* (*University of British Columbia*, *Vancouver*, *Canada*) *e NASA.*]

em que Z é o número atômico e A o número de massa do material de que a estrela é composta. Curiosamente, quanto maior a massa, menor o raio, o que é uma consequência da contração gravitacional a que nos referimos anteriormente. Assim, por exemplo, uma anã branca com uma massa de 1 $M_\odot$ tem um raio menor que uma anã branca com uma massa de 0,5 $M_\odot$! De acordo com a Equação 13-21, o raio de uma anã branca tende a zero quando a massa tende a infinito, mas permanece finito para qualquer valor finito da massa. Entretanto, para pequenos valores do raio, a Equação 13-21 deixa de ser válida e deve ser substituída por uma versão relativística. S. Chandrasekhar[13] realizou o cálculo relativístico e descobriu que o raio é nulo para massas maiores que 1,4 $M_\odot$. Este valor é conhecido como *limite de Chandrasekhar*. Um forte indício da existência real do limite de Chandrasekhar é o fato de que todas as anãs brancas conhecidas têm massa menor que 1,4 $M_\odot$.

As anãs brancas isoladas perdem energia por irradiação e, na falta de uma fornalha nuclear, esfriam lentamente, tornando-se cada vez menos luminosas. Quando uma anã branca deixa de ser visível, passa a ser uma *anã negra*, que continua a esfriar até entrar em equilíbrio térmico com o universo. É pouco provável que uma anã branca já tenha atingido este estágio. Se a anã branca faz parte de um sistema binário, além da possibilidade de se tornar uma nova, já discutida, os gases da estrela companheira podem se depositar gradualmente na superfície da anã branca. Quando a pressão de degeneração dos elétrons é insuficiente para conter a contração gravitacional (ou seja, quando o limite de Chandrasekhar é atingido), a estrela implode e a temperatura do núcleo aumenta o suficiente para promover a fusão do núcleo de carbono e oxigênio. A liberação de energia resultante faz a anã branca explodir como uma supernova Tipo Ia. O limite de massa acima do qual as anãs brancas explodem, 1,4 $M_\odot$, é um dos fatores responsáveis pela semelhança das curvas da luminosidade das supernovas Tipo Ia em função do tempo que permite que sejam usadas como padrão para distâncias astronômicas. Quando uma anã branca se torna uma supernova, o que resta é uma estrela com aproximadamente 50% de ferro.

Estrelas de Nêutrons

Quando discutimos as supernovas, vimos que as enormes pressões existentes na parte central da estrela produzem a reação inversa do decaimento beta, transformando prótons em nêutrons. O que acontece se a massa do núcleo após a explosão é maior que o limite de Chandrasekhar? Podemos ter uma ideia considerando os nêutrons como um gás ideal de férmions e obtendo uma expressão não relativística para a relação entre a massa e o raio análoga à Equação 13-21. O resultado é o seguinte:

$$R = (1{,}6 \times 10^{14}\ \mathrm{m \cdot kg^{1/3}})M^{-1/3} \qquad \textbf{13-22}$$

em que M é a massa em quilogramas e R é o raio do núcleo em metros. Uma estrela desse tipo é chamada de *estrela de nêutrons*, já que é formada exclusivamente por nêutrons. De acordo com a Equação 13-22, para $M = 1{,}0\ M_\odot$, $R = 1{,}27 \times 10^4$ m = 12,7 km.



Esta estrela de nêutrons, a primeira a ser observada com luz visível, é muito quente (cerca de 650.000 K na superfície) e provavelmente não tem mais que 28 km de diâmetro. [*Cortesia de Fred Walter* (*State University of New York at Stony Brook*) *e NASA.*]

A massa específica de uma estrela de nêutrons é da ordem de 10^{14} g/cm^3, apenas ligeiramente menor que a massa específica do nêutron, cerca de 4×10^{14} g/cm^3. Assim, podemos concluir que, em uma estrela de nêutrons, a pressão gravitacional é equilibrada pela componente repulsiva (devido ao princípio de exclusão) da interação forte a que estão submetidos os nêutrons. Como o leitor já deve ter previsto, até mesmo essa enorme resistência pode ser superada pela pressão da gravidade. A massa para a qual a pressão gravitacional é igual à pressão causada pela repulsão entre os nêutrons corresponde à maior massa possível para uma estrela de nêutrons, um limite análogo ao limite de Chandrasekhar para as anãs brancas. De acordo com as teorias mais recentes, o limite para a massa de uma estrela de nêutrons é 2 $M_\odot$. A maior estrela de nêutrons observada até hoje tem uma massa de (1,97 ± 0,04) $M_\odot$ e um raio de 13 km.

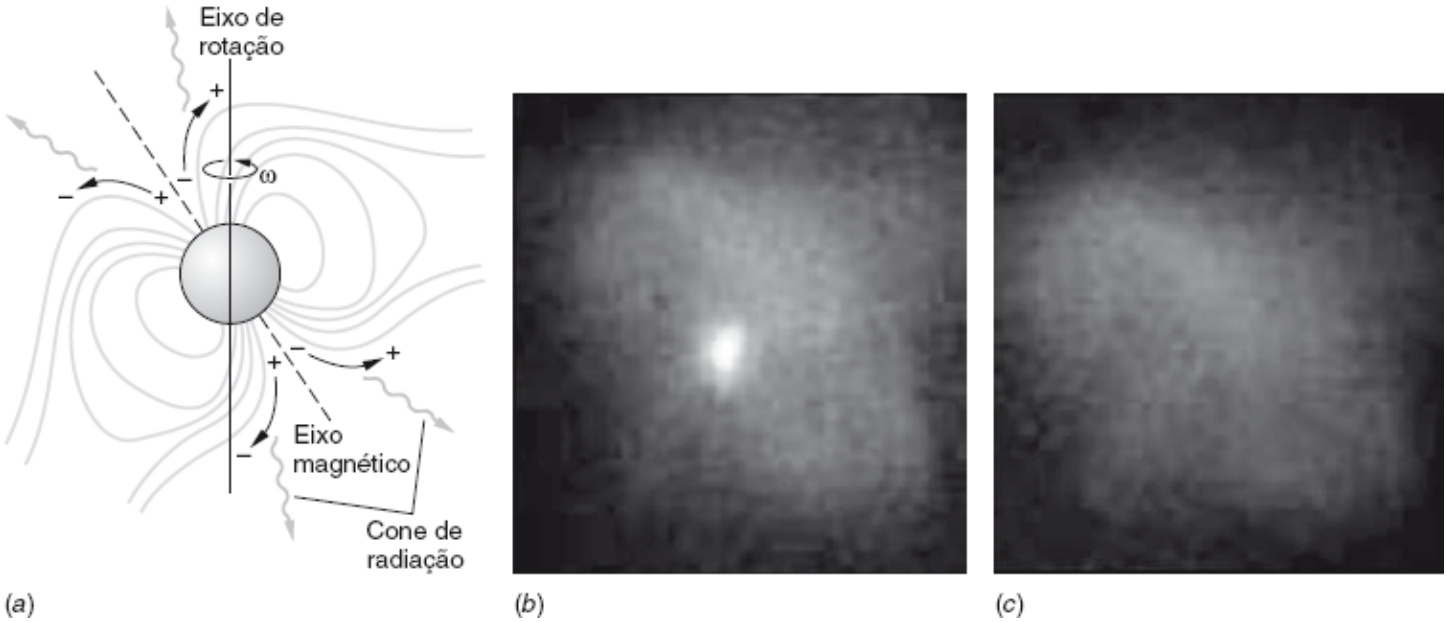
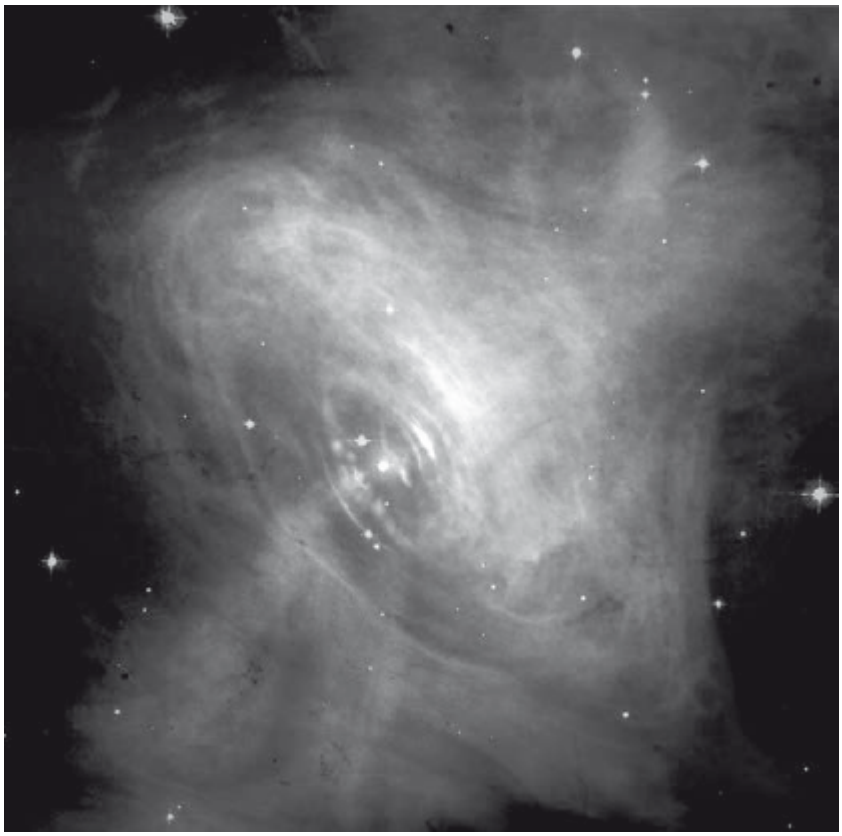


FIGURA 13-22 (*a*) Uma estrela de nêutrons herda a maior parte do momento angular e do campo magnético da estrela original, o que a faz girar rapidamente enquanto arrasta uma magnetosfera distorcida. Partículas carregadas são ejetadas em dois cones alinhados com o eixo do campo magnético. Quando o eixo do campo magnético não coincide com o eixo de rotação, a radiação associada às partículas varre o espaço, como a luz de um farol. (*b*) O pulsar da Nebulosa do Caranguejo. Quando o cone de radiação passa pela Terra, a luz emitida pelos elétrons ejetados se torna visível (ponto mais claro na imagem). (*c*) Uma fração de segundo mais tarde, o cone de radiação não está mais dirigido para a Terra. O período do pulsar é $3{,}3 \times 10^{-2}$ s e está aumentando à razão de 10^{-5} s por ano. [(*b*) e (*c*) *Harvard/Smithsonian Center for Astrophysics.*]



Esta imagem, composta da Nebulosa do Caranguejo, é formada por uma imagem de raios X do Chandra X-Ray Observatory e uma imagem ótica do Telescópio Espacial Hubble. O anel interno tem cerca de 1 ano-luz de diâmetro. [*Imagem de raios X*: *NASA/CXC/ASU/J. Hester et al. Imagem ótica*: *NASA/HST/ASU/J. Hester et al.*]

Acredita-se que as fontes de ondas periódicas de rádio conhecidas como *pulsares*, descobertas a partir de 1967 em resíduos de supernovas como a Nebulosa do Caranguejo, sejam estrelas de nêutrons. Segundo um modelo aceito pela maioria dos cientistas, a radiação é produzida por partículas carregadas emitidas pela estrela de nêutrons e aceleradas ao longo de linhas de campo magnético em consequência da rápida rotação da estrela (Figura 13-22). No caso da Nebulosa do Caranguejo, a variação da luz visível obedece ao mesmo padrão, como mostram as Figuras 13-22*b* e 13-22*c*. A potência emitida é gigantesca, da ordem de 3×10^{31} W. O período, 0,033 s, é um dos mais curtos que se conhece. Ao emitir energia para o espaço, a estrela de nêutrons esfria, aproximando-se do equilíbrio térmico com o resto do universo. O estudo da variação do período de pulsares que pertencem a sistemas binários pode ser usado para testar algumas previsões da teoria da relatividade geral.

Buracos Negros

O que acontece quando a massa do resíduo compacto de uma supernova excede o limite máximo de 2 $M_\odot$ para a formação de uma estrela de nêutrons? A velocidade necessária para que um corpo escape da atração gravitacional de uma estrela de massa M pode ser calculada igualando a energia potencial gravitacional na superfície da estrela à energia cinética do corpo; o resultado é a chamada *velocidade de escape*, dada por

$$v_e = \left(\frac{2GM}{R}\right)^{1/2} \qquad \textbf{13-23}$$

No caso de uma estrela de nêutrons com $M = 1{,}0\ M_\odot$, $v_e = 1{,}3 \times 10^8$ m/s, mais de 40% da velocidade da luz. Se não houvesse efeitos da relatividade e da mecânica quântica, a velocidade de escape seria igual a c para

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \qquad \textbf{13-24}$$

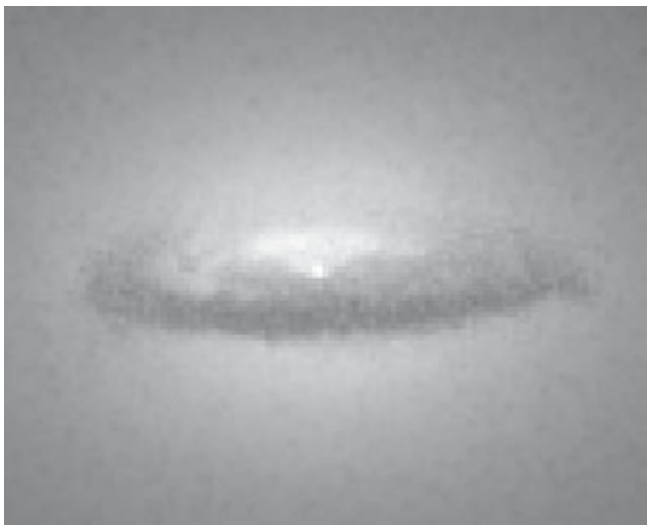
em que R_S é chamado de *raio de Schwarzschild*. Se o raio de uma estrela de nêutrons em formação se torna menor que R_S, nenhum objeto consegue escapar da superfície. Além disso, de acordo com o *desvio gravitacional para o vermelho*, discutido na Seção 2-5, uma radiação de comprimento de onda λ_0 emitida a uma distância R de uma massa M sofre um deslocamento para maiores comprimentos de onda dado por

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{v_e^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{R_S}{R}\right)^{-1/2} \quad \textbf{13-25}$$

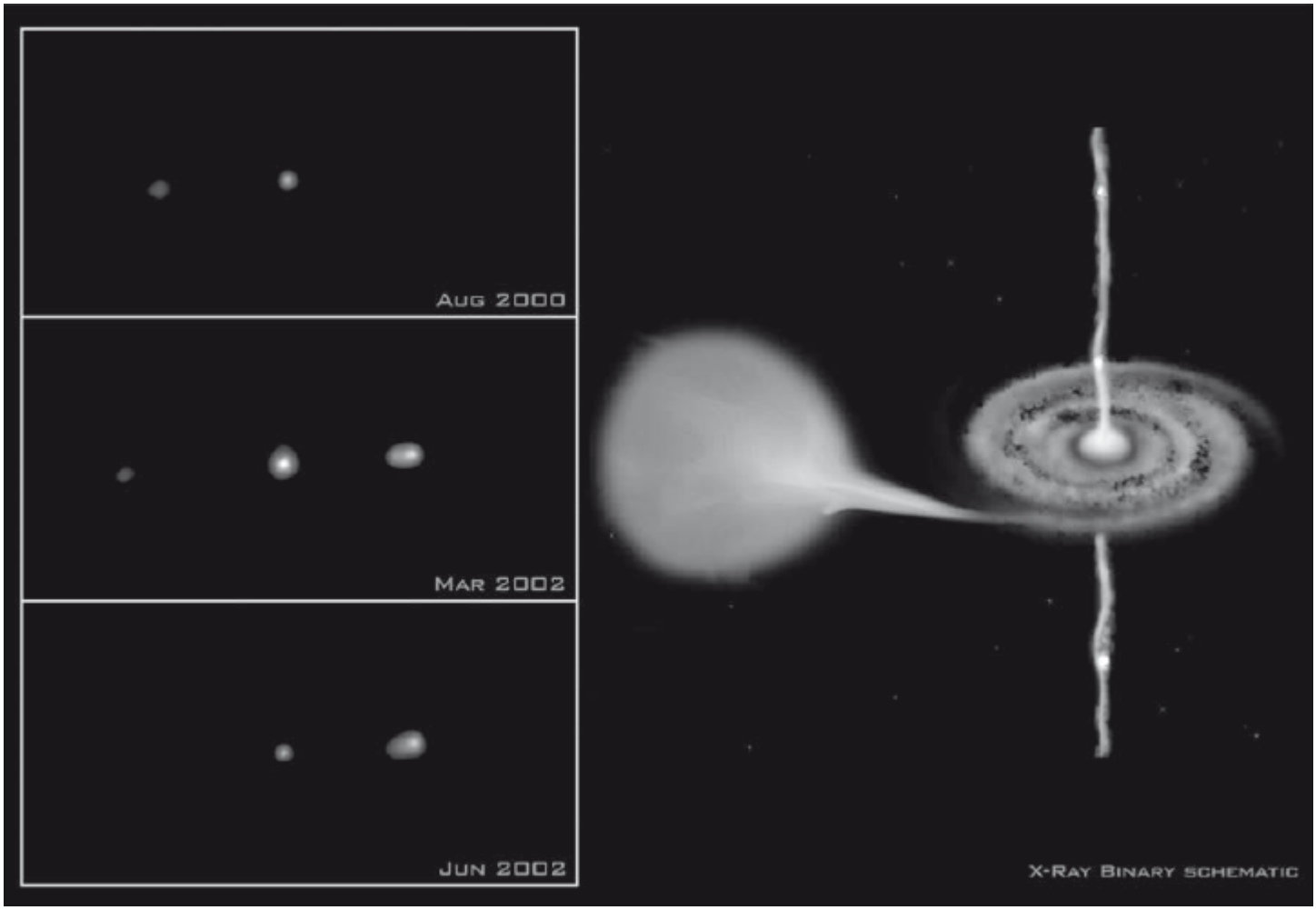
em que λ é o novo comprimento de onda.

Quando R tende para o raio de Schwarzschild, o comprimento de onda λ tende para infinito e a energia da radiação emitida ($E = hf = hc/\lambda$) tende para zero. Assim, para $R < R_S$, a radiação também não consegue escapar da superfície da estrela. Uma estrela com essas características recebe o nome de *buraco negro* porque não emite nem reflete radiação e, portanto, parece totalmente negra.[14]

O raio de um buraco negro com uma massa de 2 $M_\odot$ seria de apenas 6 km. Muitos astrofísicos acreditam que existe um buraco negro no centro da Via Láctea. Nos últimos 15 anos, astrônomos do Instituto Max Planck, na Alemanha, rastrearam cerca de uma dúzia de estrelas (o chamado grupo S) das mais de 300 que giram em órbita de um objeto invisível cuja posição coincide com a da fonte de rádio Sagitário A* (que os astrônomos escrevem Sgr A* e chamam de Sagitário A estrela), situada no centro da Via Láctea (Figura 13-23*a*). Uma dessas estrelas, conhecida como S2, foi rastreada por mais de dois terços de sua órbita (Figura 13-23*b*). Na primavera de 2002, S2 passou a 17 horas-luz de Sgr A*, uma distância equivalente a três vezes o diâmetro do sistema solar, a uma velocidade de 5000 km/s. Com base nessas observações, a massa de Sgr A* foi estimada em $4 \times 10^6 M_\odot$. O pericentro (ponto de máxima aproximação) de S2, 17 horas-luz, é tão pequeno que a densidade de Sgr A* deve ser enorme, mais do que suficiente para que se trate de um buraco negro. Ao contrário das anãs brancas e das estrelas de nêutrons, os buracos negros não estão esfriando; entretanto, acredita-se que estejam perdendo massa, através da chamada radiação de Hawking.[15]



Buraco negro no centro da galáxia elíptica NGC 7052. O disco tem aproximadamente 3700 anos-luz de diâmetro. O buraco negro, cuja massa é aproximadamente 300 milhões de vezes maior que a do Sol, deverá tragar o disco inteiro em alguns bilhões de anos. [*Roeland P. van der Marel* (*STScI*), *Frank C. van der Bosch* (*University of Washington) e NASA.*]



A série de imagens da esquerda, obtidas pelo Chandra X-Ray Observatory, mostra jatos de partículas de alta energia sendo produzidos nas proximidades de um buraco negro em um sistema binário, primeiro à esquerda (imagem de cima) e depois à direita (imagem do meio). Os jatos estão se afastando um do outro com uma velocidade de aproximadamente 0,5*c*. Na imagem de baixo, o jato da esquerda desapareceu. O desenho da direita ilustra a formação dos jatos. O buraco negro atrai matéria da companheira normal; em seguida, forças eletromagnéticas intensas no disco de acreção expelem os jatos de partículas de alta energia. [*Esquerda*: *imagem de raios X* (*NASA*/*CXC*); *direita*: *ilustração* (*CXC*/*M. Weiss*).]

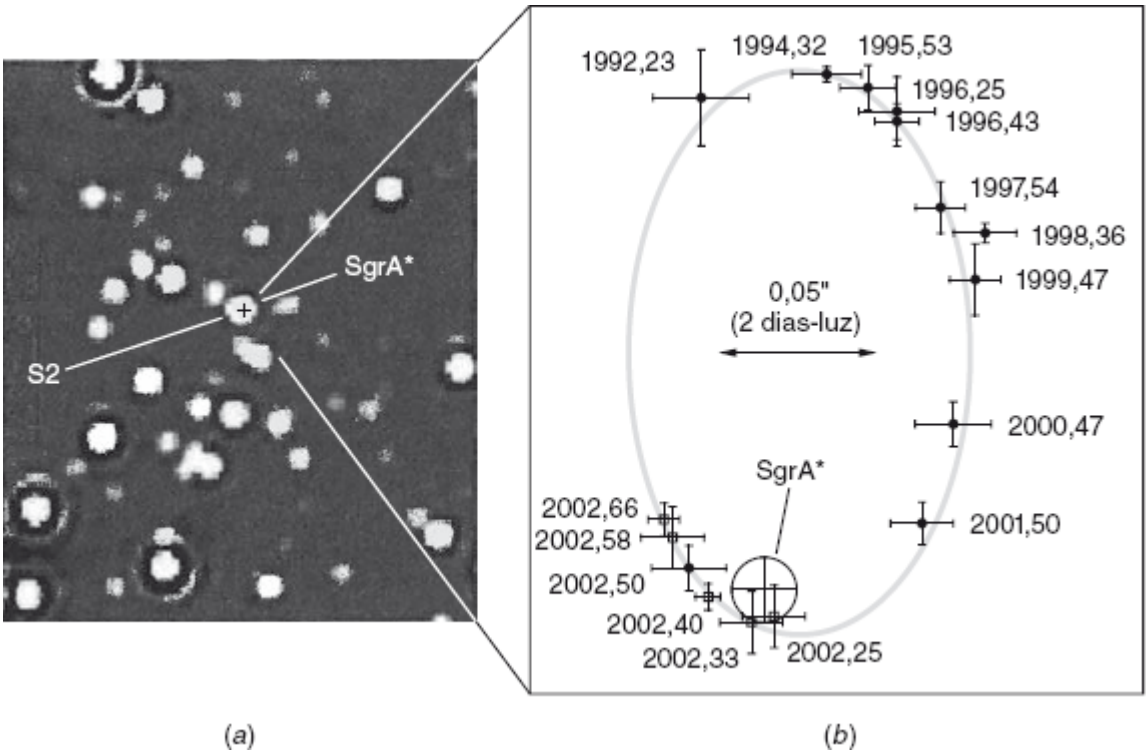


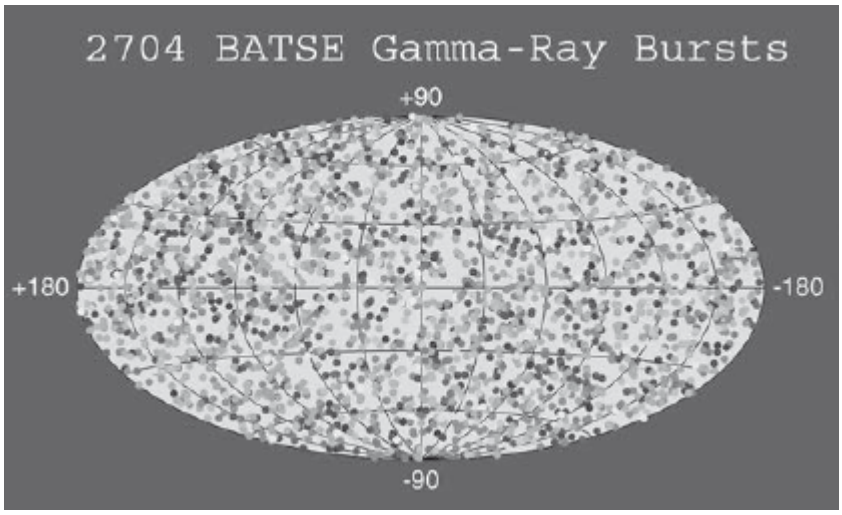
FIGURA 13-23 (*a*) Imagem no infravermelho de estrelas que giram em torno da fonte de rádio Sgr A*, indicada por uma pequena cruz,

que fica no centro da Via Láctea e é supostamente gigantesco buraco negro. (*b*) A órbita da estrela S2. Usando os dados mostrados na figura e a terceira lei de Kepler, a massa de Sgr A* foi estimada em 4 milhões de massas solares. [(*a*) *European Southern Observatory*. (*b*) *Max Planck Institute for Extraterrestrial Physics*.]

Erupções de Raios Gama

As erupções de raios gama (e raios X), que acontecem, em média, uma vez por dia em pontos aparentemente aleatórios da esfera celeste, foram descobertas por satélites militares Vela em 1967. São de curta duração (entre um segundo e alguns minutos) e alta intensidade; o fluxo é da ordem de 1000 vezes maior que o das fontes permanentes mais intensas de raios gama, como o Sol e a Nebulosa do Caranguejo. A curta duração tornava difícil associá-las a estrelas ou galáxias por causa do tempo necessário para processar a informação e apontar um telescópio para o local. Com um pouco de sorte, o problema foi resolvido pela primeira vez em 1997, quando o detector do satélite holandês/italiano BeppoSAX descobriu um resíduo de raios X no local da erupção* GRB970228.[16] Em 1999, a erupção GRB990510 foi observada simultaneamente pelos satélites Compton Gamma Ray Observatory e BeppoSAX dentro do campo de visão do Very Large Telescope (VLT) do Chile, o maior telescópio do hemisfério sul. As emissões residuais de raios X, luz visível e ondas de rádio mostraram aos astrônomos o que deviam buscar e, desde então, muitas erupções têm sido estudadas através das emissões residuais, que podem durar vários meses.

Pesquisas em todo o céu conduzidas pelos satélites Burst and Transient Source Experiment (BATSE) e Swift registraram mais de 8000 erupções de raios gama, distribuídas uniformemente na esfera celeste (veja o gráfico). A distribuição uniforme das GRBs é uma forte indicação de que as fontes dessas erupções são objetos muito distantes, já que o universo só parece uniforme a grandes distâncias. O desvio para o vermelho da erupção GRB990510 medido pelo VLT foi de 1,61, o que coloca a fonte mais ou menos na metade da distância do universo observável. A fonte das erupções e o mecanismo responsável pela gigantesca liberação de energia ainda não são conhecidos. Até o momento, cerca de 100 resíduos das erupções foram localizados e, na maioria dos casos, uma galáxia hospedeira foi identificada. Em muitos casos, as erupções de raios gama parecem ser produzidas pelo colapso de estrelas gigantes no processo de se tornarem estrelas de nêutrons ou buracos negros, mas a questão ainda está sendo investigada.



Este mapa mostra a localização de mais de 2700 erupções de raios gama registradas pelo Compton Gamma-Ray Observatory durante seus 9 anos de operação. A projeção está em coordenadas galáxias; o plano da Via Láctea é a reta horizontal no centro da figura. Os tons de cinza representam a energia total de cada erupção. [*Imagem cortesia da equipe BATSE*, *http://gammaray.nsstc.nasa.gov*.]

13-6 Galáxias

Na Seção 13-2, vimos que a Via Láctea tem a forma de um disco espiralado, com uma protuberância central situada a cerca de 28.000 anos-luz do Sol. O disco é cercado por um "halo" aproximadamente esférico de aglomerados globulares, constituídos principalmente por estrelas da população II, que também fazem parte da Galáxia. Vamos agora examinar algumas características das galáxias.

A Matéria Entre as Estrelas

"Buracos no céu", regiões onde não é observada nenhuma estrela, são conhecidos desde os primórdios na astronomia. Antigamente, os astrônomos acreditavam que nessas regiões havia apenas espaço vazio. Entretanto, estudos de aglomerados abertos, realizados há aproximadamente 70 anos, levaram à descoberta de que existe no

espaço entre as estrelas uma distribuição mais ou menos contínua de pequenos grãos de poeira, conhecidos coletivamente pelo nome de *poeira interestelar*. Formada por partículas sólidas de silicatos e carbetos com apenas algumas centenas de nanômetros de diâmetro (o que corresponde aproximadamente ao comprimento de onda da luz visível), a poeira que existe no meio interestelar absorve e espalha a luz das estrelas. Como a luz azul é mais espalhada que a luz vermelha, a luz das estrelas chega a nós avermelhada, da mesma forma como a luz do Sol parece avermelhada no crepúsculo. A poeira parece se estender a toda a Galáxia, mas com uma concentração muito pequena; o vácuo que existe no espaço interestelar é muito melhor que o melhor vácuo que pode ser conseguido em laboratório.

O meio interestelar é composto principalmente de hidrogênio e hélio. O hidrogênio, na forma de átomos neutros, átomos ionizados (prótons) e moléculas de H_2, constitui cerca de 70% em massa do meio interestelar. O hélio atômico responde pela maior parte da massa restante, enquanto a poeira de silicatos e carbetos contribui com menos de 10%. O espectro de algumas estrelas binárias contém linhas de absorção que não sofreram desvio Doppler. Em 1904, J. F. Hartmann argumentou corretamente, embora sua interpretação não fosse universalmente aceita, que essas linhas resultavam da absorção da luz da estrela binária por uma nuvem de gás situada entre a estrela e a Terra, e não pela atmosfera da própria estrela. Embora seja ainda difícil de demonstrar conclusivamente em todos os casos, a existência de nuvens de gás interestelares hoje em dia é aceita pela maioria dos cientistas. Produzidas por flutuações de temperatura logo após o big bang e pela ação subsequente da gravidade, imensas nuvens, formadas principalmente por hidrogênio, ocupam o meio interestelar. A massa dessas nuvens está entre 1 e 1000 vezes a massa do Sol e a temperatura varia de 30 a 150 K. Nessas temperaturas, os átomos de hidrogênio estão no estado fundamental.

As nuvens podem ser observadas graças ao desdobramento hiperfino que resulta da interação do spin do elétron com o spin do próton. Quando os spins do elétron e do próton do átomo de hidrogênio estão antiparalelos, a energia do estado fundamental é ligeiramente menor do que quando os spins estão paralelos. (Veja a Seção 7-4 e a Figura 13-24.) A diferença de energia entre os dois estados, $5{,}88 \times 10^{-6}$ eV, é tão pequena que a colisão com outro átomo ou com um grão de poeira é suficiente para "virar" o spin do elétron para a orientação paralela. Quando isso acontece, o átomo tem duas formas de voltar ao estado fundamental: através de outra colisão, caso em que a energia em excesso é liberada na forma de calor, ou sofrendo um decaimento espontâneo, caso em que é emitido um fóton com um comprimento de onda de 21 cm. As probabilidades dos dois eventos são muito pequenas. Um átomo de uma dessas nuvens pode passar vários séculos sem sofrer uma colisão, e o retorno espontâneo ao estado fundamental pode levar milhões de anos. Mesmo assim, o número de átomos de uma nuvem é tão grande que existe uma fraca emissão contínua de fótons de 21 cm através da qual o tamanho e a forma da nuvem podem ser levantados com o auxílio de radiotelescópios.

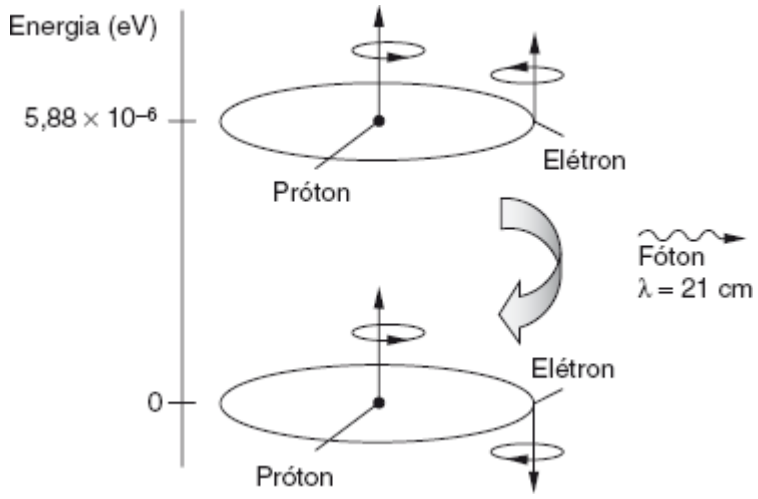


FIGURA 13-24 O desdobramento hiperfino do estado fundamental do átomo de hidrogênio é responsável pela radiação de 21 cm usada para observar nuvens de hidrogênio no meio interestelar.

Tomadas em conjunto, a poeira interestelar e as nuvens de gás são responsáveis por 2 a 3% da massa total da Galáxia (incluindo a matéria comum e matéria escura). É quase certo que a quantidade de gás e poeira que ainda não foram detectados é insuficiente para tornar desnecessária a hipótese da matéria escura.

Nebulosas Gasosas

Embora a maioria das nuvens de gás, ou nebulosas, do espaço interestelar tenha forma irregular, algumas poucas são circulares,

o que leva à especulação de que estejam se contraindo por efeito da gravidade e representem os primeiros estágios da formação de novas estrelas. Algumas nuvens de hidrogênio de grande porte possuem regiões esféricas centrais de hidrogênio ionizado, com uma divisão nítida entre as regiões que contêm H e H^+. Os astrofísicos acreditam que as regiões de gás ionizado são mantidas por fótons ultravioletas de frequência maior que o limite de Lyman, emitidas por estrelas recém-formadas no centro da região. A ideia de que novas estrelas estão constantemente sendo geradas nas nebulosas é apoiada pela observação de que, embora a Galáxia tenha sido formada há pelo menos dez bilhões de anos, contém estrelas da sequência principal que se formaram há dois ou três milhões de anos. Além disso, radiotelescópios de alta resolução detectaram recentemente estrelas em formação, cercadas por nuvens de poeira e gás que são totalmente opacas aos comprimentos de onda da luz visível.

Classificação das Galáxias

Objetos difusos, com um tamanho aparente maior que o das estrelas, conhecidos como "nebulosas" (que não devem ser confundidos com as nebulosas planetárias, definidas na Seção 13-3), vêm sendo observados no céu noturno desde o século XVIII, mas sua natureza foi objeto de discussões intermináveis até o século XX. A explicação correta teve que aguardar o surgimento de telescópios mais potentes e a descoberta de um método para calcular distâncias a partir da observação de um tipo especial de estrela. Isso ocorreu em meados da década de 1920, quando Edwin Hubble[17] usou o telescópio de 2,5 m de Monte Wilson, o maior da época, para medir a intensidade da luz de estrelas raras, conhecidas como v*ariáveis cefeidas*,[18] que ele havia descoberto em três "nebulosas". A partir dessas medidas, Hubble determinou que uma das nebulosas, a grande nebulosa espiral de Andrômeda, se encontrava a dois milhões de anos-luz de distância do Sol. Com isso, demonstrou que as "nebulosas" eram na realidade galáxias parecidas com a nossa, como havia sido proposto pelo filósofo Immanuel Kant 150 anos antes, que não pertenciam à Via Láctea. O aprofundamento da descoberta de Hubble nos conduz ao reino da cosmologia, o estudo da estrutura do universo.

Depois de constatar que as "nebulosas" eram na realidade galáxias distantes, Hubble passou a estudá-las de forma sistemática (um telescópio de grande porte permite observar um número enorme de galáxias) e verificou que podiam ser enquadradas em quatro categorias gerais. A maioria tinha uma forma geométrica regular e ocorria em duas variedades: as *galáxias elípticas*, de forma esférica ou elipsoidal, e as *galáxias espirais*, em forma de disco. As galáxias espirais, por sua vez, podiam ser divididas em dois subgrupos, as *espirais ordinárias* e as *espirais barradas*. Hubble chamou de *galáxias irregulares* as poucas galáxias que não tinham forma definida. A Figura 13-25 mostra exemplos dos quatro tipos de galáxias. A Via Láctea é uma grande galáxia espiral barrada.

Além da diferença de forma, os quatro tipos de galáxias possuem outras características próprias. Nas galáxias espirais, a maioria das estrelas está girando em torno de um ponto central, enquanto nas elípticas o movimento das estrelas é quase aleatório, com apenas uma pequena componente rotativa. Além disso, ao contrário do que acontece nas galáxias espirais e em muitas galáxias irregulares, as galáxias elípticas não possuem grande quantidade de gás e poeira interestelar. A ausência de estrelas jovens na maioria das galáxias elípticas é provavelmente uma consequência deste fato. Com raras exceções, as galáxias elípticas são muito menores que as galáxias espirais, apresentando, em média, 20% do diâmetro e apenas um milésimo da massa de uma galáxia espiral típica como a Via Láctea.

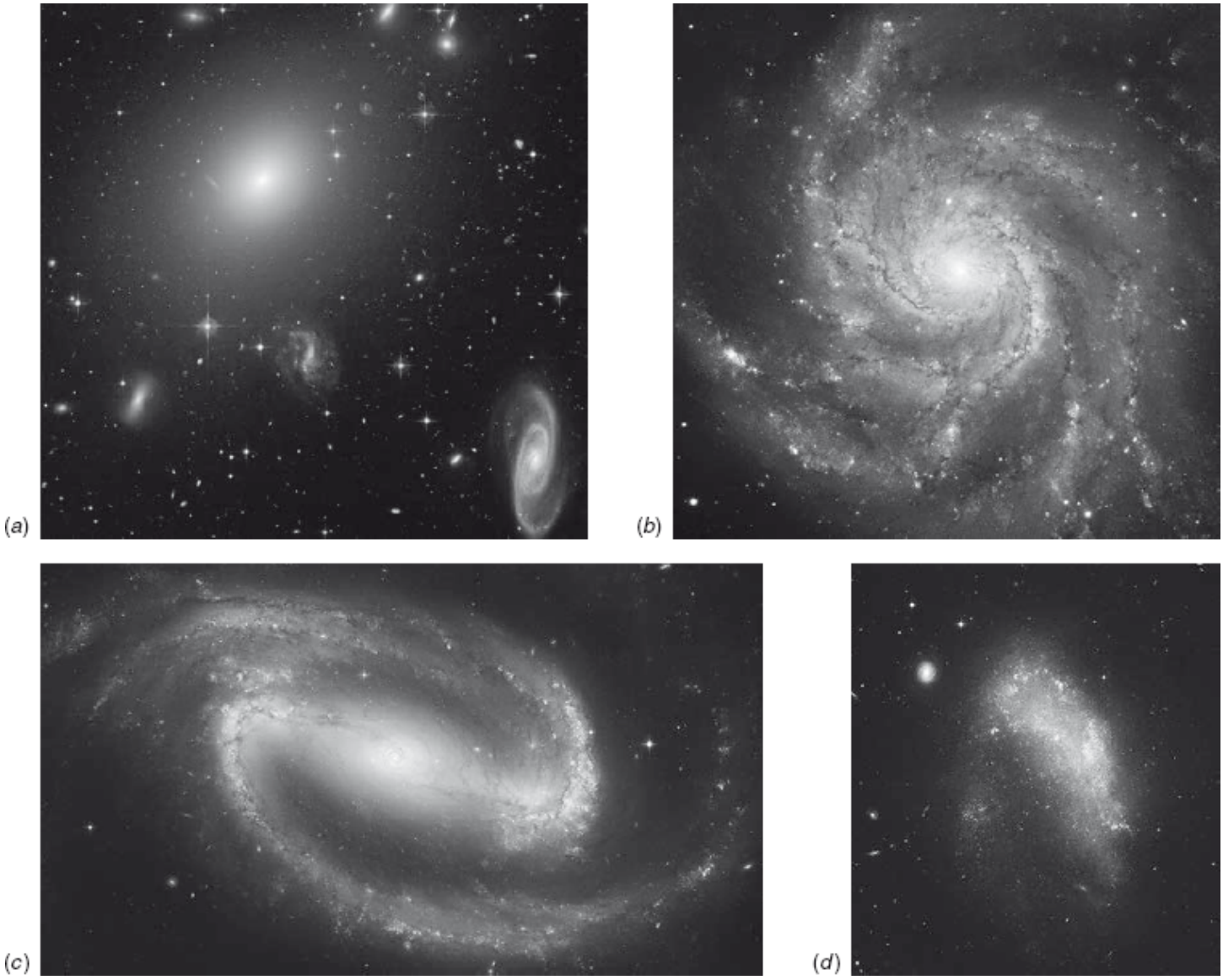


FIGURA 13-25 Na classificação de galáxias proposta por Hubble, (*a*) é um exemplo de galáxia elíptica, (*b*) é uma espiral ordinária, (*c*) é uma espiral barrada e (*d*) é uma galáxia irregular. A Via Láctea é considerada uma galáxia espiral com uma barra muito tênue. [(*a*) *NASA*, *ESA* e *The Hubble Heritage Team* (*STScI*/*AURA*). (*b*) *NASA* e *ESA*. (*c*) *NASA*, *ESA* e *The Hubble Heritage Team* (*STScI*/*AURA*). (*d*) *NASA*, *ESA* e *The Hubble Heritage Team* (*STScI*/*AURA*).]

Galáxias Quiescentes e Galáxias Ativas

A maioria das 10^{10} galáxias que existem no universo observável parecem ser *galáxias quiescentes*, isto é, galáxias que não apresentam nenhuma atividade incomum. Quase todas essas galáxias estão tão distantes que nossos instrumentos não podem mostrar detalhes internos; assim, apenas o espectro e o fluxo radiante F da galáxia inteira podem ser observados. A faixa de velocidades Δv das estrelas de uma galáxia quiescente, medida através do alargamento Doppler das linhas do espectro, está relacionada à luminosidade L através da equação*

$$L \propto (\Delta v)^4 \qquad \textbf{13-26}$$

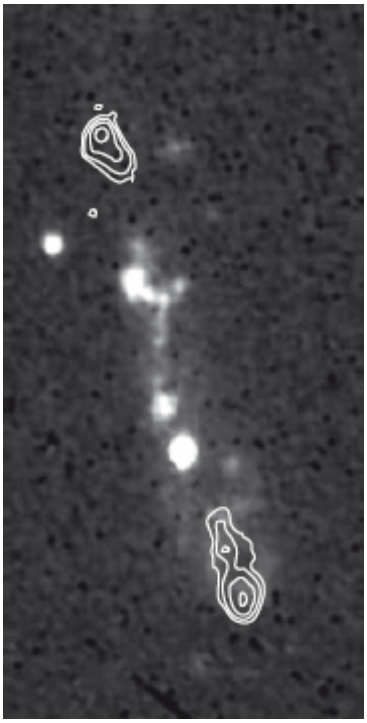
Como L está relacionada a F e r, a distância da galáxia, pela Equação 13-8, a distância r pode ser calculada a partir de medidas do deslocamento Doppler e do fluxo radiante.

Em uma fração muito pequena das galáxias, as chamadas *galáxias ativas*, algo extremamente violento, mesmo em comparação com as supernovas, está ocorrendo. Existem várias classes de galáxias ativas, algumas das quais talvez nem sejam galáxias. As primeiras a serem estudadas se tornaram conhecidas como *galáxias Seyfert*, em homenagem ao descobridor, o astrônomo americano Carl Keenan Seyfert. Trata-se de galáxias espirais com núcleos extremamente brilhantes. Em muitas delas, a luz proveniente do núcleo é mais forte que a de todas as estrelas da galáxia e, estranhamente, pode dobrar de intensidade em um período de menos de um ano. Uma variação tão rápida da intensidade total significa que a fonte deve ter menos de um ano-luz de extensão, embora seja capaz de produzir tanta energia quanto 10^{11} estrelas. Ainda mais surpreendente, se é que isso é possível, é o fato de que a luz emitida por uma galáxia Seyfert tem um espectro de linhas de emissão alargadas

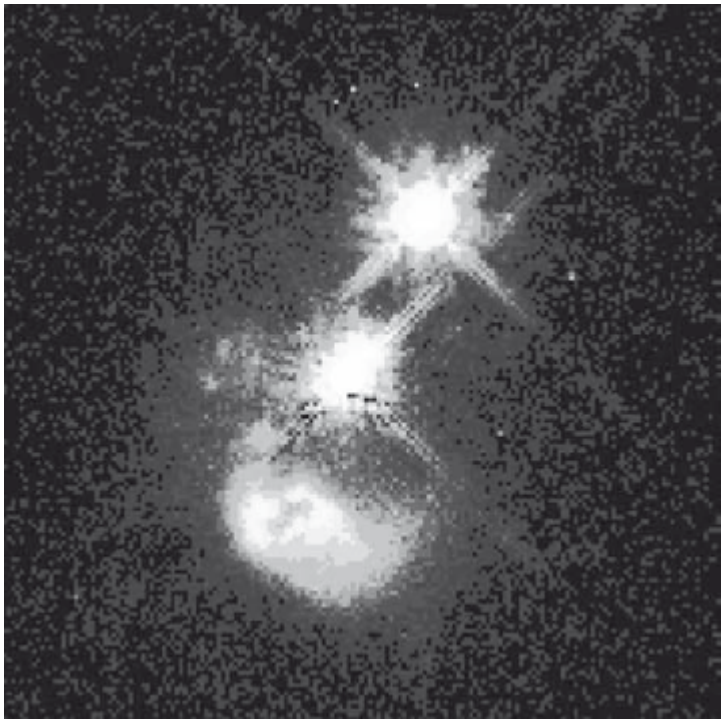
produzidas por transições permitidas e proibidas de sistemas atômicos altamente ionizados, superposto a um espectro contínuo que, ao contrário do espectro das estrelas, não apresenta linhas de absorção. Isso sugere que a imensa energia não está sendo produzida por reações termonucleares; sua origem constitui um mistério.

Outro tipo de atividade extrema ocorre em algumas poucas galáxias elípticas conhecidas como *galáxias N* e *objetos BL Lac*. As galáxias N são o equivalente das galáxias Seyfert para as galáxias elípticas; em outras palavras, são galácticas elípticas com núcleos extremamente luminosos. Os objetos BL Lac são parecidos com as galáxias N, mas apresentam rápidas variações de intensidade. Nesse tipo de galáxia, a intensidade pode dobrar em menos de uma semana e a polarização da luz pode sofrer uma inversão total em menos de um dia, o que sugere uma fonte de energia com menos de um dia-luz de diâmetro. A maioria dos astrônomos acredita que os objetos BL Lac sejam galáxias elípticas gigantes situadas a aproximadamente 10^9 anos-luz da Terra.

Algumas galáxias elípticas gigantes também emitem intensamente na faixa de rádio do espectro. Essas *radiogaláxias* vêm sendo muito estudadas ultimamente e os resultados são espantosos. A fonte de rádio Centauro A, por exemplo, apresenta dois lobos e um pequeno núcleo emissor de ondas de rádio na região entre os lobos. Trata-se de um dos objetos mais brilhantes do universo na faixa de rádio. A análise do espectro mostra que, em 100 milhões de anos, a galáxia emitiu uma energia da ordem de 10^{56} J, a mesma que seria liberada se todas as estrelas da Via Láctea se transformassem em supernovas! Ainda não se sabe qual é o mecanismo responsável por uma produção tão abundante de energia.



Radiogaláxia 3C368. As curvas de nível mostram os centros de emissão de ondas de rádio. As manchas brancas podem ser regiões de formação de estrelas nesta galáxia elíptica. [*NASA*, *NRAO*, *VLA*, *HST*, *WFPC 2*, *M. Longair* (*U. Cambridge*).]



Os restos da colisão catastrófica de duas galáxias podem estar alimentando o quasar IRAS 04505-2958, que está a cerca de 3×10^9 anos-luz da Terra. Os astrônomos acreditam que a colisão despedaçou o núcleo de uma galáxia espiral, deixando um anel (parte inferior da foto). O anel está na frente do quasar (o objeto luminoso no centro) a uma distância de 15.000 anos-luz (um sétimo do diâmetro da Via Láctea). O objeto luminoso um pouco acima do quasar é uma estrela em primeiro plano. [*John Bahcall* (*Institute for Advanced Study*, *Princeton University*), *Mike Disney* (*University of Wales*) *e NASA*).]

Em um universo repleto de fenômenos estranhos, os *quasars*, abreviação de *quasi-stellar radio sources*, ou seja, fontes de rádio quase estelares estão entre os mais misteriosos. Esses objetos produzem imensa quantidade de energia nas faixas da radiofrequência e da luz visível. A imagem obtida com luz visível se parece com as das estrelas, ou seja, é praticamente pontual; o espectro lembra o das galáxias Seyfert. As imagens de alguns quasars na faixa da radiofrequência mostram dois lobos, como os das radiogaláxias, o que torna ainda mais difícil classificá-los. O Sloan Digital Sky Survey (SDSS), que começou em 2000 e deve prosseguir até 2014, já catalogou 120.000 quasars; desses, mais de 11.000 apresentam um desvio para o vermelho maior que 2,3 e o mais distante apresenta um desvio para o vermelho $z = 5{,}8$. Existe também uma classe de objetos 10 vezes mais numerosos que os quasars, denominados inicialmente objetos quase estelares, que se parecem muito com os quasars, mas não emitem ondas de rádio. Atualmente, os dois tipos de objeto são chamados de quasars. Os que emitem ondas de rádio recebem o nome de *radio-loud quasars*, ou seja, quasars radiobarulhentos, enquanto os que não emitem ondas de rádio são chamados de *radio-quiet quasars*, ou seja, quasars radiossilenciosos.

Talvez o fato mais estranho a respeito dos quasars seja o grande desvio para o vermelho da luz emitida por esses objetos. Esse desvio sugere que alguns quasars estão se afastando de nós a uma velocidade maior que $0{,}95c$, o que os tornaria os objetos mais distantes que se conhece, situados a uma distância da Terra da ordem de 10 bilhões de anos-luz. Nesse caso, a potência emitida seria da ordem de 10^{40} W, maior que a de 10^{12} sóis. Além do mais, a intensidade de alguns quasars varia rapidamente em um intervalo de poucas horas, o que sugere dimensões de apenas algumas horas-luz.

A Lei de Hubble

Quando observamos galáxias distantes, a resolução dos nossos telescópios não é suficiente para que possamos observar estrelas isoladas; o que vemos é a luz emitida por todas as estrelas da galáxia. Como no caso das linhas de Fraunhofer no espectro do Sol, o espectro contínuo das galáxias contém linhas de absorção produzidas pelas atmosferas das estrelas, que são mais frias (relativamente!) que a parte central. Em geral, os comprimentos de onda das linhas de absorção observadas no espectro das galáxias são maiores que os comprimentos de onda correspondentes medidos na Terra, ou seja, as linhas de absorção das galáxias distantes apresentam um desvio para o vermelho. O desvio para o vermelho z, definido na Seção 1-5, é dado por

$$z = \frac{f_0 - f}{f} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \qquad \textbf{13-27}$$

em que f_0 e λ_0 são os valores medidos no referencial da estrela ou galáxia (o emissor) e f e λ são os valores medidos no referencial da Terra (o observador). A Figura 13-26 mostra o desvio para o vermelho de cinco galáxias cujas distâncias da Terra

estão entre 2,6 e 287,5 Mpc. Note que o parâmetro z é adimensional.

Edwin Powell Hubble foi o primeiro astrônomo a perceber que existe uma relação entre o desvio para o vermelho do espectro de uma galáxia e a distância que a separa de nós. A análise de Hubble (veja a Figura 13-27*a*), publicada em 1929, mostrou uma relação linear entre o desvio para o vermelho z e a distância r a que a galáxia se encontra da Terra para as "nebulosas" (ou seja, galáxias) cujas distâncias e desvios para o vermelho eram conhecidos na época. A relação, hoje conhecida como *lei de Hubble*, pode ser expressa pela equação

$$z = \frac{H_0}{c} r \qquad \textbf{13-28}$$

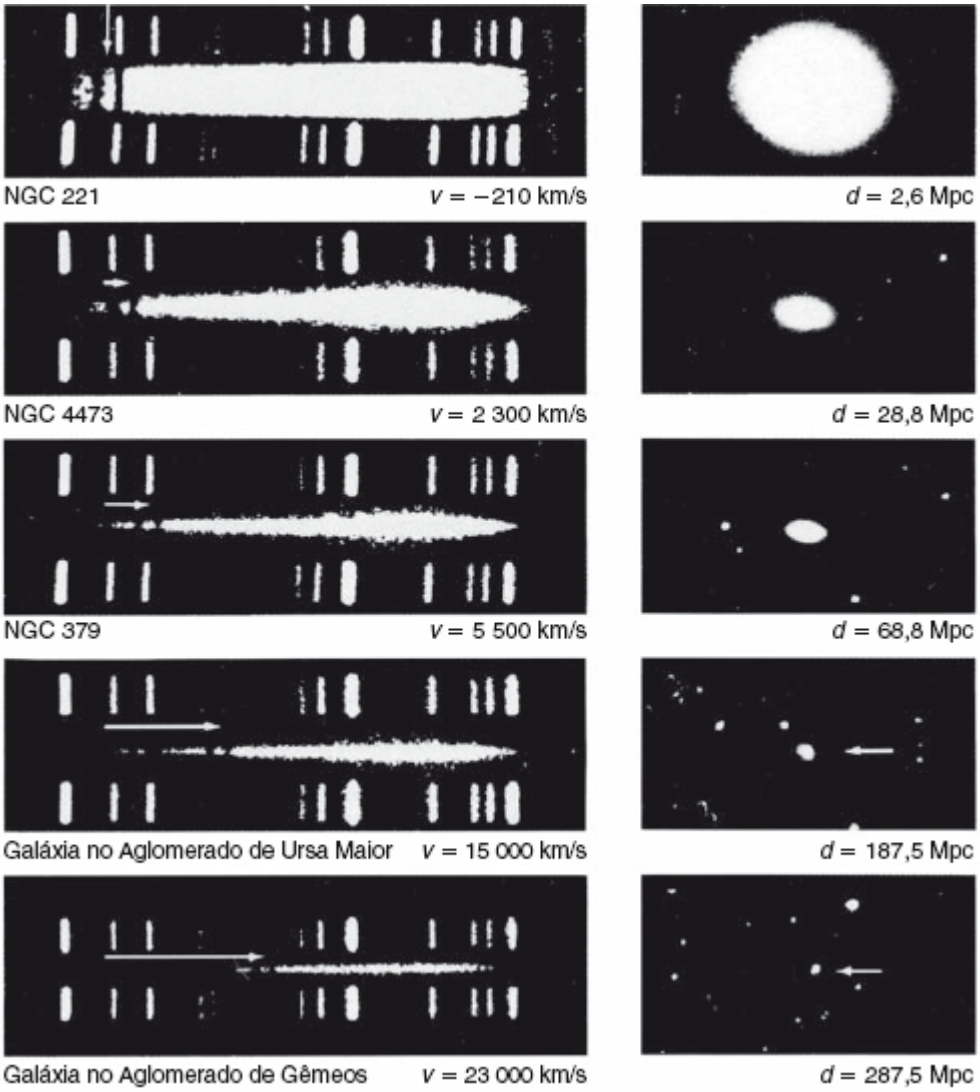


FIGURA 13-26 As setas mostram o ponto médio das linhas de absorção H e K do Ca nos espectros de cinco galáxias situadas a diferentes distâncias da Terra. No caso da galáxia mais próxima da Terra, NGC 221, as linhas estão deslocadas para a esquerda, ou seja, existe um "desvio para o azul", que indica que a galáxia está se aproximando da Terra. Nos outros quatro espectros, as linhas estão deslocadas para a direita, ou seja, existe um "desvio para o vermelho", que mostra que as galáxias estão se afastando da Terra. Os espectros acima e abaixo dos espectros das galáxias são espectros do He, registrados na mesma chapa fotográfica para aumentar a precisão das medições. [*California Institute of Technology.*]

em que H_0 é uma constante conhecida como *constante de Hubble*. Hubble interpretou o desvio para o vermelho como uma consequência do efeito Doppler (veja a Seção 1-5). Como os valores de desvio para o vermelho usados para plotar o gráfico da Figura 13-27*a* eram todos pequenos ($z < 0{,}004$), Hubble usou a relação $v \approx H_0 r$, uma aproximação não relativística da Equação 13-28 que pode ser obtida a partir da Equação 1-37:

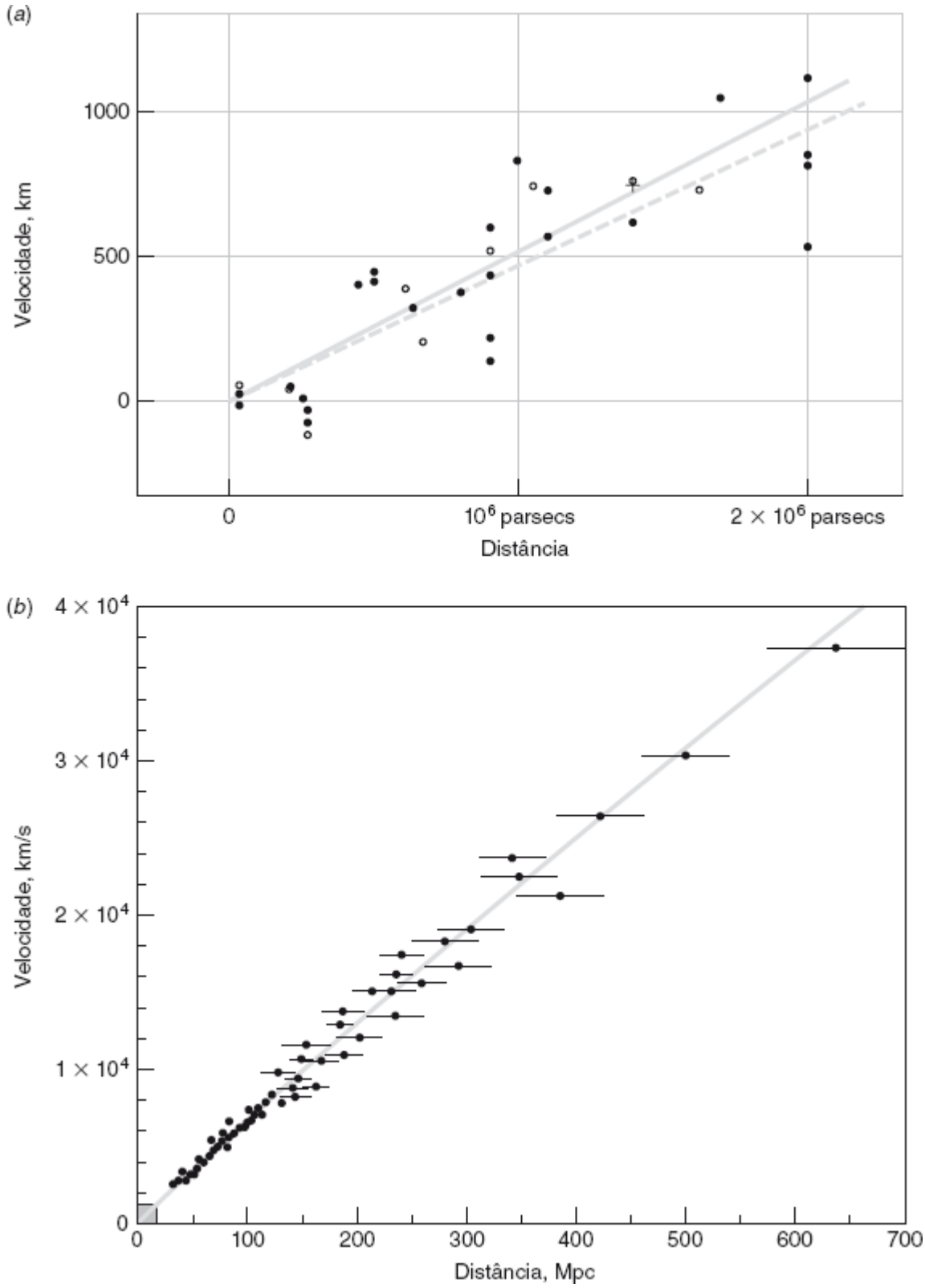


FIGURA 13-27 (*a*) Gráfico original de Hubble, usado para mostrar a relação entre o desvio para o vermelho (eixo vertical) e a distância entre as nebulosas e a Terra (eixo horizontal). Os pontos pretos e a reta contínua representam nebulosas individuais. Os círculos e a reta tracejada representam os resultados obtidos dividindo as nebulosas em grupos. A cruz representa a velocidade média correspondente à distância média de 22 nebulosas cujas distâncias não puderam ser estimadas individualmente. (A unidade do eixo vertical deveria ser km/s em vez de km.) (*b*) Gráfico semelhante a (*a*), usando distâncias determinadas a partir de supernovas Tipo Ia. As margens de erro das distâncias, indicadas por segmentos de reta horizontais, são todas menores que 10%. O pequeno quadrado na origem representa a área coberta pelo gráfico mostrado em (*a*). [(*a*) *The Realm of the Nebulae*, *Yale University Press*, *New Haven*, *CT © 1936*. (*b*) *S. Jha*, *Ph.D. thesis*, *Harvard University*, *2002*.]

$$z = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \approx (1+\beta) - 1 = \beta = \frac{v}{c}$$

$$\text{ou} \quad zc \approx v \quad \Longrightarrow \quad v \approx H_0 r$$

A Figura 13-27*b* mostra um gráfico semelhante ao da Figura 13-27*a*, com a diferença de que as distâncias, em vez de serem calculadas a partir do período das variáveis cefeidas, foram calculadas a partir das curvas de luminosidade de supernovas Tipo Ia (veja a Seção 13-3).

Em princípio, o valor de H_0 parece fácil de medir, já que, para cada galáxia, depende de apenas dois parâmetros, a velocidade de recessão e a distância. Entretanto, embora o primeiro desses parâmetros seja fácil de determinar a partir do desvio para o vermelho, as distâncias das galáxias são muito difíceis de medir e foram calculadas, mesmo assim indiretamente, apenas para uma pequena fração das 10^{10} galáxias que existem no universo observável. Na verdade, o valor de H_0 muda toda vez que os dados usados para calibrar a escala de distâncias são revistos. O valor atualmente adotado para a constante de Hubble, dado pela Equação 13-29, foi calculado pela NASA com base em dados colhidos por três instrumentos, a sonda espacial Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) e dois satélites, o Telescópio Espacial Hubble e o Observatório de Raios X Chandra:

$$\begin{aligned} H_0 &= 70{,}8 \pm 1{,}6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \\ &= 21{,}2 \pm 0{,}7 \text{ km s}^{-1} (10^6 \text{ anos-luz})^{-1} \end{aligned} \qquad \textbf{13-29}$$

Observe que a dimensão de H_0 é 1/tempo. A grandeza $1/H_0$ é chamada de *tempo de Hubble* e tem o valor aproximado de 14×10^9 anos (14 bilhões de anos). Este número corresponderia aproximadamente à idade de universo se a velocidade de recessão tivesse se mantido constante desde o Big Bang (veja a Seção 14-8).

EXEMPLO 13-5 **Distância de uma Galáxia na Constelação de Virgem** O desvio para o vermelho da luz emitida por uma galáxia da constelação de Virgem é $z = 0{,}004$. A que distância da Terra está a galáxia?

SOLUÇÃO

$v \approx zc = 0{,}004(3{,}0 \times 10^8 \text{ m/s}) = 1{,}2 \times 10^6 \text{ m/s} = 1200 \text{ km/s}$

Usando a lei de Hubble, obtemos:

$$\begin{aligned} r = \frac{v}{H_0} &= \frac{1200 \text{ km/s}}{21{,}2 \text{ km s}^{-1} (10^6 \text{ anos-luz})^{-1}} \\ &= \frac{(1200 \text{ km/s})\,(10^6 \text{ anos-luz})}{21{,}2 \text{ km/s}} \\ &= 56{,}6 \times 10^6 \text{ anos-luz} = 16{,}9 \text{ Mpc} \end{aligned}$$

Observação: *Compare este resultado com a distância da galáxia de Virgem medida por outros métodos* (*Tabela 13-4*).

De acordo com a lei de Hubble, todas as galáxias estão se afastando da Terra, e as mais distantes estão se movendo mais depressa. Entretanto, isso não quer dizer que a Terra ocupa um lugar privilegiado no espaço; um observador em outra galáxia obteria o mesmo valor para a constante de Hubble (veja o Problema 13-26). O que a lei de Hubble revela é que as galáxias estão se afastando umas das outras a uma velocidade média de 70,8 km/s por Mpc de distância. Em outras palavras, *o universo está se expandindo*. Trata-se de uma descoberta importante, com profundas implicações.

Todas as galáxias participam da expansão geral do universo. Em consequência, o comprimento de onda da luz emitida em direção à Terra por uma galáxia (ou qualquer outro objeto do espaço sideral) sofre um alongamento igual ao alongamento do espaço no qual está se propagando, o que dá origem a um *desvio cosmológico para o vermelho*. É este desvio cosmológico para o vermelho que é descrito pela lei de Hubble. Embora, a rigor, a relação entre o desvio cosmológico para o vermelho e a velocidade de recessão de uma galáxia não seja dada pela equação do efeito Doppler para a luz, apresentada no Capítulo 1 (Equação 1-38), os astrônomos usam frequentemente a equação do efeito Doppler para calcular a velocidade de recessão de uma galáxia a partir do valor experimental do desvio para o vermelho. Isso equivale a supor que a galáxia está se movendo no espaço em vez de se afastar de nós por causa da expansão do universo. Podemos verificar se este artifício permite estimar com precisão razoável a distância das galáxias fazendo $v = H_0 r$ na Equação 1-38 e explicitando r, o que nos dá

$$r \approx \frac{c}{H_0} \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \qquad \textbf{13-30}$$

Para $z \leq 2$, a Equação 13-30 fornece valores de r que diferem em menos de 5% dos valores medidos pelos métodos mostrados na Tabela 13-4. Mesmo assim, convém lembrar que o desvio cosmológico para o vermelho é conceitualmente diferente do

desvio para o vermelho causado pelo efeito Doppler.

No caso do desvio cosmológico para o vermelho, a variação relativa do comprimento de onda é igual à variação relativa do "tamanho" ou escala R do universo entre o instante em que a luz foi emitida e o instante em que a luz foi observada, o que nos permite escrever o desvio para o vermelho na forma

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{R_{\text{observação}} - R_{\text{emissão}}}{R_{\text{emissão}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{R_{\text{observação}}}{R_{\text{emissão}}} = 1 + z \qquad \textbf{13-31}$$

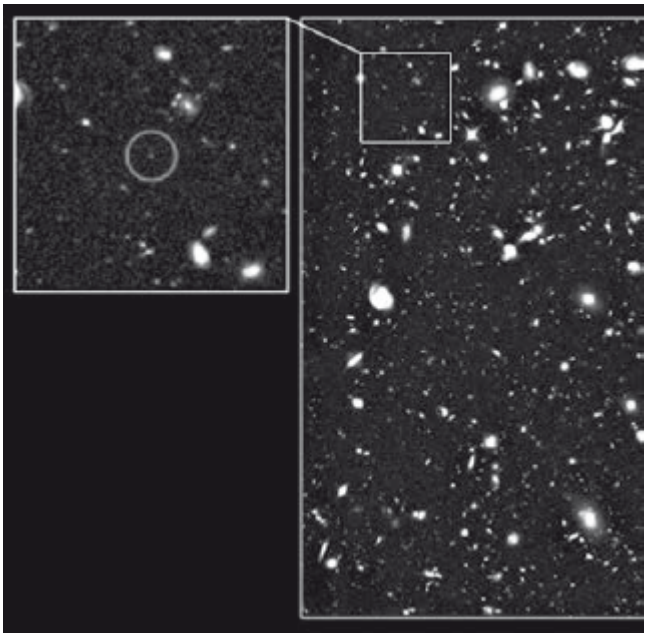
De acordo com a Equação 13-31, por exemplo, uma galáxia com $z = 2$ está hoje três vezes mais distante da Terra que no instante em que a luz que estamos observando foi emitida. Observando regiões do espaço relativamente próximas da Terra, obtemos uma "fotografia" do universo *atual*, já que, em nossa região do espaço, o desvio cosmológico para o vermelho é desprezível: $z = 0$. Por outro lado, quando observamos uma região do espaço para a qual o desvio cosmológico é z, estamos vendo o universo como era quando tinha um tamanho igual a $1/(1 + z)$ do tamanho atual.

A descoberta dos quasars e a análise do desvio para o vermelho e luminosidade desses estranhos objetos contribuíram significativamente para o conhecimento da expansão e evolução do universo. As observações mostram que os quasars de alta luminosidade são mais numerosos para grandes valores de z do que para pequenos valores de z. Isso pode significar que os quasars eram mais numerosos ou mais luminosos no passado remoto. Pode ser também que esta tendência seja simplesmente o resultado da expansão geral do universo e que a concentração e luminosidade dos quasars não tenham variado com o tempo. Para evitar o efeito complicador da expansão, os astrofísicos e cosmólogos definem *coordenadas comóveis* e, para os propósitos de nossa discussão, uma *concentração comóvel*. Voltaremos às primeiras na Seção 13-8. A segunda anula o efeito da expansão do universo dividindo por $(1 + z)^3$ a concentração de objetos com desvio para o vermelho z, o que converte a concentração de objetos para o valor que seria observado se o desvio para o vermelho fosse $z = 0$ (ou seja, no momento presente). Assim, se a concentração e/ou a luminosidade dos objetos não variar com o tempo, a concentração comóvel e a luminosidade permanecerão constantes. Qualquer variação é uma indicação de que a concentração e/ou a luminosidade dos quasars mudou com o tempo.

As observações da concentração comóvel de quasars de alta luminosidade mostram que eles são mais de 1000 vezes mais numerosos para $z = 2$ do que nos dias de hoje (ou seja, para $z = 0$), *mas* que o número total de quasars não variou entre $z = 2$ e $z = 0$. Assim, de acordo com as observações, a luminosidade dos quasars mudou com o tempo, enquanto a concentração comóvel permanecia constante. Isso significa que, pelo menos até $z = 2$, o número de quasars no universo não mudou, mas eles se tornaram cada vez menos luminosos. Na faixa de desvios para o vermelho entre $z = 2$ e $z = 6$, a situação é mais complexa. A partir de $z = 3$, a concentração comóvel diminui e chega a ser 10 vezes menor para $z = 4$. Os cientistas ainda estão tentando compreender o que isso significa.

Tabela 13-4Distância da constelação de Virgem medida por vários métodos

Método	Cefeidas	Novas	Flutuações de brilho	Supernovas Tipo Ia
Distância de Virgem (Mpc)	15–25	21,1 ± 3,9	15,9 ± 0,9	19,4 ± 5,0
Maior distância mensurável (Mpc)	<29	<20	<50	>1000



No interior do círculo, na imagem da direita, que é uma vista ampliada do quadrado mostrado na imagem da esquerda, está a imagem de uma das galáxias mais distantes que já foram observadas. Dezesseis horas de observações com o espectrógrafo SINFONI do Very Large Telescope, no Chile, confirmaram que a galáxia, UDFy-38135539, está a $13{,}1 \times 10^9$ anos-luz da Terra, afastando-se a uma velocidade de 0,97*c*. A galáxia provavelmente se formou 600 milhões de anos após o Big Bang. [*M. Lehnert* (*Paris Observatory*) *et al*., *Nature*, *Oct. 21*, *2010*.]

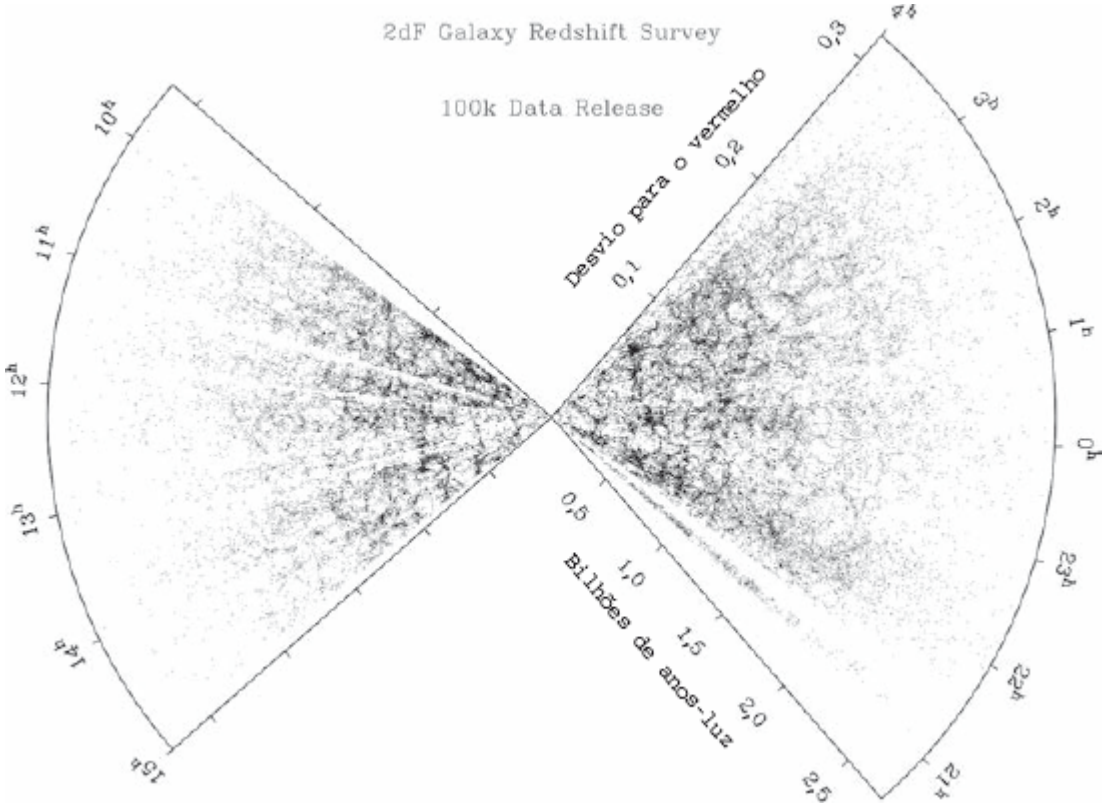


FIGURA 13-28 O 2dF Galaxy Redshift Survey (2dF GRS) foi um importante levantamento espectroscópico que utilizou as instalações do Observatório Anglo-Australiano. O projeto, que foi encerrado em 2002, obteve espectros de alta qualidade de 245.591 objetos e permitiu várias análises pioneiras, como, por exemplo, a comparação direta dos desvios para o vermelho com a anisotropia da radiação cósmica de fundo na mesma escala de distâncias e estudos de aglomerados de galáxias para testar modelos inflacionários da evolução do universo. O levantamento foi integrado com o 2dF Quasi Stellar Objects Survey. [*Matthew Colless e o 2dF Galaxy Redshift Survey Team.*]

Uma questão óbvia é saber se existem outros resultados experimentais que apoiam a lei de Hubble. Por exemplo: a expansão observada é geral ou é um acidente estatístico, uma consequência do fato de que conhecemos a distância de apenas uma pequena fração das 250.000 galáxias (entre as 10^{10} que compõem o universo observável) cujos desvios para o vermelho foram medidos até o momento? Levantamentos de desvios para o vermelho em várias regiões do universo constituem um passo

importante para estudar a expansão prevista por Hubble e, em conjunto com medidas independentes da distância de algumas galáxias, determinar um valor mais preciso para a constante de Hubble. Esses levantamentos vêm sendo executados há algum tempo; até o momento, cerca de 10^{-5} do volume do universo visível foi examinado. Os levantamentos resultaram em descobertas inesperadas, mas não levaram a uma resposta definitiva. Hoje sabemos, por exemplo, que existem imensos vazios no espaço, regiões nas quais a concentração de galáxias é apenas 20% da média para o universo como um todo, e que as galáxias tendem a se agrupar em aglomerados, e os aglomerados em superaglomerados. A Via Láctea pertence ao Aglomerado Local, formado por cerca de uma dúzia de galáxias. Além disso, as galáxias tendem a formar estruturas como placas e filamentos. Explicar como essas estruturas se formaram a partir da expansão geral descrita pela lei de Hubble representa um desafio para os modelos cosmológicos atuais. O modelo cosmológico mais bem-sucedido até o momento é o modelo ΛCDM, onde Λ é a constante cosmológica de Einstein e CDM são as iniciais de Cold Dark Matter (Matéria Escura Fria). Um dos maiores levantamentos de galáxias foi o 2dF Galaxy Redshift Survey (2dF GRS; Figura 13-28). O projeto, que foi concluído em 2002, obteve espectros e desvios para o vermelho de 245.591 objetos, principalmente galáxias. Um levantamento ainda maior, o Sloan Digital Sky Survey (SDSS), está em andamento. Nas duas primeiras fases do projeto, foram medidos os espectros de 930.000 galáxias, 120.000 quasars e 225.000 estrelas. O telescópio de 2,5 m do Apache Point Observatory, no Novo México, que trabalha exclusivamente para o projeto, executou a primeira fase de 2000 a 2005, a segunda fase de 2005 a 2008 e iniciou, em julho de 2008, uma terceira fase, que deverá se estender até 2014.

13-7 Cosmologia e Gravitação

O Princípio Cosmológico

Como vimos, a lei de Hubble leva à conclusão de que o universo está se expandindo e nos fornece uma medida, $1/H_0$, do intervalo de tempo decorrido desde que a expansão começou. Nesta seção, vamos examinar outras formas de verificar se esta conclusão está correta.

O ponto de partida para essa discussão é a hipótese, baseada em argumentos filosóficos, de que o universo é homogêneo e isotrópico em qualquer instante de tempo. Em outras palavras, seja qual for o instante de tempo escolhido, o universo tem as mesmas propriedades em toda parte e parece o mesmo em todas as direções e de qualquer ponto de vista. Esta hipótese é conhecida como *princípio cosmológico*. Observe que a lei de Hubble é compatível com o princípio cosmológico.

É evidente que o princípio cosmológico *não é válido* para pequenas regiões do universo. As galáxias tendem a se agrupar em aglomerados locais. Mesmo em uma escala de 10^8 anos-luz, uma dimensão típica de superaglomerados de galáxias, o universo não é homogêneo nem isotrópico. Entretanto, quando examinamos mapas do espaço muito distante (veja a Figura 13-29), a distribuição de galáxias realmente parece homogênea e isotrópica. Mapas de desvios para o vermelho, como o da Figura 13-28, que se estende até mais de $2{,}5 \times 10^9$ anos-luz, também revelam homogeneidade e isotropia.

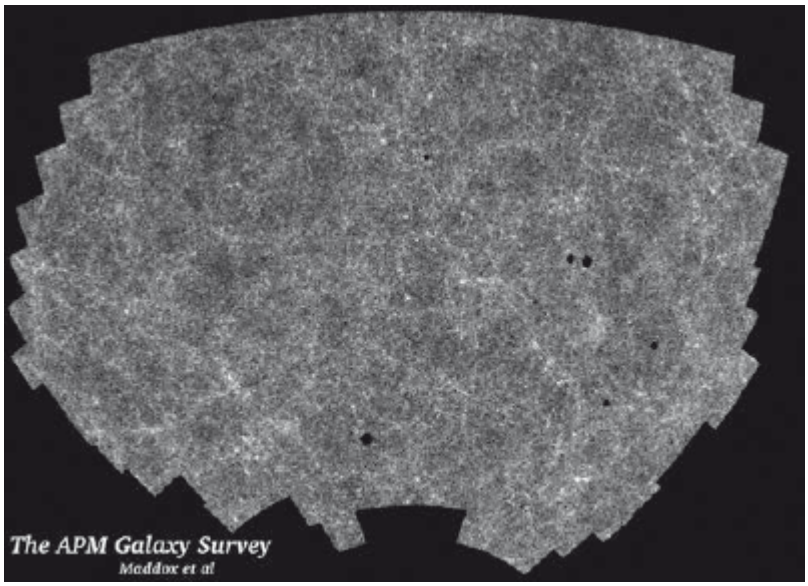


FIGURA 13-29 Mapa com aproximadamente 2 milhões de galáxias situadas a distâncias de até 2×10^9 anos-luz da Terra. A distribuição de galáxias parece homogênea e isotrópica. O mapa é um mosaico de 185 fotografias tiradas com o telescópio Schmidt do European Southern Observatory. O polo sul da Galáxia está no centro, na parte inferior. [S. Maddox (Nottingham U.) *et al*., *APM Survey*, *Astrophys*. Dept. Oxford University.]

A Densidade Crítica de Energia do Universo

Como já dissemos, a idade de Hubble, $1/H_0 = 14 \times 10^9$ anos, é calculada supondo que a velocidade de recessão se manteve constante desde o Big Bang. Quando a recém-descoberta aceleração da expansão ainda não era conhecida, a expectativa era de que a gravidade estivesse fazendo diminuir a taxa de expansão. A gravidade existente no universo seria suficiente para um dia reverter o processo de expansão, ou a expansão continuaria para sempre? A resposta dependia da densidade mássica do universo, ρ_0. Podemos compreender este fato considerando o movimento de uma galáxia, de massa m, a uma distância R da Terra. Seja M a massa total das galáxias situadas no volume esférico de raio R. A energia potencial gravitacional da galáxia é $-GMm/R$. A energia total da galáxia é

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} \qquad \textbf{13-32}$$

Se lançamos um objeto da Terra com velocidade v, o objeto escapa, se a energia total é maior ou igual a zero, e volta a cair na Terra, se a energia total é negativa. Da mesma forma, se a energia total da galáxia é maior ou igual a zero, a galáxia continua a se afastar da Terra para sempre, mas se a energia total é negativa, um dia a galáxia deixa de se afastar, inverte o movimento e começa a se aproximar da Terra. De acordo com a Equação 13-32, a energia total da galáxia depende da densidade mássica. Podemos calcular a densidade crítica do universo, ρ_c, fazendo a energia total igual a zero na Equação 13-32:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{R}$$

De acordo com a versão não relativística da lei de Hubble, $v = H_0R$ e, portanto,

$$\frac{1}{2}m(H_0R)^2 = \frac{GMm}{R}$$

$$\frac{1}{2}H_0^2 = \frac{GM}{R^3}$$

e

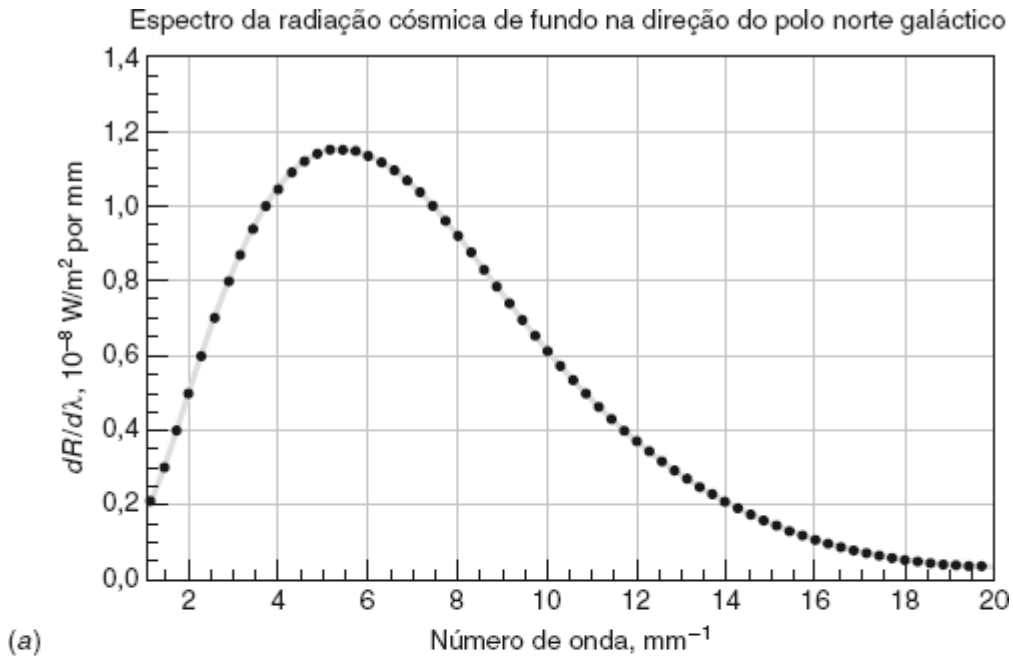
$$\rho_c = \frac{M}{\left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \qquad \textbf{13-33}$$

Substituindo H_0 e G por seus valores, obtemos a densidade crítica do universo:

$$\rho_c \approx 10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3}$$

Este valor corresponde aproximadamente a cinco átomos de hidrogênio por metro cúbico.

A determinação da densidade mássica atual do universo, ρ_0, constituía, portanto, um importante objetivo. Se $\rho_0 < \rho_c$, a expansão cessaria um dia e o universo começaria a se contrair. Se $\rho_0 < \rho_c$, a expansão continuaria para sempre. No caso limite em que $\rho_0 = \rho_c$, o universo deixaria de se expandir, mas não chegaria a se contrair. É preciso também chamar a atenção para o fato de que, se $\rho_0 > \rho_c$ no momento presente, a relação continuaria a ser a mesma no futuro, já que, na verdade, o futuro da expansão do universo seria determinado pela lei de conservação da energia. Como a expansão do universo faz ρ_0 diminuir com o passar do tempo, a constante de Hubble também deveria diminuir para assegurar que ρ_0 permanecesse maior que ρ_c. Em outras palavras, a constante de Hubble deveria ser uma função do tempo $H(t)$, com $H(t_0) = H_0$. O valor de ρ_0 calculado com base no universo *visível* (matéria bariônica) corresponde a menos de 5% de ρ_c, o que parecia indicar que o universo continuaria a se expandir para sempre; entretanto, era preciso levar em conta a matéria escura, já discutida, cuja quantidade no universo era desconhecida. Recentemente, o estudo de supernovas do tipo Ia, usadas como "velas-padrão", revelou um fato inesperado: para uma dada luminosidade, o desvio para o vermelho de supernovas tipo Ia é menor que o previsto. Isso significa que o universo estava se expandindo mais lentamente no passado e que, portanto, a taxa de expansão do universo está aumentando. Para explicar esta observação, os cientistas postularam a existência de uma energia escura, responsável por uma força repulsiva que está acelerando a expansão do universo. Esta visão é apoiada por pesquisas muito recentes que comparam as flutuações da radiação cósmica de fundo, mostradas na Figura 13-30*b*, com as flutuações da densidade mássica observadas no 2dF GRS (Figura 13-28). De acordo com estudos recentes, o universo contém 4,9% de matéria comum, 26,8% de matéria escura e 68,3% de energia escura.



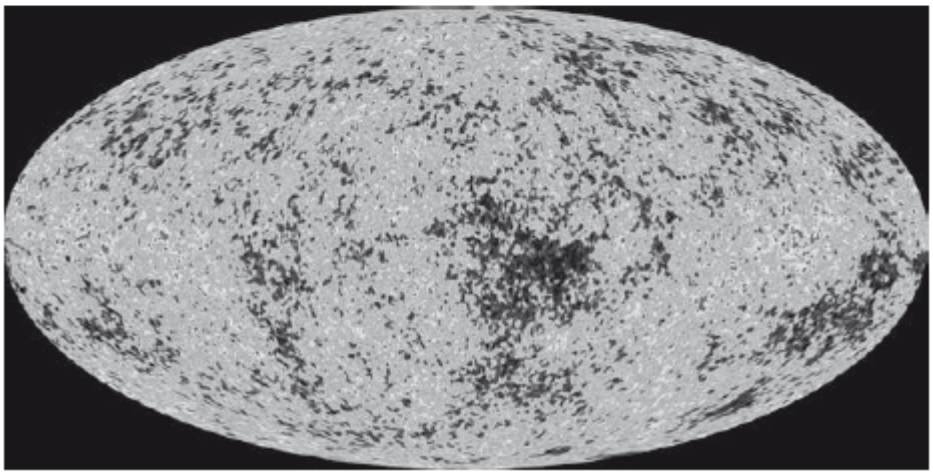


FIGURA 13-30 (*a*) Espectro da radiação cósmica de fundo medido pelo satélite Cosmic Background Explorer (COBE) da NASA. Os pontos são resultados experimentais; a curva é a função de radiação de Planck para um corpo negro a 2,725 K. [*CERN Courier*, *June 1991*, *p. 2*. *Cortesia da NASA.*] (*b*) Este mapa detalhado das variações de temperatura da radiação cósmica de fundo, que cobre toda a esfera celeste, foi preparado com base em três anos de observações do projeto WMAP. Essas variações de temperatura, que aconteceram há $13{,}7 \times 10^9$ anos e deram origem às galáxias, forneceram aos cientistas novas informações a respeito de eventos que ocorreram no primeiro trilionésimo de segundo após o Big Bang. As variações de temperatura são da ordem de ±200 μK. [*NASA/WMAP Science Team.*]

13-8 Cosmologia e a Evolução do Universo

Depois de formular a teoria da relatividade geral, em 1915, Einstein voltou-se para a cosmologia. Inicialmente, adotou a ideia de que o universo deveria ser, além de homogêneo e isotrópico, invariável no tempo, uma hipótese conhecida como *princípio cosmológico perfeito*. Entretanto, logo descobriu que, por causa da gravitação, um universo contendo matéria era incompatível com um modelo estático. Para compensar a influência da matéria, Einstein introduziu em suas equações uma *constante cosmológica*, cometendo assim o que considerou mais tarde o maior erro de sua vida. Quando soube da descoberta de Hubble de que o universo estava se expandindo, abandonou a constante cosmológica. A hipótese da energia escura consiste, basicamente, na reintrodução da constante cosmológica no universo, não, desta vez, com o intuito de mantê-lo estático e sim com o objetivo de acelerar sua expansão.

Um dos problemas do modelo do universo estacionário era o chamado *paradoxo de Olbers*, que foi formulado por Edmund Halley em 1720, mas só se tornou mais conhecido depois de ser divulgado no século XIX pelo físico-astrônomo Wilhelm Olbers. Se houvesse uma distribuição uniforme de estrelas em um espaço infinito, o céu noturno seria uniformemente claro. (É como se um observador se encontrasse em uma floresta que se estendesse indefinidamente em todas as direções e na qual todas as árvores tivessem sido pintadas de branco. Em qualquer direção que o observador olhasse, veria uma árvore pintada de branco, de modo que a floresta lhe pareceria uniformemente branca.) Nesse caso, por que o céu noturno é escuro? A solução

proposta por Olbers foi que a poeira interestelar absorve a luz das estrelas mais distantes, mas isso não resolve o problema, já que a poeira tornaria a irradiar a energia recebida.

O paradoxo foi resolvido, em parte, com a descoberta de Hubble de que o universo está se expandindo. O que importa não é que, com o desvio para o vermelho, muitos comprimentos de onda são deslocados para fora da região visível, como poderia parecer à primeira vista,[19] e sim que a energia de todos os fótons é reduzida, já que $E = hc/\lambda$. Entretanto, o desvio para o vermelho é apenas parte da explicação. Acontece que, como a velocidade da luz é finita, olhar para o espaço equivale a observar o passado. Se olharmos para cada vez mais longe no espaço, a certa altura estaremos observando uma época em que as estrelas ainda não tinham se formado. (Em termos da analogia da floresta, as árvores mais distantes não teriam sido pintadas de branco; assim, se a distância entre as árvores fosse suficientemente grande, o observador veria muitas árvores com a cor natural.)

Um Modelo Cosmológico Simples[20]

As descrições da origem e evolução do universo dependem do modelo cosmológico usado para interpretar as observações. A aparência das galáxias é diretamente afetada pela curvatura do espaço-tempo, que afeta a trajetória da luz no percurso até a Terra. É de se esperar que a distorção seja maior para galáxias com grandes desvios para o vermelho, já que a luz proveniente dessas galáxias foi produzida em uma época em que o universo era menor e a densidade de matéria era maior do que hoje em dia. Assim, a interpretação das observações de objetos com grandes desvios para o vermelho requer o uso da teoria da relatividade geral. Uma análise desse tipo fugiria ao escopo deste livro; entretanto, vamos apresentar um modelo simplificado da expansão do universo com base na mecânica newtoniana e no princípio cosmológico e, em seguida, discutir sucintamente as conclusões a que os cientistas chegaram com base na teoria da relatividade geral e nos resultados experimentais obtidos pelo Wilkinson Microwave Anisotropy Project (WMAP).

Considere uma fina casca esférica de raio r em um universo homogêneo e isotrópico (Figura 13-31). A casca contém uma massa total m, uniformemente distribuída. A casca escolhida, como qualquer outra casca, se expande juntamente com a expansão geral do universo, tornando-se maior e mais espessa; entretanto, m permanece constante. Supondo que a gravidade seja a única interação presente, a energia total da massa m contida na casca é a soma da energia cinética com a energia potencial gravitacional:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2(t) - \frac{GM_r m}{r(t)} \qquad \textbf{13-34}$$

em que $v(t)$ é a velocidade de expansão da casca e M_r é a massa da esfera definida pela superfície interna da casca. Como m, M_r permanece constante, já que $M_r = (4/3)\pi r^3\rho$, e, embora r e ρ variem com o tempo, o produto $r^3\rho$ não varia, pois $\rho \approx r^{-3}$. A massa do universo situada do lado de fora da casca não exerce nenhuma força gravitacional sobre m. (O leitor sabe explicar a razão?) Quando a casca se expande, a força gravitacional produzida por M_r faz com que a energia cinética da massa m diminua e a energia potencial gravitacional aumente, ou seja, se torne menos negativa. De acordo com a lei de conservação da energia, a energia total E não pode variar e, portanto, podemos escrever a energia total na forma conveniente

$$E = -\frac{1}{2}kmc^2r^2(t_0) \qquad \textbf{13-35}$$

em que $r(t_0)$ é o raio da casca no momento atual e k é uma constante com dimensões de (comprimento)$^{-2}$. Como vamos ver em seguida, a geometria do universo é determinada pelo valor da constante k. Combinando as Equações 13-34 e 13-35, substituindo M_r por seu valor em termos de r e dividindo por m todos os termos da equação resultante, obtemos

$$v^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)r^2(t) = -kc^2r^2(t_0) \qquad \textbf{13-36}$$

As Equações 13-35 e 13-36 permitem concluir o seguinte:

- Se $k > 0$, a energia total da massa m é negativa. Nesse caso, existe um raio crítico $r_c(t)$ além do qual a casca (e o universo) não pode continuar a se expandir porque a velocidade se anula (temporariamente), e dizemos que o universo é *fechado*. Depois de atingido o raio crítico, a casca passa a se contrair sob o efeito da massa interna M_r, um processo conhecido como "Big Crunch".

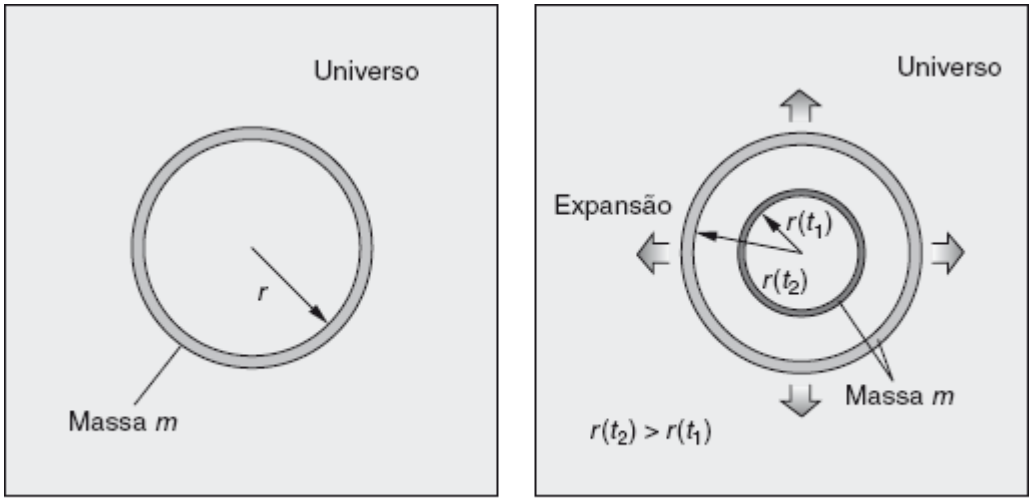


FIGURA 13-31 (*a*) Seção reta de uma fina casca esférica contendo uma massa *m* em um universo isotrópico e homogêneo. (*b*) A mesma casca, vista em dois instantes de tempo, t_1 e $t_2 > t_1$. A espessura da casca aumenta com o tempo, mas a massa não muda. A coordenada comóvel da casca, $r(t_0)$, permanece constante.

- Se $k = 0$, a energia total da massa *m* é zero. Nesse caso, quando $t \rightarrow \infty$, a casca (e o universo) se expandem para sempre, a uma taxa que tende assintoticamente para zero, e dizemos que o universo é *plano*.
- Se $k < 0$, a energia total da massa *m* é positiva. Nesse caso, quando $t \rightarrow \infty$, a casca (e o universo) se expandem para sempre, a uma taxa que tende para um valor constante, e dizemos que o universo é *aberto*.

A variação com o tempo $r(t)$ do raio da casca pode ser expressa na forma

$$r(t) = R(t)r(t_0) \qquad \textbf{13-37}$$

em que $R(t)$ é o *fator de escala* da Equação 13-31, que descreve a expansão ou contração do universo. Como, de acordo com o princípio cosmológico, todas as cascas devem se comportar da mesma forma, $R(t)$ é o mesmo para *qualquer* casca e podemos escrever:

$$1 + z = \frac{1}{R(t)} \qquad \textbf{13-38}$$

Assim, por exemplo, para $z = 2$, $R = 1/3$, ou seja, a luz que apresenta um desvio para o vermelho $z = 2$ foi emitida quando o universo tinha um terço do tamanho atual. Em termos do fator de escala, a lei de Hubble pode ser escrita na forma

$$v(t) = H(t)r(t) = H(t)R(t)r(t_0) \qquad \textbf{13-39}$$

Substituindo as Equações 13-37 e 13-39 na Equação 13-36 e dividindo todos os termos por $r^2(t_0)$, obtemos

$$\left(H^2(t) - \frac{8}{3}\pi G\rho(t)\right)R^2(t) = -kc^2 \qquad \textbf{13-40}$$

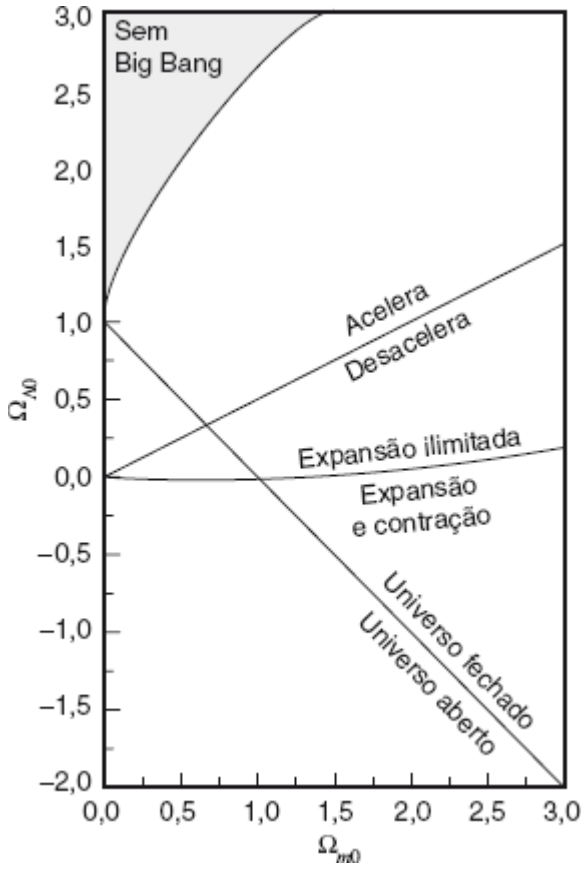


FIGURA 13-32 Cada ponto do plano $\Omega_{m0} - \Omega_{\Lambda 0}$ representa um universo possível. As curvas foram traçadas com base em equações da relatividade geral. A reta que liga o ponto (0,1) ao ponto (3,0) corresponde ao caso em que $k = 0$ na Equação 13-36.

Os cosmólogos definem o *parâmetro de densidade* $\Omega = \rho(t)/\rho_c(t)$, cujo valor atual é

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^3} \qquad \textbf{13-41}$$

e como $\rho(z) = \rho(1 + z)^3$ (Problema 13-28), temos:

$$\frac{\Omega}{\Omega_0} = (1 + z)^3 \frac{H_0^2}{H^2} \qquad \textbf{13-42}$$

Nos modelos cosmológicos relativísticos, os universos são descritos em termos de três componentes: matéria Ω_m (que inclui a matéria escura), partículas relativísticas Ω_{rel} (como neutrinos, por exemplo) e energia escura Ω_Λ (representada pela constante cosmológica). Existem razões para crer que, no momento, as partículas relativísticas não contribuem de forma significativa para a densidade de energia. Assim, as várias possibilidades para o estado atual do universo podem ser representadas em um gráfico de $\Omega_{\Lambda 0}$ em função de Ω_{m0}, como o que aparece na Figura 13-32. Os valores estimados para as coordenadas (Ω_{m0}, $\Omega_{\Lambda 0}$) com base no projeto WMAP são (0,27 ± 0,04, 0,73 ± 0,04).

O Big Bang

No século passado, os cosmólogos criaram um *modelo-padrão do universo* para explicar as observações dos astrônomos. Este modelo se baseia na teoria do Big Bang, segundo a qual, há $(13{,}7 \pm 0{,}2) \times 10^9$ anos,[21] o universo se encontrava em um estado quente e denso e que um único evento, o Big Bang,[22] iniciou uma expansão e resfriamento que continuam até hoje. Duas importantes descobertas realizadas na década de 1960 ajudaram a convencer os cientistas de que o modelo está correto. A primeira dessas descobertas foi a de Martin Ryle[23] de que existem mais radiogaláxias a grandes distâncias da Terra do que a pequenas distâncias. Como objetos distantes são objetos antigos, isso significa que o universo era diferente no passado, isto é, que evoluiu.

A segunda descoberta foi monumental, tão importante, na verdade, quanto a descoberta de Hubble de que o universo está se expandindo. Ao estudarem a abundância cósmica dos elementos, os cosmólogos perceberam que a nucleossíntese nas estrelas era capaz de explicar as concentrações observadas de todos os elementos mais pesados que o hidrogênio, exceto o hélio (veja a Figura 13-33). Isso queria dizer que parte do hélio existente no universo atual teria sido formada durante o Big Bang. Para que

uma quantidade de hélio suficiente para explicar a abundância atual fosse sintetizada nos primeiros instantes após o Big Bang, antes que a expansão do universo tornasse a velocidade da reação de fusão praticamente nula, era necessária uma temperatura inicial extremamente elevada. A essa temperatura estaria associada uma radiação térmica (radiação de corpo negro) que tenderia a esfriar (sofrer um desvio para maiores comprimentos de onda) à medida que o universo se expandisse. De acordo com os estudos teóricos, no tempo decorrido desde o Big Bang até a época atual, essa radiação teria esfriado até uma temperatura de aproximadamente 3 K, temperatura na qual a radiação emitida por um corpo negro apresenta um máximo de intensidade na faixa de micro-ondas do espectro eletromagnético. Em 1965, uma radiação de micro-ondas com as características de uma radiação de corpo negro foi descoberta por Arno Penzias e Robert Wilson[24] do Bell Labs. Mais tarde, os dados colhidos pelo satélite Cosmic Background Explorer (COBE) e analisados por John Mather e George Smoot[25] e os resultados do Wilkinson Microwave Anisotropy Project (WMAP) revelaram que esta radiação, hoje conhecida como *radiação cósmica de fundo*, corresponde de perto à emissão de um corpo negro a uma temperatura de 2,725 ± 0,001 K e apresenta uma distribuição isotrópica compatível com o princípio cosmológico. Na verdade, a radiação cósmica de fundo é a radiação natural que mais se aproxima das características de emissão de um corpo negro (veja a Figura 13-30*a*). Além disso, a observação de flutuações de temperatura da ordem de 30 μK nessa radiação (veja a Figura 13-30*b*) forneceu os primeiros indícios das variações de densidade que, segundo os cosmólogos, serviram de semente para a formação das galáxias.

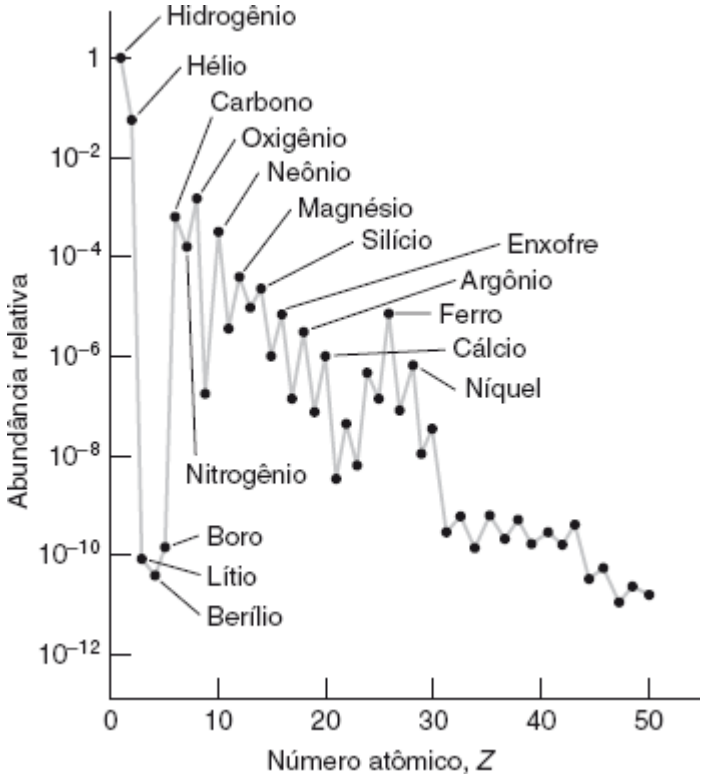


FIGURA 13-33 Abundância, em relação ao hidrogênio, de elementos da Via Láctea até $Z = 50$ (estanho). Observe o pico em $Z = 26$ (ferro), a queda acentuada da abundância para elementos um pouco mais pesados que o ferro e a abundância extremamente baixa do lítio, berílio e boro.

Os Primeiros Instantes do Universo

Como foi o Big Bang? O evento que iniciou a expansão deve ter sido uma gigantesca explosão que ocorreu em um universo quente e denso. A maioria dos cosmólogos defende a descrição teórica dos eventos ocorridos após o Big Bang conhecida como modelo-padrão. Essa descrição se baseia em observações recentes e novos desenvolvimentos teóricos no campo da física das partículas e reflete a crescente interação entre os estudos de cosmologia e física das partículas ocorrida nos últimos anos. A descrição proposta pelo modelo-padrão da forma como o universo evoluiu de $t = 0$ até $t \approx 10^{10}$ anos, que corresponde à época atual, será discutida a seguir e está ilustrada na Figura 13-34.

Nos primeiros instantes, o universo era dominado por uma pressão negativa que levou uma expansão acelerada conhecida como *inflação*. Combinando a teoria da relatividade geral com o princípio cosmológico, é possível chegar à seguinte equação (que não é óbvia):

$$\frac{1}{R(t)}\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho c^2 + 3P) \qquad \textbf{13-43}$$

em que $R(t)$ é o fator de escala adimensional já discutido, ρc^2 é a densidade de energia do universo e P é a pressão. Note que,

nas situações em que a pressão é negativa e muito grande, a expansão tem uma aceleração positiva. Este período inicial de inflação para o qual, é preciso reconhecer, não existem provas diretas, pode explicar várias questões cosmológicas, entre as quais as seguintes: (1) Por que a temperatura da radiação cósmica de fundo é tão uniforme? (2) Por que o universo é praticamente plano? (3) Por que não existem monopolos magnéticos? (4) Qual é a origem das anisotropias medidas pelo WMAP? Após esse breve período de inflação, o universo passou a ser dominado pela radiação e, mais tarde, pela matéria. Recentemente, em termos cosmológicos, o universo voltou a ser dominado pela pressão negativa, que está acelerando novamente a expansão do universo, embora a uma taxa mais lenta que no período de inflação. De acordo com estudos recentes, como já foi dito, chegou-se à conclusão de que a matéria é responsável por cerca de 31,7% da densidade do universo, e a matéria comum constitui apenas 4,9% desse total (Figura 13-35*a*). Os outros 26,8% são atribuídos à matéria escura fria, que não emite nem absorve luz, mas está sujeita à interação gravitacional. A Figura 13-35*c* mostra o que pode ser a primeira observação indireta da matéria escura. A energia escura, que responde pelos 68,3% restantes da energia do universo, é considerada a responsável pela nova aceleração.

Inicialmente, as quatro interações da natureza (forte, eletromagnética, fraca e gravitacional) estavam unificadas. Os físicos conseguiram formular modelos teóricos que unificam as três primeiras, mas uma teoria quântica da gravidade, necessária para descrever o comportamento da matéria nas condições de extrema densidade que existiam nos primeiros momentos após o Big Bang, ainda não existe. Em consequência, não temos como descrever o que aconteceu até o instante em que a interação gravitacional se "condensou", o que ocorreu cerca de 10^{-43} s após o Big Bang, quando a temperatura ainda era de 10^{32} K. A essa altura, a energia média das partículas era da ordem de 10^{19} GeV. Quando o universo continuou a esfriar, as outras três forças além da gravidade continuaram unificadas e podem ser descritas por teorias da grande unificação (GUTs*). Não havia distinção entre quarks e léptons e os números quânticos de partículas não eram conservados. Foi durante esse período que ocorreu um ligeiro excesso do número de quarks em relação ao número de antiquarks, de aproximadamente 1 partícula em cada 10^9, que mais tarde resultou na matéria que hoje observamos no universo.

Aproximadamente 10^{-35} s após o Big Bang, o universo tinha se expandido o suficiente para que a temperatura caísse para 10^{27} K, ocasião em que ocorreu outra transição de fase, e a interação forte se condensou, deixando unificadas apenas as interações eletromagnética e fraca, na forma da *interação eletrofraca*. Durante esse período, os quarks, que antes se comportavam como partículas praticamente livres na densa mistura de números quase iguais de quarks, antiquarks, léptons, antiléptons e fótons, começaram a se combinar para formar hádrons e suas antipartículas. Quando a temperatura do universo atingiu 10^{13} K, aproximadamente 10^{-6} s após o Big Bang, quase todos os hádrons desapareceram. Isso porque uma temperatura de 10^{13} K corresponde a $kT \sim 1$ GeV, que é a energia mínima necessária para criar núcleons e antinúcleons a partir de fótons, através das reações

$$\gamma \rightarrow p^+ + p^- \qquad \textbf{13-44}a$$

e

$$\gamma \rightarrow n + \bar{n} \qquad \textbf{13-44}b$$

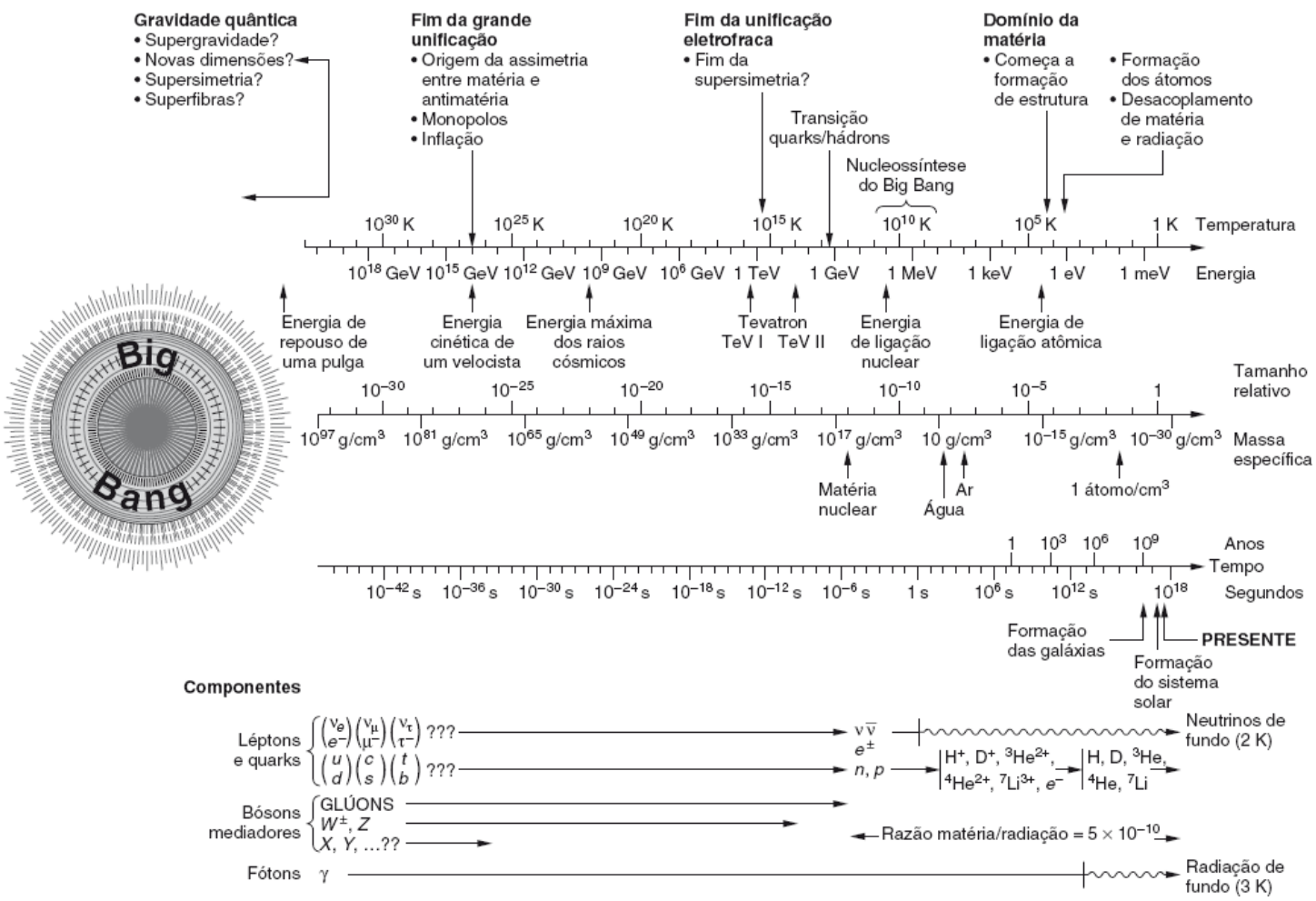
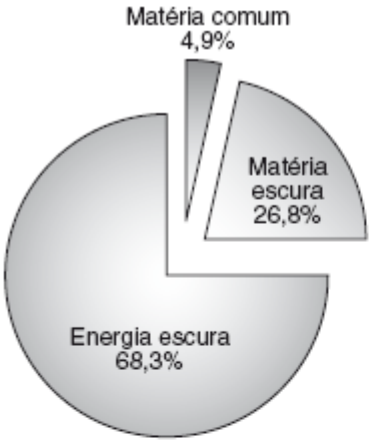


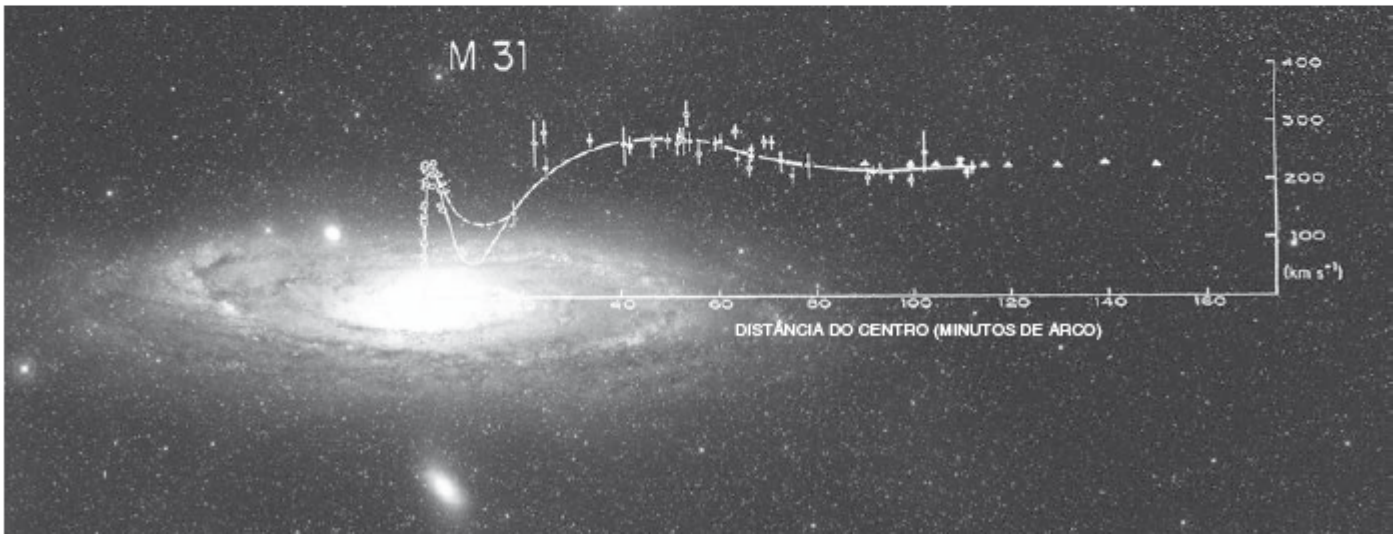
FIGURA 13-34 A evolução do universo, segundo o modelo-padrão.



(*a*)



(*c*)



(*b*)

FIGURA 13-35 (*a*) A composição do universo em termos de matéria e energia. Observações recentes sugerem que a energia escura está acelerando novamente a expansão do universo. (*b*) Velocidade das estrelas da galáxia M31. De acordo com a lei da gravitação de Newton, para que a velocidade de corpos em órbita não varie com a distância, é preciso que a massa no interior da órbita seja proporcional ao raio da órbita. Assim, na galáxia M31, boa parte da massa deve estar do lado de fora dos limites visíveis da galáxia, o que foi considerado uma das primeiras indicações da existência da matéria escura. (*c*) O aglomerado de galáxias 1E0657-558 é o resultado da colisão de um pequeno aglomerado com um aglomerado maior. Usando este aglomerado como lente gravitacional para observar galáxias mais distantes, foi possível mapear o potencial gravitacional de 1E0657-558 (a grande "nuvem" difusa). As emissões de raios X registradas pelo Chandra X-Ray Observatory nas duas regiões centrais da "nuvem" revelam os gases quentes (matéria comum) dos dois aglomerados originais. A parte externa da "nuvem" provavelmente é composta de matéria escura. [Os autores agradecem a Vera Rubin pela permissão para usar a imagem (*b*). (*b*) *Vera Rubin e Janice Dunlap*. (*c*) *Imagem de raios X cortesia de NASA/CXC/CfA/M Markevitch et al.*; *imagem ótica cortesia de NASA/STScI*; *Magellan/University of Arizona/D Clowe et al.; mapeamento do potencial gravitacional cortesia de NASA/STScI*; *ESO WFI*; *Magellan/University of Arizona/D. Clowe et al.*]

Assim, quando os pares partícula-antipartícula se aniquilavam, novos pares não podiam se formar para substituí-los. Entretanto, o pequeno excesso inicial de quarks em relação a antiquarks levou a um pequeno excesso de prótons e nêutrons em relação às antipartículas correspondentes. As aniquilações produziram um número muito grande de fótons e léptons; a partir de $t = 10^{-4}$ s, as duas partículas passaram a dominar o universo. Essa foi a *era dos léptons*. Em $t = 10$ s, a temperatura havia caído para 10^{10} K ($kT \ell$ 1 MeV). Quando o universo continuou a se expandir e a esfriar, a energia média dos fótons caiu abaixo do valor necessário para gerar pares elétron-pósitron. A aniquilação então removeu todos os pósitrons, como antes havia removido os antiprótons e antinêutrons, deixando apenas um pequeno excesso de elétrons, e começou a *era da radiação*. As partículas presentes eram quase todas fótons e neutrinos.

Alguns minutos depois, a temperatura havia caído o suficiente para permitir que prótons e nêutrons se combinassem para formar núcleons que não fossem imediatamente fotodesintegrados. Deutério, hélio e um pouco de lítio foram produzidos neste *período de nucleossíntese*, mas a rápida expansão logo fez com que a temperatura caísse tanto, que os processos de fusão foram interrompidos e a formação de elementos mais pesados teve que esperar pelo nascimento das estrelas.

Muito tempo depois, quando a temperatura havia caído abaixo de 3000 K e o universo atingira cerca de um milésimo do tamanho atual, kT se tornou menor que as energias típicas de ionização e os átomos começaram a se formar. A essa altura, a expansão havia produzido um desvio para o vermelho, de modo que a energia de radiação total era da mesma ordem que a energia associada à massa restante. Isso aconteceu quando o fator de escala $R(t)$ era da ordem de $2{,}8 \times 10^{-4}$. O universo continuou a esfriar e a se expandir, fazendo com que a energia associada à radiação diminuísse ainda mais, até que a matéria passou a dominar o universo, com uma densidade de energia que, hoje em dia, é cerca de 1000 vezes maior que a associada à radiação cósmica de fundo. Hoje, mais uma vez, a pressão negativa parece dominar.

Perguntas sem Resposta e os Limites do Conhecimento

O modelo-padrão da evolução do universo e as teorias atuais da formação e evolução das estrelas e galáxias têm registrado alguns sucessos notáveis. Entretanto, algumas perguntas básicas permanecem sem resposta. O universo continuará a se expandir para sempre ou voltará a se contrair, o que levaria a uma repetição do Big Bang? Antes da descoberta da energia escura, a resposta a esta pergunta envolvia apenas verificar se a densidade de matéria no universo era maior ou menor que a densidade crítica de 10^{-26} kg/m^3. A imprecisão dos resultados conhecidos é tão grande que nenhuma das duas hipóteses pode ser descartada, mas o valor medido está muito próximo do valor crítico. Se a densidade for igual ao valor crítico, teremos que procurar uma razão para esta coincidência. Já nos referimos ao problema da matéria escura e suas implicações; a existência da energia escura representa uma complicação adicional. Para verificar se é possível responder a algumas dessas indagações, devemos investigar os limites teóricos de nossas observações. Por exemplo: de acordo com a teoria da relatividade geral, nas proximidades de um buraco negro de massa m, é impossível observar eventos que ocorram a uma distância do centro do objeto menor que o raio de Schwarzschild, também conhecido como *horizonte de eventos*, dado por

$$R_S = \frac{2Gm}{c^2} \qquad \textbf{13-45}$$

Por outro lado, de acordo com o princípio de indeterminação da mecânica quântica, o mesmo limite é dado pelo comprimento de onda de Compton, λ_c:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \qquad \textbf{13-46}$$

Igualando as Equações 13-45 e 13-46, obtemos $m = \sqrt{hc/2G} \approx 10^{-8}$ kg, uma expressão que depende apenas de constantes universais. Substituindo essa expressão de m na Equação 13-46, obtemos a definição de uma unidade de comprimento que também depende apenas de constantes universais, $L = \lambda_c = (2Gh/c^3)^{1/2} \approx 3{,}86 \times 10^{-35}$ m. O tempo necessário para que a luz

percorra essa distância é

$$t = \left(\frac{Gh}{c^5}\right)^{1/2} = 1{,}35 \times 10^{-43}\ \text{s} \qquad \textbf{13-47}$$

A definição das unidades de massa, comprimento e tempo em termos de constantes fundamentais foi proposta originalmente por Planck[26] e será discutida na Seção Exploratória a seguir.

Alguns cosmólogos têm argumentado que se o universo tivesse evoluído de forma ligeiramente diversa, talvez em virtude de um valor um pouco diferente de h, e ou outra constante fundamental, a vida na Terra e mesmo a própria Terra jamais teriam existido. Este é o *princípio antrópico*, segundo o qual o universo é como é porque estamos aqui para vê-lo.



SEÇÃO EXPLORATÓRIA
As Unidades "Naturais" de Planck

Pouco depois de introduzir na física a constante h para descrever o espectro de emissão do corpo negro, Max Planck propôs um sistema de unidades "naturais" para as grandezas fundamentais massa, comprimento, tempo, carga elétrica e temperatura a partir de cinco constantes fundamentais: $\hbar$, a constante de Planck h dividida por 2π; c, a velocidade da luz; G, a constante gravitacional de Newton; $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, a constante de Coulomb; k_B, a constante de Boltzmann. A unidades são as seguintes:

Massa de Planck:

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 2{,}2 \times 10^{-8}\ \text{kg}$$

Comprimento de Planck:

$$\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1{,}6 \times 10^{-35}\ \text{kg}$$

Tempo de Planck:

$$t_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5{,}4 \times 10^{-44}\ \text{s}$$

Carga de Planck:

$$q_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} = 1{,}9 \times 10^{-18}\ \text{C}$$

Temperatura de Planck:

$$T_P = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_B^2}} = 1{,}4 \times 10^{32}\ \text{K}$$

Se as cinco constantes fundamentais são tomadas como iguais a 1, as unidades fundamentais de massa, comprimento, tempo, carga elétrica e temperatura também se tornam iguais a 1, ou seja, se $\hbar = c = G = k = k_B$, temos também $m_P = \ell_P = t_P = q_P = T_P = 1$.

Na época em que foram propostas, as unidades de Planck não tinham muita base física, mas hoje em dia a situação é outra. Como observou Frank Wilczek,[27] a ideia de Planck ganhou força com o tempo, já que as constantes h, c e G estão associadas às três grandes teorias da física moderna: a mecânica quântica, a teoria da relatividade restrita e a teoria da relatividade geral.

Como observa Wilczek, usando as unidades propostas por Planck, percebemos, por exemplo, que a repulsão elétrica entre dois prótons é muito mais forte que a atração gravitacional, não porque a interação gravitacional seja intrinsecamente mais fraca que a interação eletrostática, mas porque a carga elétrica do próton é da mesma ordem da carga de Planck, enquanto a massa do próton é muito menor que a massa de Planck. Além disso, de acordo com Wilczek, já temos alguns resultados de uma teoria quântica da gravitação que concordam com os dados experimentais. Assim, pode ser que o sonho de Einstein de unificar as quatro forças da natureza não esteja muito distante.

Resumo

TÓPICO	EQUAÇÕES E COMENTÁRIOS
1. O Sol	A energia solar recebida na parte superior da atmosfera terrestre, conhecida como constante solar, é
	$f = 1{,}365 \times 10^3\ \mathrm{W/m^2}$ **13-1**
	A potência irradiada pelo Sol é a luminosidade $L_\odot$:
	$L_\odot = 3{,}85 \times 10^{26}\ \mathrm{W}$ **13-2**
Temperatura da superfície	Supondo que o Sol se comporta como um corpo negro, a temperatura efetiva na superfície, T_e, pode ser calculada a partir da lei de Stefan-Boltzmann:
	T_e = 5780 K
Fonte da energia do Sol	A fonte da energia do Sol é a fusão nuclear, especialmente o ciclo próton-próton, que começa com a reação
	$^1\mathrm{H} + {}^1\mathrm{H} \rightarrow {}^2\mathrm{H} + e^+ + \nu_e + 0{,}42\ \mathrm{MeV}$ **13-5**
2. As estrelas	As estrelas são classificadas como pertencentes à população I ou à população II, dependendo da composição. Nas primeiras, elementos mais pesados que o He constituem 2 a 3% da massa total; nas segundas, estes elementos estão presentes em quantidades insignificantes.
A Via Láctea	Nossa galáxia, a Via Láctea, possui cerca de 10^{10} estrelas. O Sol está situado a 28.000 anosluz do centro da Galáxia, que está na direção da constelação Sagitário. As estrelas, o gás e a poeira são responsáveis por apenas 4% da massa da galáxia.
3 . Evolução das estrelas	O diagrama de Hertzprung-Russell mostra a evolução das estrelas, relacionando a luminosidade à temperatura efetiva. As duas grandezas dependem da massa da estrela:
	$L \propto M^4$ **13-14**
	$T_e = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma}\right)^{1/4} \propto M^{1/2}$ **13-17**
	As estrelas que “queimam” hidrogênio para produzir hélio pertencem à sequência principal do diagrama H-R
Estados finais das estrelas	Depois que o hidrogênio se esgota, as estrelas deixam a sequência principal e evoluem para um estado final. Dependendo da massa, três estados finais são possíveis: anã branca, estrela de nêutrons e buraco negro. É nos eventos cataclísmicos que precedem a

	formação de estrelas de nêutrons e buracos negros que são gerados os elementos mais pesados que o Fe.
4. Galáxias	Edwin Hubble dividiu as galáxias em quatro categorias: elípticas, espirais ordinárias, espirais barradas, e irregulares.
Lei de Hubble	Hubble mostrou que o universo estava se expandindo e, usando o desvio para o vermelho para calcular a velocidade das galáxias, observou que as velocidades de recessão v eram proporcionais à distância r a que se encontram de nós, de acordo com a equação $$z = \frac{H_0}{c} r \qquad \textbf{13-28}$$ onde a constante de Hubble H_0 é dada por $$H_0 = 70{,}8 \pm 1{,}6 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 21{,}2 \pm 0{,}7 \text{ km s}^{-1} (10^6 \text{ anos-luz})^{-1} \qquad \textbf{13-29}$$ A grandeza $1/H_0 = 1{,}3 \times 10^{10}$ anos é a idade de Hubble, que corresponde à idade que o universo teria se a expansão tivesse acontecido a uma taxa constante desde o Big Bang.
5. Gravitação e cosmologia	De acordo com o princípio cosmológico, o universo tem as mesmas propriedades em toda parte e parece o mesmo em todas as direções e de qualquer ponto de vista. A teoria cosmológica atual, conhecida como modelo-padrão, descreve o universo como tendo começado há $13{,}7 \times 10^{10}$ anos, com o Big Bang. Existem muitas observações experimentais que apoiam este modelo.
Inflação	Logo após o Big Bang, segundo o modelo-padrão, o universo passou por um período de expansão acelerada que explica muitas de suas características atuais. Depois de um longo período de desaceleração, a expansão do universo voltou a acelerar

Bibliografia

As referências que se seguem foram escritas em um nível apropriado para os leitores deste livro.

Akerlof, C. W. e M. A. Srednicki, *Relativistic Astrophysics and Particle Cosmology*, New York Academy of Sciences, New York, 1993.
Bahcall, J. N., *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press, New York, 1989.
Bennett, J., M. Donahue, N. Schneider e M. Voit, *Stars*, *Galaxies*, *and Cosmology*, 2d ed., Addison Wesley, San Francisco, 2002.
Carroll, B. W. e D. A. Ostlie, *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2d ed., Pearson Addison Wesley, San Francisco, 2007.
Comins, N. F. e W. J. Kaufmann III, *Discovering the Universe*, 6th ed., W. H. Freeman and Co., New York, 2003.
Frauenfelder, H. e E. M. Henley, *Subatomic Physics*, 2d ed., Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1991.
Pasachoff, J. M., *Contemporary Astronomy*, Saunders, Philadelphia, 1977.
Rees, M., *Before the Beginning*, Addison Wesley, San Francisco, 1997.
Ryden, B., *Introduction to Cosmology*, Addison Wesley, San Francisco, 2003.
Shu, F. H., *The Physical Universe*, University Science Books, Mill Valley, CA, 1982.
Weinberg, S., *The First Three Minutes*, updated ed., Basic Books, New York, 1993.

Notas

1. Hans Albrecht Bethe (1906-2005), físico alemão naturalizado americano. Sua teoria a respeito da fonte de energia das estrelas foi publicada em 1938. Trabalhou no Projeto Manhattan durante a Segunda Guerra Mundial. Recebeu o Prêmio Nobel

de Física de 1967 por suas contribuições à teoria das reações nucleares e especialmente pelas descobertas relativas à produção de energia nas estrelas.

2. John Bahcall (1934-2005), físico americano. Sua análise teórica do espectro dos neutrinos solares serviu de base para os experimentos que confirmaram o fenômeno das oscilações dos neutrinos.

3. A reação usada por Davis para detectar neutrinos era $^{37}_{17}\mathrm{Cl} + \nu_e \rightarrow {}^{37}_{18}\mathrm{Ar} + e^-$. Setenta e sete por cento dos neutrinos responsáveis por essa reação eram provenientes do decaimento do ^{8}B, na 6ª etapa do ciclo p-p mostrado na Tabela 13-1.

4. O termo *galáxia* vem de uma palavra do grego que significa leite.

5. Sírio é a estrela mais brilhante do céu depois do Sol.

6. Annie Jump Cannon (1863-1941), astrônoma americana do Harvard Observatory. Seus estudos de sistemas de classificação de estrelas serviram de base para o *Henry Draper Catalogue*, que contém a classificação espectral de 225.300 estrelas.

7. Hiparco (*circa* 190 a.C. – *circa* 120 a.C.). O maior dos astrônomos gregos, criou o sistema de magnitudes para classificar as estrelas de acordo com o brilho aparente. Estimou o tamanho e a distância do Sol e da Lua e desenhou o primeiro mapa estelar, que mostrava a posição de cerca de 1000 estrelas.

8. O nome "Galáxia", com G maiúsculo, é sinônimo de Via Láctea.

9. Harlow Shapley (1885-1972), astrônomo americano. Além de dirigir o Harvard Observatory durante muitos anos, foi um dos primeiros defensores das liberdades civis e dos movimentos de paz nos Estados Unidos.

10. O uso do nome "ascensão reta" para designar a longitude celeste provavelmente se deve ao fato de que as estrelas parecem nascer verticalmente, ou seja, fazendo um ângulo reto com a linha do horizonte.

11. *Equinócio* significa "noite igual"; *solstício* significa "Sol parado".

12. Edouard A. Roche (1820-1883), astrônomo francês. Mostrou também que um pequeno corpo em órbita em torno de um corpo maior seria fragmentado por forças de maré se a distância entre os dois corpos fosse menor que 2,5 vezes o raio do corpo maior. Essa distância, que se tornou conhecida como *limite de Roche*, corresponde aproximadamente ao limite externo dos anéis planetários do sistema solar.

13. Subrahmanyan Chandrasekhar (1910-1995), físico indiano naturalizado americano. Fez o doutorado na Inglaterra, orientado por P. A. M. Dirac, e depois se mudou para os Estados Unidos, onde, depois de um breve período em Harvard, tornou-se professor na Universidade de Chicago. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1983 por seus estudos da evolução das estrelas. O Chandra X-Ray Observatory foi batizado em sua homenagem.

14. A possibilidade da existência de buracos negros foi levantada pela primeira vez pelo Reverendo John Mitchell, um astrônomo amador inglês, em 1783. Mitchell calculou que uma estrela com a mesma densidade que o Sol e um raio 500 vezes maior teria uma velocidade de escape maior que a velocidade da luz, e especulou que a luz não conseguiria escapar de uma estrela com essas características. O nome buraco negro foi introduzido pelo físico John Archibald Wheeler.

15. De acordo com Stephen Hawking, uma flutuação do vácuo pode criar um par virtual partícula-antipartícula no horizonte de eventos de um buraco negro. Uma das partículas fica do lado de fora do horizonte de eventos e se torna real, enquanto a outra permanece no interior do buraco negro. De acordo com a lei de conservação da energia, a energia da segunda partícula é negativa e, portanto, a massa do buraco negro diminui. Para um observador externo, o fenômeno é visto como a emissão de partículas, que constitui a chamada radiação de Hawking. Se a massa perdida através desse processo é maior que a massa ganha pela incorporação de novas partículas, o buraco negro acaba por desaparecer.

16. As erupções de raios gama são designadas pelas letras GRB seguidas pela data em que foram observadas pela primeira vez: GRBaammdd.

17. Edwin Powell Hubble (1889-1953), astrônomo americano. Depois de se formar em direito, tornou-se astrônomo graças em parte à influência de R. A. Millikan. Em reconhecimento a suas múltiplas contribuições, teve a honra de ser o primeiro astrônomo a usar o telescópio Hale de 5 m de Monte Palomar.

18. Variáveis cefeidas são estrelas pulsantes cujo período é proporcional à luminosidade intrínseca, o que permite determinar a distância a que se encontram do Sol. A estrela alfa da Ursa Menor, ou Estrela Polar, é uma variável cefeida.

19. Isso porque radiações com comprimentos de onda menores que os da luz visível seriam deslocadas para a faixa do visível. Na verdade, com esse deslocamento geral, a intensidade luminosa na faixa da luz visível provavelmente aumentaria!

20. Esta discussão se baseia na primeira parte do Capítulo 29 do livro de Carroll e Ostlie (veja a Bibliografia).

21. Esta idade do universo foi estimada a partir de resultados do Wilkinson Microwave Anisotropy Project.

22. O nome *Big Bang* foi criado pelo astrônomo inglês Fred Hoyle, um defensor ferrenho do modelo do universo estacionário, com o intuito de ridicularizar o modelo do universo em expansão.

23. Sir Martin Ryle (1918-1984), astrônomo inglês. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1974 (com Antony Hewish, o descobridor dos pulsares) por seus trabalhos pioneiros de radioastronomia.

24. Arno Allan Penzias (1933-), físico alemão naturalizado americano, e Robert Woodrow Wilson (1936-), radioastrônomo americano. Receberam o Prêmio Nobel de Física de 1978 pela descoberta da radiação cósmica de fundo, que havia sido prevista por George Gamow 20 anos antes.

25. Frank Cromwell Mather (1946-) e George Fitzgerald Smoot III (1945-), físicos americanos, receberam o Prêmio Nobel de Física de 2006 pela descoberta do espectro de corpo negro e anisotropia da radiação cósmica de fundo, que ajudou a consolidar a teoria do Big Bang.

26. M. Planck, "Über irreversible Strahlungsvorgaenge", *der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* **5**, 440 (1899).

27. Frank Wilczek, físico americano, na série "Scaling Mount Planck" em *Physics Today*, June 2001, November 2001, e August 2002. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 2004, com David J. Gross e Hugh D. Politzer, pela descoberta da liberdade assintótica na teoria da interação forte.

Problemas

Nível I
Seção 13-1 O Sol

13-1. Medidas do desvio Doppler da luz emitida pela borda esquerda e pela borda direita do Sol na altura do equador mostram que a diferença entre as velocidades tangenciais das duas bordas é 4 km/s. Use este resultado para determinar o período aproximado de rotação do Sol ($R_\odot = 6{,}96 \times 10^5$ km).

13-2. A energia potencial gravitacional U de um corpo esférico gasoso de massa M e raio R depende da distribuição de massa. No caso do Sol, $U_\odot = -2GM_\odot{}^2R_\odot$. Qual seria o tempo de vida do Sol, se continuasse irradiando com a mesma potência que hoje e toda a sua energia se devesse à contração gravitacional? ($M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg.)

Seção 13-2 As Estrelas

13-3. O lítio, o berílio e o boro (Z = 3, 4 e 5, respectivamente) são mais raros no universo que muitos elementos mais pesados (veja a Figura 13-33). Explique por que isso acontece, com base na reação de fusão do He para formar C.

13-4. O Sol está se movendo com uma velocidade de $2{,}5 \times 10^5$ m/s em uma órbita circular em torno do centro da Galáxia. Quanto tempo (em anos terrestres) o Sol leva para completar uma órbita? Quantas órbitas o Sol já completou desde que foi formado?

13-5. A razão pela qual os neutrinos foram considerados uma possível solução para o problema da massa faltante é que, no final da era dos léptons, o universo continha um número aproximadamente igual de fótons e neutrinos. A maioria dessas partículas ainda existe. Os fótons podem ser observados e sua concentração é da ordem de 500 fótons/cm^3; assim, a concentração de neutrinos no universo deve ser da mesma ordem. Se os neutrinos possuem uma massa de repouso diferente de zero e se a expansão do universo reduziu sua velocidade média de tal forma que praticamente toda a energia desses neutrinos está contida na massa, qual é a massa por neutrino (em eV/c^2) necessária para suprir toda a massa faltante do universo? Suponha que a massa observada equivale a 1 átomo de hidrogênio por metro cúbico e que essa massa corresponde a 10% da massa necessária para explicar o movimento das estrelas nas galáxias.

13-6. Use os dados da Tabela 13-3 para desenhar um gráfico que comprove a validade da Equação 13-17.

13-7. Lembrando que 1 ano-luz é a distância que a luz percorre em um ano, calcule a distância, em metros, equivalente a 1 segundo-luz, 1 minuto-luz, 1 hora-luz e 1 dia-luz.

Seção 13-3 A Evolução das Estrelas

13-8. Uma unidade de comprimento frequentemente usada pelos astrônomos para medir distâncias no espaço "próximo" é o parsec (pc), definido como a distância na qual uma estrela subtende um ângulo de paralaxe de um segundo de arco devido à órbita da Terra em torno do Sol (veja a Equação 13-11 e o Exemplo 13-4). O limite prático para este tipo de medida é 0,01 segundo de arco. (*a*) A quantos anos-luz equivale 1 pc? (*b*) Se a concentração de estrelas na região da Via Láctea ocupada pelo Sol é 0,08 estrelas/pc^3, quantas estrelas poderiam, em princípio, ter suas distâncias medidas pelo método da paralaxe?

13-9. Os astrônomos usam a *magnitude aparente*, m, para comparar o brilho visual das estrelas e relacionar essa comparação à luminosidade e distância de estrelas "padrão", como o Sol (veja a Equação 13-9). A diferença entre as magnitudes aparentes de duas estrelas, m_1 e m_2, é definida como $m_1 - m_2 = 2{,}5 \log(f_1/f_2)$, uma relação baseada na resposta logarítmica do olho humano ao brilho dos objetos. Pólux, um dos "gêmeos" da constelação do mesmo nome, tem magnitude aparente 1,16 e está a 12 pc de distância. Betelgeuse, a estrela que fica no ombro direito de Órion, tem magnitude aparente 0,41. A que distância está

Betelgeuse, se as duas estrelas têm a mesma luminosidade?

13-10. Use o diagrama H-R (Figura 13-17) para determinar a temperatura efetiva e a luminosidade de uma estrela cuja massa é (*a*) 0,3 $M_\odot$; (*b*) 3 $M_\odot$. (*c*) Calcule o raio das duas estrelas. (*d*) Determine o tempo de vida das duas estrelas em relação ao tempo de vida do Sol.

13-11. Duas estrelas de um sistema binário, separadas por uma distância de 10^8 km, estão situadas a 100 anos-luz da Terra. Qual é a separação angular das estrelas em segundos de arco? Qual é a separação em graus?

Seção 13-4 Eventos Cataclísmicos

13-12. Calcule a energia necessária (em MeV) para produzir as reações de fotodesintegração dadas pelas Equações 13-18 e 13-19.

13-13. A nuvem de gás associada à nebulosa planetária da Figura 13-18*b* tem um diâmetro de 1,5 ano-luz e está se expandindo à taxa de 24 km/s. (*a*) Há quanto tempo a nuvem de gás se formou? (*b*) Se a estrela central da nebulosa planetária é 12 vezes mais luminosa que o Sol e 15 vezes mais quente, qual é o raio da estrela central em unidades de $R_\odot$?

Seção 13-5 Os Estados Finais das Estrelas

13-14. Calcule o raio de Schwarzschild de uma estrela cuja massa é igual (*a*) à massa do Sol; (*b*) à massa de Júpiter; (*c*) à massa da Terra. (A massa de Júpiter é aproximadamente 318 vezes maior que a da Terra.)

13-15. Considere uma estrela de nêutrons cuja massa é igual a $2M_\odot$. (*a*) Calcule o raio da estrela. (*b*) Se a estrela de nêutrons está girando a 0,5 revolução por segundo e tem uma composição homogênea, qual é o valor da energia cinética de rotação? (*c*) Se a rotação diminui de 1 parte em 10^8 por dia e a energia cinética perdida é toda irradiada, qual é a luminosidade da estrela?

13-16. Se a "massa faltante" da Via Láctea, que é da ordem de 90%, está concentrada em um gigantesco buraco negro localizado no centro da Galáxia, determine (*a*) a massa; (*b*) o diâmetro do buraco negro.

Seção 13-6 Galáxias

13-17. Medidas do desvio para o vermelho mostram que a velocidade de recessão de uma certa galáxia é 72.000 km/s. (*a*) Calcule a distância a que a galáxia se encontra da Terra. (*b*) O valor da constante de Hubble depende da escala de distâncias, que é muito difícil de determinar com precisão. Se existe um erro de 10% na escala de distâncias, qual é o erro percentual da idade de universo calculada a partir da Equação 13-28?

13-18. O núcleo de uma certa galáxia de Seyfert tem uma luminosidade de 10^{10} $L_\odot$. A luminosidade aumentou 100% em um período de 18 meses. Mostre que isso significa que a fonte de energia do núcleo tem um diâmetro menor que $9{,}45 \times 10^4$ UA. Como este valor se compara com o diâmetro da Via Láctea?

13-19. O comprimento de onda da linha Hα do espectro do hidrogênio é 656,3 nm. Use a lei de Hubble para calcular o comprimento de onda da linha Hα emitida por uma galáxia situada a uma distância da Terra igual a (*a*) 5×10^6 anos-luz; (*b*) 50×10^6 anos-luz; (*c*) 500×10^6 anos-luz; (*d*) 5×10^9 anos-luz.

Seção 13-7 Cosmologia e Gravitação

13-20. Use a Equação 13-33 para calcular a densidade crítica do universo.

Seção 13-8 Cosmologia e a Evolução do Universo

13-21. De acordo com a maioria dos modelos do universo, a distância média entre as galáxias, que determina o tamanho do universo, é inversamente proporcional à temperatura absoluta. Se esta relação está correta, qual era o tamanho do universo em relação ao tamanho atual (*a*) há 2000 anos; (*b*) há 10^6 anos; (*c*) 10 s após o Big Bang; (*d*) 1 s após o Big Bang; (*e*) 10^{-6} s após o Big Bang?

13-22. Determine o valor da massa específica do universo no instante $t = t_P$, em que t_P é o tempo de Planck. Como este valor se compara com a massa específica do próton? E com a massa específica do ósmio?

13-23. Para que comprimento de onda a intensidade da radiação cósmica de fundo é máxima?

13-24. Quanto tempo após o Big Bang o universo havia esfriado até a temperatura limite para a formação de múons? Qual seria a massa de uma partícula que poderia ser formada com a energia média da radiação de fundo observada atualmente, que corresponde à radiação emitida por um corpo negro à temperatura de 2,725 K?

13-25. Mostre que a massa específica atual do universo é dada por $\rho_0 = R^3(t)\,\rho(t)$ para qualquer valor de t.

Nível II

13-26. Mostre que, se a lei de Hubble é válida para um observador localizado na Via Láctea (como nós, por exemplo), também é válida para um observador localizado em outra galáxia qualquer. (*Sugestão*: Use a propriedade vetorial da velocidade.)

13-27. Determine o valor mínimo a do raio de uma partícula em órbita do Sol para que não seja ejetada do Sistema Solar pela pressão da radiação solar. Suponha que a partícula seja uma esfera de massa m com a mesma massa específica que a Terra, 5500 kg/m^3. Despreze os efeitos do vento solar e do campo magnético solar.

13-28. Mostre que, para um desvio para o vermelho z, a massa específica do universo é dada por $\rho(z) = \rho(1 + z)^3$.

13-29. Quando o Sol se formou, era composto por 75% em massa de hidrogênio, mas apenas 13% desse hidrogênio estava disponível para fusão. (O restante estava situado em regiões do Sol nas quais a temperatura era insuficiente para que houvesse fusão.) $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg e o Sol funde cerca de 6×10^{11} kg de hidrogênio por segundo. (*a*) Calcule a massa total de hidrogênio disponível para fusão durante todo o tempo de vida do Sol. (*b*) Quanto tempo vai durar o suprimento inicial de hidrogênio do Sol? (*c*) Como o sistema solar existe há $4{,}6 \times 10^9$ anos, daqui a quanto tempo teremos que nos preocupar com o esgotamento do hidrogênio disponível para fusão no Sol?

13-30. A supernova SN1987A foi observada pela primeira vez em 1987. (*a*) Quantos anos antes ocorreu a explosão? (*b*) Se a explosão produziu prótons com uma energia cinética de 100 GeV, em que ano eles vão chegar à Terra?

13-31. Suponha que o Sol era composto de 70% de hidrogênio quando foi formado. (*a*) Quantos núcleos de hidrogênio havia no Sol naquela época? (*b*) Qual seria a energia liberada se todos esses núcleos de hidrogênio fossem consumidos para formar átomos de hélio? (*c*) De acordo com os astrofísicos, o Sol poderá manter a taxa atual de produção de energia estável até que cerca de 23% do hidrogênio tenha sido "queimado". Qual é o tempo total de vida do Sol de acordo com esta estimativa? Compare o resultado com o do Problema 13-29.

13-32. De acordo com a terceira lei de Kepler, o quadrado da velocidade orbital de um planeta é proporcional ao cubo do raio orbital médio. Use a terceira lei de Kepler para resolver as questões que se seguem. (*a*) O raio orbital da Lua é $3{,}84 \times 10^5$ km e a Lua completa uma órbita em torno da Terra a cada 27,3 d. Calcule a massa da Terra, desprezando a massa da Lua. (*b*) Io (um dos satélites de Júpiter) completa uma órbita em torno de Júpiter a cada 42,5 h, em uma órbita quase circular com um raio médio de $4{,}22 \times 10^5$ km. Calcule a massa de Júpiter, desprezando a massa de Io. (*c*) Calcule o período orbital da Estação Espacial Internacional, que está em órbita 300 km acima da superfície da Terra. (*d*) Caronte, um satélite de Plutão, completa uma órbita em torno do planetoide a cada 6,4 d, a uma distância média de $1{,}97 \times 10^4$ km. Calcule a massa total de Caronte e Plutão. Este valor corresponde a que fração da massa da Terra? (*e*) Use os dados da estrela S2 para calcular o volume (limite superior) do buraco negro que existe no centro da Via Láctea. Compare o resultado com o volume do Sol.

13-33. Considere um sistema binário no qual o plano da órbita é paralelo à nossa linha de visada. A Figura 13-36 mostra as velocidades radiais das duas estrelas, calculadas a partir de medidas do efeito Doppler. Suponha que a massa da estrela 1, m_1, é maior que a massa m_2 da estrela 2 e que as órbitas das duas estrelas em torno do centro de massa do sistema são circulares. (*a*) Determine o período T e a frequência angular ω do sistema. (*b*) Mostre que, nesse caso, $m_1 + m_2 = \omega^2 r^3/G$, onde r é a distância entre as duas estrelas. (*c*) Determine os valores de m_1, m_2 e r a partir do gráfico de v em função de t.

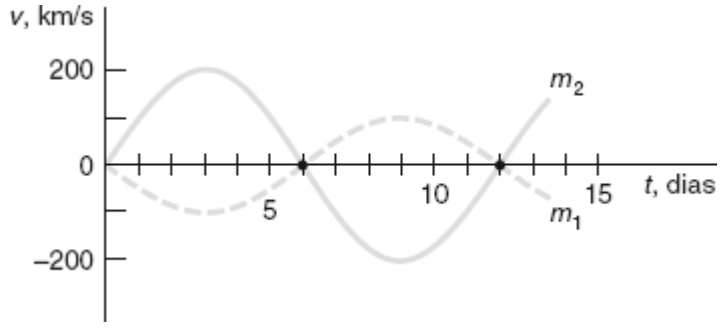


FIGURA 13-36

13-34. Prove que a energia total associada ao movimento orbital da Terra, $E = mv^2/2 - GM_Q m/r$, é igual a metade da energia potencial gravitational, $-GM_Q m/r$, onde r é o raio da órbita da Terra.

13-35. Usando o valor adotado atualmente para a constante de Hubble e o fato de que a concentração média de matéria no universo é 1 átomo de hidrogênio por metro cúbico, a que taxa seria preciso criar novos átomos de hidrogênio em um modelo esta-cionário do universo para manter a densidade constante enquanto o universo se expande? (Dê a resposta em átomos de hidrogênio por metro cúbico e por milhão de anos). Seria fácil observar que novos átomos de hidrogênio estavam sendo criados?

Nível III

13-36. A capacidade de um planeta de reter um determinado gás em sua atmosfera depende da temperatura da atmosfera e da velocidade de escape das moléculas do gás. Quando a velocidade média das moléculas de um gás é maior que 1/6 da velocidade de escape, o gás desaparece da atmosfera em 10^8 anos, aproximadamente. (a) Faça um gráfico da velocidade média das moléculas de H_2O, CO_2, O_2, CH_4, H_2 e He entre 50 K e 1000 K. Indique, no mesmo gráfico, os pontos correspondentes a 1/6 da velocidade de escape para os valores de temperatura que apare-cem na Tabela 13-5. (b) Mostre que a velocidade de escape de um planeta é dada por

Tabela 13-5Temperatura da atmosfera de alguns planetas

T_{med}(K)	Planeta	M/M_{Terra}	R/R_{Terra}
300	Terra	1,00	1,00
390	Vênus	0,81	0,95
600	Mercúrio	0,06	0,38
150	Júpiter	318,00	11,00
60	Netuno	17,00	3,90
290	Marte	0,11	0,53

$$\frac{v}{v_{\text{Terra}}} = \sqrt{\frac{(M/M_{\text{Terra}})}{(R/R_{\text{Terra}})}}$$

(*c*) Quais dos seis gases mencionados devem estar presentes atualmente nas atmosferas dos planetas que aparecem na tabela? Explique sucintamente cada resposta.

13-37. Use a técnica da paralaxe para calcular a distância (*a*) de Alfa do Centauro (ângulo de paralaxe 0,742 segundo de arco) e (*b*) de Prócion (ângulo de paralaxe 0,0286 segundo de arco). Expresse as respostas em anos-luz e em parsecs.

13-38. Suponha que, quando o Sol se transformar em uma gigante vermelha, sua luminosidade se tornará 100 vezes maior. Mostre que os oceanos da Terra irão evaporar, mas o vapor d'água não escapará da atmosfera.

13-39. A massa da poeira existente na Galáxia pode ser estimada a partir da atenuação sofrida pela luz das estrelas. Supondo que o raio médio dos grãos de poeira é R e a poeira está presente em uma concentração uniforme de n grãos por centímetro cúbico, (*a*) mostre que o livre caminho médio d_0 de um fóton no meio da poeira interestelar é dado por $d_0 = 1/n\pi R^2$. (*b*) A atenuação causada pela poeira faz com que a intensidade da luz emitida por uma estrela varie segundo a equação

$$I = I_0 e^{-d/d_0}$$

em que I_0 e d_0 são constantes e d é a distância percorrida pela luz. Medidas realizadas nas vizinhanças do Sol mostram que d_0 = 3000 anos-luz. Se $R = 10^{-5}$ cm, calcule o valor de n. (*c*) A massa específica média do material sólido existente na Galáxia é 2 g/cm^3 e a concentração de estrelas no disco é 1 $M_\odot$/300 anos-luz^3. Calcule a razão entre a massa da poeira e a massa das estrelas.

13-40. A supernova 1987A certamente produziu alguns elementos pesados. Em comparação com a energia liberada na fusão de 56 átomos de ^{1}H para formar um átomo de ^{56}Fe a partir do ciclo próton-próton, qual é a energia necessária para fundir dois átomos de ^{56}Fe para formar um átomo de ^{112}Cd?

13-41. De acordo com as teorias mais recentes, os buracos negros evaporam por emissão de radiação de Hawking em um tempo t que depende da massa M do buraco negro de acordo com a seguinte relação:

$$t = (1{,}024 \times 10^4 \pi^2 \text{ m}^3/\text{s}^2) G^2 M^2 / hc^4$$

(*a*) Explique, sem fazer cálculos, por que, de acordo com essa expressão, os buracos negros de massa elevada levam mais tempo para evaporar e por que a taxa de evaporação dos buracos negros aumenta com o tempo. (*b*) Calcule o tempo de vida de um

buraco negro cuja massa é 1 $M_{\odot}$. Compare esse tempo com a idade atual do universo. (*c*) De acordo com algumas teorias, a maior massa que um buraco negro pode possuir é da ordem de $10^{12}\ M_{\odot}$, um valor da mesma ordem que a massa de uma galáxia inteira. Qual seria o tempo de vida de um buraco negro com essa massa?

***SNU é a abreviação de *S*olar *N*eutrino *U*nit, ou seja, Unidade de Neutrinos Solares. (N.T.)**

***Dados de 25 de março de 2013. Fonte: http://exoplanet.eu. (N.T.)**

****SETI é a abreviação de Search for *E*xtraterrestrial *I*nteligence (Busca de Inteligência Extraterrestre). Para mais detalhes, acesse o site www.seti.org. (N.T.)**

***O leitor brasileiro deve usar um mapa semelhante a este, preparado para o Hemisfério Sul, que pode ser obtido no site http://skymaps.com. (N.T.)**

***No hemisfério sul, naturalmente, acontece o oposto: a Via Láctea é mais visível nas noites de inverno. (N.T.)**

*** As definições deste parágrafo e da Figura 13-15 são para um observador situado no hemisfério norte. Para um observador situado no hemisfério sul, as mesmas definições se aplicam, com "primavera" substituída por "outono", e vice-versa, e com "verão" substituído por "inverno", e vice-versa. (N.T.)**

***Do inglês *w*eakly *i*nteracting *m*assive *p*articles, ou seja, partículas com massa que interagem fracamente. (N.T.)**

***O "GRB" que precede o número das erupções vem de "*G*amma-*R*ay *B*urst", que é o nome, em inglês, das erupções de raios gama. (N.T.)**

***A relação de proporcionalidade entre a luminosidade e a faixa de velocidades das estrelas de uma galáxia é uma consequência do fato de que tanto a luminosidade (veja a Equação 13-14) como a velocidade de rotação da galáxia dependem da massa total. A constante de proporcionalidade pode ser calculada**

combinando as Equações 13-8 e 13-26 e determinando o valor de *r* por outros métodos, o que pode ser feito para galáxias relativamente próximas da Terra. (N.T.)

APÊNDICE A

Tabela de Massas Atômicas

Z	Elemento	Símbolo	Peso atômico químico	Número de massa (* indica radioativo)	Massa atômica	Abundância relativa (%)	Meia-vida e modo de decaimento (se radioativo)
0	(Nêutron)	*n*		1*	1,008665		10,4 min β^-
1	Hidrogênio	H	1,00798	1	1,007825	99,985	
	Deutério	D		2	2,014102	0,015	
	Trítio	T		3*	3,016049		12,33 anos β^-
2	Hélio	He	4,00260	3	3,016029	0,00014	
				4	4,002602	99,99986	
				6*	6,018886		0,81 s β^-
				8*	8,033922		0,12 s β^-
3	Lítio	Li	6,941	6	6,015121	7,5	
				7	7,016003	92,5	
				8*	8,022486		0,84 s β^-
				9*	9,026789		0,18 s β^-
				11*	11,043897		8,7 ms β^-
4	Berílio	Be	9,0122	7*	7,016928		53,3 d ce**
				9	9,012174	100	
				10*	10,013534		$1{,}5 \times 10^6$ anos β^-
				11*	11,021657		

				12*	12,026921		13,8 s β^-
				14*	14,042866		23,6 ms β^-
							4,3 ms β^-
5	Boro	B	10,811	8*	8,024605		0,77 s β^+
				10	10,012936	19,9	
				11	11,009305	80,1	
				12*	12,014352		0,0202 s β^-
				13*	13,017780		17,4 ms β^-
				14*	14,025404		13,8 ms β^-
				15*	15,031100		10,3 ms β^-
6	Carbono	C	12,011	9*	9,031030		0,13 s β^+
				10*	10,016854		19,3 s β^+
				11*	11,011433		20,4 min β^+
				12	12,000000	98,90	
				13	13,003355	1,10	
				14*	14,003242		5730 anos β^-
				15*	15,010599		2,45 s β^-
				16*	16,014701		0,75 s β^-
				17*	17,022582		0,20 s β^-
7	Nitrogênio	N	14,0067	12*	12,018613		0,0110 s β^+
				13*	13,005738		9,96 min β^+
				14	14,003074	99,63	
				15	15,000108	0,37	
				16*	16,006100		7,13 s β^-
				17*	17,008450		4,17 s β^-
				18*	18,014082		0,62 s β^-
				19*	19,017038		0,24 s β^-
8	Oxigênio	O	15,9994	13*	13,024813		8,6 ms β^+
				14*	14,008595		70,6 s β^+

				15*	15,003065		122 s β^+
				16	15,994915	99,71	
				17	16,999132	0,039	
				18	17,999160	0,20	
				19*	19,003577		26,9 s β^-
				20*	20,004076		13,6 s β^-
				21*	21,008595		3,4 s β^-
9	Flúor	F	18,99840	17*	17,002094		64,5 s β^+
				18*	18,000937		109,8 min β^+
				19	18,998404	100	
				20*	19,999982		11,0 s β^-
				21*	20,999950		4,2 s β^-
				22*	22,003036		4,2 s β^-
				23*	23,003564		2,2 s β^-
10	Neônio	Ne	20,180	18*	18,005710		1,67 s β^+
				19*	19,001880		17,2 s β^+
				20	19,992435	90,48	
				21	20,993841	0,27	37,2 s β^-
				22	21,991383	9,25	3,38 min
				23*	22,994465		0,60 s β^-
				24*	23,993999		
				25*	24,997789		
11	Sódio	Na	22,98977	21*	20,997650		22,5 s β^+
				22*	21,994434		2,61 anos β^+
				23	22,989767	100	
				24*	23,990961		14,96 h β^-
				25*	24,989951		59,1 s β^-
				26*	25,992588		1,07 s β^-
12	Magnésio	Mg	24,3051	23*	22,994124		11,3 s β^-
				24	23,985042	78,99	

				25	24,985838	10,00	
				26	25,982594	11,01	
				27*	26,984341		9,46 min β^-
				28*	27,983876		20,9 h β^-
				29*	28,375346		1,30 s β^-
13	Alumínio	Al	26,98154	25*	24,990429		7,18 s β^+
				26*	25,986892		$7{,}4 \times 10^{5}$ anos β^+
				27	26,981538	100	
				28*	27,981910		2,24 min β^-
				29*	28,980445		6,56 min β^-
				30*	29,982965		3,60 s β^-
14	Silício	Si	28,086	27*	26,986704	92,23	4,16 s β^+
				28	27,976927	4,67	
				29	28,976495	3,10	
				30	28,973770		
				31*	30,975362		2,62 h β^-
				32*	31,974148		172 anos β^-
				33*	32,977928		6,13 s β^-
15	Fósforo	P	30,97376	30*	29,978307		2,50 min β^+
				31	30,973762	100	
				32*	31,973762		14,26 d β^-
				33*	32,971725		25,3 d β^-
				34*	33,973636		12,43 s β^-
16	Enxofre	S	32,066	31*	30,979554		2,57 s β^+
				32	31,972071	95,02	
				33	32,971459	0,75	
				34	33,967867	4,21	
				35*	34,969033		87,5 d β^-
				36	35,967081	0,02	

17	Cloro	Cl	35,453	34*	33,973763		32,2 min β^+
				35	34,968853	75,77	
				36*	35,968307		$3{,}0 \times 10^{5}$ anos β^-
				37	36,965903	24,23	
				38*	37,968010		
							37,3 min β^-
18	Argônio	Ar	39,948	36	35,967547	0,337	
				37*	36,966776		35,04 d ce
				38	37,962732	0,063	
				39*	38,964314	99,600	269 anos β^-
				40	39,962384		
				42*	41,963049		33 anos β^-
19	Potássio	K	39,0983	39	38,963708	93,2581	
				40*	39,964000	0,0117	$1{,}28 \times 10^{9}$ anos β^+, ce, β^-
				41	40,961827	6,7302	
				42*	41,962404		
				43*	42,960716		12,4 h β^-
							22,3 h β^-
20	Cálcio	Ca	40,078	40	39,962591	96,941	
				41*	40,962279		$1{,}0 \times 10^{5}$ anos ce
				42	41,958618	0,647	
				43	42,958767	0,135	
				44	43,955481	2,086	
				46	45,953687	0,004	
				48	47,952534	0,187	
21	Escândio	Sc	44,9559	41*	40,969250		0,596 s β^+
				43*	42,961151		3,89 h β^+
				45	44,955911	100	
				46*	45,955170		83,8 d β^-
22	Titânio	Ti	47,88	44*	43,959691		49 anos ce
				46	45,952630	8,0	

				47	46,951765	7,3	
				48	47,947947	73,8	
				49	48,947871	5,5	
				50	49,944792	5,4	
23	Vanádio	V	50,9415	48*	47,952255		15,97 d β^+
				50*	49,947161	0,25	$1,5 \times 10^{17}$ anos β^+
				51	50,943962	99,75	
24	Cromo	Cr	51,996	48*	47,954033		21,6 h ce
				50	49,946047	4,345	
				52	51,940511	83,79	
				53	52,940652	9,50	
				54	53,938883	2,365	
25	Manganês	Mn	54,93805	53*	52,941292		$3,74 \times 10^6$ anos ce
				54*	53,940361		312,1 d ce
				55	54,938048	100	
				56*	55,938908		2,58 h β^-
26	Ferro	Fe	55,847	54	53,939613	5,9	
				55*	54,938297		2,7 anos ce
				56	55,934940	91,72	
				57	56,935396	2,1	
				58	57,933278	0,28	
				60*	59,934078		$1,5 \times 10^6$ anos β^-
27	Cobalto	Co	58,93320	57*	56,936294		271,8 d ce
				58*	57,935755		70,9 h ce, β^+
				59	58,933198	100	
				60*	59,933820		5,27 anos β^-
				61*	60,932478		1,65 h β^-
28	Níquel	Ni	58,693	58	57,935346	68,077	
				59*	58,934350		$7,5 \times 10^4$

				60	59,930789	26,223	anos ce, β^+
				61	60,931058	1,140	
				62	61,928346	3,634	
				63*	62,929670		100 anos β^-
				64	63,927967	0,926	
29	Cobre	Cu	63,546	63	62,929599	69,17	
				64*	63,929765		12,7 h ce
				65	64,927791	30,83	
				66*	65,928871		5,1 min β^-
30	Zinco	Zn	65,39	64	63,929144	48,6	
				66	65,926035	27,9	
				67	66,927129	4,1	
				68	67,924845	18,8	
				70	69,925323	0,6	
31	Gálio	Ga	69,723	69	68,925580	60,108	
				70*	69,926027		21,1 min β^-
				71	70,924703	39,892	
				72*	71,926367		14,1 h β^-
32	Germânio	Ge	72,61	69*	68,927969		39,1 h ce, β^+
				70	69,924250	21,23	
				72	71,922079	27,66	
				73	72,923462	7,73	
				74	73,921177	35,94	
				76	75,921402	7,44	
				77*	76,923547		11,3 h β^-
33	Arsênio	As	74,9216	73*	72,923827		80,3 d ce
				74*	73,923928		17,8 d ce, β^+
				75	74,921594	100	
				76*	75,922393		1,1 d β^-
				77*	76,920645		38,8 h β^-

34	Selênio	Se	78,96	74	73,922474	0,89	
				76	75,919212	9,36	
				77	76,919913	7,63	
				78	77,917307	23,78	
				79*	78,918497		$\leq 6{,}5 \times 10^4$ anos β^-
				80	79,916519	49,61	
				82*	81,916697	8,73	$1{,}4 \times 10^{20}$ anos $2\beta^-$
35	Bromo	Br	79,904	79	78,918336	50,69	
				80*	79,918528		17,7 min β^+
				81	80,916287	49,31	
				82*	81,916802		35,3 h β^-
36	Criptônio	Kr	83,80	78	77,920400	0,35	
				80	79,916377	2,25	
				81*	80,916589		$2{,}11 \times 10^5$ anos ce
				82	81,913481	11,6	
				83	82,914136	11,5	
				84	83,911508	57,0	
				85*	84,912531		10,76 anos β^-
				86	85,910615	17,3	
37	Rubídio	Rb	85,468	85	84,911793	72,17	
				86*	85,911171		18,6 d β^-
				87*	86,909186	27,83	$4{,}75 \times 10^{10}$ anos β^-
				88*	87,911325		17,8 min
38	Estrôncio	Sr	87,62	84	83,913428	0,56	
				86	85,909266	9,86	
				87	86,908883	7,00	
				88	87,905618	82,58	

-

				90*	89,907737		29,1 anos β
39	Ítrio	Y	88,9058	88*	87,909507		106,6 d ce, β^+
				89	88,905847	100	
				90*	89,914811		2,67 d β^-
40	Zircônio	Zr	91,224	90	89,904702	51,45	
				91	90,905643	11,22	
				92	91,905038	17,15	
				93*	92,906473		$1,5 \times 10^6$ anos β^-
				94	93,906314	17,38	
				96	95,908274	2,80	
41	Nióbio	Nb	92,9064	91*	90,906988		$6,8 \times 10^2$ anos ce
				92*	91,907191		$3,5 \times 10^7$ anos ce
				93	92,906376	100	
				94*	93,907280		2×10^4 anos β^-
42	Molibdênio	Mo	95,94	92	91,906807	14,84	
				93*	92,906811		$3,5 \times 10^3$ anos ce
				94	93,905085	9,25	
				95	94,905841	15,92	
				96	95,904678	16,68	
				97	96,906020	9,55	
				98	97,905407	24,13	
				100	99,907476	9,63	
43	Tecnécio	Tc		97*	96,906363		$2,6 \times 10^6$ anos ce
				98*	97,907215		$4,2 \times 10^6$ anos β^-
				99*	98,906254		$2,1 \times 10^5$ anos β^-
44	Rutênio	Ru	101,07	96	95,907597	5,54	
				98	97,905287	1,86	

				99	98,905939	12,7		
				100	99,904219	12,6		
				101	100,905558	17,1		
				102	101,904348	31,6		
				104	103,905428	18,6		
45	Ródio	Rh	102,9055	102*	101,906794			207 d ce
				103	102,905502	100		
				104*	103,906654			42 s β^-
46	Paládio	Pd	106,42	102	101,905616	1,02		
				104	103,904033	11,14		
				105	104,905082	22,33		
				106	105,903481	27,33		
				107*	106,905126		$6{,}5 \times 10^{6}$ anos β^-	
				108	107,903893	26,46		
				110	109,905158	11,72		
47	Prata	Ag	107,868	107	106,905091	51,84		
				108*	107,905953		2,39 min cem β^+ β^-	
				109	108,904754	48,16		
				110*	109,906110		24,6 s β^-	
48	Cádmio	Cd	112,41	106	105,906457	1,25		
				108	107,904183	0,89		
				109*	108,904984		462 d ce	
				110	109,903004	12,49		
				111	110,904182	12,80		
				112	111,902760	24,13		
				113*	112,904401	12,22	$9{,}3 \times 10^{15}$ anos β^-	
				114	113,903359	28,73		
				116	115,904755	7,49		

49	Índio	In	114,82	113	112,904060	4,3	
				114*	113,904916		1,2 min β^-
				115*	114,903876	95,7	$4,4 \times 10^{14}$ anos β^-
				116*	115,905258		54,4 min β^-
50	Estanho	Sn	118,71	112	111,904822	0,97	
				114	113,902780	0,65	
				115	114,903345	0,36	
				116	115,901743	14,53	
				117	116,902953	7,68	
				118	117,901605	24,22	
				119	118,903308	8,58	
				120	119,902197	32,59	
				121*	120,904237		55 anos β^-
				122	121,903439	4,63	
				124	123,905274	5,79	
51	Antimômio	Sb	121,76	121	120,903820	57,36	
				123	122,904215	42,64	
				125*	124,905251		2,7 anos β^-
52	Telúrio	Te	127,60	120	119,904040	0,095	
				122	121,903052	2,59	
				123*	122,904271	0,905	$1,3 \times 10^{13}$ anos ce
				124	123,902817	4,79	
				125	124,904429	7,12	
				126	125,903309	18,93	
				128*	127,904463	31,70	
				130*	129,906228	33,87	$<8 \times 10^{24}$ anos 2 β^-
							$1,2 \times 10^{21}$ anos 2 β^-
53	Iodo	I	126,9045	126*	125,905619		13 d ce, β^+, β^-
				127	126,904474	100	

				128*	127,905812		
				129*	128,904984		25 min β^-, ce, β^+
							$1,6 \times 10^{7}$ anos β^-
54	Xenônio	Xe	131,29	124	123,905894	0,10	
				126	125,904268	0,09	
				128	127,903531	1,91	
				129	128,904779	26,4	
				130	129,903509	4,1	
				131	130,905069	21,2	
				132	131,904141	26,9	
				134	133,905394	10,4	
				136	135,907215	8,9	
55	Césio	Cs	132,9054	133	132,905436	100	
				134*	133,906703		2,1 anos β^-
				135*	134,905891		2×10^{6} anos β^-
				137*	136,907078		30 anos β^-
56	Bário	Ba	137,33	130	129,906289	0,106	
				132	131,905048	0,101	
				133*	132,905990		10,5 anos ce
				134	133,904492	2,42	
				135	134,905671	6,593	
				136	135,904559	7,85	
				137	136,905816	11,23	
				138	137,905236	71,70	
57	Lantânio	La	138,905	137*	136,906462		6 × 104 anos ce
				138*	137,907105	0,0902	
				139	138,906346	99,9098	$1,05 \times 10^{11}$ anos ce, β^+
58	Cério	Ce	140,12	136	135,907139	0,19	
				138	137,905986	0,25	

				140	139,905434	88,43	
				142	141,909241	11,13	
59	Praseodímio	Pr	140,9076	140*	139,909071		3,39 m ce, β^+
				141	140,907647	100	
				142*	141,910040		25,0 m β^-
60	Neodímio	Nd	144,24	142	141,907718	27,13	
				143	142,909809	12,18	
				144*	143,910082	23,80	$2{,}3 \times 10^{15}$ anos α
				145	144,912568	8,30	
				146	145,913113	17,19	
				148	147,916888	5,76	
				150	149,920887	5,64	
61	Promécio	Pm		143*	142,910928		265 d ce
				145*	144,912745		17,7 anos ce
				146*	145,914698		5,5 anos ce
				147*	146,915134		2,623 anos β^-
62	Samário	Sm	150,36	144	143,911996	3,1	
				146*	145,913043		$1{,}0 \times 10^{8}$ anos α
				147*	146,914894	15,0	$1{,}06 \times 10^{11}$ anos α
				148*	147,914819	11,3	
				149	148,917180	13,8	7×10^{15} anos α
				150	149,917273	7,4	
				151*	150,919928		
				152	151,919728	26,7	
				154	153,922206	22,7	90 anos β^-
63	Európio	Eu	151,96	151	150,919846	47,8	
				152*	151,921740		13,5 anos ce, β^+
				153	152,921226	52,2	
				154*	153,922975		8,59 anos β^-

				155*	154,922888		4,7 anos β^-
64	Gadolínio	Gd	157,25	148*	147,918112		75 anos α
				150*	149,918657		1,8 × 106 anos α
				152*	151,919787	0,20	
				154	153,920862	2,18	1,1 × 1014 anos α
				155	154,922618	14,80	
				156	155,922119	20,47	
				157	156,923957	15,65	
				158	157,924099	24,84	
				160	159,927050	21,86	
65	Térbio	Tb	158,9253	158*	157,925411		180 anos ce, β^+, β^-
				159	158,925345	100	
				160*	159,927551		72,3 d β^-
66	Disprósio	Dy	162,50	156	155,924277	0,06	
				158	157,924403	0,10	
				160	159,925193	2,34	
				161	160,926930	18,9	
				162	161,926796	25,5	
				163	162,928729	24,9	
				164	163,929172	28,2	
67	Hólmio	Ho	164,9303	165	164,930316	100	1,2 × 103 anos β^-
				166*	165,932282		
68	Érbio	Er	167,26	162	161,928775	0,14	
				164	163,929198	1,61	
				166	165,930292	33,6	
				167	166,932047	22,95	
				168	167,932369	27,8	
				170	169,935462	14,9	
69	Túlio	Tm	168,9342	169	168,934213	100	1,92 ano β^-

				171*	170,936428		
70	Itérbio	Yb	173,04	168	167,933897	0,13	
				170	169,934761	3,05	
				171	170,936324	14,3	
				172	171,936380	21,9	
				173	172,938209	16,12	
				174	173,938861	31,8	
				176	175,942564	12,7	
71	Lutécio	Lu	174,967	173*	172,938930		1,37 anos ce
				175	174,940772	97,41	
				176*	175,942679	2,59	$3{,}8 \times 10^{10}$ anos β^-
72	Háfnio	Hf	178,49	174*	173,940042	0,162	$2{,}0 \times 10^{15}$ anos α
				176	175,941404	5,206	
				177	176,943218	18,606	
				178	177,943697	27,297	
				179	178,945813	13,629	
				180	179,946547	35,100	
73	Tântalo	Ta	180,9479	180	179,947542	0,012	
				181	180,947993	99,988	
74	Tungstênio	W	183,85	180	179,946702	0,12	
				182	181,948202	26,3	
				183	182,950221	14,28	
				184	183,950929	30,7	
				186	185,954358	28,6	
75	Rênio	Re	186,207	185	184,952951	37,40	$4{,}4 \times 10^{10}$ anos β^-
				187*	186,955746	62,60	
76	Ósmio	Os	190,2	184	183,952486	0,02	
				186*	185,953834	1,58	$2{,}0 \times 10^{15}$ anos α
				187	186,955744	1,6	

				188	187,955744	13,3	
				189	188,958139	16,1	
				190	189,958439	26,4	
				192	191,961468	41,0	
				194*	193,965172		6,0 anos β^-
77	Irídio	Ir	192,2	191	190,960585	37,3	
				193	192,962916	62,7	
78	Platina	Pt	195,08	190*	189,959926	0,01	$6,5 \times 10^{11}$ anos α
				192	191,961027	0,79	
				194	193,962655	32,9	
				195	194,964765	33,8	
				196	195,964926	25,3	
				198	197,967867	7,2	
79	Ouro	Au	196,9665	197	196,966543	100	
				198*	197,968217		2,70 d β^-
				199*	198,968740		3,14 d β^-
80	Mercúrio	Hg	200,59	196	195,965806	0,15	
				198	197,966743	9,97	
				199	198,968253	16,87	
				200	199,968299	23,10	
				201	200,970276	13,10	
				202	201,970617	29,86	
				204	203,973466	6,87	
81	Tálio	Tl	204,383	203	202,972320	29,524	
		(Ra E″)		204*	203,973839		3,78 anos β^-
		(Ac C″)		205	204,974400	70,476	
		(Th C″)		206*	205,976084		4,2 min β^-
		(Ra C″)		207*	206,977403		4,77 min β^-
				208*	207,981992		3,053 min β^-
				210*	209,990057		1,30 min β^-

82	Chumbo	Pb	207,2	202*	201,972134		5 × 104 anos ce
				204	203,973020	1,4	
				205*	204,974457		
				206	205,974440	24,1	1,5 × 10 7 anos ce
				207	206,975871	22,1	
				208	207,976627	52,4	
		(Ra D)		210*	209,984163		
		(Ac B)		211*	210,988734		22,3 anos β−
		(Th B)		212*	211,991872		36,1 min β−
		(Ra B)		214*	213,999798		10,64 h β−
							26,8 min β−
83	Bismuto	Bi	208,9803	207*	206,978444		32,2 anos ce, β+
				208*	207,979717		
				209*	208,980374		3,7 × 10 5 anos ce
		(Ra E)		210*	209,984096		2,0 × 10 18 anos α
		(Th C)		211*	210,987254		5,01 d α, β−
		(Ra C)		212*	211,991259		2,14 min α
				214*	213,998692		60,6 min α, β−
				215*	215,001836		19,9 min β−
							7,4 min β−
84	Polônio	Po		209*	208,982405		102 anos α
		(Ra F)		210*	209,982848		138,38 d α
		(Ac C′)		211*	210,986627		0,52 s α
		(Th C′)		212*	211,988842		0,30 µs α
		(Ra C′)		214*	213,995177		164 µs α
		(Ac A)		215*	214,999418		0,0018 s α
		(Th A)		216*	216,001889		0,145 s α
		(Ra A)		218*	218,008965		3,10 min α
85	Astatínio	At		215*	214,998638		≈100 µs α

				218*	218,008685		1,6 s α
				219*	219,011297		0,9 min α
86	Radônio	Rn					
		(An)		219*	219,009477		3,96 s α
		(Tn)		220*	220,011369		55,6 s α
		(Rn)		222*	222,017571		3,823 d α
87	Frâncio			221*	221,01425		4,18 min α
		Fr		222*	222,017585		14,2 min β^-
		(Ac K)		223*	223,019733		22 min β^-
88	Rádio	Ra		221*	221,01391		29 s α
		(Ac X)		223*	223,018499		11,43 d α
		(Th X)		224*	224,020187		3,66 d α
				225*			14,9 d β^-
		(Ra)		226*	226,025402		1600 anos α
		(MsTh$_1$)		228*	228,031064		5,75 anos β^-
89	Actínio	Ac		225*			10 d α
		(Ms Th$_2$)		227*	227,027749		21,77 anos β^-
				228*	228,031015		6,15 h β^-
				229*			1,04 h β^-
90	Tório	Th	232,0381				
		(Rd Ac)		227*	227,027701		18,72 d α
		(Rd Th)		228*	228,028716		1,913 anos α
				229*	229,031757		7300 anos α
		(Io)		230*	230,033127		75,000 anos α, fe*
		(UY)		231*	231,036299	100	25,52 h β^-
		(Th)		232*	232,038051		$1{,}40 \times 10^{10}$ anos α
		(UX$_1$)		234*	234,043593		24,1 d β^-
91	Protactínio	Pa		231*	231,035880		32,760 anos α
		(UZ)		234*	234,043300		

							6,7 h β^-
92	Urânio	U	238,0289	231*	231,036264		4,2 d β^+
				232*	232,037131		69 anos α
				233*	233,039630		$1,59 \times 10^5$ anos α
		(UII)		234*	234,040946	0,0055	$2,45 \times 10^5$ anos α
		(Ac U)		235*	235,043924	0,720	$7,04 \times 10^8$ anos α
		(UI)		236*	236,045562	99,2745	$2,34 \times 10^7$ anos α
				238*	238,050784		$4,47 \times 10^9$ anos α
				239*	239,054290		23,5 min β^-
93	Netúnio	Np		235*	235,044057		396 d α
				236*	236,046559		$1,54 \times 10^5$ anos ce
				237*	237,048168		$2,14 \times 10^6$ anos α
94	Plutônio	Pu		236*	236,046033		2,87 anos α, fe
				238*	238,049555		87,7 anos α, fe
				239*	239,052157		24,120 anos α, fe
				240*	240,053808		6560 anos α, fe
				241*	241,056846		14,4 anos β^-
				242*	242,058737		$3,7 \times 10^5$ anos α, fe
				244*	244,064200		$8,1 \times 10^7$ anos α, fe
95	Amerício	Am		240*	240,055285		2,12 d ce
				241*	241,056824		432 anos α, fe
96	Cúrio	Cm		247*	247,070347		$1,56 \times 10^7$ anos α
				248*	248,072344		$3,4 \times 10^5$

					anos α, fe
97	Berquélio	Bk	247*	247,070300	1380 anos α
			249*	249,074979	327 d β^-
98	Califórnio	Cm	250*	250,076400	13,1 anos α, fe
			251*	251,079580	898 anos α
99	Einstênio	Es	252*	252,082974	1,29 ano α
			253*	253,084817	2,02 d α, fe
100	Férmio	Fm	253*	253,085173	3,00 d ce
			254*	254,086849	3,24 h α, fe
101	Mendelévio	Md	256*	256,093988	75,6 min ce, β^+
			258*	258,098594	55 d α
102	Nobélio	No	257*	257,096855	25 s α
			259*	259,100932	58 min α, fe
103	Laurêncio	Lr	259*	259,102888	6,14 s α, fe
			260*	260,105346	3,0 min α, fe
104	Rutherfórdio	Rf	260*	260,160302	24 ms fe
			261*	261,108588	65 s α, fe
105	Dúbnio	Db	261*	261,111830	1,8 s α
			262*	262,113763	35 s α
106	Seabórgio	Sg	263*	263,118310	0,78 s α, fe
107	Bóhrio	Bh	262*	262,123081	0,10 s α, fe
108	Hássio	Hs	265*	265,129984	1,8 ms α
			267*	267,131770	60 ms α
109	Meitnério	Mt	266*	266,137789	3,4 ms α, fe
			268*	268,138820	70 ms α
110	Darmstádio	Ds	269*	269,145140	0,17 ms α
			271*	271,146080	1,1 ms α
			273*	272,153480	8,6 ms α

111	Roentgênio	Rg	272*	272,153480	1,5 ms α
112	Copernício	Cn	277*	?	0,2 ms α
113	Unúntrio	Unt	284*	?	? α
114	Fleróvio	Fl	289*	?	? α
115	Unumpêntio	Unp	288*	?	? α
116	Livermório	Lv	292*	?	? α
117	Ununséptio	Uus			
118	Ununóctio	Uno	294*	?	? α

**Captura de eléltrons. (N.T.)

*fissão espontânea, (N.T.)

APÊNDICE B1

Integrais Úteis

Na determinação de valores médios usando a distribuição de Maxwell-Boltzmann, é preciso calcular integrais do tipo

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x^2}\, dx$$

onde n é um número inteiro. Essas integrais podem ser obtidas por derivação a partir de I_0 e I_1. Considerando I_n uma função de λ e calculando a derivada de I_n em relação a λ, obtemos:

$$\frac{dI_n}{d\lambda} = \int_0^\infty -x^2 x^n e^{-\lambda x^2}\, dx = -I_{n+2} \qquad \textbf{B1-1}$$

De acordo com a Equação B1-1, uma vez conhecido o valor de I_0, é possível calcular I_n para todos os valores pares de n; uma vez conhecido o valor de I_1, é possível calcular I_n para todos os valores ímpares de n. A integral I_1 pode ser calculada através da mudança de variável $u = \lambda x^2$. Nesse caso, $du = 2\lambda x dx$ e

$$I_1 = \int_0^\infty x e^{-\lambda x^2}\, dx = \frac{1}{2}\lambda^{-1} \int_0^\infty e^{-u}\, du = \frac{1}{2}\lambda^{-1}$$

Assim, I_3 e I_5 são dadas por

$$I_3 = -\frac{d\left(\frac{1}{2}\lambda^{-1}\right)}{d\lambda} = \frac{1}{2}\lambda^{-2} \quad \text{e} \quad I_5 = -\frac{dI_3}{d\lambda} = \lambda^{-3}$$

O cálculo de I_0 é mais difícil, mas pode ser executado com o auxílio de um artifício. Primeiro calculamos o valor de I^2:

$$I_0^2 = \int_0^\infty e^{-\lambda x^2}\, dx \int_0^\infty e^{-\lambda y^2}\, dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda(x^2+y^2)}\, dx\, dy \qquad \textbf{B1-2}$$

onde usamos y como variável de integração na segunda integral. Considerando a última integral uma integral no plano xy, podemos mudar de coordenadas cartesianas para coordenadas polares, fazendo $r^2 = x^2 + y^2$ e $\tan \phi = yyx$. Nesse caso, o elemento de área $dx\, dy$ se torna $r\, dr\, d\phi$ e a integração de 0 a ∞ em x e y se torna uma integração de $r = 0$ a $r = \infty$ e de $\phi = 0$ a $\phi = \pi/2$ e temos:

$$I_0^2 = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda r^2}\, r\, dr\, d\varphi = \frac{\pi}{2} I_1 = \frac{\pi}{4}\lambda^{-1}$$

e

$$I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\lambda^{-1/2}$$

Os valores de I_2, I_4, … podem ser obtidos por derivação. Assim, por exemplo,

$$I_2 = -\frac{dI_0}{d\lambda} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\lambda^{-3/2}$$

A Tabela B1-1 mostra os valores da integral I_n para valores de n de 0 a 5.

Tabela B1-1 **Valores da integral $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-\lambda x^2} dx$ para valores de n = 0 n = 5**

n	I_n
0	$\frac{1}{2}\pi^{1/2}\lambda^{-1/2}$
1	$\frac{1}{2}\lambda^{-1}$
2	$\frac{1}{4}\pi^{1/2}\lambda^{-3/2}$
3	$\frac{1}{2}\lambda^{-2}$
4	$\frac{3}{8}\pi^{1/2}\lambda^{-5/2}$
5	λ^{-3}
Se n é par	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\lambda x^2} dx = 2I_n$
Se n é ímpar	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\lambda x^2} dx = 0$

APÊNDICE B2

Séries Binomial e Exponencial

Série Binomial

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n$$

onde

$$R_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n(1+ax)^{m-n}$$

e $0 < a < 1$.

$$R_n < \left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n\right| \quad \text{se } x > 0$$

$$R_n < \left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}\frac{x^n}{(1+x)^{n-m}}\right| \quad \text{para } x < 0, n > m$$

$$R_n < |x^n|(1+x)^m \quad \text{se } -1 < m < 0$$

Se m é um número inteiro negativo ou uma fração positiva ou negativa, a expansão é válida apenas para $|x| < 1$. A não ser no caso em que m é um número inteiro positivo, um binômio como $(a + b)^m$ deve ser escrito em uma das seguintes formas antes de ser expandido:

$$a^m\left(1+\frac{b}{a}\right)^m \text{ se } a > b \qquad b^m\left(1+\frac{a}{b}\right)^m \text{ se } b > a$$

Série Exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{(x\log a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x\log a)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(x\log a)^n}{n!} + \cdots$$

APÊNDICE B3

Células Unitárias dos Cristais

Os sólidos cristalinos são classificados, de acordo com a simetria que possuem, em 7 sistemas cristalinos e 14 redes cristalinas. Uma **rede cristalina** é definida como um arranjo de pontos tais que o entorno de um dos pontos é igual ao entorno de qualquer outro ponto. Esses pontos podem ser especificados através de um conjunto de três **vetores de translação**, **a**, **b** e **c**, escolhidos de tal forma que o arranjo de átomos no cristal, observado de um ponto **r**, tenha o mesmo aspecto que ao ser observado de um outro ponto **r′**, onde o ponto **r′** é obtido a partir do ponto **r** através de uma translação do tipo

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + m_1\mathbf{a} + m_2\mathbf{b} + m_3\mathbf{c}$$

onde m_1, m_2 e m_3 são números inteiros. Os vetores de translação são usados para definir os três eixos da **célula unitária** do cristal, que, ao ser repetida indefinidamente, pode gerar todo o cristal. O volume V da célula unitária é dado por V 5 $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Existe mais de uma forma de definir a célula unitária de um cristal, que depende da escolha dos vetores de translação. Se o volume da célula unitária é o menor possível, a célula unitária recebe o nome de **célula primitiva**.

A Figura B3-1 mostra a forma usual de representar os três vetores de translação e os ângulos que fazem entre si. As 14 redes cristalinas aparecem na Figura B3-2.

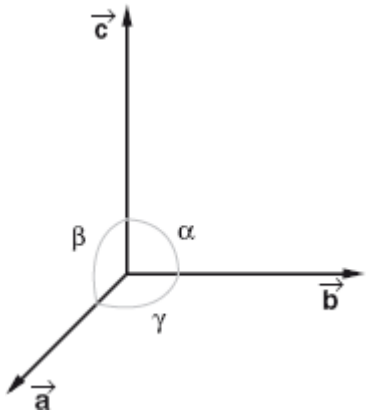


FIGURA B3-1 As direções dos vetores de translação são normalmente usadas para definir os eixos cristalinos; os ângulos entre os vetores definem a forma da célula unitária.

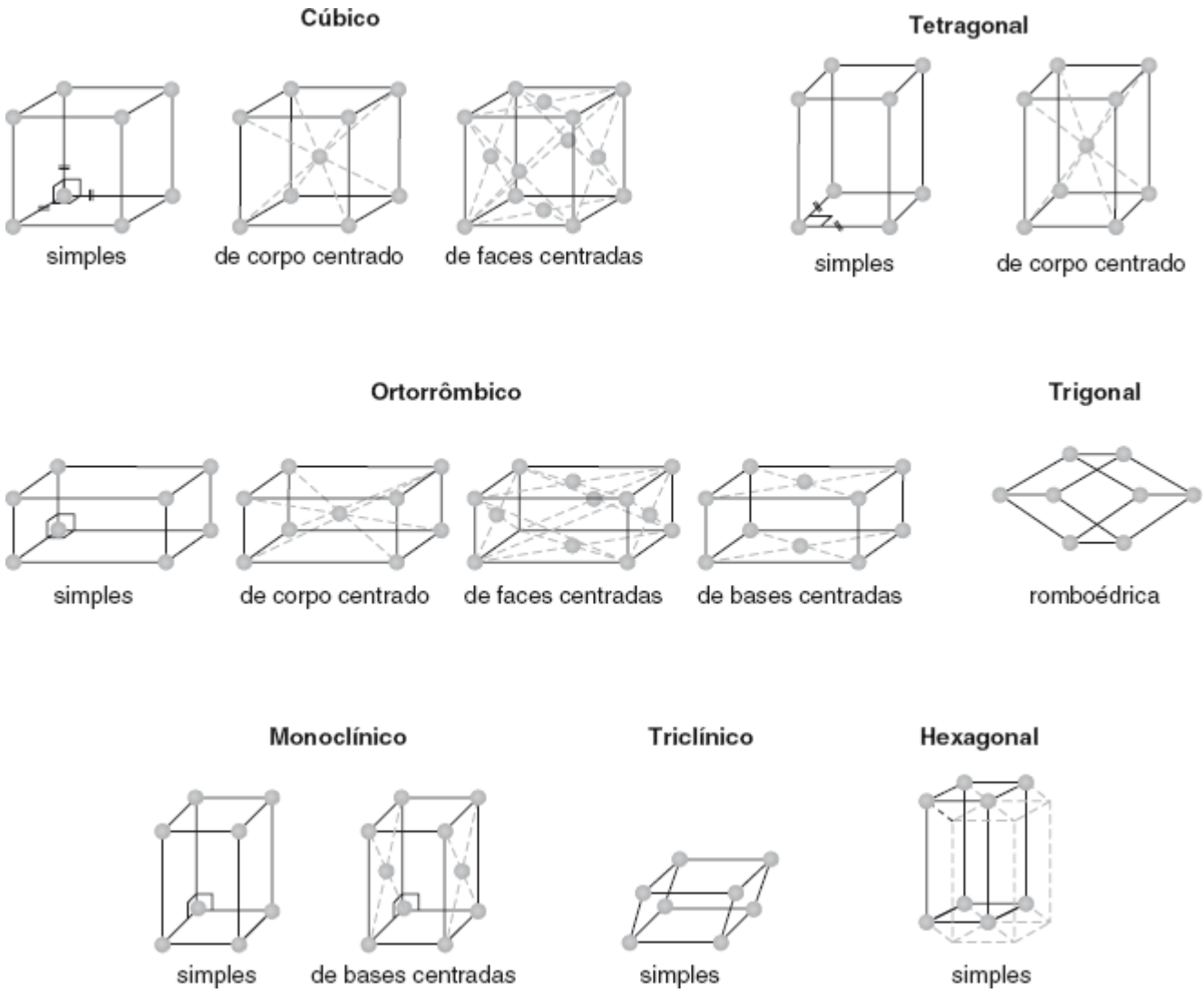


FIGURA B3-2 As 14 redes cristalinas.

APÊNDICE C

Configurações Eletrônicas

A tabela a seguir mostra as configurações eletrônicas dos átomos dos elementos no estado fundamental. No caso de algumas terras raras ($Z = 57$ a 71) e de alguns elementos pesados ($Z > 89$), as configurações ainda não são perfeitamente conhecidas.

Z	Elemento	Energia de ionização (eV)	*K* *n* : 1 *l* : *s*	L 2 s p	M 3 s p d	N 4 s p d f	O 5 s p d f	P 6 s p d	Q 7 s p
1	H (hidrogênio)	13,6	1						
2	He (hélio)	24,5	2						
3	Li (lítio)	5,4	2	1					
4	Be (berílio)	9,3	2	2					
5	B (boro)	8,3	2	2 1					
6	C (carbono)	11,3	2	2 2					
7	N (nitrogênio)	14,5	2	2 3					
8	O (oxigênio)	13,6	2	2 4					
9	F (flúor)	17,4	2	2 5					
10	Ne (neônio)	21,6	2	2 6					
11	Na (sódio)	5,1	2	2 6	1				
12	Mg (magnésio)	7,6	2	2 6	2				

13	Al (alumínio)	6,0	2	2 6	2 1	
14	Si (silício)	8,1	2	2 6	2 2	
15	P (fósforo)	10,5	2	2 6	2 3	
16	S (enxofre)	10,4	2	2 6	2 4	
17	Cl (cloro)	13,0	2	2 6	2 5	
18	Ar (argônio)	15,8	2	2 6	2 6	
19	K (potássio)	4,3	2	2 6	2 6 .	1
20	Ca (cálcio)	6,1	2	2 6	2 6 .	2
21	Sc (escândio)	6,5	2	2 6	2 6 1	2
22	Ti (titânio)	6,8	2	2 6	2 6 2	2
23	V (vanádio)	6,7	2	2 6	2 6 3	2
24	Cr (cromo)	6,8	2	2 6	2 6 5	1
25	Mn (manganês)	7,4	2	2 6	2 6 5	2
26	Fe (ferro)	7,9	2	2 6	2 6 6	2
27	Co (cobalto)	7,9	2	2 6	2 6 7	2
28	Ni (níquel)	7,6	2	2 6	2 6 8	2
29	Cu (cobre)	7,7	2	2 6	2 6 10	1
30	Zn (zinco)	9,4	2	2 6	2 6 10	2
31	Ga (gálio)	6,0	2	2 6	2 6 10	2 1
32	Ge (germânio)	7,9	2	2 6	2 6 10	2 2

33	As (arsênio)	9,8	2	2 6	2 6 10	2 3	
34	Se (selênio)	9,8	2	2 6	2 6 10	2 4	
35	Br (bromo)	11,8	2	2 6	2 6 10	2 5	
36	Kr (criptônio)	14,0	2	2 6	2 6 10	2 6	
37	Rb (rubídio)	4,2	2	2 6	2 6 10	2 6 . .	1
38	Sr (estrôncio)	5,7	2	2 6	2 6 10	2 6 . .	2
39	Y (ítrio)	6,4	2	2 6	2 6 10	2 6 1 .	2
40	Zr (zircônio)	6,8	2	2 6	2 6 10	2 6 2 .	2
41	Nb (nióbio)	6,9	2	2 6	2 6 10	2 6 4 .	1
42	Mo (molibdênio)	7,1	2	2 6	2 6 10	2 6 5 .	1
43	Tc (tecnécio)	7,3	2	2 6	2 6 10	2 6 6 .	1
44	Ru (rutênio)	7,4	2	2 6	2 6 10	2 6 7 .	1
45	Rh (ródio)	7,5	2	2 6	2 6 10	2 6 8 .	1
46	Pd (paládio)	8,3	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	
47	Ag (prata)	7,6	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	1
48	Cd (cádmio)	9,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2
49	In (índio)	5,8	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 1
50	Sn (estanho)	7,3	2	2 6	2 6	2 6	2 2

					10	10 .		
51	Sb (antimônio)	8,6	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 3	
52	Te (telúrio)	9,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 4	
53	I (iodo)	10,5	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 5	
54	Xe (xenônio)	12,1	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 6	
55	Cs (césio)	3,9	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 6 . .	1
56	Ba (bário)	5,2	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 6 . .	2
57	La (lantânio)	5,6	2	2 6	2 6 10	2 6 10 .	2 6 1 .	2
58	Ce (cério)	5,6	2	2 6	2 6 10	2 6 10 1	2 6 1 .	2
59	Pr (praseodímio)	5,5	2	2 6	2 6 10	2 6 10 3	2 6 . .	2
60	Nd (neodímio)	5,5	2	2 6	2 6 10	2 6 10 4	2 6 . .	2
61	Pm (promécio)	5,5	2	2 6	2 6 10	2 6 10 5	2 6 . .	2
62	Sm (samário)	5,6	2	2 6	2 6 10	2 6 10 6	2 6 . .	2
63	Eu (európio)	5,7	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6 . .	2
64	Gd (gadolínio)	6,2	2	2 6	2 6 10	2 6 10 7	2 6 1 .	2
65	Tb (térbio)	6,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 9	2 6 . .	2
66	Dy (disprósio)	6,8	2	2 6	2 6 10	2 6 10 10	2 6 . .	2
67	Ho (hólmio)	6,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10	2 6 . .	2

						11		
68	Er (érbio)	6,1	2	2 6	2 6 10	2 6 10 12	2 6 . .	2
69	Tm (túlio)	5,8	2	2 6	2 6 10	2 6 10 13	2 6 . .	2
70	Yb (itérbio)	6,2	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 . .	2
71	Lu (lutécio)	5,1	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 1 .	2
72	Hf (háfnio)	7,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 2 .	2
73	Ta (tântalo)	7,9	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 3 .	2
74	W (tungstênio)	8,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 4 .	2
75	Re (rênio)	7,9	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 5 .	2
76	Os (ósmio)	8,5	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 6 .	2
77	Ir (irídio)	9,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 7 .	2
78	Pt (platina)	9,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 9 .	1
79	Au (ouro)	9,2	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	1
80	Hg (mercúrio)	10,4	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2

81	Tl (tálio)	6,1	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 1	
82	Pb (chumbo)	7,4	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 2	
83	Bi (bismuto)	7,3	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 3	
84	Po (polônio)	8,4	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 4	
85	At (astatínio)	9,5	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 5	
86	Rn (radônio)	10,7	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 6	
87	Fr (frâncio)	4,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 6 .	1
88	Ra (rádio)	5,3	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 6 .	2
89	Ac (actínio)	6,9	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 6 1	2
90	Th (tório)	7,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 .	2 6 2	2
91	Pa (protactínio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 1	2 6 2	2
92	U (urânio)	6,1	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 3	2 6 1	2
93	Np (netúnio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 4	2 6 1	2
94	Pu (plutônio)	5,8	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 6	2 6 .	2

95	Am (amerício)	6,0	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6 .	2
96	Cm (cúrio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 7	2 6 1	2
97	Bk (berquélio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 8	2 6 1	2
98	Cf (califórnio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 10	2 6 .	2
99	Es (einstêinio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 11	2 6 .	2
100	Fm (férmio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 12	2 6 .	2
101	Md (mendelévio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 13	2 6 .	2
102	No (nobélio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 .	2
103	Lw (laurêncio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 1	2
104	Rf (rutherfórdio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 2	2
105	Du (dúbnio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 3	2
106	Sg (seabórgio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 4	2
107	Bh (bóhrio)		2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 5	2
108	Hs (hássio)		2	2 6	2 6	2 6	2 6	2 6 6	2

				10	10 14	10 14		
109	Mt (meitnério)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 7	2
110	Ds (darmstádio)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 9	1
111	Rg (roentgênio)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	1
112	Cn (copernício)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	2
113	Unt (unúntrio)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	2 1
114	Fl (fleróvio)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	2 2
115	Unp (unumpêntio)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	2 3
116	Lv (livermório)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	2 4
117	Uus (ununséptio)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	2 5
118	Uno (ununóctio)	2	2 6	2 6 10	2 6 10 14	2 6 10 14	2 6 10	2 6

APÊNDICE D

Constantes Físicas Fundamentais

Os valores das constantes físicas fundamentais a seguir são os recomendados pelo CODATA (Committee on Data for Science and Technology) do International Council of Scientific Unions em 2010. Os algarismos entre parênteses são as incertezas dos últimos algarismos correspondentes a um desvio-padrão. (Fonte: http://physics.nist.gov/cuu/Constants.)

Grandeza	Símbolo	Valor	Unidade
Constantes universais			
Velocidade da luz no vácuo (exata)	c	299,792,458	$m \cdot s^{-1}$
Constante magnética (exata)	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} = 12{,}566370614 \times 10^{-7}$	$N \cdot A^{-2}$
Constante elétrica (exata)	ϵ_0	$\mu_0 c^2 = 8{,}854187817$	$10^{-12}\ F \cdot m^{-1}$
Constante de gravitação	G	6,67384(80)	$10^{-11}\ m^3 \cdot kg^{-1}s^{-2}$
Constante de Planck	h	6,62606957(29)	$10^{-34}\ J \cdot s$
em elétrons-volts, h/{e}		4,135667516(91)	$10^{-15}\ eV \cdot s$
h/2π	ħ	1,054571726(47)	$10^{-34}\ J \cdot s$
em elétrons-volts, ħ/{e}		6,58211928(15)	10^{-16}e V · s
Massa de Planck, $\hbar c/G)^{1/2}$	m_p	2,17651(13)	10^{-8} kg
Temperatura de Planck, $(\hbar c^5/G)^{1/2}/k$	T	1,416833(85)	10^{32}K
Comprimento de Planck, $\hbar/m_p c = (\hbar G/c^3)^{1/2}$	l_p	1,616199(97)	10^{-35}m
Tempo de Planck, $l_p/c = (\hbar G/c^5)^{1/2}$	t_p	5,39106(32)	10^{-44} s
Constantes eletromagnéticas			

Carga elementar	e	1,602176565(35)	10^{-19} C
	e/h	2,417989348(53)	10^{14} A · J^{-1}
Quantum de fluxo magnético, $h/2e$	Φ_0	2,067833758(46)	10^{-15}Wb
Constante de Josephson, 2 e/h	K_j	483597,870(11)	10^{9} Hz · V^{-1}
Constante de von Klitzing, $h/e^2 = \mu_0 c/2\alpha$	R_k	25812,8074434(84)	X
Magnéton de Bohr, $e\hbar/2m_e$	μ_B	927,400968(20)	10^{-24} J · T^{-1}
em eV/T		5,7883818066(38)	10^{-5} eV · T^{-1}
Magnéton nuclear, $e\hbar/2m_p$	μ_N	5,05078353(11)	10^{-27} J · T^{-1}
em eV/T		3,1524512605(22)	10^{-8} eV · T^{-1}

Constantes atômicas

Constante de estrutura fina, $e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$	α	7,2973525698(24)	10^{-3}
inverso da constante de estrutura fina	α^-	137,035999074(44)	
Constante de Rydberg, $m_e c\alpha^2/2h$	R_∞	10973731,568539(55)	m^{-1}
em hertz, $R_\infty c$		3,289841960364(17)	10^{15}Hz
em joules, $R_\infty hc$		2,179872171(96)	10^{-18} J
em eV, $R_\infty hc/\{e\}$		13,60569253(30)	eV
Raio de Bohr	a_o	0,52917721092(17)	10^{-10} m

Elétron

Massa	m_e	9,10938291(40)	10^{-31} kg
		5,4857990946(22)	10^{-31} kg
em elétrons-volts, $m_e c^2/\{e\}$		0,510998928(11)	MeV
Razão entre as massas do elétron e do múon	m_e/m_μ	4,83633166(12)	10^{-3}
Razão entre as massas do elétron e do táuon	m_e/m_τ	2,87592(26)	10^{-4}
Razão entre as massas do elétron e do próton	m_e/m_p	5,4461702178(22)	10^{-4}
Razão entre as massas do elétron e do dêuteron	m_e/m_d	2,7244371095(11)	10^{-4}
Razão entre as massas do elétron e da partícula a	m_e/m_α	1,37093355578(55)	10^{-4}

Carga específica	$-e / m_e$	−1,758820088(39)	10^{11} C · kg $^{-1}$
Massa molar	$M(e)$	5,4857990946(22)	10^{-7} kg · mol $^{-1}$
Comprimento de onda de Compton, $h/m_e c$	λ_c	2,4263102389(16)	10^{-12} m
$\lambda c/2\pi = \alpha^2 = \alpha^2/4\pi R_\infty$	$\lambda\!\!\!^{-}_c$	386,1592678(26)	10^{-15}m
Raio clássico, $\alpha^2 a_0$	r_e	2,8179403267(27)	10^{-15}m
Seção de choque de Thomson, $(8\pi/3)r_e^2$	σ_e	0,6652458734(13)	10^{-28}m^2
Momento magnético	μ_e	−928,476430(21)	10^{-26} J · T $^{-1}$
em magnétons de Bohr	μ_e/μ_B	−1,00115965218076(27)	
em magnétons nucleares	μ_e/μ_N	−1838,28197090(75)	
Anomalia do momento magnético, $\|\mu_e\|/\mu_B - 1$	a_e	1,15965218076(27)	10^{-3}
Fator g, $-2(1 + a_e)$	g_e	−2,00231930436153(53)	
Razão entre os momentos magnéticos do elétron e do múon	μ_e/μ_N	206,7669894	
Razão entre os momentos magnéticos do elétron e do próton	μ_e/μ_P	−658,2106848(54)	

Múon

Massa	m_μ	1,883533475(96)	10^{-28} kg
		0,1134289267(29)	u
em elétrons-volts, $m_\mu c^2/\{e\}$		105,6583715(35)	MeV
Razão entre a massa do múon e a massa do elétron	m_μ/m_e	206,7682843(52)	
Razão entre a massa do múon e a massa do táuon	m_μ/m_t	5,94649(54)	10^{-2}
Massa molar	$M(\mu)$	1,134289267(29)	10^{-4} kg · mol $^{-1}$
Momento magnético	μ_μ	−4,49044807(15)	10^{-26} J · T $^{-1}$
em magnétons de Bohr	μ_μ/μ_B	−4,84197044(12)	10^{-3}
em magnétons nucleares	μ_μ/μ_N	−8,89059697(22)	
Anomalia do momento magnético, $[\mu_\mu/(e\hbar/2m_\mu)] - 1$	a_μ	1,16592091(63)	10^{-3}

Fator g, $-2(1 + a_\mu)$	g_μ	−2,0023318418(13)	
Razão entre o momento magnético do múon e o momento magnético do próton	μ_μ/μ_P	−3,183345107(84)	
Táuon			
Massa	m_τ	3,16747(29)	10^{-27} kg
		1,90749(17)	u
em elétrons-volts		1776,82(16)	MeV
Próton			
Massa	m_p	1,672621777(74)	10^{-27} kg
		1,007276466812(90)	u
em elétrons-volts		938,272046(21)	MeV
Razão entre a massa do próton e a massa do elétron	m_p/m_e	1836,15267245(75)	
Razão entre a massa do próton e a massa do múon	m_p/m_μ	8,88024321(22)	
Carga específica	e/m_e	9,57883358(21)	10^7 C · kg^{-1}
Massa molar	$M(p)$	1,007276466812(90)	10^{-3} kg · mol^{-1}
Comprimento de onda de Compton, h/m_pc	$\lambda_{c,p}$	1,32140985623(94)	10^{-15} m
$\lambda_{C,p}/2\pi$	λ_c	2,1030891047(15)	10^{-16} m
Momento magnético	μ_p	1,410606743(33)	10^{-26} J · T^{-1}
em magnétons de Bohr	μ_p/μ_B	1,521032210(12)	10^{-3}
em magnétons nucleares	μ_p/μ_N	2,792847356(23)	
Correção da blindagem diamagnética para prótons			
(amostra esférica de H_2O a 25°C), $1 - \mu'_p/\mu_p$	σ_{H_2O}	25,694(14)	10^{-6}
Momento do próton blindado	μ'_p	1,410570499(35)	10^{-26} J · T^{-1}
(amostra esférica de H_2O a 25°C)			
em magnétons de Bohr	μ'_p/μ_B	1,521032210(12)	10^{-3}
em magnétons nucleares	μ'_p/μ_N	2,792847356(23)	

Razão giromagnética	γ_p	2,675222005(63)	$10^8\ s^{-1} \cdot T^{-1}$
	$\gamma_p/2\pi$	42,5774806(10)	$MHz \cdot T^{-1}$
sem correção	γ_p	2,675153268(66)	$10^8\ s^{-1} \cdot T^{-1}$
(amostra esférica de H_2O a 25°C)	$\gamma_p'/2\pi$	42,5763866(10)	$MHz \cdot T^{-1}$
Nêutron			
Massa	m_n	1,674927351(74)	10^{-27} kg
		1,00866491600(43)	u
em elétrons-volts, $m_nc^2/\{e\}$		939,565379(21)	MeV
Razão entre a massa do nêutron e a massa do elétron	m_n/m_e	1838,6836605(11)	
Razão entre a massa do nêutron e a massa do próton	m_n/m_p	1,00137841917(45)	
Massa molar	$M(n)$	1,00866491600(43)	$10^{-3}\ kg \cdot mol^{-1}$
Comprimento de onda de Compton, h/m_nc	$\lambda_{c,n}$	1,3195909068(11)	10^{-15} m
$\lambda_{c,n}/\pi$	$\lambda\!\!\!^{-}$	2,1001941568(17)	10^{-16} m
Momento magnético	μ_n	−0,96623647(23)	$10^{-26}\ J \cdot T^{-1}$
em magnétons de Bohr	μ_n/μ_B	−1,04187563(25)	10^{-3}
em magnétons nucleares	μ_n/μ_N	−1,91304272(45)	
Razão entre o momento magnético no nêutron e o momento magnético do elétron	μ_n/μ_e	1,04066882(25)	10^{-3}
Razão entre o momento magnético do nêutron e o momento magnético do próton	μ_n/μ_p	−0,68497934(16)	
Dêuteron			
Massa	m_d	3,34358348(15)	10^{-27} kg
		2,013553212712(77)	u
em elétrons-volts, $m_dc^2/\{e\}$		1875,612859(41)	MeV
Razão entre a massa do dêuteron e a massa do elétron	m_d/m_e	3670,4829652(15)	
Razão entre a massa do dêuteron e a massa do próton	m_d/m_p	1,99900750097(18)	

Massa molar	$M(d)$	2,013553212712(77)	10^{-3} kg · mol $^{-1}$
Momento magnético	μ_d	0,433073489(10)	10^{-26} J · T $^{-1}$
em magnétons de Bohr	μ_d	0,4669754556(39)	10^{-3}
em magnétons nucleares	μ_d/μ_B	0,8574382308(72)	
Razão entre o momento magnético do dêuteron e o momento magnético do elétron	μ_d/μ_e	0,4664345537(39)	10^{-3}
Razão entre o momento magnético do dêuteron e o momento magnético do próton	μ_d/μ_p	0,3070122070(24)	

Partícula alfa

Massa	m_a	6,66465675(29)	10^{-27} kg
em elétrons-volts		3727,379240(82)	MeV

Constantes físico-químicas

Constante de Avogadro	N_A, L	6,02214129(27)	10^{23} mol^{-1}
Constante de massa atômica, $m(12C)/12$	m_u	1,660538921(73)	10^{-27} kg
em elétrons-volts, $m_uc^2/\{e\}$		931,494061(21)	MeV
Constante de Faraday	F	96485,3365(21)	C · mol $^{-1}$
Constante de Planck molar	N_Ah	3,9903127176(28)	10^{-10} J · s · mol $^{-1}$
	N_Ahc	0,119626565779(84)	J · m · mol $^{-1}$
Constante dos gases perfeitos	R	8,3144621(75)	J · mol $^{-1}$ · K^{-1}
Constante de Boltzmann, R/N_A	k	1,3806488(13)	10^{-23} J · K $^{-1}$
em elétrons-volts, $k/\{e\}$		8,6173324(78)	10^{-5} eV · K^{-1}
em hertz, kyh		2,0836618(19)	10^{10} Hz · K^{-1}
em números de onda, kyhc		69,503476(63)	m^{-1} K^{-1}
Volume molar (gás ideal),			
RT/p (a 273,15 K, 101,325 Pa)	V_m	22,413968(20)	10^{-3} m^{-3} · mol^{-1}
Constante de Loschmidt, N_A/V_m	n_o	2,6867805(24)	10^{25} m^{-3}
Constante de Stefan-Boltzmann,	σ	5,670373(21)	10^{-8} W · m^{-2} · K^{-4}

$(\pi/60)k/h\ c$			
Primeira constante de radiação, $2\pi hc^2$	c_1	3,74177153(17)	10^{-16} W · m^2
Segunda constante de radiação, hc/k	c_2	1,4387770(13)	10^{-2} m · K
Constante da lei de deslocamento de Wein, $\lambda_{max}T = c_2/4{,}96511423...$	b	2,8977721(26)	10^{-3} m · K

Unidades e fatores de conversão

Elétron-volt, $(e/C)J = \{e\}_J$	eV	1,602176565(35)	10^{-19} J
Unidade de massa atômica (unificada), $m_u = m(^{12}C)/12$	u	1,660538921(73)	10^{-27} kg
Atmosfera padrão	atm	101,325	Pa
Aceleração da gravidade padrão	g_n	9,80665	m · s^{-2}

APÊNDICE E

Fatores de Conversão

Os fatores de conversão foram escritos na forma de equações para simplificar a notação; as relações assinaladas com um asterisco são exatas.

Comprimento

1 km = 0,6215 mi
1 mi = 1,609 km
1 m = 1,0936 yd = 3,281 ft = 39,37 in
*1 in = 254 cm
*1 ft = 12 in = 30,48 cm
*1 yd = 3 ft = 91,44 cm
1 ano-luz = $9,467 \times 10^{15}$ m
*1 Å = 0,1 nm

Área

*1 $m^2 = 10^4$ cm^2
1 km^2 = 0,3861 mi^2 = 247,1 acres
1 hectare = 10^4 m^2 = 2,471 acres
*1 in^2 = 6,4516 cm^2
1 $ft^2 = 9,29 \times 10^{-2}$ m^2
1 m^2 = 10,76 ft^2
*1 acre = 43,560 ft^2
1 mi^2 = 640 acres = 2,590 km^2

Volume

*1 $m^3 = 10^6$ cm^3
*1 L = 1000 $cm^3 = 10^{-3}$ m^3
1 gal = 3,786 L
1 gal = 4 qt = 8 pt = 128 oz = 231 in^3
1 in^3 = 16,39 cm^3
1 ft^3 = 1728 in^3 = 28,32 L = 2,83 2 × 10^4 cm^3

Tempo

*1 h = 60 min = 3,6 ks
*1 d = 24 h = 1440 min = 86,4 ks
1 ano = 365,24 d = 31,56 Ms

Velocidade

1 km/h = 0,2778 m/s = 0,6215 m/h

1 mi/h = 0,4470 m/s = 1,609 km/h
1 mi/h = 1,467 ft/s

Ângulo e velocidade angular

*π rad = 180°
1 rad = 57,30°
1° = 1,745 × 10^{22} rad
1 rev/min = 0,1047 rad/s
1 rad/s = 9,549 rev/min

Massa

*1 kg = 1000 g
*1 tonelada = 1000 kg = 1 Mg
1 u = 1,6606 × 10^{227} kg
1 kg = 6,022 × 10^{26} u
1 slug = 14,59 kg
1 kg = 6,852 × 10^{22} slug
1 u = 931,50 MeV/c^2

Massa específica

*1 g/cm^3 = 1000 kg/m^3 = 1 kg/L
(1 g/cm^3)g = 62,4 lb/ft^3

Força

1 N = 0,2248 lb = 10^5 dyn
1 lb = 4,4482 N
(1 kg)g = 2,2046 lb

Pressão

*1 Pa = 1 N/m^2
*1 atm = 101,325 kPa = 1,01325 bars
1 atm = 14,7 lb/in^2 = 760 mmHg
= 29,9 inHg = 33,8 ftH_2O
1 lb/in^2 = 6,895 kPa
1 torr = 1 mmHg = 133,32 Pa
1 bar = 100 kPa

Energia

*1 kW · h = 3,6 MJ
*1 cal = 4,1840 J
1 ft · lb = 1,356 J = 1,286 × 10^{-3} Btu
*1 L · atm = 101,325 J
1 L · atm = 24,217 cal
1 Btu = 778 ft · lb = 252 cal = 1054,35 J
1 eV = 1,602 × 10^{-19} J
1 u · c^2 = 931,50 MeV
*1 erg = 10^{-7} J

Potência

1 horsepower = 550 ft · lb/s = 745,7 W
1 Btu/min = 17,58 W
1 W = 1,341 × 10^{-3} horsepower
= 0,7376 ft · lb/s
1 W = 1 J/s

Campo magnético

*1 G = 10^{-4} T

*1 T = 10 G

Condutividade térmica

1 W/m · K = 6,938 Btu · in/h · ft^2 · F°

1 Btu · inyh · ft^2 · F° = 0,1441 Wym · K

APÊNDICE F

Ganhadores do Prêmio Nobel de Física

Além dos ganhadores do Prêmio Nobel de Física, foram incluídos na lista a seguir, com um (Q) após o nome, alguns ganhadores do Prêmio Nobel de Química cujo trabalho está intimamente relacionado à física. (A Academia Real Sueca de Ciências, que concede os prêmios, quase sempre considerou a descoberta de novos elementos um trabalho de química e não de física.)

Ano	Nome		Razão para o Prêmio
1901	Wilhelm Konrad Röentgen	1845–1923	Descoberta dos raios X
1902	Hendrik Antoon Lorentz Pieter Zeeman	1853–1928 1865–1943	Pesquisa da influência do magnetismo nos fenômenos de radiação
1903	Antoine Henri Bequerel Pierre Curie Marie Sklowdowska-Curie	1852–1908 1859–1906 1867–1934	Descoberta da radioatividade espontânea Pesquisa dos fenômenos de radiação descobertos pelo Prof. Becquerel
1904	Lord Rayleigh (John William Strutt) Sir William Ramsay (Q)	1842–1919 1851–1939	Investigação da densidade dos gases mais importantes e descoberta do argônio Descoberta de gases inertes no ar e determinação de sua posição no sistema periódico
1905	Philipp Eduard Anton von Lenard	1862–1947	Pesquisa dos raios catódicos
1906	Joseph John Thomson	1856–1940	Investigações teóricas e experimentais da condução da eletricidade por gases

1907	Albert Abraham Michelson	1852–1931	Construção de instrumentos óticos de precisão e seu uso em investigações metrológicas
1908	Gabriel Lippman	1845–1921	Invenção de um método de reprodução fotográfica de cores com base em fenômenos de interferência
	Ernest Rutherford (Q)	1871–1937	Investigação da desintegração dos elementos e da química das substâncias radioativas
1909	Guglielmo Marconi	1874–1937	Contribuição para o desenvolvimento da telegrafia sem fio
	Carl Ferdinand Braun	1850–1918	
1910	Johannes Diderik van der Waals	1837–1923	Estudo das equações de estado de gases e líquidos
1911	Wilhelm Wien	1864–1928	Descobertas com relação às leis que governam a irradiação de calor
	Marie Curie (Q)	1867–1934	Contribuições para o progresso da química pela descoberta dos elementos rádio e polônio e pelo isolamento do rádio e o estudo de sua natureza e seus compostos
1912	Nils Gustaf Dalén	1869–1937	Invenção de reguladores automáticos para serem usados, juntamente com acumuladores de gás, nas fontes luminosas de faróis e boias
1913	Heike Kamerlingh Onnes	1853–1926	Investigação das propriedades da matéria em baixas temperaturas, que levou, entre outras coisas, à produção de hélio líquido
1914	Max von Laue	1879–1960	Descoberta da difração dos raios X em cristais
1915	Sir William Henry Bragg	1862–1942	Análise da estrutura dos cristais usando raios X
	William Lawrence Bragg	1890–1971	
1917	Charles Glover Barkla	1877–1944	Descoberta dos raios X característicos dos elementos
1918	Max Planck	1858–1947	Descoberta dos quanta de energia
1919	Johannes Stark	1874–1957	Descoberta do efeito Doppler em raios canais e do desdobramento das linhas espectrais em campos elétricos
1920	Charles-Édouard Guillaume	1861–1938	Serviços prestados às medidas de precisão na física pela descoberta de anomalias nas ligas de aço-níquel
1921	Albert Einstein	1879–1955	Serviços prestados à Física Teórica e especialmente a descoberta da lei do efeito fotelétrico

	Frederick Soddy (Q)	1877–1956	Contribuições para o conhecimento da química das substâncias radioativas e investigação da origem e natureza dos isótopos
1922	Neils Bohr	1885–1962	Investigação da estrutura dos átomos e da radiação produzida pelos átomos
	Francis W. Aston (Q)	1877–1945	Descoberta, com o auxílio do espectrógrafo de massa construído por ele próprio, dos isótopos de um grande número de elementos não radioativos, e formulação da regra dos números inteiros
1923	Robert Andrews Millikan	1868–1953	Estudos da carga elementar de eletricidade e do efeito fotelétrico
1924	Karl Manne Georg Siegbahn	1886–1978	Descobertas e pesquisas no campo da espectroscopia de raios X
1925	James Franck	1882–1964	Descoberta das leis que governam o impacto de um elétron em um átomo
	Gustav Hertz	1887–1975	
1926	Jean-Baptiste Perrin	1870–1942	Estudo da estrutura descontínua da matéria e especialmente a descoberta do equilíbrio de sedimentação
1927	Arthur Holly Compton	1892–1962	Descoberta do efeito que recebeu o seu nome
	Charles Thomson Rees Wilson	1869–1959	Invenção de um método para tornar visíveis as trajetórias de partículas eletricamente carregadas pela condensação de vapor
1928	Owen Willans Richardson	1879–1959	Estudo de fenômenos termiônicos e especialmente a descoberta da lei que recebeu o seu nome
1929	Prince Louis-Victor de Broglie	1892–1987	Descoberta da natureza ondulatória do elétron
1930	Sir Chandrasekhara V. Raman	1888–1970	Investigação do espalhamento da luz e descoberta do efeito que recebeu o seu nome
1932	Werner Karl Heisenberg	1901–1976	Criação da mecânica quântica, cuja aplicação, entre outras coisas, levou à descoberta das formas alotrópicas do hidrogênio
1933	Erwin Schrödinger	1887–1961	Descoberta de novas formas produtivas da teoria atômica
	Paul Adrien Maurice Dirac	1902–1984	
1934	Harold Clayton Urey (Q)	1893–1991	Descoberta do hidrogênio pesado
1936	Victor Franz Hess	1883–1964	Descoberta da radiação cósmica

	Carl David Anderson	1905–1991	Descoberta do pósitron
	Peter Debye (Q)	1884–1966	Contribuições para o conhecimento da estrutura molecular através da investigação de momentos dipolares e da difração de raios X e elétrons em gases
1937	Clinton Joseph Davisson	1881–1958	Observação experimental da difração de elétrons em cristais
	George Paget Thomson	1892–1975	
1938	Enrico Fermi	1901–1954	Demonstração da existência de novos elementos radioativos produzidos pela irradiação com nêutrons e descoberta de reações nucleares produzidas por nêutrons lentos
1939	Ernest Orlando Lawrence	1901–1958	Invenção e desenvolvimento do cíclotron e resultados obtidos com o instrumento, especialmente com relação a elementos radioativos artificiais
1943	Otto Stern	1888–1969	Contribuições para o desenvolvimento do método dos raios moleculares e descoberta do momento magnético do próton
1944	Isidor Issac Rabi	1898–1988	Invenção do método da ressonância para investigar as propriedades magnéticas dos núcleos atômicos
	Otto Hahn (Q)	1879–1968	Descoberta da fissão de núcleos pesados
1945	Wolfgang Pauli	1900–1958	Descoberta do Princípio de Exclusão, também conhecido como Princípio de Pauli
1946	Percy Williams Bridgman	1882–1961	Invenção de um aparelho para produzir pressões extremamente elevadas e descobertas no campo da física de altas pressões
1947	Sir Edward Victor Appleton	1892–1965	Investigação da física da atmosfera superior e especialmente a descoberta da camada que recebeu o seu nome
1948	Patrick Maynard Stuart Blackett	1897–1974	Aperfeiçoamento do método da câmara de nuvens de Wilson e consequentes descobertas nos campos da física nuclear e radiação cósmica
1949	Hideki Yukawa	1907–1981	Previsão da existência dos mésons com base em estudos teóricos das forças nucleares
1950	Cecil Frank Powell	1903–1969	Aperfeiçoamento do método fotográfico para estudar processos nucleares e consequentes descobertas com relação aos mésons
1951	Sir John Douglas Cockcroft	1897–1967	Trabalho pioneiro na transmutação de núcleos atômicos por partículas atômicas artificialmente aceleradas
	Ernest Thomas Sinton Walton	1903–1995 1907–1991	Descobertas no campo da química dos elementos transurânicos

	Edwin Mattison McMillan (Q)	1912–1999	
	Glenn Theodore Seaborg (Q)		
1952	Felix Bloch	1905–1983	Desenvolvimento de novos métodos para medir momentos magnéticos nucleares com precisão e consequentes descobertas
	Edward Mills Purcell	1912–1997	
1953	Frits Zernike	1888–1966	Demonstração do método de contraste de fase e especialmente a invenção do microscópio de contraste de fase
1954	Max Born	1882–1970	Pesquisas fundamentais no campo da mecânica quântica e especialmente a interpretação estatística da função de onda
	Walther Wilhelm Georg Bothe	1891–1957	Invenção do método da coincidência e consequentes descobertas
1955	Willis Eugene Lamb Jr.	1913–2008	Descobertas com relação à estrutura fina do espectro do hidrogênio
	Polykarp Kusch	1911–1993	Determinação precisa do momento magnético do elétron
1956	William Shockley	1910–1989	Investigação dos semicondutores e descoberta do efeito transistor
	John Bardeen	1908–1991	
	Walter Houser Brattain	1902–1987	
1957	Chen Ning Yang	b. 1922	Investigação das leis da paridade, que levou a descobertas importantes com relação às partículas elementares
	Tsung Dao Lee	b. 1926	
1958	Pavel Alekseyevich Cherenkov	1904–1990	Descoberta e interpretação do efeito Cerenkov
	Ilya Mikhaylovich Frank	1908–1990	
	Igor Yevgenyevich Tamm	1895–1971	
1959	Emilio Gino Segrè	1905–1989	Descoberta do antipróton
	Owen Chamberlain	1920–2006	
1960	Donald Arthur Glaser	b. 1926–2013	Invenção da câmara de bolhas
	Willard Frank Libby (Q)	1908–1980	Uso do 14C para determinar a idade de amostras em vários ramos da ciência

1961	Robert Hofstadter Rudolf Ludwig Mössbauer	1915–1990 b. 1929-2011	Estudos pioneiros do espalhamento de elétrons por núcleos atômicos e consequentes descobertas a respeito da estrutura dos núcleons Pesquisas relativas à absorção ressonante de raios γ e consequente descoberta do efeito que recebeu o seu nome
1962	Lev Davidovich Landau	1908–1968	Estudos pioneiros de física da matéria condensada, realizados especialmente em hélio líquido
1963	Eugene Paul Wigner Maria Goeppert Mayer Johannes Hans Daniel Jensen	1902–1995 1906–1972 1907–1973	Contribuições para a teoria do núcleo atômico e das partículas elementares, particularmente através da descoberta e aplicação de princípios fundamentais de simetria Descobertas com relação à estrutura de camadas dos núcleos
1964	Charles Hard Townes Nikolai Gennadiyevich Basov Alexander Mikhailovich Prokhorov	b. 1915– 1922–2001 1916–2002	Trabalhos fundamentais no campo da eletrônica quântica, que levaram à construção de osciladores e amplificadores com base no efeito maserlaser
1965	Shin'ichiro Tomonaga Julian Schwinger Richard Philips Feynman	1906–1979 1918–1994 1918–1988	Trabalhos fundamentais no campo da eletrodinâmica quântica, com profundas consequências para a física das partículas elementares
1966	Alfred Kastler	1902–1984	Descoberta e aperfeiçoamento de métodos óticos para estudar a ressonância hertziana em átomos
1967	Hans Albrecht Bethe	1906–2005	Contribuições para a teoria das reações nucleares, especialmente suas descobertas com relação à produção de energia nas estrelas
1968	Luis Walter Alvarez	1911–1988	Contribuições para a física das partículas elementares, em particular a descoberta de um grande número de estados ressonantes, que se tornou possível pelo aperfeiçoamento de técnicas de uso da câmara de bolhas de hidrogênio e de análise de dados
1969	Murray Gell-Mann	b. 1929–	Contribuições e descobertas relativas à classificação de partículas elementares e suas interações
1970	Hannes Olof Gösta Alfvén	1908–1995	Trabalhos fundamentais e descobertas relativas à magneto-hidrodinâmica, com aplicações em diferentes ramos da física

		1904–2000	dos plasmas
	Louis-Eugène-Félix Néel		Trabalhos fundamentais e descobertas relativas ao antiferromagnetismo e ao ferrimagnetismo, que levaram a importantes aplicações na física do estado sólido
1971	Dennis Gabor	1900–1979	Invenção e aperfeiçoamento do método holográfico
1972	John Bardeen	1908–1991	Criação da teoria da supercondutividade conhecida como teoria BCS
	Leon Neil Cooper	b. 1930–	
	John Robert Schrieffer	b. 1931–	
1973	Leo Esaki	b. 1925–	Descoberta do tunelamento em semicondutores
	Ivar Giaever	b. 1929–	Descoberta do tunelamento em supercondutores
	Brian David Josephson	b. 1940–	Previsões teóricas das propriedades de uma supercorrente de tunelamento, em particular os fenômenos conhecidos como efeitos Josephson
1974	Antony Hewish	b. 1924–	Descoberta dos pulsares
	Sir Martin Ryle	1918–1984	Observações e invenções no campo da radioastronomia
1975	Aage Bohr	1922–2009	Descoberta da ligação entre o movimento coletivo e o movimento de partículas no núcleo atômico e a criação de uma teoria da estrutura do núcleo atômico com base nessa ligação
	Benjamin Roy Mottleson	b. 1926–	
	Leo James Rainwater	1917–1986	
1976	Burton Richter	b. 1931–	Trabalho pioneiro na descoberta de uma partícula elementar pesada de um novo tipo
	Samuel Chao Chung Ting	b. 1936–	
1977	Philip Warren Anderson	1923–	Investigações teóricas da estrutura eletrônica em sistemas magnéticos e desordenados
	Sir Nevill Francis Mott	1905–1996	
	John Hasbrouck Van Vleck	1899–1980	
1978	Pyotr Leonidovich Kapitsa	1894–1984	Invenções e descobertas na área da física de baixa temperatura
	Arno Allan Penzias	1933–	Descoberta da radiação cósmica de fundo
	Robert Woodrow Wilson	1936–	

1979	Sheldon Lee Glashow	1932–	Contribuições para a teoria unificada das interações fraca e eletromagnética, incluindo, entre outras coisas, a previsão da corrente neutra fraca
	Abdus Salam	1926–1996	
	Steven Weinberg	1933–	
1980	James Watson Cronin	1931–	Descoberta da violação de princípios fundamentais de simetria no decaimento de mésons K neutros
	Val Logsdon Fitch	1923–	
1981	Nicolaas Bloembergen	1920–	Contribuições para o aperfeiçoamento da espectroscopia a laser
	Arthur Leonard Schawlow	1921–1999	Contribuição para o aperfeiçoamento da espectroscopia eletrônica de alta resolução
	Kai Manne Seigbahn	1918–2007	
1982	Kenneth Geddes Wilson	1936–	Criação de uma teoria para os fenômenos críticos associados a transformações de fase
1983	Subrahmanyan Chandrasekhar	1910–1995	Estudos teóricos de processos físicos importantes para a estrutura e evolução das estrelas
	William Alfred Fowler	1911–1995	Estudos teóricos e experimentais de reações nucleares importantes para a formação dos elementos químicos
1984	Carlo Rubbia	1934–	Contribuições para o grande projeto que levou à descoberta das partículas de campo W e Z, mediadoras da interação fraca
	Simon van der Meer	1925–2011	
1985	Klaus von Klitzing	1943–	Descoberta do efeito Hall quantizado
1986	Ernst Ruska	1906–1988	Trabalhos fundamentais no campo da ótica eletrônica e invenção do microscópio eletrônico
	Gerd Binnig	1947–	Invenção do microscópio de tunelamento
	Heinrich Rohrer	1933–	
1987	Johannes Georg Bednorz	1950–	Descoberta da supercondutividade em materiais cerâmicos
	Karl Alexander Müller	1927–	
1988	Leon Max Lederman	1922–	Criação do método dos feixes de neutrinos e descoberta do neutrino do múon
	Melvin Schwartz	1932–2006	
	Jack Steinberger	b. 1921	

1989	Hans Georg Dehmelt	1922–	Invenção da armadilha de íons
	Wolfgang Paul	1913–1993	Invenção do método dos campos oscilantes separados e seu uso no maser de hidrogênio e outros relógios atômicos
	Norman Foster Ramsey	1915–2011	
1990	Jerome Isaac Friedman	1930–	Investigações pioneiras do espalhamento inelástico profundo de elétrons por prótons e nêutrons ligados, que foram de importância primordial para o desenvolvimento do modelo dos quarks
	Henry Way Kendall	1926–1999	
	Richard Edward Taylor	1929–	
1991	Pierre-Gilles de Gennes	1932–2007	Descoberta de que métodos criados para estudar fenômenos de ordem em sistemas simples podem ser generalizados para formas mais complexas de matéria, em particular para cristais líquidos e polímeros
1992	Georges Charpak	1924–2010	Invenção e aperfeiçoamento de detectores de partículas, especialmente contadores proporcionais multifilamentares
1993	Joseph Hooton Taylor, Jr.	b. 1941	Descoberta dos pulsares binários
	Russell Alan Hulse	b. 1950	
1994	Bertram Neville Brockhouse	1918–2003	Contribuições pioneiras para a criação de técnicas de espalhamento de nêutrons para estudos da matéria condensada
	Clifford Glenwood Shull	1915–2001	
1995	Martin Perl	1927–	Descoberta do táuon
	Frederick Reines	1918–1998	Descoberta do neutrino
1996	David Lee	1931–	Descoberta da fase superfluida do 3He
	Douglas Osheroff	1945–	
	Robert Richardson	1937–	
1997	Steven Chu	1948–	Criação de técnicas para resfriar átomos a temperaturas da ordem de milionésimos de kelvin e aprisioná-los com luz de laser
	Claude Cohen-Tannoudji	1933–	
	William Phillips	1948–	
1998	Robert Betts Laughlin	1950–	Descoberta de uma nova forma de fluido quântico com excitações de carga fracionária

	Horst Ludwig Störmer	1949–	
	Daniel Chee Tsui	1939–	
1999	Gerardus't Hooft	1946–	Elucidação da estrutura quântica das interações eletrofracas
	Martinus Justinus Godefriedus Veltman	1931–	
2000	Zhores Ivanovich Alferov	1930–	Contribuições importantes para a tecnologia da informação
	Herbert Kroemer	1928–	Invenção do circuito integrado
	Jack St. Clair Kilby	1923–2005	
2001	Eric Allin Cornell	1961–	Criação do condensado de Bose-Einstein em gases diluídos de átomos de metais alcalinos e estudos fundamentais das propriedades dos condensados
	Wolfgang Ketterle	1957–	
	Carl Edwin Wieman	1951–	
2002	Raymond Davis, Jr.	1914–2006	Contribuições pioneiras para a astrofísica, em particular a detecção de neutrinos cósmicos
	Masatoshi Koshiba	1926–	Contribuições pioneiras para a astrofísica, que levaram à descoberta de fontes cósmicas de raios X
	Riccardo Giacconi	1931–	
2003	Alexei Alexeyevich Abrikosov	1928–	Contribuições importantes para a teoria dos supercondutores e superfluidos
	Vitaly Lazarevich Ginzburg	1916–2009	
	Anthony James Leggett	1938–	
2004	David Jonathan Gross	1941–	Descoberta da liberdade assintótica na teoria da interação forte
	Hugh David Politzer	1949–	
	Frank Wilczek	1951–	
2005	Roy Jay Glauber	1925–	Contribuição para a teoria quântica da coerência ótica
	John Lewis Hall	1934–	Criação da espectroscopia de precisão a laser, incluindo a técnica do pente de frequências óticas
	Theodor Wolfgang Hänsch	1941–	

2006	John Cromwell Mather	1946–	Descoberta da forma de corpo negro e anisotropia da radiação cósmica de fundo
	George Fitzgerald Smoot III	1945–	
2007	Albert Fert	1938–	Descoberta da Magnetorresistência Gigante
	Peter Grünberg	1939–	
2008	Yoichiro Nambu	1921–	Descoberta da quebra espontânea de simetria na física subatômica
	Makoto Kobayashi	1944–	Descoberta da origem da quebra de simetria que prevê a existência de pelo menos três famílias de quarks na natureza
	Toshihide Maskawa	1940–	
2009	Charles Kuen Kao	1933–	Contribuições fundamentais para o desenvolvimento da transmissão de luz em fibras para comunicações óticas
	Willard Sterling Boyle	1924–	Invenção do CCD, um sensor de imagem semicondutor
	George Elwood Smith	1930–	
2010	Andre Geim	1958–	Experimentos pioneiros com o material bidimensional grafeno
	Konstantin Novoselov	1974–	
2011	Saul Perlmutter	1959–	Descoberta da expansão acelerada do universo a partir da observação de supernovas distantes
	Brian Paul Schmidt	1967–	
	Adam G. Riess	1969–	
2012	Serge Haroche	1944–	Desenvolvimento de métodos experimentais inovadores que permitem a medição e manipulação de sistemas quânticos isolados
	David Wineland	1944–	

RESPOSTAS DE ALGUNS PROBLEMAS

Quase todos os resultados foram arredondados para três algarismos significativos. As diferenças no terceiro algarismo significativo podem ser causadas pelo arredondamento e não são importantes.

Capítulo 1

1-1. (a) $4{,}4 \times 10^8$ m/s; (b) Não, já que a sonda estaria se movendo mais depressa que a luz em relação a Hoth.

1-5. (a) Em $t = 2$ s, um círculo luminoso correspondente ao reflexo do pulso em um círculo máximo perpendicular à direção do movimento do éter.

(b) Em $t = 2$ s, todo o interior da esfera estaria iluminado.

1-9. $\Delta t \approx 4{,}63 \times 10^{-13}$ s.

1-13. (a) $3{,}76 \times 10^{-5}$ s; (b) $2{,}0 \times 10^{25}$ s.

1-17. (b) Um intervalo de tempo de 10 s pelo relógio do foguete corresponde a um intervalo de 6 s pelo relógio do laboratório.

1-21. 0,14 c

1-25. 0,527 c

1-29. (a) Em S': $V' = 16$ m^3; em S: $V = 12{,}2$ m^3.

1-33. (a) 657,0 nm; (b) 662,9 nm; (c) 725,6 nm.

1-37. 3,0 m

1-42. 9,6 ms

1-46. (b) $v = 1{,}44 \times 10^8$ m/s; (c) 4,39 μs; (d) 4,39 μs.

1-50. (a) $v = 0{,}5\,c$ no sentido negativo do eixo x;

(b) 1,7 ano; (c) 0,866 ano-luz; (d) do tipo espacial; (e) 0,866 ano-luz.

1-54. $\theta' = 0{,}494 v_y/c$

1-58. (a) 120 min; (b) 240 min; (c) as tabelas são iguais.

1-62. (b) $4vL/(c - v)$

Capítulo 2

2-5. $1{,}1 \times 10^{-16}$ kg; a massa aumenta

2-9. (a) 0,99998898 c; (b) $3{,}94 \times 10^{4}$ GeV/c; (c) $1{,}68 \times 10^{7}$ GeV; $21{,}68 \times 10^{7}$ GeV/c

2-13. (a) $3{,}5 \times 10^{27}$; (b) 0,0079

2-17. 6,26 MeV

2-21. 280 MeV

2-29. $u = 0{,}286\ c$; $m = 1673$ MeV/c^2

2-34. A opção (c) é a correta.

2-39. 8,62 ms

2-43. (a) $1{,}73 \times 10^{5}$ m/s; (b) $1{,}50 \times 10^{5}$ m/s; (c) 155 kg.

2-51. (a) $v = E/Mc$; (b) $\Delta x = EL/Mc^2$

Capítulo 3

3-1. Prótons, $6{,}5 \times 10^{-2}$ m; elétrons, $3{,}6 \times 10^{-5}$ m; dêuterons, 0,13 m; He^{+}, 0,26 m; H^{+}_{2}, 0,13 m

3-5. (a) 2,2 mm; (b) $9{,}1 \times 10^{9}$ Hz; $1{,}1 \times 10^{-10}$ s.

3-13. $2\pi^5 k^4/15h^3c^2$; $5{,}67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$K^4

3-17. Por 16.

3-21. 278,3 K (5,3 °C).

3-25. (a) 255 nm; (b) $1{,}4 \times 10^{-4}$

3-29. (a) $1{,}03 \times 10^{15}$ Hz; 291 nm; (b) na faixa do ultravioleta.

3-33. $4{,}14 \times 10^{-3}$ nm; 5,8%

3-38. 0,243 nm

3-42. (a) Elétron: 0,00243 nm; próton: 1,32 fm; (b) elétron: 0,510 MeV; próton: 939 MeV

3-47. (a) 2,08 eV; (b) $4{,}95 \times 10^{14}$ Hz; (c) $4{,}19 \times 10^{-15}$ eV/Hz.

3-59. (a) 0,0309 nm; 0,1259 nm; (b) 9,90 keV.

Capítulo 4

4-1. Lyman: 91,16 nm; $3,29 \times 10^{15}$ Hz; Balmer: 364,6 nm; $0,82 \times 10^{15}$ Hz; Paschen: 820,4 nm; $0,37 \times 10^{15}$ Hz

4-5. 4103 nm

4-9. 45,5 fm; 29,5 fm; 19,0 fm

4-13. (a) 1,91 nm; (b) 0,95 nm

4-17. $8,22 \times 10^{6}$ revoluções

4-25. (a) 19,0 μm; (b) $3,65 \times 10^{3}$ m/s; (c) $v_{600}/v_1 \approx 0,002$

4-29. 680 fm

4-33. $1,90 \times 10^{-8}$ $Hz^{-1/2}$

4-37. 10,2 V

4-43. (a) $1,054 \times 10^{-3}$ A; (b) $9,27 \times 10^{-24}$ $A \cdot m^2$

4-47. (a) Lyman a: $n = 6 \rightarrow n = 3$; Lyman β: $n = 9 \cdot n = 3$; (b) $\Delta\lambda = 0,056$ nm.

4-51. (b) $I_0 R^2 \cos^2(\theta/2)$.

4-55. Para $n = 1$, $E = -14,4Z$ eV; $v = 0,0075\ cZ^{1/2}$

4-59. 10; 1.042

Capítulo 5

5-1. (a) $2,1 \times 10^{-23}$ m; (b) $2,1 \times 10^{-21}$ myano

5-5. 0,0276 nm

5-9. (a) 0,445 fm; (b) $6,18 \times 10^{-3}$ fm

5-13. $\lambda = 0,523$ nm; $E_k = 3,0 \times 10^{-3}$ eV

5-17. (a) $y(x, t) = 0,004 \cos(0,2\ x - 10\ t) \cos(7,8\ x - 390\ t)$; (b) 50 m/s; (c) 50 m/s; (d) $\Delta x = 5\pi$ m; $\Delta k = 0,4$ m^{-1}

5-21. $3,2 \times 10^{-5}$ s

5-25. (a) $A^2\ dx$; (b) $0,61\ A^2\ dx$; (c) $0,14\ A^2\ dx$; (d) $x = 0$.

5-29. $1,99 \times 10^{-21}$ eV.

5-33. (a) $5,3 \times 10^{-10}$; (b) $1,32 \times 10^{-7}$ eV.

5-47. (a) 1840 MeV; (b) 2,02 fm; (c) 1,22 fm; (d) 0,76 fm.

	5-51.	(a) 0,243 nm; (b) 0,511 MeV; (c) 0,511 MeV/ c; (d) $2{,}43 \times 10^{-3}$ nm.
	5-55.	$1{,}2 \times 10^{-6}$ eV; 1,2 eV.
Capítulo 6	6-9.	(a) 0,021 eV; (b) 205 MeV.
	6-13.	(a) $\Delta x = 10^{-6}$ m; $\Delta p = 10^{-16}$ kg · m/s; (b) 9×10^{11}
	6-22.	$1{,}21 \times 10^{-7}$ N.
	6-26.	0,87 nm
	6-30.	(a) Ly2; (b) 0,320 L^2
	6-34.	$\langle x \rangle = 0$; kx^2l = ħ/2$m\omega$
	6-38.	(a) $(4\, m^3\omega^3/\pi\hbar^3)^{1/4}$; (b) $\langle x \rangle = 0$; (c) $\langle x^2 \rangle = 3\hbar/2m\omega$; (d) $\langle V(x) \rangle = 3\hbar\omega/4$.
	6-42.	(a) $2{,}33 \times 10^{-34}$ J; (b) $2{,}1 \times 10^{-8}$; (c) 0,70 Hz
	6-47.	(a) $4{,}3 \times 10^{-6}$; (b) 4,5 V
	6-51.	(a) $R = 0{,}111$; $T = 0{,}889$; (b) $R = 0{,}111$; $T = 0{,}889$
	6-55.	$\langle E_k \rangle = \hbar^2$y2$mL^2$
	6-59.	(a) $4{,}95 \times 10^{-13}$; (b) 0,197
	6-63.	(a) $v = 0{,}39\, c$; (c) $8{,}03 \times 10^{5}$ eV; (d) $3{,}76 \times 10^{5}$ eV
Capítulo 7	7-1.	$11E_0$, $12E_0$ e $14E_0$; o 1º, 2º, 3º e 5º estados excitados são degenerados.
	7-5.	(b) 1, 1, 4 e 1, 2, 2.
	7-9.	(a) 0, 1, 2; (b) Para $\ell = 0$, $m = 0$; para $\ell = 1$, $m = \pm 1, 0$; para $\ell = 2$, $m = \pm 2, \pm 1, 0$; (c) 18
	7-13.	(a) $2\hbar^2$; (b) $6\hbar^2$; (c) $5\hbar^2$; (d) $n = 3$
	7-17.	(a) $n = 6$, $\ell = 3$; (b) −0,38 eV; (c) $3{,}65 \times 10^{-34}$ J · s; (d) $\pm 3\hbar, \pm 2\hbar, \pm\hbar, 0$.
	7-26.	(a) 0,607 $(1/a_0)\sqrt{32\pi}$ (b) 0,368 $(1/a_0)^3$ (32π); (c) $0{,}368/8a_0$
	7-34.	(a) 4; (b) 3
	7-47.	Sn: 1 $s^2$2$s^2$2$p^6$3s ^{2}3$p^6$3d^{10}4$s^2$4$p^6$4d^{10}5$s^2$5p^2

Nd: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 5s^2 5p^6 4f^4 6s^2$

Yb: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 6s^2$

7-51. (a) Si (silício); (b) Ca (cálcio)

7-55. Semelhante ao H: Li, Rb, Ag e Fr

Semelhante ao He: Ca, Ti, Cd, Ba, Hg e Ra

7-59. Transições permitidas: $D_{5/2} \rightarrow P_{3/2}$, $D_{3/2} \rightarrow P_{3/2}$, $D_{3/2} \rightarrow P_{1/2}$

Transição proibida: $D_{5/2} \cdot P_{1/2}$

7-63. (a) $2{,}90 \times 10^{-6}$ eV; (b) $7{,}83 \times 10^{-4}$ nm; (c) 0,638 T

7-67. (a) $1{,}67 \times 10^{6}$ m/s^2; (b) 1,95 cm

Capítulo 8

8-1. (a) 1930 m/s; (b) $1{,}01 \times 10^4$ K

8-5. (a) 3400 J; (b) Igual. Um mol de qualquer gás tem a mesma energia cinética total de translação à mesma temperatura.

8-13. $C_v = R$; $C_p = 2R$; $\gamma = 2$

8-17. (a) $n_2/n_1 \approx n_3/n_1 \approx 0$; (b) 19.760 K; (c) 0,7%

Capítulo 9

9-1. (a) 1 eV/molécula = 23,06 kcal/mol; (b) 98,5 kcal/mol; (c) 1,08 eV/molécula

9-5. (a) −5,39 eV; (b) 4,83 eV; (c) 0,46 eV

9-9. KBr: 0,19 eV; RbCl: 0,23 eV

9-13. $2{,}63 \times 10^{-29}$ C · m

9-17. (a) 0,67 nm; (b) 55 nm

9-21. $1{,}78 \times 10^{-4}$ eV

9-25. (a) 18,6 u; (b) 0,280 nm

9-30. $0{,}04 \times 10^{-5}$ eV

9-34. $\approx 5{,}5 \times 10^{31}$

9-38. $1{,}28 \times 10^{16}$ s^{21}.

9-42. (a) $8{,}47 \times 10^{-5}$ radianos; (b) $5{,}08 \times 10^{-3}$ W/cm^2

	9-47.	(a) $E_3 = 1{,}44 \times 10^{-3}$ eV; $E_2 = 9{,}61 \times 10^{-4}$ eV; $E_1 = 4{,}79 \times 10^{-4}$ eV; estados vibracionais (espaçamento uniforme); (b) 0,215 nm
	9-51.	480 N/m
	9-55.	(a) 0,31 eV; (b) $A = 8{,}9 \times 10^{-14}$ eV · nm ^{20}; $n = 20$
	9-59.	(a) $4{,}58 \times 10^{-48}$ kg · m ^{2}; (b) $1{,}32 \times 10^{14}$ Hz
Capítulo 10	10-1.	4,64
	10-5.	4,09 eV/átomo
	10-9.	4,18
	10-13.	(a) $5{,}86 \times 10^{-2}$ cm $^{-3}$; (b) $5{,}90 \times 10^{-2}$ cm $^{-3}$
	10-17.	1,87 eV
	10-21.	Na: 34,2 nm; Au: 41,4 nm; Sn: 43,1 nm
	10-25.	$6{,}7 \times 10^{-3}$
	10-29.	(a) 0,37 eV; (b) 4300 K
	10-37.	(a) 27,8 mV; (b) 212,0 mV
	10-41.	^{206}Pb: 7,217 K; ^{207}Pb: 7,200 K; ^{208}Pb: 7,183 K
	10-45.	(a) 0,95; (b) 0,71; (c) 0,32
	10-50.	(c) 0,0055
	10-55.	silício: 3,17 nm; germânio: 8,46 nm
	10-59.	(a) $1{,}28 \times 10^{13}$ Hz; (b) 23,4 mm
Capítulo 11	11-9.	(a) 6,46 MeV/núcleon; (b) 7,47 MeV/núcleon; (c) 8,77 MeV/núcleon
	11-13.	(a) 2,70 fm; 3,53 fm; (b) 4,26 fm; 5,57 fm; (c) 6,34 fm; 8,30 fm
	11-17.	(a) 5,21 h; (b) $3{,}11 \times 10^{6}$ átomos
	11-21.	33,2 min
	11-25.	$A = 191$; $B = 272{,}2$
	11-29.	1,00 MeV

11-33. 93 keV

11-37. 789 MeV/c^2

11-41. ^{36}S, ^{53}Mn, ^{82}Ge, ^{88}Sr, ^{93}Ru, ^{131}In, ^{145}Eu

11-45. $^{30}_{14}\mathrm{Si}, j = 0; {}^{37}_{17}\mathrm{Cl}, j = 3/2; {}^{37}_{27}\mathrm{Co}, j = 7/2; {}^{90}_{40}\mathrm{Zr}, j = 0; {}^{107}_{49}\mathrm{In}, j = 9/2$

11-49. (a) 24,97 MeV; (b) 1,92 MeV

11-53. 224 MeV

11-57. $1{,}78 \times 10^{14}$ átomos/s

11-61. (a) $8{,}78 \times 10^{12}$ J; (b) 145 anos

11-65. $1{,}90 \times 10^{9}$ anos

11-69. (a) 10^{-13}; (b) 0,149 mg; (c) $2{,}15 \times 10^{4}$ anos

11-77. (a) $5{,}06 \times 10^{-6}$ eV; (b) $4{,}71 \times 10^{-2}$ eV; (c) 1,17 cm/s

11-81. (a) ^{141}Ba: $6{,}24 \times 10^{-15}$ m; ^{92}Kr: $5{,}42 \times 10^{-15}$ m; (b) 249 MeV

11-85. $7{,}03 \times 10^{8}$ anos

11-89. (b) 51,7 MeV; (c) 1,43 MeV; (d) 96,5 MeV

11-97. (b) $8{,}66 \times 10^{4}$

11-101. (a) 137%; (b) 0,00498

Capítulo 12

12-1. (b) 139,6 MeV; (c) 8,88 fm

12-5. (a) 1,711 MeV; (b) 78,5 eV; (c) 2,16 MeV/ c

12-9. (a) fraca; (b) eletromagnética; (c) forte; (d) fraca

12-13. $m \geq 22$ eV/c^2

12-17. (a) As leis de conservação da energia e do número leptônico são violadas. (b) A lei de conservação da energia é violada. (c) A lei de conservação do momento linear é violada. (d) Nenhuma lei de conservação é violada. (e) A lei de conservação do número leptônico é violada. (f) A lei de conservação do número bariônico é violada.

12-22. (a) A lei de conservação do número leptônico seria violada. (b) Permitido; interação fraca. (c) Permitido; interação fraca. (d) As leis de conservação do

número bariônico e do momento angular são violadas. (e) Permitido; interação fraca.

12-30. *uuu*

12-34. O decaimento violaria a lei de conservação da energia, já que a soma das energias de repouso do próton e do píon negativo, 938,3 1 139,6 = 1077,3 MeV, é maior que a energia de repouso do nêutron, 939,6 MeV.

12-38. (a) $\bar{c}d$; (b) $\bar{c}d$

12-42. (a) A lei de conservação da energia. (b) A lei de conservação do momento angular. (c) A lei de conservação do momento angular.

12-46. (a) Os produtos finais são todos estáveis. (d) Não, porque a energia de repouso dos produtos seria maior que a energia de repouso da partícula Ξ^0.

12-51. (a) Nenhuma lei de conservação é violada. (b) As leis de conservação da energia e do número bariônico são violadas. (c) Nenhuma lei de conservação é violada.

12-55. (a) 1193 MeV; (b) 77 MeV/ c; (c) 2,66 MeV; (d) 74,3 MeV/ c e 74,3 MeV

Capítulo 13

13-1. 25,3 dias

13-5. 16,9 eV/ c^2

13-9. 17,0 pc

13-13. (a) 9400 anos; (b) $R_{\text{estrela}} = 1{,}96\ R_{(}$, usando a Equação 13-4.

13-17. (a) $3{,}40 \times 10^{9}$ anos-luz; (b) 10%

13-22. Massa específica do universo no instante $t = t_{\text{P}}$: $5{,}5 \times 10^{97}$ kg/m^3; massa específica do próton: $1{,}67 \times 10^{18}$ km/m^3; massa específica do ósmio: $2{,}45 \times 10^{4}$ kg/m^3

13-31. $8{,}33 \times 10^{56}$ núcleos de hidrogênio; $8{,}89 \times 10^{44}$ J; $1{,}7 \times 10^{10}$ anos

13-35. Aproximadamente 0,001 “novos” átomos de hidrogênio por metro cúbico e por milhão de anos; não.

13-39. (b) $1{,}1 \times 10^{-12}$ cm^3; (c) $\approx 0{,}001 M_{\odot}$

Alfabeto Grego

Alfa	A	α
Beta	B	β
Gama	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Épsilon	E	ϵ
Zeta	Z	ζ
Eta	H	χ
Teta	Θ	θ
Iota	I	$\imath$
Capa	K	κ
Lambda	Λ	λ
Mi	M	μ
Ni	N	ν
Csi	Ξ	ξ
Ômicron	O	o
Pi	Π	π
Rô	P	ρ
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ

Ípsilon	Υ	υ
Fi	Φ	ϕ
Qui	Χ	χ
Psi	Ψ	ψ
Ômega	Ω	ω

Prefixos das Potências de 10

Múltiplo	Prefixo	Abreviação
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	quilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	m
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

Símbolos Matemáticos

$=$	igual a
$\neq$	diferente de
$\approx$	aproximadamente igual a
$\eqsim$	da mesma ordem que
$\propto$	proporcional a
$>$	maior que
$	maior que ou igual a
$\gg$	muito maior que
$<$	menor que
#	menor que ou igual a
$\ll$	muito menor que
Δx	variação de x
$\lvert x \rvert$	valor absoluto de x
$n!$	$n(n-1)(n-2)\ldots 1$
Σ	somatório
lim	limite
$\Delta x \to 0$	Δt tende a zero
$\frac{dx}{dt}$	derivada de x em relação a t
$\frac{\partial x}{\partial t}$	derivada parcial de x em relação a t
$\int$	integral

Abreviações de Unidades

A	ampère
Å	angstrom (10^{-10} m)
atm	atmosfera

Btu	British thermal unit
Bq	becquerel
C	coulomb
°C	grau Celsius
cal	caloria
Ci	curie
cm	centímetro
eV	elétron-volt
°F	grau Fahrenheit
fm	femtômetro, fermi
G	gauss
Gy	gray
g	grama
H	henry
h	hora
Hz	hertz
J	joule
K	kelvin
kg	quilograma
km	quilômetro
keV	quiloelétron-volt
L	litro
m	metro
MeV	megaelétron-volt
mim	minuto

mm	milímetro
ms β^-	milissegundo
N	newton
nm	nanômetro
rev	revolução
R	roentgen
Sv	seivert
s	segundo
T	tesla
u	unidade unificada de massa
V	volt
W	watt
Wb	weber
µm	micrômetro
µs	microssegundo
µC	microcoulomb
Ω	ohm

Algumas Combinações Úteis

hc · 1,9864 · 10^{-25} J · m · 1239,8 eV · nm
$\hbar c$ = 3,1615 × 10^{-26} J · m = 197,33 eV · nm
Raio de Bohr $a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ = 5,2918 × 10^{-11} m
ke^2 · 1,440 eV · nm
Constante de estrutura fina $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = 0{,}0072974 \approx \frac{1}{137}$
kT · 2,5249 · 10^{-2} eV $\approx \frac{1}{40}$eV para T = 293 K

Algumas Constantes F'sicas

(Veja o Apêndice D para uma lista completa das constantes

Número de Avogadro	N_A	6,022142 × 10^{23} partículas/mol
Constante de Boltzmann	k	1,380650 × 10^{-23} J/K

fundamentais.)

Magnéton de Bohr	$m_B = e\hbar/2m_e$	$9{,}2740095 \times 10^{-24}$ J/T
Constante de Coulomb	$k = 1/4\pi\varepsilon_0$	$8{,}987551788 \times 10^{9}$ N · m^2/C^2
Comprimento de onda de Compton	$\lambda_c = h/m_e c$	$2{,}42631024 \times 10^{-12}$ m
Carga elementar	e	$1{,}602176 \times 10^{-19}$ C
Constante dos gases perfeitos	$R = N_A k$	8,31447 J/mol · K = 1,987 22 cal/mol · K $= 8{,}20578 \times 10^{-2}$ L · atm/mol · K
Constante gravitacional	G	$6{,}6742 \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Massa do elétron	m_e	$9{,}109382 \times 10^{-31}$ kg $= 510{,}9989$ keV/c^2
Massa do próton	m_p	$1{,}672622 \times 10^{-27}$ kg $= 938{,}2722$ MeV/c^2
Massa do nêutron	m_n	$1{,}674927 \times 10^{-27}$ kg $= 939{,}5653$ MeV/ c^2
Constante magnética	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2
Constante de Planck	h	$6{,}626069 \times 10^{-34}$ J · s $= 4{,}135667 \times 10^{-15}$ eV · s
Constante de Planck normalizada	$\hbar$	$1{,}054572 \times 10^{-34}$ J · s $= 6{,}582119 \times 10^{-16}$ eV · s
Velocidade da luz	c	$2{,}99792458 \times 10^{8}$ m/s
Unidade unificada de massa	u	$1{,}660539 \times 10^{-27}$ kg $= 931{,}49401$ MeV/c^2

Alguns Fatores de Conversão

1 ano = $3{,}156 \times 10^7$ s

1 ano-luz = $9{,}461 \times 10^{15}$ m

1 T = 10^4 G

1 Ci = $3{,}7 \times 10^{10}$ Bq

1 cal = 4,186 J	1 barn = 10^{-28} m^2
1 MeV/c = 5,344 × 10^{-22} kg · m/s	1 u = 1,66054 × 10^{-27} kg
1 eV = 1,6022 × 10^{-19} J	1 parsec = 3,26 anos-luz
1 kW · h = 3,6 MJ	1 rad = 57,30°

Massas e Energias de Repouso de Algumas Part'culas

	kg	MeV/c^2	u
Elétron	9,1094 × 10^{-31}	0,51100	5,4858 × 10^{-4}
Múon	1,8835 × 10^{-28}	105,66	0,11343
Próton	1,6726 × 10^{-27}	938,27	1,00728
Nêutron	1,6749 × 10^{-27}	939,57	1,00866
Dêuteron	3,3436 × 10^{-27}	1875,61	2,01355
Partícula α	6,6447 × 10^{-27}	3727,38	4,00151
W	1,43 × 10^{-25}	80 × 10^3	85,9
Z°	1,63 × 10^{-25}	91,2 × 10^3	97,9
Bóson de Higgs	2,24 × 10^{-25}	125,3 × 10^3	134,5

Tabela Periódica

1																	18
1 **H** Hidrogênio 1,007 94(7)	2											13	14	15	16	17	2 **He** Hélio 4,002 602(2)
3 **Li** Lítio 6,941(2)	4 **Be** Berílio 9,012 182(3)											5 **B** Boro 10,811(7)	6 **C** Carbono 12,0107(8)	7 **N** Nitrogênio 14,0067(2)	8 **O** Oxigênio 15,9994(3)	9 **F** Flúor 18,998 4032(5)	10 **Ne** Neônio 20,1797(6)
11 **Na** Sódio 22,989 769 28(2)	12 **Mg** Magnésio 24,3050(6)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 **Al** Alumínio 26,981 538 6(8)	14 **Si** Silício 28,0855(3)	15 **P** Fósforo 30,973 762(2)	16 **S** Enxofre 32,065(5)	17 **Cl** Cloro 35,453(2)	18 **Ar** Argônio 39,948(1)
19 **K** Potássio 39,0983(1)	20 **Ca** Cálcio 40,078(4)	21 **Sc** Escândio 44,955 912 (6)	22 **Ti** Titânio 47,867(1)	23 **V** Vanádio 50,9415(1)	24 **Cr** Cromo 51,9961(6)	25 **Mn** Manganês 54,938 045(5)	26 **Fe** Ferro 55,845(2)	27 **Co** Cobalto 58,933 195(5)	28 **Ni** Níquel 58,6934(2)	29 **Cu** Cobre 63,546(3)	30 **Zn** Zinco 65,409(4)	31 **Ga** Gálio 69,723(1)	32 **Ge** Germânio 72,64(1)	33 **As** Arsênio 74,921 60(2)	34 **Se** Selênio 78,96(3)	35 **Br** Bromo 79,904(1)	36 **Kr** Criptônio 83,798(2)
37 **Rb** Rubídio 85,4678(3)	38 **Sr** Estrôncio 87,62(1)	39 **Y** Ítrio 88,905 85(2)	40 **Zr** Zircônio 91,224(2)	41 **Nb** Nióbio 92,906 38 (2)	42 **Mo** Molibdênio 95,94(2)	43 **Tc** Tecnécio [97,9072]	44 **Ru** Rutênio 101,07(2)	45 **Rh** Ródio 102,905 50(2)	46 **Pd** Paládio 106,42(1)	47 **Ag** Prata 107,8682(2)	48 **Cd** Cádmio 112,411(8)	49 **In** Índio 114,818(3)	50 **Sn** Estanho 118,710(7)	51 **Sb** Antimônio 121,760(1)	52 **Te** Telúrio 127,60(3)	53 **I** Iodo 126,904 47(3)	54 **Xe** Xenônio 131,293(6)
55 **Cs** Césio 132,905 451 9 (2)	56 **Ba** Bário 137,327(7)	57-71 Lantanídeos	72 **Hf** Háfnio 178,49(2)	73 **Ta** Tântalo 180,947 88(2)	74 **W** Tungstênio 183,84(1)	75 **Re** Rênio 186,207(1)	76 **Os** Ósmio 190,23(3)	77 **Ir** Irídio 192,217(3)	78 **Pt** Platina 195,084(9)	79 **Au** Ouro 196,966 569(4)	80 **Hg** Mercúrio 200,59(2)	81 **Tl** Tálio 204,3833(2)	82 **Pb** Chumbo 207,2(1)	83 **Bi** Bismuto 208,980 40(1)	84 **Po** Polônio [208,9824]	85 **At** Astatínio [209,9871]	86 **Rn** Radônio [222,0176]
87 **Fr** Frâncio [223]	88 **Ra** Rádio [226]	89-103 Actinídeos	104 **Rf** Rutherfórdio [261]	105 **Db** Dúbnio [262]	106 **Sg** Seabórgio [266]	107 **Bh** Bóhrio [264]	108 **Hs** Hássio [277]	109 **Mt** Meitnério [268]	110 **Ds** Darmstádio [271]	111 **Rg** Roentgênio [272]	112 **Cn** Copernício [277]	113 **Uut** Unúntrio [284]	114 **Fl** Fleróvio [289]	115 **Uup** Unumpêntio [288]	116 **Lv** Livermório [292]	117 **Uus** Ununséptio [294]	118 **Uuo** Ununóctio [294]

57 **La** Lantânio 138,905 47(7)	58 **Ce** Cério 140,116(1)	59 **Pr** Praseodímio 140,907 65(2)	60 **Nd** Neodímio 144,242(3)	61 **Pm** Promécio [145]	62 **Sm** Samário 150,36(2)	63 **Eu** Európio 151,964(1)	64 **Gd** Gadolínio 157,25(3)	65 **Tb** Térbio 158,925 35(2)	66 **Dy** Disprósio 162,500(1)	67 **Ho** Hólmio 164,930 32(2)	68 **Er** Érbio 167,259(3)	69 **Tm** Túlio 168,934 21(2)	70 **Yb** Itérbio 173,04(3)	71 **Lu** Lutécio 174,967(1)
89 **Ac** Actínio [227]	90 **Th** Tório 232,038 06(2)	91 **Pa** Protactínio 231,035 88(2)	92 **U** Urânio 238,028 91(3)	93 **Np** Netúnio [237]	94 **Pu** Plutônio [244]	95 **Am** Amerício [243]	96 **Cm** Cúrio [247]	97 **Bk** Berquélio [247]	98 **Cf** Califórnio [251]	99 **Es** Einstênio [252]	100 **Fm** Férmio [257]	101 **Md** Mendelévio [258]	102 **No** Nobélio [259]	103 **Lr** Laurêncio [262]

Nota

Os nomes dos elementos 113, 115, 117 e 118 são temporários e foram escolhidos, usando palavras do latim, para designar, literalmente, um um três, um um cinco, etc.